

Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, С.Г. Юдников, И.В. Половец,
А.А. Юлина, Б.Б. Лампси, П.А. Хазов

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1. Статически определимые системы

Учебное пособие

Нижний Новгород
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Кафедра теории сооружений и технической механики

Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, С.Г. Юдников, И.В. Половец,
А.А. Юлина, Б.Б. Лампси, П.А. Хазов

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть I. Статически определимые системы

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2015

ББК38.112

С 23

Рецензенты:

Волков И.А. – доктор технических наук, профессор (ВГУВТ)

Истомин С.Н. – технический директор МП «Институт развития города «НижегородгражданНИИпроект»»

Б.Б. Лампси. Сборник задач и упражнений по строительной механике. Часть I. Статически определимые системы [Текст]: учебное пособие для вузов/

Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, С.Г. Юдников, И.В. Половец, А.А. Юлина, Б.Б. Лампси, П.А. Хазов; Нижегород. гос. архит.-строит.ун-т- Нижний Новгород: ННГАСУ, 2015. - 132с. ISBN 5 - 87941-254-7

В учебном пособии изложены основные методы и примеры расчета плоских статически определимых стержневых систем при неподвижных и подвижных нагрузках. Примеры расчета рамных систем, балок, ферм, арок сопровождаются решениями и необходимыми пояснениями. Пособие включает многочисленные примеры и задачи для самостоятельного решения.

ББК38.112

ISBN 5 - 87941-254-7

© Коллектив авторов,

©ННГАСУ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Кинематический анализ плоских стержневых систем.....	6
1.1 О расчетных схемах.....	6
1.2 Классификация плоских стержневых систем.....	6
1.3 Понятие числа степеней свободы системы и виды связей.....	9
1.4 Необходимые условия геометрической неизменяемости шарнирно-стержневых систем.....	13
1.5 Способы образования геометрически неизменяемых систем.....	14
2 ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ РАМЫ.....	18
2.1 Аналитический расчет рам.....	18
2.2 Графическое (эскизное) построение эпюр изгибающих моментов.....	38
3 Многопролётные статически определимые балки.....	41
3.1 Образование многопролетных статически определимых балок.....	41
3.2 Аналитический расчет многопролетных статически определимых балок на неподвижную нагрузку.....	43
3.3 Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий в сечениях многопролетных статически определимых балок.....	50
3.4 Определение изучаемой величины по линиям влияния.....	52
3.5 Применение матриц влияния к расчету многопролетных статически определимых балок.....	57
4 ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ.....	61
4.1 Способы расчета ферм.....	61
4.1.1 Способ вырезания узлов.....	61

4.1.2	Способ простых сечений	64
4.1.3	Способ замкнутых сечений	72
4.2	Шпренгельные фермы	76
4.3	Определение знаков усилий в стержнях ферм	77
4.4	Линии влияния усилий в стержнях ферм	78
4.5	Пример расчета статически определимой шпренгельной фермы	96
5	ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ	106
5.1	Расчет на неподвижную нагрузку	107
5.1.1	Определение опорных реакций	107
5.1.2	Определение изгибающих моментов	108
4.1.1	Определение поперечных сил	108
4.1.2	Определение продольных сил	109
6	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ.....	115
6.1	Определение перемещений от заданной нагрузки.....	115
6.2	Вычисление интеграла Мора-Максвелла	116
6.2.1	Правило А.Н. Верещагина.....	116
6.2.2	Формула Симпсона.....	119
6.3	Определение перемещений от изменения температурного режима	123
6.4	Определение перемещений от кинематических воздействий.....	124
	Список литературы.....	130

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика – это наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Реальные сооружения представляют собой сложные инженерные системы, состоящие из совокупности колонн, балок, плит, ферм и арок. Их точный расчет с учетом строгого взаимодействия отдельных элементов между собой теоретически недоступен или практически сложен. В связи с этим в строительной механике рассматриваются расчетные схемы, представляющие собой упрощенную математическую модель реальных сооружений, учитывающие основные их свойства.

Из всего многообразия расчетных схем, классифицируемых как стержневые системы, плиты, оболочки, массивы, в пособии представлены только плоские геометрически неизменяемые и статически определимые стержневые системы. К ним относятся широко используемые в практике строительства фермы, арки, балки и рамы.

Прочность, жесткость и устойчивость стержневых систем зависят от усилий, возникающих в сечениях при различных воздействиях. В связи с этим, основная задача состоит в определении усилий, основными из которых являются изгибающий и крутящий моменты, поперечная и продольная силы. Вычисление усилий выполняются статическими, кинематическими, матричными методами и способом замены связей. К статическим методам, основанным на уравнениях равновесия статики, относятся: способ вырезания узлов, способ простых и совместных сечений. Уравнения равновесия, включающие в себя силы и неизвестные усилия, составляются для любой из отсеченных частей расчетной схемы, находящейся в равновесии. Кинематические методы основаны на принципе возможных перемещений Лагранжа. Матричные способы используют методы линейной алгебры с применением теории матриц.

1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1 О расчетных схемах

Реальные сооружения представляют собой достаточно сложные системы, которые обладают различными свойствами. Все эти свойства в практических расчетах учесть не представляется возможным, поэтому вместо реальных сооружений рассматривают их расчетные схемы.

Расчетная схема - это упрощенная модель реального сооружения, учитывающая основные его свойства и удобная для выполнения расчетов.

Расчетные схемы разделяются на плоские и пространственные. Плоские стержневые системы - это такие, в которых оси всех стержней лежат в плоскости, совпадающей с силовой плоскостью. Все остальные стержневые системы - пространственные.

Все расчетные схемы или системы можно классифицировать по их геометрическим признакам:

- а) стержневые;
- б) пластины, плиты, оболочки;
- в) массивы, блоки, сплошные среды.

1.2 Классификация плоских стержневых систем

Стержневые системы можно классифицировать следующим образом:

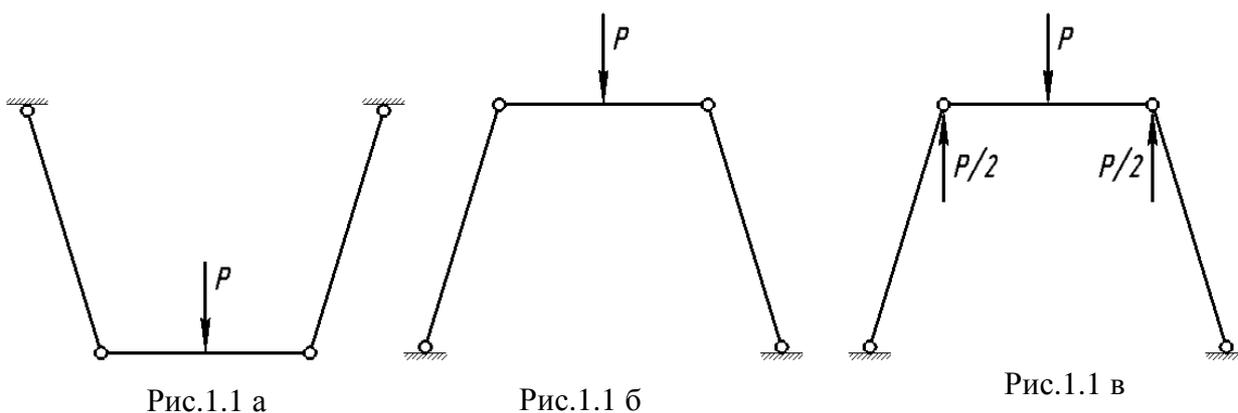
I. По кинематическому признаку все системы разделяются на:

1) геометрически неизменяемые - системы, в которых допускаемые перемещения стержней связаны только с их деформациями. Неизменяемые системы должны сохранять свою первоначальную форму и способны воспринимать любые нагрузки вплоть до наступления разрушения материала системы.

2) геометрически изменяемые - системы, допускающие конечные относительные перемещения своих точек без учета деформаций стержней. Любая изменяемая система обладает подвижностью своих звеньев, поэтому в зависимости от нагрузки она может находиться в состоянии устойчивого равновесия (рис. 1.1а), неустойчивого равновесия (рис. 1.1 б) и безразличного состояния равновесия (рис. 1.1 в).

Если изменяемая система при данной конфигурации не может внутренними

усилиями обеспечить равновесие действующей нагрузке, то она будет приспосабливаться к ней, т.е. совершать движение до тех пор, пока не получит той формы, при которой становится возможным устойчивое равновесие (рис. 1.2). При этом, как правило, система будет получать большие перемещения и займет устойчивую форму равновесия, если не будет нарушена ее прочность. Следовательно, изменяемая система может воспринимать и уравнивать внутренними усилиями только нагрузки частных видов, соответствующих ее устойчивой форме равновесия.



3) мгновенно-изменяемые - системы, допускающие малые относительные перемещения своих точек без учета деформаций стержней, после чего такие системы становятся неизменяемыми. Такие системы могут воспринимать нагрузки частных видов, поскольку в общем случае действия нагрузок в них будут развиваться значительные по величине усилия, которые приведут к большим конечным деформациям (рис. 1.3).

Мгновенно-изменяемые и изменяемые системы не пригодны для формирования расчетных схем сооружений.

II. По характеру сопряжения стержней в узлах:

1) шарнирно-стержневые системы или фермы, которые образуются из прямолинейных стержней, соединенных в узлах полными, идеальными шарнирами (рис. 1.4 а);

2) системы с жестким соединением стержней в узлах (рис.1.4 б);

3) комбинированные системы (рис. 1.4 в).

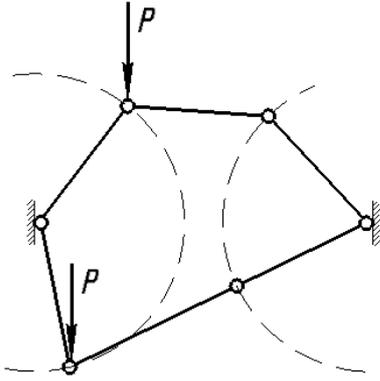


Рис.1.2

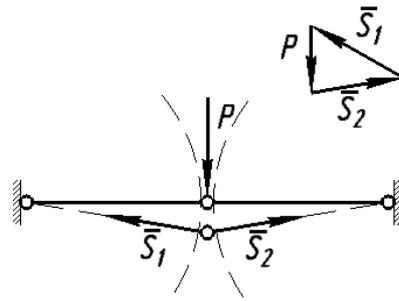


Рис.1.3

III. По направлению опорных реакций при действии вертикальной нагрузки:

1) балочные (безраспорные) - это такие системы, в которых возникают только вертикальные составляющие опорных реакций (рис. 1.5 а);

2) распорные системы - это арочные (рис. 1.5 б) и висячие (рис. 1.5 в).

Горизонтальная составляющая опорной реакции -Н- называется распором.

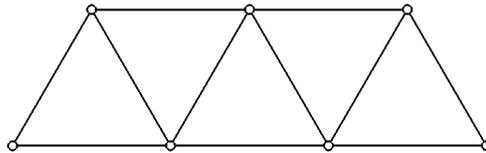


Рис.1.4 а

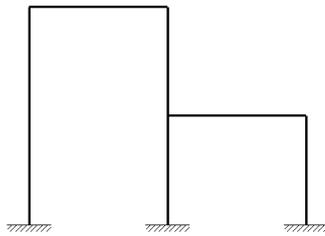


Рис.1.4 б

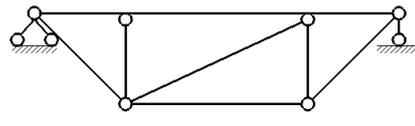


Рис.1.4 в

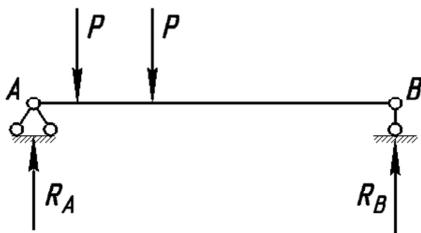


Рис.1.5 а

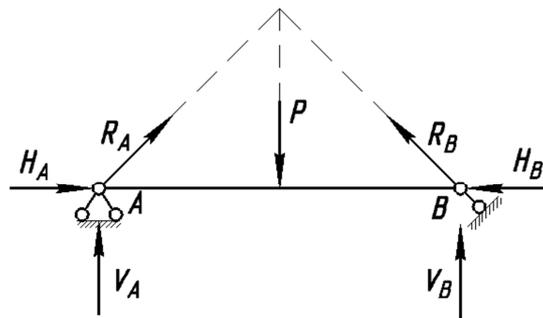


Рис.1.5 б

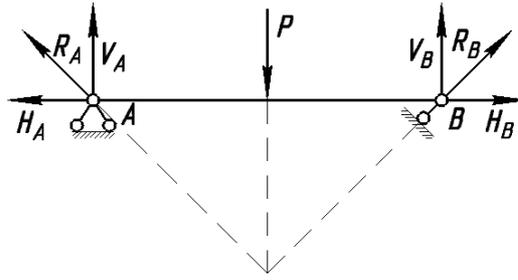


Рис.1.5 в

Арочные - это такие системы, в которых при действии вертикальной нагрузки, кроме вертикальных составляющих опорных реакций, возникают горизонтальные составляющие, направленные вовнутрь системы.

Висячие - это такие системы, в которых при действии вертикальной нагрузки, кроме вертикальных составляющих опорных реакций, возникают горизонтальные составляющие, направленные от системы.

1.3 Понятие числа степеней свободы системы и виды связей

Любая стержневая система, находящаяся под внешним воздействием, должна сохранять свою первоначальную форму, т.е. не должна обладать подвижностью своих звеньев, или не иметь степени свободы.

Степень свободы - это наименьшее число независимых геометрических параметров, определяющих положение системы при любом ее движении.

Известно, что точка на плоскости имеет две степени свободы, а тело на плоскости - три степени свободы.

Перемещению тел на плоскости и в пространстве препятствуют связи.

Всякое ограничение, уничтожающее одну степень свободы, называется кинематической связью.

Различают три вида связей плоских систем:

1. Связь первого вида - стержень с шарнирами по концам. Эта связь препятствует перемещению одного диска относительно другого по направлению стержня, уничтожает одну степень свободы, допускает линейное перемещение вдоль оси, перпендикулярной стержню, и поворот относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Статическая характеристика: в связи может возникать реакция, направленная вдоль стержня (рис. 1.6 а).

2. Связь второго вида - шарнир с неподвижной геометрической осью, вокруг которого диск может вращаться. Она уничтожает две степени свободы и эквивалентна двум связям, ограничивая любые линейные перемещения. Следовательно, любые две связи эквивалентны шарниру, расположенному в точке их пересечения. Статическая характеристика - в шарнире может возникнуть реакция любого направления, проходящая через его центр. Эту реакцию можно представить в виде двух составляющих - проекций на выбранные два направления (рис. 1.6 б).

3. Связь третьего вида - жесткое закрепление или жесткий узел, которая препятствует относительным линейным и угловым перемещениям. Она уничтожает три степени свободы, эквивалентна трем связям и два диска соединяет в один диск. Статическая характеристика - в этой связи может возникнуть реакция любого направления, проходящая через любую ее точку, и момент относительно этой точки (1.6 в).

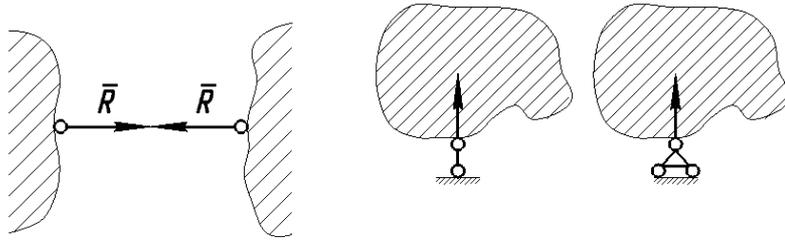


Рис.1.6 а

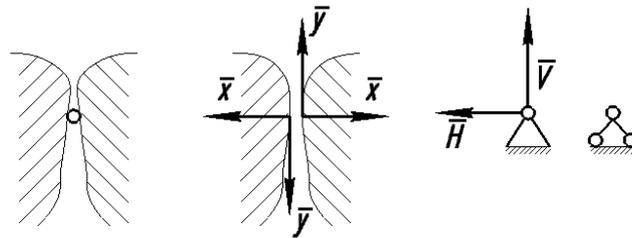


Рис.1.6 б

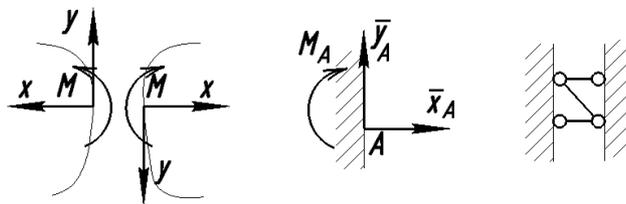


Рис.1.6 в

Таким образом, для неподвижного прикрепления твердого тела на плоскости необходимы три связи, они не должны быть параллельными и не должны пересекаться в одной точке (в этом случае образуется фиктивный шарнир). В случае невыполнения этих условий система будет являться мгновенно-изменяемой (рис. 1.7).

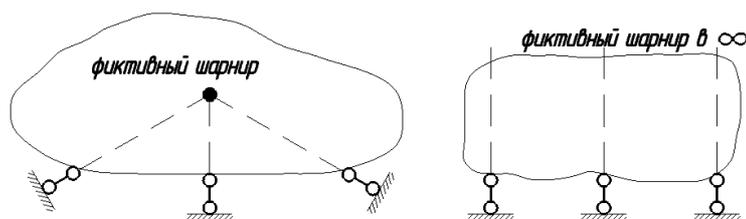


Рис.1.7

Расчетные схемы многих сооружений представляют собой системы, состоящие из отдельных твердых тел (дисков), соединенных между собой шарнирами, а с основанием - опорными связями.

Степень свободы такого сооружения можно выразить:

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (1.1)$$

где D - число дисков, $Ш$ - число простых шарниров, C_0 - число опорных связей.

В этом выражении под дисками можно понимать: отдельные стержни, геометрически неизменяемые части системы.

Шарнир будет называться простым, если он соединяет два стержня, и сложным или кратным, если он соединяет больше двух стержней. Сложный шарнир эквивалентен $(n-1)$ простому шарниру, где n - число стержней, соединяемых шарниром.

Например, число степеней свободы системы, изображенной на рис. 1.8, равно 0, так как в ней 5 дисков, 4 шарнира и 7 опорных связей:

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0$$

Если рассматривать узлы "У" шарнирно-стержневых систем как некоторые точки на плоскости, каждая из которых обладает двумя степенями свободы, а стержни $(C + C_0)$ как некоторые связи, каждая из которых отнимает одну степень свободы, то для таких систем, не содержащих жестких узлов, степень свободы можно представить в виде:

$$W = 3У - 2C - C_0, \quad (1.2)$$

где $У$ - количество полых шарнирных узлов, C - количество стержней, C_0 - число опорных связей.

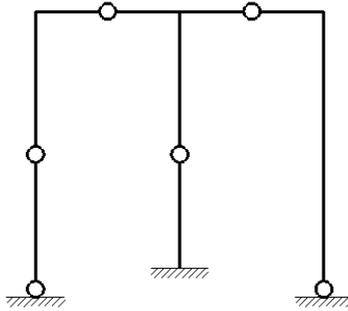


Рис.1.8

Пример 1.3.1 Определить степень свободы стержневых и шарнирно-стержневых систем (рис. 1.9 а, б, в).

Решение:

а) многопролетная статически определимая балка, для которой $D = 3$, $\text{Ш} = 2$, $C_0 = 5$.

Степень свободы:

$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$, балка содержит необходимое количество стержней;

б) для рамы $D = 3$, $C_0 = 6$. Шарнир соединяет три диска, поэтому он является кратным и эквивалентным двум простым шарнирам: $\text{Ш} = 3 - 1 = 2$. Степень свободы рамы $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 6 = -1$, т.е. она содержит одну лишнюю связь;

в) шарнирно-стержневая система: $U = 4$, $C = 4$, $C_0 = 3$. Степень свободы $W = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1$. Система представляет собой механизм с одной степенью свободы.

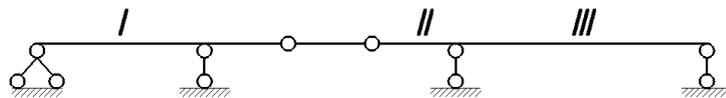


Рис.1.9 а

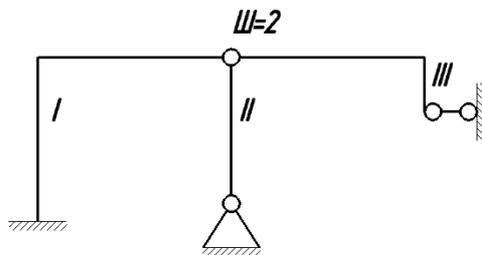


Рис.1.9 б

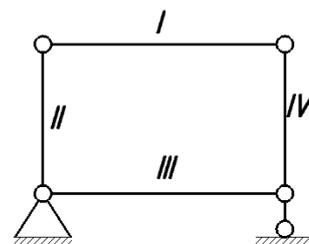


Рис.1.9 в

1.4 Необходимые условия геометрической неизменяемости шарнирно-стержневых систем

Необходимым условием геометрической неизменяемости шарнирно-стержневых систем будет равенство нулю числа степеней свободы.

Поэтому, для прикрепленных систем

$$2Y - C - C_0 = 0 \text{ или } C + C_0 = 2Y; \quad (1.3)$$

для неприкрепленных систем

$$C_0 = 0, \quad 2Y - C - 3 = 0 \text{ или } C = 2Y - 3 \quad (1.4)$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Пусть $C + C_0 > 2Y$, тогда система будет иметь избыточные стержни и может быть геометрически неизменяемой при условии правильного расположения стержней.

2. Пусть $C + C_0 = 2Y$, система будет иметь достаточное количество стержней и может быть геометрически неизменяемой при условии правильного расположения стержней.

3. Пусть $C + C_0 < 2Y$, в этом случае система будет геометрически изменяемой ввиду недостатка стержней.

Пример 1.4.1 Определить необходимые условия геометрической неизменяемости шарнирно-стержневых систем (рис. 1.10 а, б, в).

Решение:

а)прикрепленная ферма, для которой $C = 11$, $C_0 = 3$, $Y = 7$, следовательно, в соответствии с (1.3) $11 + 3 = 2 \cdot 7$, и потому система является геометрически неизменяемой;

б)неприкрепленная ферма, для которой $C = 11$, $Y = 6$, следовательно, в соответствии с (1.4) $11 > 2 \cdot 6 - 3$, и потому система содержит избыточные стержни и является геометрически неизменяемой;

в)прикрепленная шарнирно-стержневая система, для которой $C = 8$, $C_0 = 3$, $Y = 6$, следовательно, в соответствии с (1.3) $8 + 3 < 2 \cdot 6$, и потому система является механизмом с одной степенью свободы.

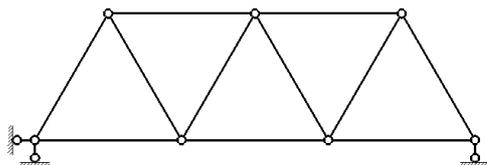


Рис.1.10 а

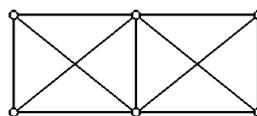


Рис.1.10 б

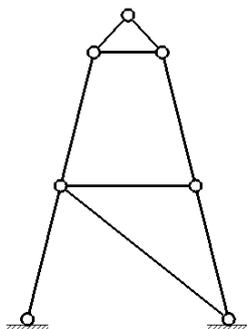


Рис.1.10 в

1.5 Способы образования геометрически неизменяемых систем

Полученное условие $W = 0$ является лишь необходимым условием геометрической неизменяемости систем, но недостаточным, поскольку оно может выполняться, а система при этом будет изменяемой (рис. 1.11).

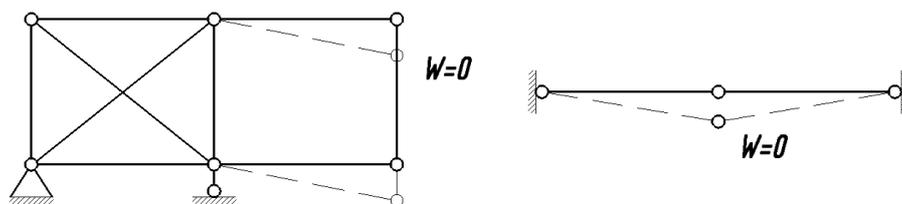


Рис.1.11

Поэтому, в дополнение к условию $W = 0$ необходимо соблюдать способы правильного образования геометрически неизменяемых систем.

Рассмотрим основные способы образования геометрически неизменяемых систем, составленных из двух, трех и более дисков.

1. Способ диадного образования.

Диада - это двухстержневой узел, стержни которого не лежат на одной прямой. В этом способе к заведомо неизменяемому диску (исходному стержню) последовательно присоединяются двухстержневые узлы (диады), образуя геометрически неизменяемую систему (рис. 1.12).

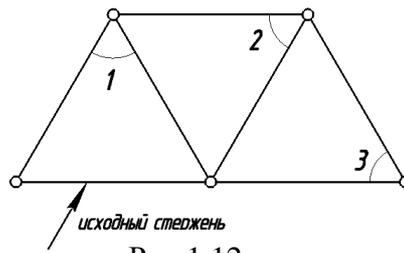


Рис.1.12

2. Способ последовательного соединения дисков. Два диска могут быть соединены:

- а) тремя стержнями, непараллельными и не пересекающимися в одной точке (рис. 1.13 а);
- б) шарниром и стержнем, ось которого не проходит через геометрический центр шарнира (рис. 1.13 б);
- в) жестким узлом.

Последовательное соединение дисков такими видами связей образуют геометрически неизменяемую систему (рис. 1.13 в, г).

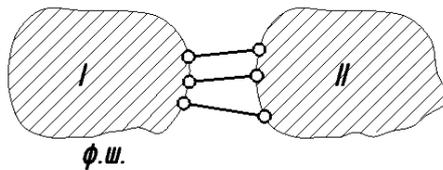


Рис.1.13 а

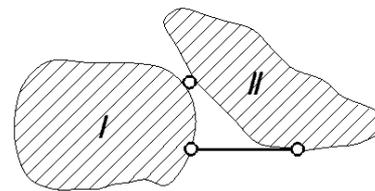


Рис.1.13 б

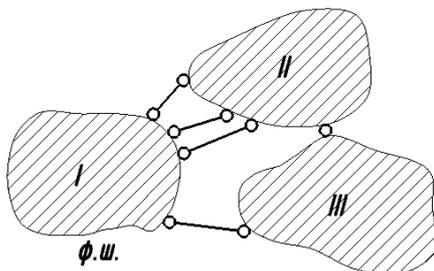


Рис.1.13 в

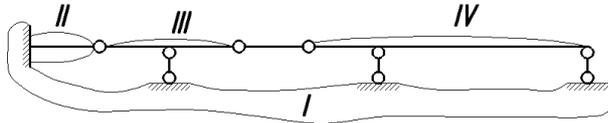


Рис.1.13 г

2. Способ образования "трехшарнирная арка". В этом способе три диска (I, II, III) соединяются между собой тремя шарнирами (Ш1, Ш2, Ш3), не лежащими на одной прямой (рис. 1.14).

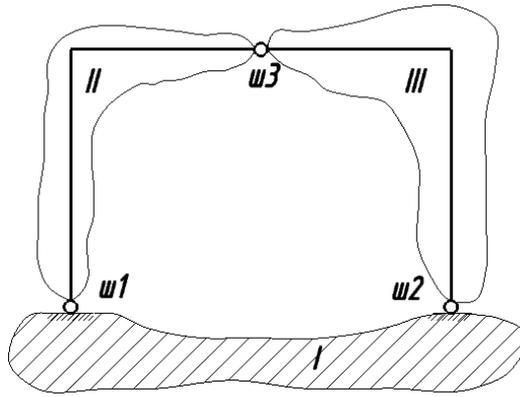


Рис.1.14

Пример1.5.1 Выполнить кинематический анализ шарнирно-стержневых систем (рис. 1.15 а, б, в).

Решение:

а) неприкрепленная ферма, для которой $C = 9$, $У = 6$, $9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$, является геометрически неизменяемой, поскольку внутренний - I и внешний - II диски соединены тремя стержнями;

б) прикрепленная ферма, где $C = 9$, $У = 6$, $C_0 = 3$, $9 + 3 = 2 \cdot 6$, является геометрически неизменяемой, так как диски I и II соединены тремя стержнями;

в) неприкрепленная шарнирно-стержневая система, где $C = 29$, $У = 16$, $29 = 2 \cdot 16 - 3$, является мгновенно-изменяемой, поскольку три стержня, соединяющие два диска I и II, пересекаются в одной точке.

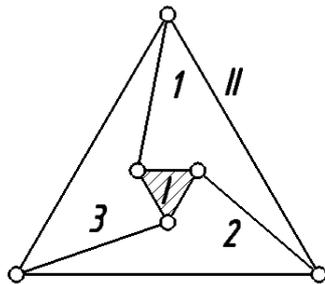


Рис.1.15 а

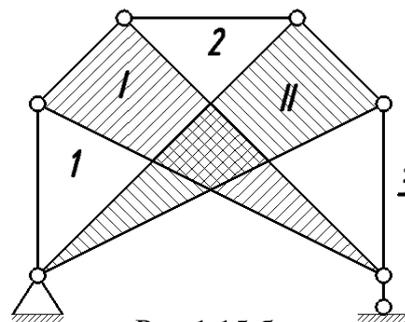


Рис.1.15 б

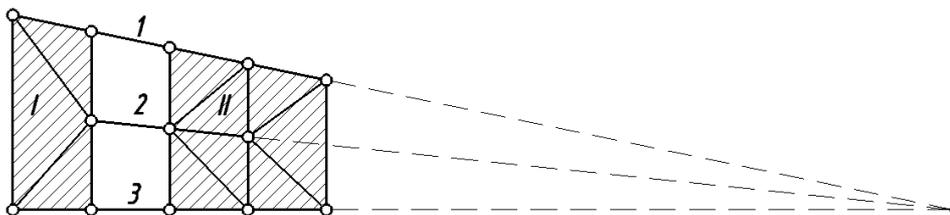


Рис.1.15 в

Пример 1.5.2 Выполнить кинематический анализ стержневых систем (рис. 1.16 а, б, в).

Решение:

а) неподкрепленная шарнирно-стержневая система, где $C = 11$, $U = 7$, $11 = 2 \cdot 7 - 3$, является геометрически неизменяемой. Образована способом трех-шарнирной арки, то есть тремя дисками I, II, III, соединенными одним реальным (1, 2) и двумя фиктивными (2, 3; 1,3) шарнирами, не лежащими на одной прямой;

б) прикрепленная шарнирно-стержневая система, где $C = 6$, $U = 5$, $C_0 = 4$, $6 + 4 = 2 \cdot 5$, является мгновенно геометрически изменяемой, поскольку три шарнира (1,3; 1,2; 2, 3), соединяющие три диска I, II, III, лежат на одной прямой;

в) прикрепленная комбинированная система, где $D = 2$, $Ш = 1$, $C_0 = 4$, $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$, является мгновенно геометрически изменяемой, так как один реальный (1, 2) и два фиктивных шарнира (1, 3; 2, 3), соединяющие три диска I, II, III, лежат на одной прямой.

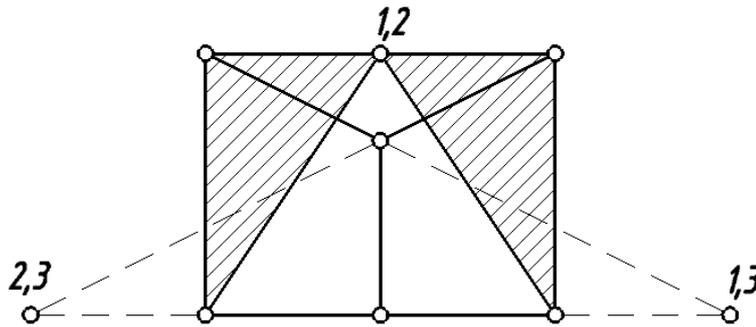


Рис.1.16 а

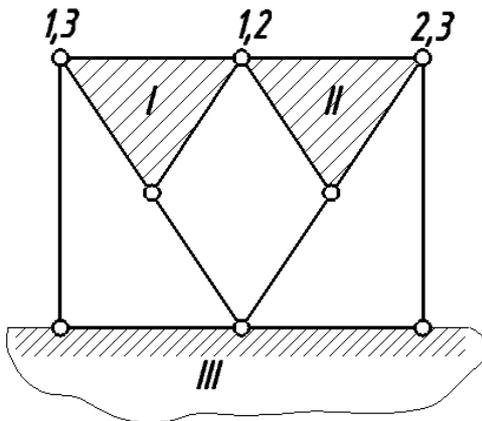


Рис.1.16 б

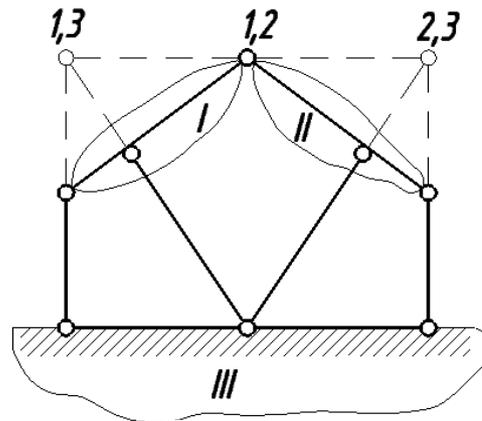


Рис.1.16 в

2 ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ РАМЫ

Рамы - это системы, состоящие из прямолинейных или криволинейных стержней, жестко или шарнирно связанных между собой по концам. Вертикальные и наклонные элементы рам называются стойками, горизонтальные и близкие к ним - ригелями. Рамы бывают несочлененными, то есть состоящими из одного диска, неподвижно закрепленного на плоскости, и сочлененными, состоящими из двух или нескольких дисков, соединенных между собой шарнирами. В зависимости от способов образования и видов опорных закреплений рамы могут быть балочными (безраспорными) или арочными (распорными) системами. Расчет плоских, статически определимых рам выполняется с помощью уравнений равновесия статики и сводится к вычислению изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в сечениях и построению эпюр внутренних усилий.

Эпюрой называется график изменения изучаемой величины в различных сечениях от заданной неподвижной нагрузки.

Вычисление внутренних усилий в сечениях рамы выполняется статическим способом вырезания узлов и простых сечений. В аналитическом решении численные значения усилий определяются для каждого сечения из условий равновесия отсеченных частей рамы. Графическое решение удобно использовать при построении эпюр изгибающих моментов для простейших случаев загрузки. Это позволяет определять общий характер распределения внутренних усилий, сечения с экстремальными и нулевыми изгибающими моментами.

2.1 Аналитический расчет рам

Аналитический расчет статически определимых рам сводится к следующему:

1. Вычисление опорных реакций связей и проверка правильности их определения. Для однодисковых рам, прикрепленных к основанию тремя связями, реакции вычисляются из уравнений равновесия плоской произвольной системы сил в трех формах:

$$\text{а) } \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0, \quad \text{если оси } X \text{ и } Y \text{ непараллельны.}$$

б) $\sum X = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$, если точки А и В не лежат на одном перпендикуляре к оси X;

в) $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$, если точки А, В и С не лежат на одной прямой.

Для сочлененных рам необходимо к этим уравнениям дополнительно составить условия равновесия отдельных частей в виде

$$\sum_{i=1}^{\text{Ш}} M_{\text{ш}}^{\text{одн.с.}} = 0,$$

где Ш-число простых шарниров.

Следовательно, для статически определимой рамы, имеющей Ш простых шарниров, можно составить Ш + 3 уравнения статики для определения опорных реакций.

2. Определение внутренних усилий - изгибающего момента M_p , поперечной силы Q_p и продольной N_p сил в характерных сечениях рамы.

Изгибающим моментом называется сумма статических моментов всех односторонних сил от рассматриваемого сечения относительно центральной оси рассматриваемого сечения перпендикулярной силовой плоскости.

Поперечной силой называется сумма проекций всех односторонних сил от рассматриваемого сечения на ось, перпендикулярную оси стержня и лежащую в силовой плоскости.

Поперечная сила считается положительной, если она вызывает вращение отсеченного элемента по часовой стрелке.

Продольной силой называется сумма проекций всех односторонних сил от рассматриваемого сечения на ось стержня.

Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение отсеченного элемента, и отрицательной, если - сжатие.

На основании этих определений и способа простых сечений вычисление внутренних усилий в сечениях стержней производится из уравнений равновесия статики $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$, составленных для отсеченной части рамы, находящейся в равновесии под действием внешних сил и внутренних усилий.

При рассмотрении равновесия той или иной отсеченной части системы неизвестный изгибающий момент принимается любого направления, а неизвестные поперечная и продольная силы только положительными. Если в результате решения изгибающий момент получился отрицательным, то это значит, что растянуты противоположные волокна в стержне по отношению к первоначально принятому.

При определении усилий в сечениях отсеченной части рекомендуется рассматривать равновесие той системы, на которую действует меньшее число силовых факторов.

3. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. При построении эпюр внутренних усилий по вычисленным в характерных сечениях значениям необходимо иметь в виду следующие особенности:

а) ординаты эпюр откладываются перпендикулярно оси стержня: в эпюре M_p - со стороны растянутого волокна без указания знаков; в эпюре Q_p - с двух сторон от оси стержня; в эпюре N_p - симметрично от оси стержня с указанием знаков;

б) каждый узел рамы должен находиться в равновесии;

в) на прямолинейном незагруженном участке рамы изгибающий момент всегда изменяется по линейному закону, а поперечная и продольная силы постоянны;

г) при действии на элемент равномерно распределенной нагрузки изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, поперечная сила - по линейному закону, а продольная сила постоянна, если действующая нагрузка перпендикулярна оси стержня, и изменяется по линейному закону, если нагрузка не перпендикулярна оси стержня;

д) если на элемент системы действует нагрузка в виде сосредоточенной силы, то в том сечении, где она приложена, на эпюре M_p будем иметь точку излома в сторону приложения силы; на эпюре Q_p скачок на величину этой силы, если она перпендикулярна оси стержня, и на величину проекции этой силы на ось; перпендикулярную оси стержня, если нагрузка не перпендикулярна оси элемента. На эпюре N_p скачок будет только в том случае, если нагрузка не перпендикулярна оси стержня, и его величина будет равна проекции этой силы на ось стержня.

е) если на элемент рамы действует нагрузка в виде сосредоточенного момента, то в том сечении, где он приложен, на эпюре M_p будет скачок на величину этого момента с параллельными ветвями, очерчивающими эпюру; на эпюры Q_p и N_p эта нагрузка влияния не оказывает;

ж) между изгибающим моментом и поперечной силой существует известная зависимость $\frac{dM_p}{dx} = Q_p$, согласно которой, если эпюра M_p на рассматриваемом участке

нисходящая, то Q_p положительна, если эпюра M_p восходящая, то Q_p отрицательна.

Построив эпюры M_p, Q_p и N_p , необходимо выполнить статическую проверку, которая состоит в том, что любая отсеченная часть рамы должна находиться в равновесии и, таким образом, должны выполняться условия равновесия статики.

Пример 2.1.1. От заданной нагрузки определить внутренние усилия в сечениях рамы (рис.2.1) и построить эпюры изгибающих моментов M_p , поперечных Q_p и продольных N_p сил. При определении усилий направление осей проекций принято в соответствии с декартовой системой координат.

Решение:

1. Определяем опорные реакции и их составляющие.

$$\sum M_A = 0; \quad 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 3 - 7 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 16,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \quad 20 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 7 + y_A \cdot 6 = 0; \quad y_A = 5,5 \text{ кН},$$

$$\sum X = 0; \quad 20 - x_A = 0; \quad x_A = 20 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; \quad -10 - 2 \cdot 6 + 16,5 + 5,5 = 0$$

2. Определяем значения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в характерных сечениях рамы, рассматривая равновесие отсеченных частей рамы (рис.2.2).

Сечение А-А

$$\sum M_A = 0; \quad M_A = 0,$$

$$\sum X = 0; \quad -20 + Q_A = 0; \quad Q_A = 20 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \quad 5,5 + N_A = 0; \quad N_A = -5,5 \text{ кН (стержень сжат)}.$$

Сечение 1-1

$$\sum M_1 = 0; \quad M_1 + 20 \cdot 2 = 0, \quad M_1 = -40 \text{ кНм (растянуты правые волокна)},$$

$$\sum X = 0; \quad -20 + Q_1 = 0; \quad Q_1 = 20 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \quad 5,5 + N_1 = 0; \quad N_1 = -5,5 \text{ кН (стержень сжат)}.$$

Сечение 2-2

$$\sum M_2 = 0; \quad M_2 - 20 \cdot 2 = 0, \quad M_2 = 40 \text{ кНм (растянуты правые волокна)},$$

$$\sum X = 0; \quad Q_2 + 20 - 20 = 0; \quad Q_2 = 0,$$

$$\sum Y = 0; N_2 + 5,5 = 0, N_2 = -5,5 \text{кН (стержень сжат).}$$

Сечение 3-3

$$\sum M_3 = 0; \quad M_3 + 20 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = 0, M_3 = 40 \text{кНм (растянуты правые волокна),}$$

$$\sum X = 0; \quad Q_3 + 20 - 20 = 0; Q_3 = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad N_3 + 5,5 = 0, N_3 = -5,5 \text{кН (стержень сжат).}$$

Сечение 4-4

$$\sum M_4 = 0; \quad 10 \cdot 3 - M_4 = 0, M_4 = 30 \text{кНм (растянуты левые волокна),}$$

$$\sum X = 0; Q_4 = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad -10 - N_4 = 0, N_4 = -10 \text{кН (стержень сжат).}$$

Сечение 5-5

$$\sum M_5 = 0; 10 \cdot 3 - M_5 = 0, M_5 = 30 \text{кНм (растянуты левые волокна),}$$

$$\sum X = 0; \quad Q_5 = 0,$$

$$\sum Y = 0; -10 - N_5 = 0, N_5 = -10 \text{кН (стержень сжат).}$$

Сечение 6-6

$$\sum M_6 = 0; M_6 - 10 \cdot 3 = 0, M_6 = 30 \text{кНм (растянуты верхние волокна),}$$

$$\sum X = 0; N_6 = 0,$$

$$\sum Y = 0; Q_6 - 10 = 0, Q_6 = 10 \text{кН.}$$

Сечение 7-7

$$\sum M_7 = 0; \quad M_7 = 0,$$

$$\sum X = 0; \quad N_7 = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_7 - 10 = 0, Q_7 = 10 \text{кН.}$$

Сечение 8-8

$$\sum M_8 = 0, M_8 - 2 \cdot 6 \cdot 3 + 7 + 16,5 \cdot 6 = 0, \quad M_8 = -70 \text{кНм (растянуты нижние}$$

волокна),

$$\sum X = 0; \quad N_8 = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_8 - 2 \cdot 6 + 16,5 = 0, \quad Q_8 = -4,5 \text{кН.}$$

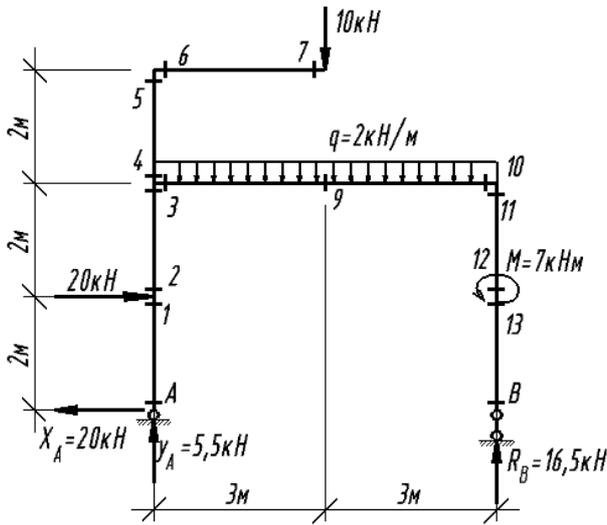
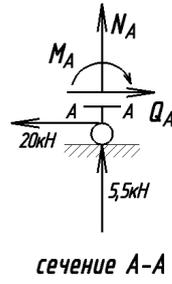
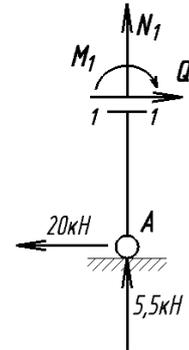


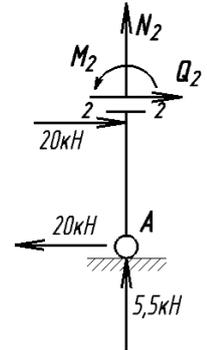
Рис. 2.1



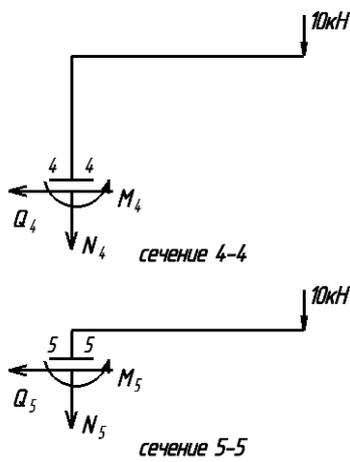
сечение А-А



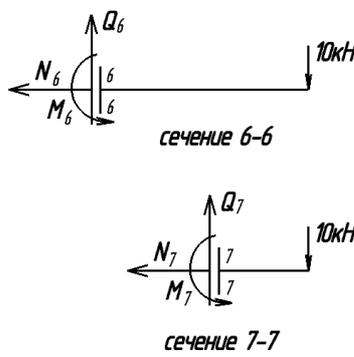
сечение 1-1



сечение 2-2

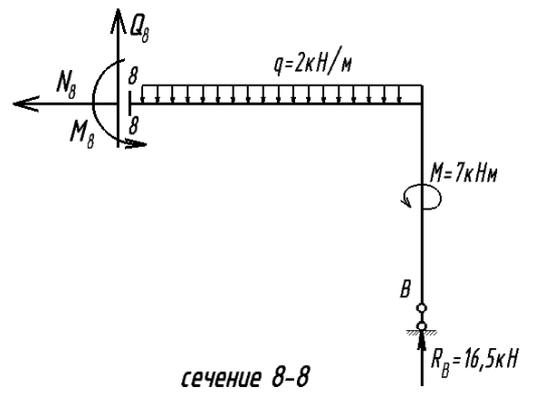


сечение 5-5

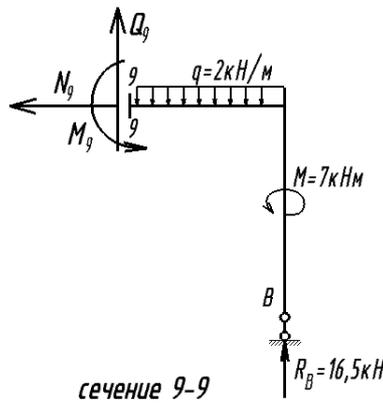


сечение 6-6

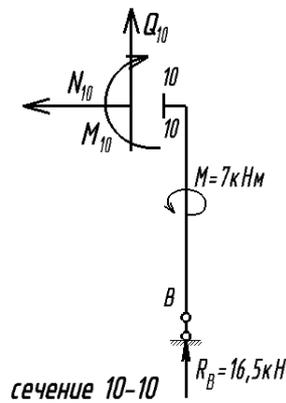
сечение 7-7



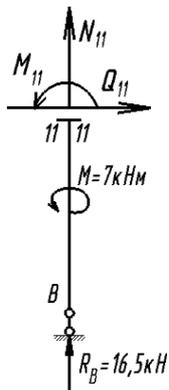
сечение 8-8



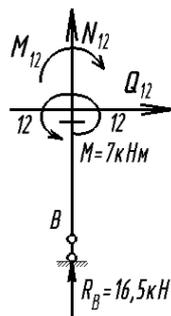
сечение 9-9



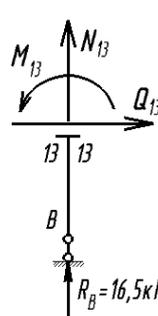
сечение 10-10



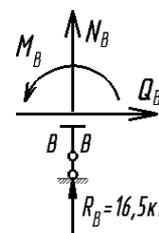
сечение 11-11



сечение 12-12



сечение 13-13



сечение В-В

Рис.2.2

Сечение 9-9

$\sum M_9 = 0$, $M_9 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 7 + 16,5 \cdot 3 = 0$, $M_9 = -47,5 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна)

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & N_9 &= 0, \\ \sum Y &= 0; & Q_9 - 2 \cdot 3 + 16,5 &= 0, & Q_9 &= -10,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Сечение 10-10

$\sum M_{10} = 0$; $M_{10} - 7 = 0$, $M_{10} = 7 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна),

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & N_{10} &= 0, \\ \sum Y &= 0; & Q_{10} + 16,5 &= 0, & Q_{10} &= -16,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Сечение 11-11

$\sum M_{11} = 0$; $M_{11} + 7 = 0$, $M_{11} = -7 \text{ кНм}$ (растянуты левые волокна),

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & Q_{11} &= 0, \\ \sum Y &= 0; & N_{11} + 16,5 &= 0, & N_{11} &= -16,5 \text{ кН (стержень сжат)}. \end{aligned}$$

Сечение 12-12

$\sum M_{12} = 0$; $M_{12} - 7 = 0$, $M_{12} = 7 \text{ кНм}$ (растянуты левые волокна),

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & Q_{12} &= 0, \\ \sum Y &= 0; & N_{12} + 16,5 &= 0, & N_{12} &= -16,5 \text{ кН (стержень сжат)}. \end{aligned}$$

Сечение 13-13

$$\begin{aligned} \sum M_{13} &= 0; & M_{13} &= 0, \\ \sum X &= 0; & Q_{13} &= 0, \\ \sum Y &= 0; & N_{13} + 16,5 &= 0, & N_{13} &= -16,5 \text{ кН (стержень сжат)}. \end{aligned}$$

Сечение В-В

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; & M_B &= 0, \\ \sum X &= 0; & Q_B &= 0, \\ \sum Y &= 0; & N_B + 16,5 &= 0, & N_B &= -16,5 \text{ кН (стержень сжат)}. \end{aligned}$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов M_p , поперечных сил Q_p и продольных N_p сил. Проверяем равновесие узлов (рис.2.3.).

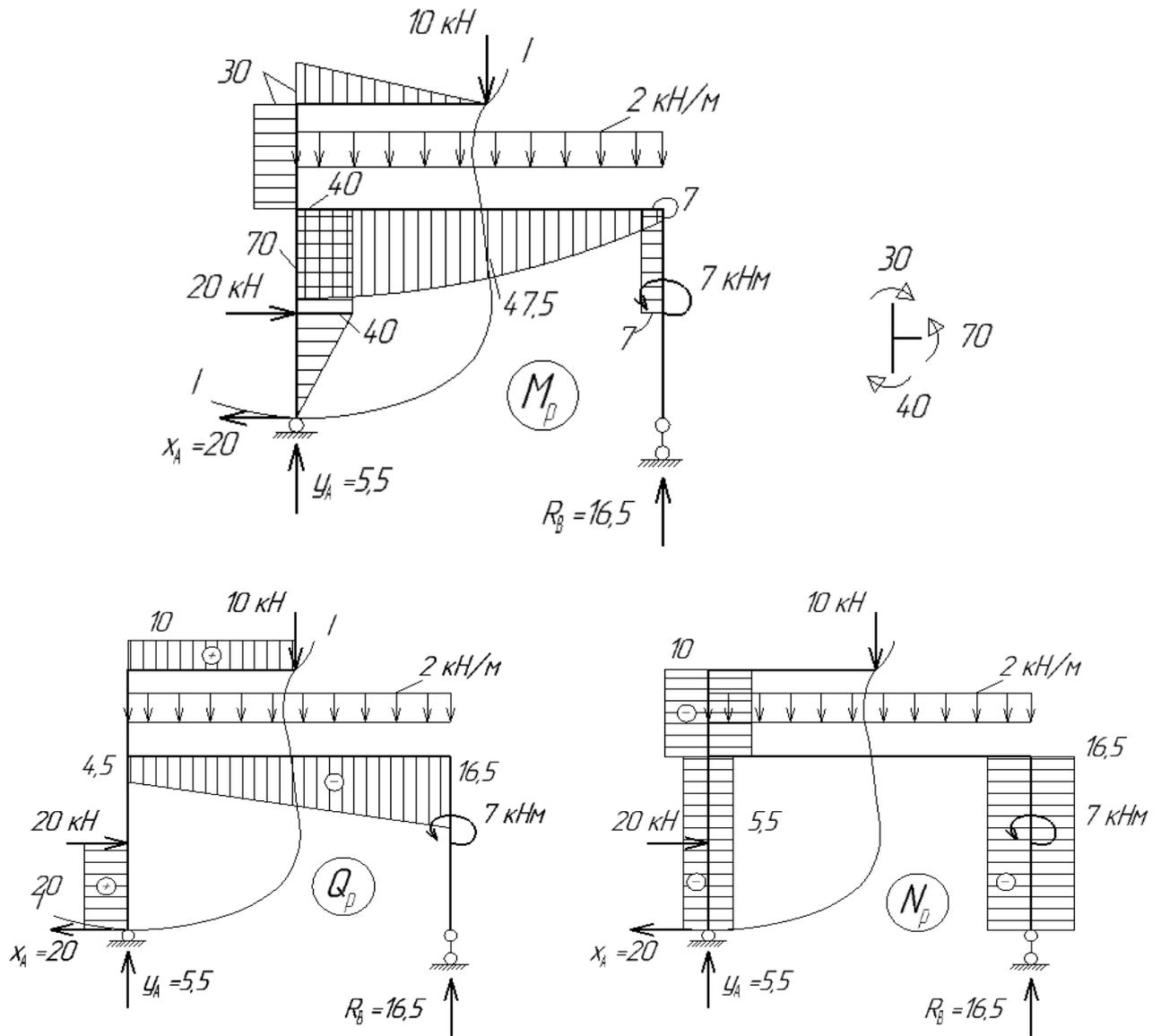


Рис.2.3

3. Производим статическую проверку правильности расчета, рассматривая равновесие отсеченной сечением I-I части системы (рис.2.4).

$$\sum X = 0; \quad -20 + 20 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad -10 - 3 \cdot 2 + 10,5 + 5,5 = -16 + 16 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2 - 10,5 \cdot 3 - 47,5 = 79 - 79 = 0.$$

или $2x_c - 12y_c + 810 = 0$.

Решая, получим $y_c = 75 \text{ кН}$, $x_c = 45 \text{ кН}$.

$$\sum X = 0; -x_A + 15 \cdot 4 - 15 - 45 = 0, \quad x_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0; 15 \cdot 4 \cdot 2 + 90 \cdot 9 - 60 - 75 \cdot 12 + M_A = 0, M_A = 30 \text{ кНм}.$$

$$\sum Y = 0; -90 + 75 + y_A = 0, y_A = -15 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum M_E^{\text{лев.с.}} = 0; 15 \cdot 4 \cdot 2 - 30 - 15 \cdot 6 = 0;$

$$\sum M_C = 0; \quad 90 \cdot 3 + 60 - 15 \cdot 4 \cdot 2 - 30 - 15 \cdot 12 = 0.$$

2. Определяем значения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в характерных сечениях рамы, рассматривая равновесие отсеченной частей рамы (рис.2.6, 2.7).

Сечение А-А

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - 30 = 0, M_A = 30 \text{ кН} \text{ (растянуты правые волокна),}$$

$$\sum X = 0; Q_A = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad N_A + 15 = 0; \quad N_B = -15 \text{ кН (стержень сжат)}$$

.Сечение 1-1

$$\sum M_1 = 0; \quad 30 - 15 \cdot 1 \cdot 0,5 - M_1 = 0, M_1 = 22,5 \text{ кНм (растянуты правые волокна),}$$

$$\sum X = 0; \quad 15 \cdot 1 + Q_1 = 0; Q_1 = -15 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; N_1 + 15 = 0; N_1 = -15 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Сечение D-D

$$\sum M_D = 0; \quad 15 \cdot 2 \cdot 1 - 30 + M_D = 0, M_D = 0,$$

$$\sum X = 0; \quad 15 \cdot 2 + Q_D = 0, Q_D = -30 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; N_D + 15 = 0; N_D = -15 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Сечение 2-2

$$\sum M_2 = 0; \quad 30 + M_2 - 15 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, M_2 = 37,5 \text{ кНм (растянуты левые волокна),}$$

$$\sum X = 0; \quad Q_2 + 15 \cdot 3 = 0; Q_2 = -45 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \quad N_2 + 15 = 0, N_2 = -15 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Сечение 3-3

$$\sum M_3 = 0; 30 + M_3 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0, M_3 = 90 \text{ кНм (растянуты левые волокна),}$$

$$\sum X = 0; Q_3 + 15 \cdot 4 = 0; Q_3 = -60 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; N_3 + 15 = 0, N_3 = -15 \text{ кН (стержень сжат)}.$$

Сечение 4-4

$$\sum M_4 = 0; 30 + M_4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0, M_4 = 90 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)},$$

$$\sum X = 0; N_4 + 15 \cdot 4 = 0, N_4 = -60 \text{ кН (стержень сжат)},$$

$$\sum Y = 0; -Q_4 + 15 = 0, Q_4 = 15 \text{ кН}.$$

Сечение E-E

$$\sum M_E^{\text{лев.с.}} = 0; 15 \cdot 6 + 30 - 15 \cdot 4 \cdot 2 + M_E^{\text{лев.с.}} = 0, M_E^{\text{лев.с.}} = 0,$$

$$\sum X = 0; N_E^{\text{сл.}} + 15 \cdot 4 = 0, N_E^{\text{сл.}} = -60 \text{ кН (стержень сжат)},$$

$$\sum Y = 0; -Q_E^{\text{сл.}} + 15 = 0, Q_E^{\text{сл.}} = 15 \text{ кН}.$$

Сечение E-E

$$\sum M_E^{\text{н.с.}} = 0; M_E^{\text{н.с.}} + 60 - 15 \cdot 4 = 0, M_E^{\text{н.с.}} = 0,$$

$$\sum X = 0; Q_E^{\text{н.}} - 15 = 0, Q_E^{\text{н.}} = 15 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; N_E^{\text{н.}} = 0.$$

Сечение 5-5

$$\sum M_5 = 0; 15 \cdot 2 - 60 + M_5 = 0, M_5 = 30 \text{ кНм (растянуты левые волокна)},$$

$$\sum X = 0; Q_5 - 15 = 0, Q_5 = 15 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; N_5 = 0.$$

Сечение 6-6

$$\sum M_6 = 0; M_6 - 15 \cdot 2 = 0, M_6 = 30 \text{ кНм (растянуты правые волокна)},$$

$$\sum X = 0; Q_6 - 15 = 0, Q_6 = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; N_6 = 0.$$

Сечение B-B

$$\sum M_B = 0; M_B = 0,$$

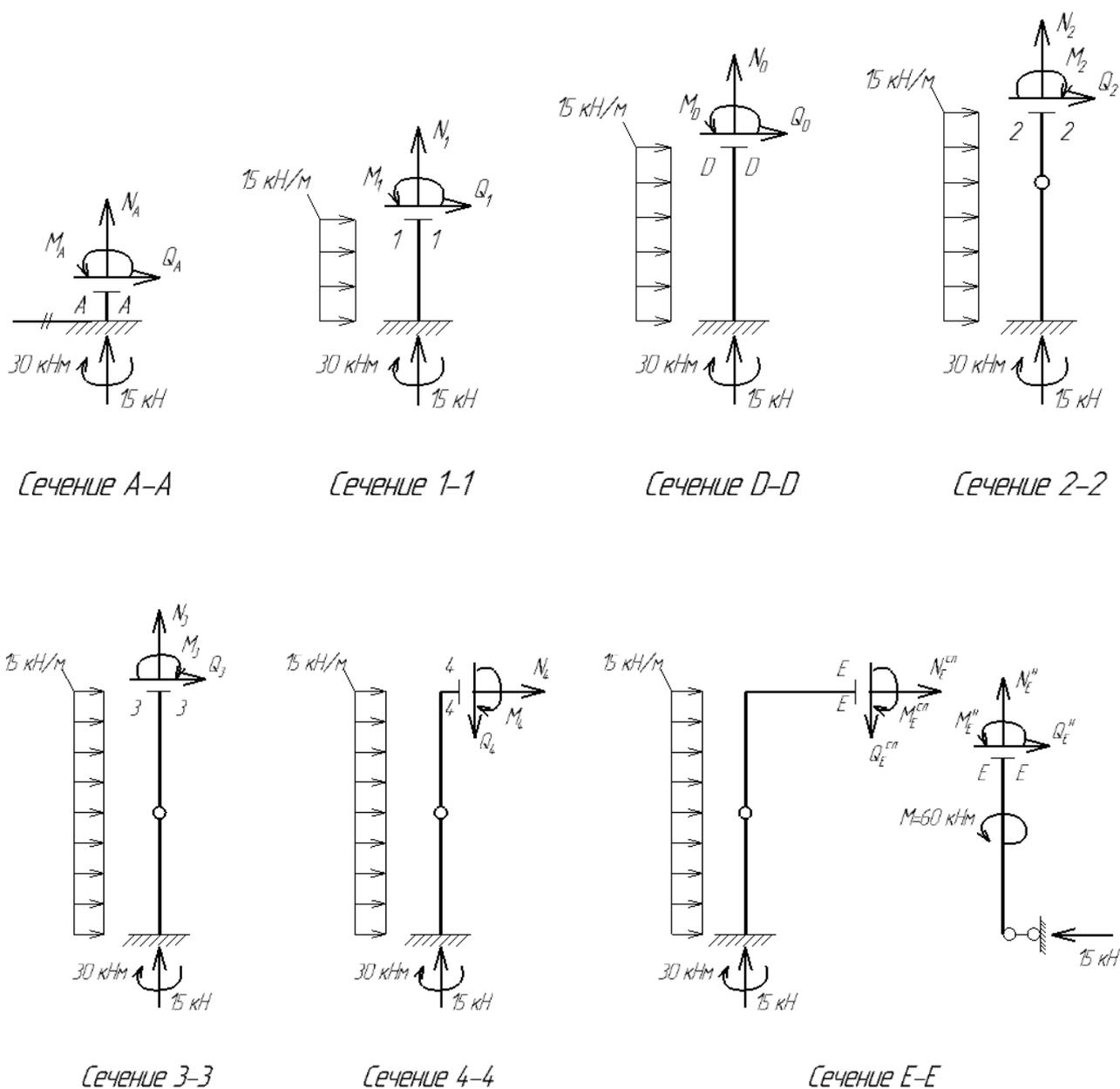


Рис. 2.6

$$\sum X = 0; Q_B - 15 = 0, Q_B = 15 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; N_B = 0.$$

Сечение 7-7

$$\sum M_7 = 0; M_7 - 45 \cdot 4 + 75 \cdot 3 = 0, M_7 = 45 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}$$

$$\sum X = 0; -N_7 - 45 = 0, N_7 = -45 \text{ кН (стержень сжат)},$$

$$\sum Y = 0; Q_7 + 75 \cdot 9 = 0, Q_7 = 15 \text{ кН}.$$

Сечение 8-8

$$\sum M_8 = 0; 45 \cdot 4 + M_8 - 75 \cdot 3 = 0, M_8 = 45 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)},$$

$$\sum X = 0; -N_8 - 45 = 0, N_8 = -45 \text{ кН (стержень сжат)},$$

$$\sum Y = 0; Q_8 + 75 = 0, Q_8 = -75 \text{кН.}$$

Сечение 9-9

$$\sum M_9 = 0; M_9 - 45 \cdot 4 = 0, M_9 = 180 \text{кНм (растянуты верхние волокна),}$$

$$\sum X = 0; -N_9 - 45 = 0, N_9 = -45 \text{кН (стержень сжат),}$$

$$\sum Y = 0; Q_9 + 75 = 0, Q_9 = -75 \text{кН.}$$

Сечение 10-10

$$\sum M_{10} = 0; 45 \cdot 4 - M_{10} = 0, M_{10} = 180 \text{кНм (растянуты правые волокна),}$$

$$\sum X = 0; Q_{10} - 45 = 0, Q_{10} = 45 \text{кН,}$$

$$\sum Y = 0; N_{10} + 75 = 0, N_{10} = -75 \text{кН (стержень сжат).}$$

Сечение С-С

$$\sum M_C = 0; M_C = 0,$$

$$\sum X = 0; Q_C - 45 = 0, Q_C = 45 \text{кН,}$$

$$\sum Y = 0; N_C + 75 = 0, N_C = -75 \text{кН (стержень сжат).}$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов M_p , поперечных Q_p и продольных N_p сил (рис. 2.8). Проверяем равновесие узлов.

4. Производим статическую проверку правильности расчета, рассматривая равновесие отсеченной части системы, 1-6-10 (рис.2.9).

$$\sum X = 0; 15 \cdot 3 + 15 - 15 - 45 = +60 - 60 = 0,$$

$$\sum Y = 0; 15 - 90 + 75 = -90 + 90 = 0,$$

$$\sum M_D = 0; 15 \cdot 3 \cdot 0,5 - 15 \cdot 1 - 60 + 30 + 90 \cdot 9 + 180 - 75 \cdot 12 - 45 \cdot 2 + 22,5 = 1065 - 1065 = 0.$$

Пример 2.1.3. От заданных нагрузок определить аналитически внутренние усилия в сечениях рамы (рис. 2.10, 2.11) и построить эпюры изгибающих моментов M_p , поперечных Q_p и продольных N_p сил. Результаты решения приведены на рис. 2.10, 2.11.

Пример 2.1.4 От заданных нагрузок определить аналитически усилия в сечениях рам (рис.2.12-2.14) и построить эпюры изгибающих моментов M_p , поперечных Q_p и продольных N_p сил самостоятельно.2.2.

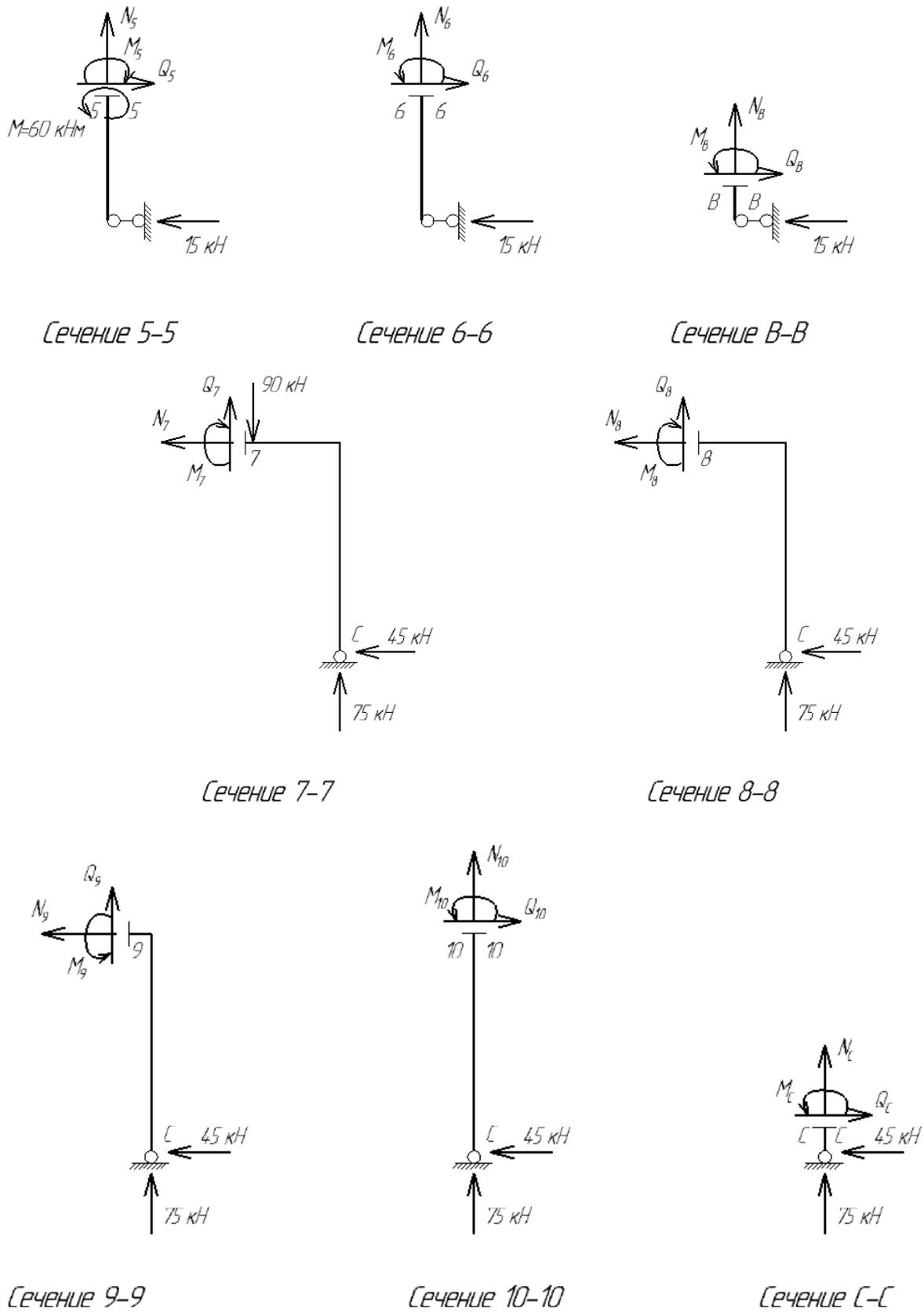


Рис.2.7

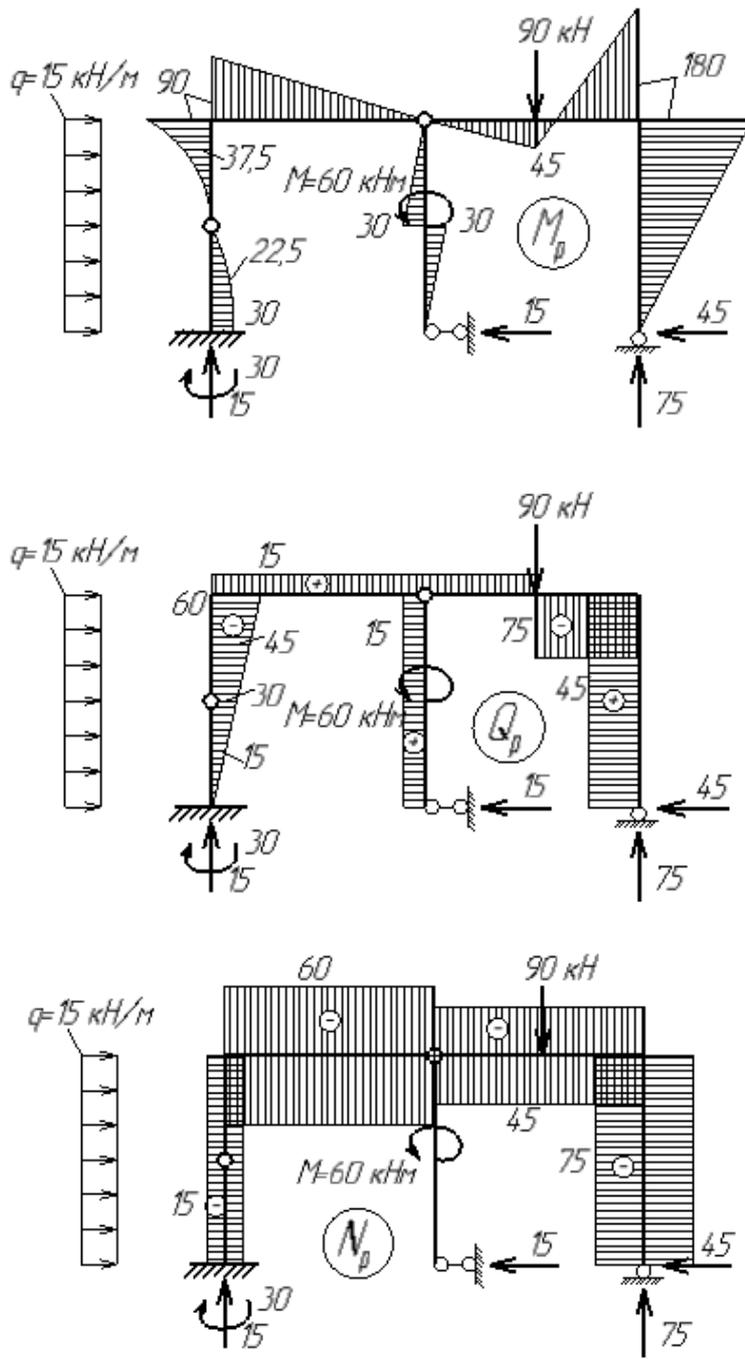


Рис.2.8

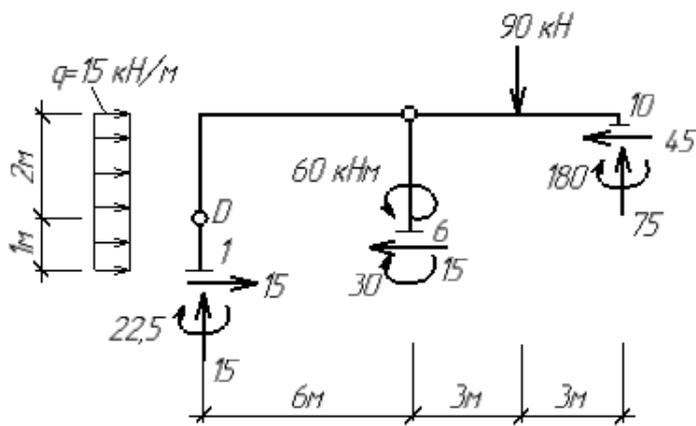


Рис.2.9

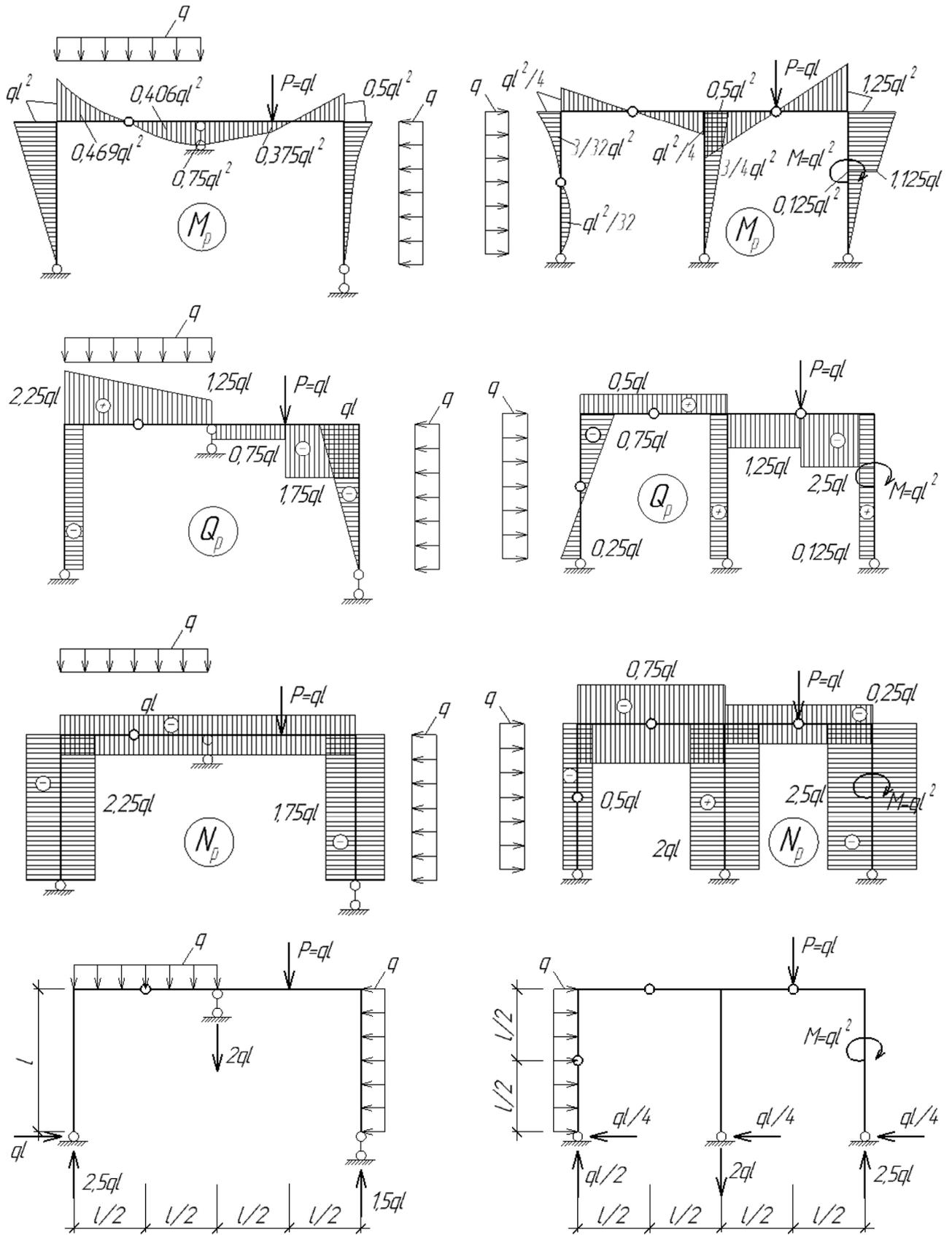


Рис. 2.10

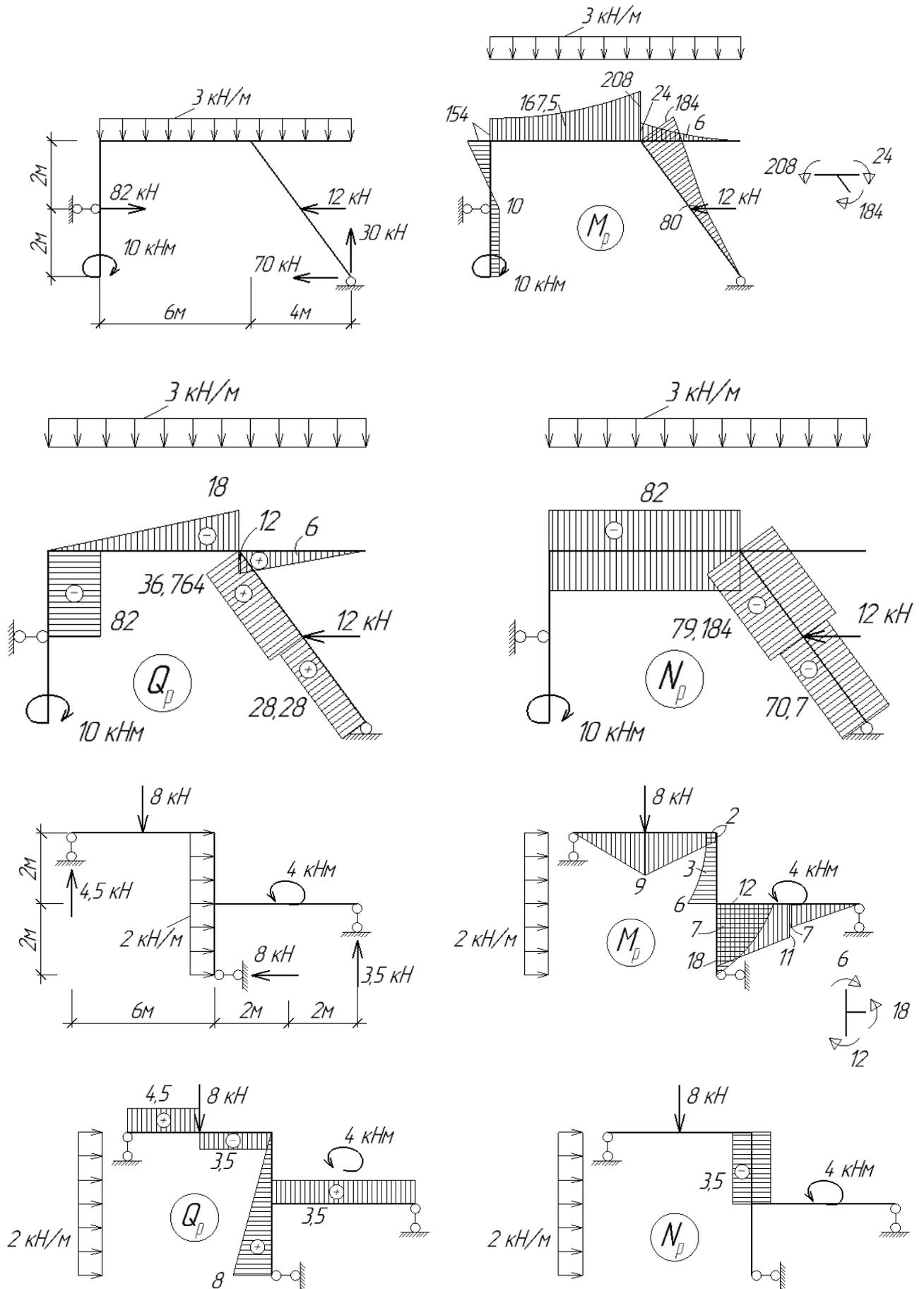


Рис. 2.11

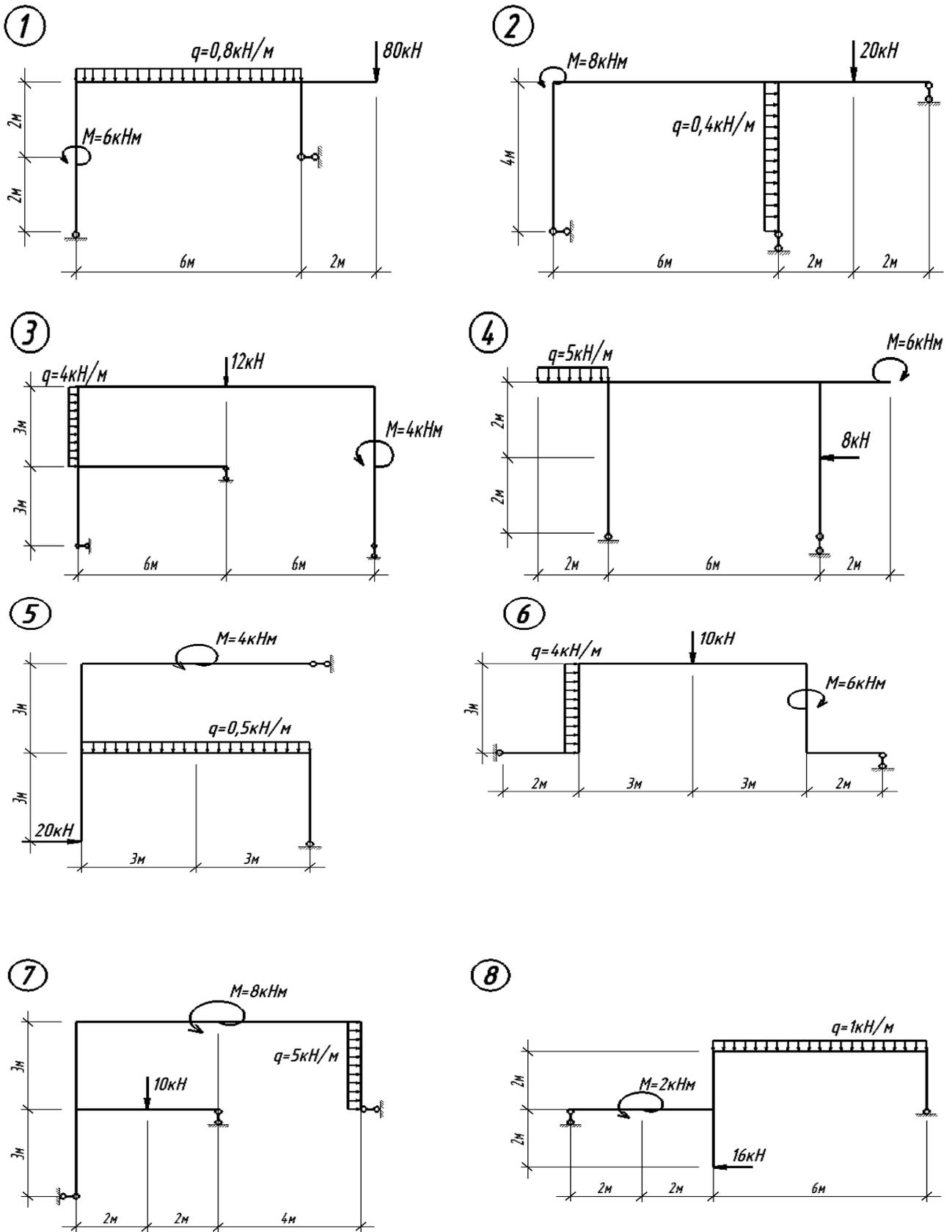


Рис.2.12

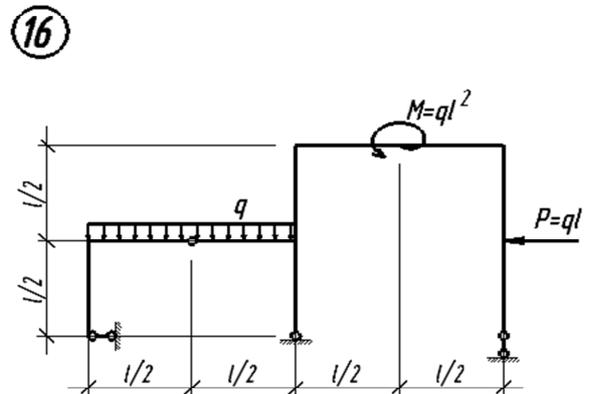
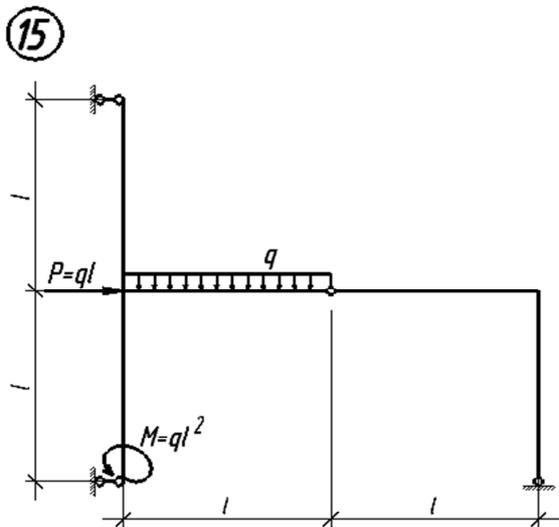
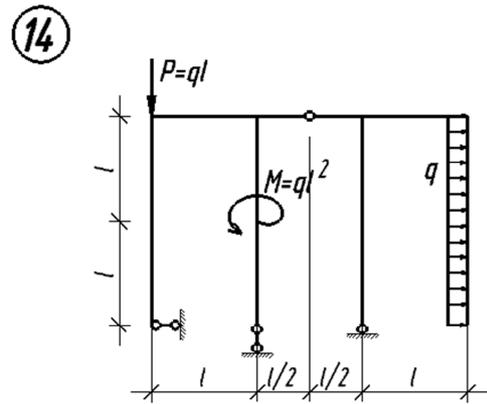
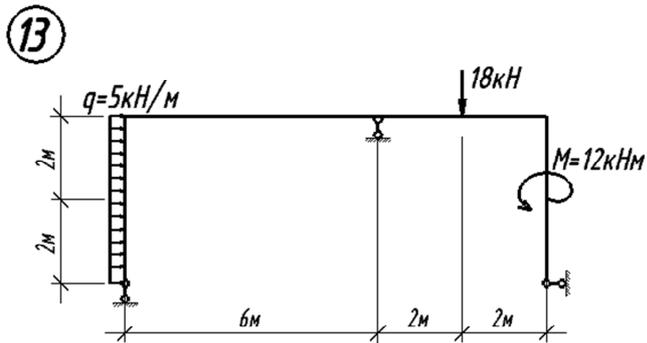
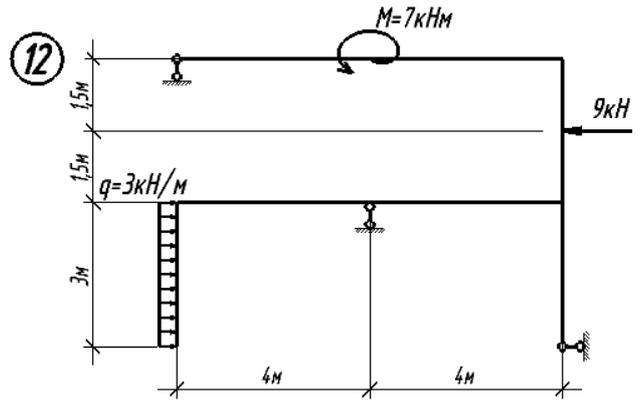
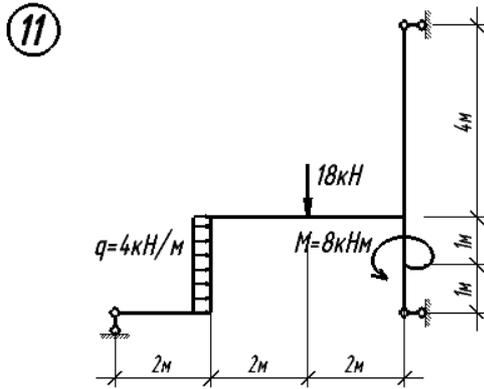
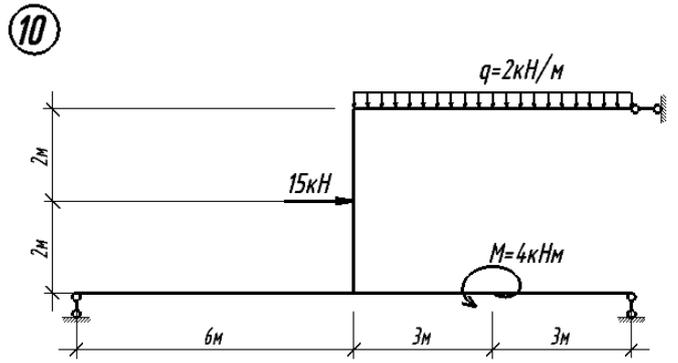
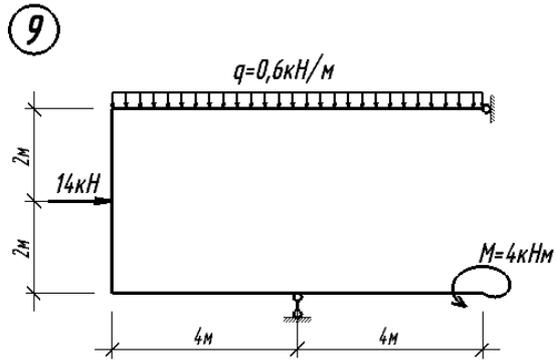
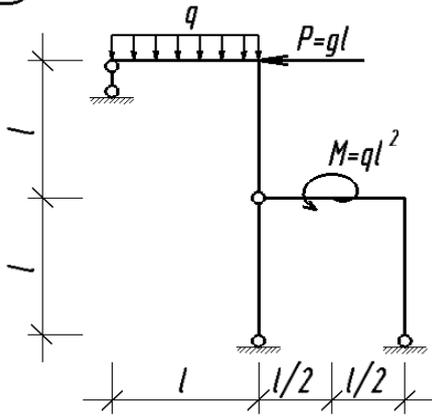
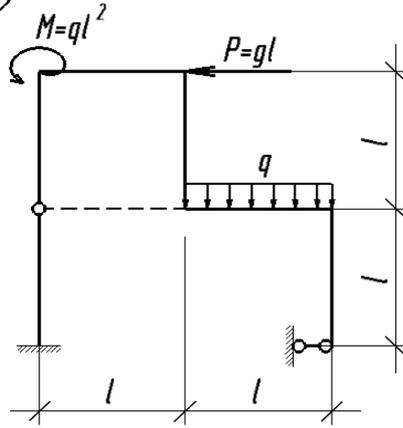


Рис.2.13

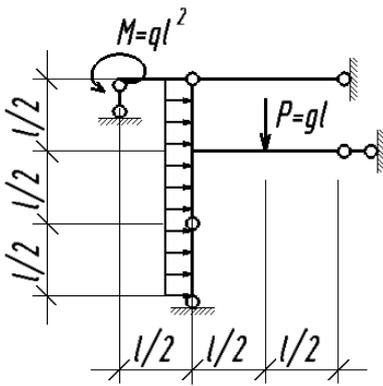
17



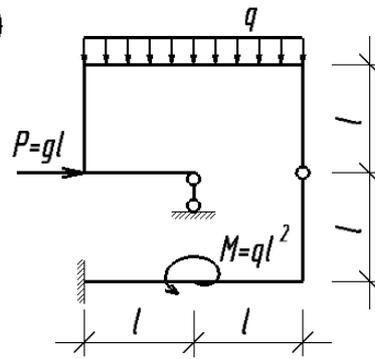
18



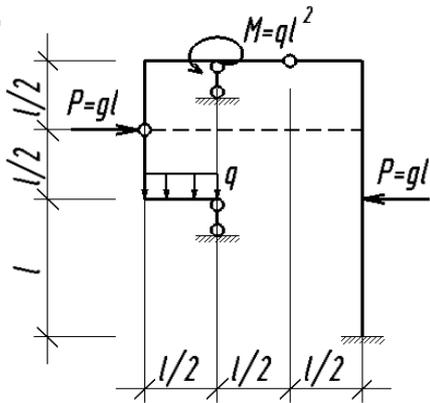
19



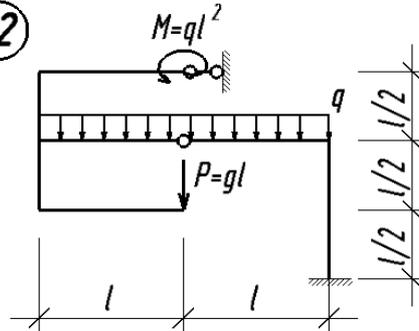
20



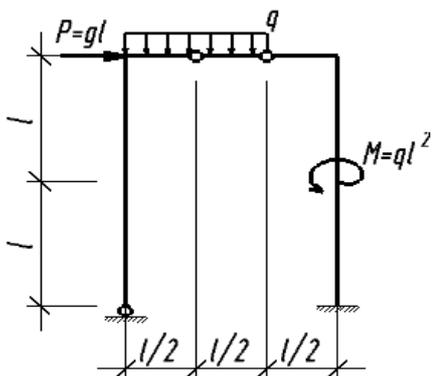
21



22



23



24

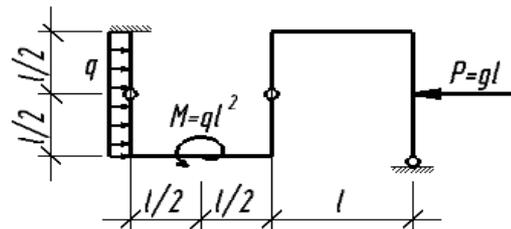


Рис.2.14

2.2 Графическое (эскизное) построение эпюр изгибающих моментов

В этом разделе рассматривается графическое построение эпюр изгибающих моментов в статически определимых рамных системах. При заданных форме, характере опорных связей и размерах рамы можно графически определить величины и направления опорных реакций, их равнодействующих, и на основании определения изгибающего момента графически построить соответствующую эпюру. Такое решение позволяет достаточно быстро установить закон распределения усилий в инженерных сооружениях и, в частности, в рамах. Здесь рассмотрено построение эпюр изгибающих моментов при простых случаях нагружения: сосредоточенной силой, моментом или нагрузкой, распределенной на участке. При действии нескольких видов силовых факторов построение эпюры M_p производится методом наложения. На рис.2.15 приведены примеры построения эпюр изгибающих моментов в системах, состоящих из одного диска, а на рис. 2.16 – из нескольких дисков, связанных шарнирами. При построении эпюр изгибающих моментов необходимо использовать положения, отмеченные в 2.1 и, кроме этого, для каждого элемента следует установить положение нулевой точки, в которой изгибающий момент обращается в ноль. Она найдется пересечением соответствующей равнодействующей односторонних сил с осью данного элемента (или его продолжением).

Пример 2.2.1. От заданных нагрузок графически построить эпюры изгибающих моментов M_p в рамах (рис.2.17 - 2.18) самостоятельно.

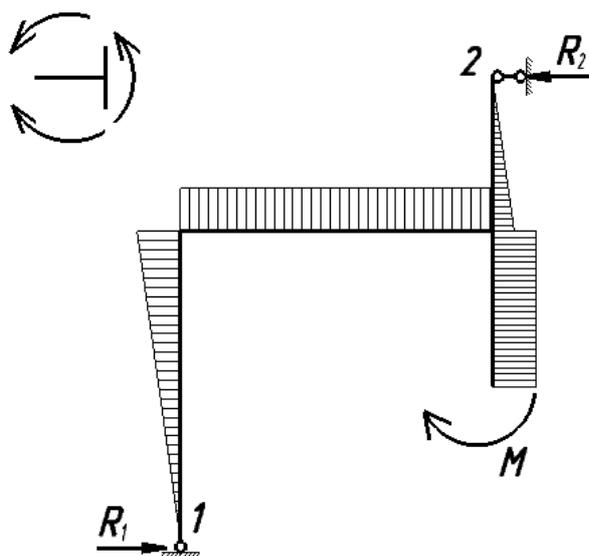


Рис.2.15 а

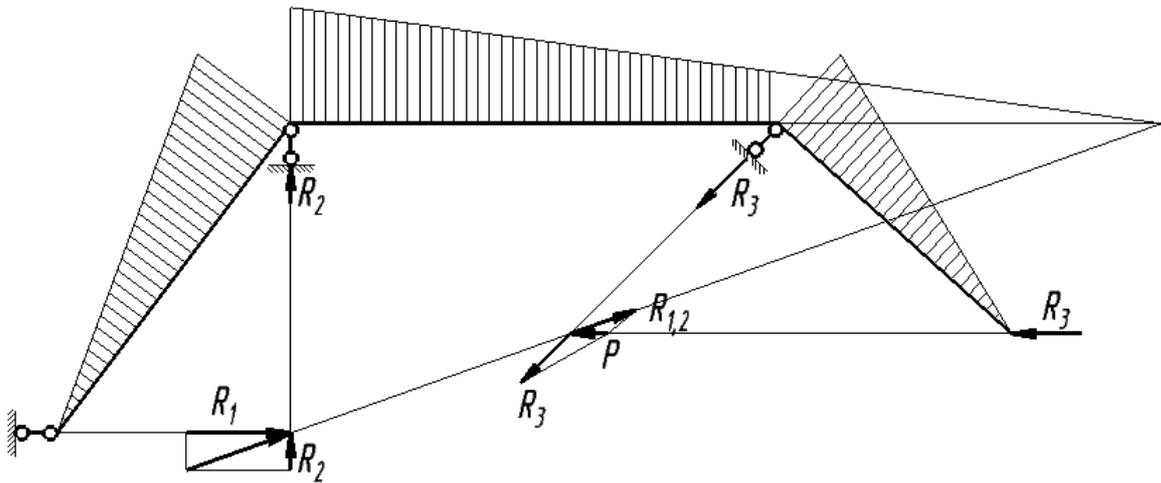
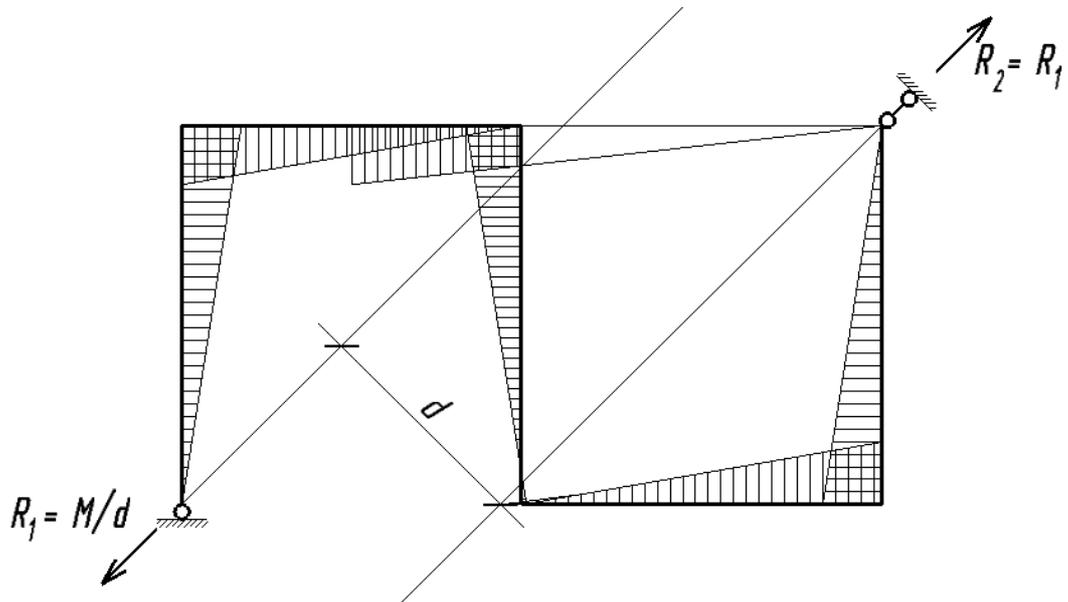


Рис.2.15 б,в

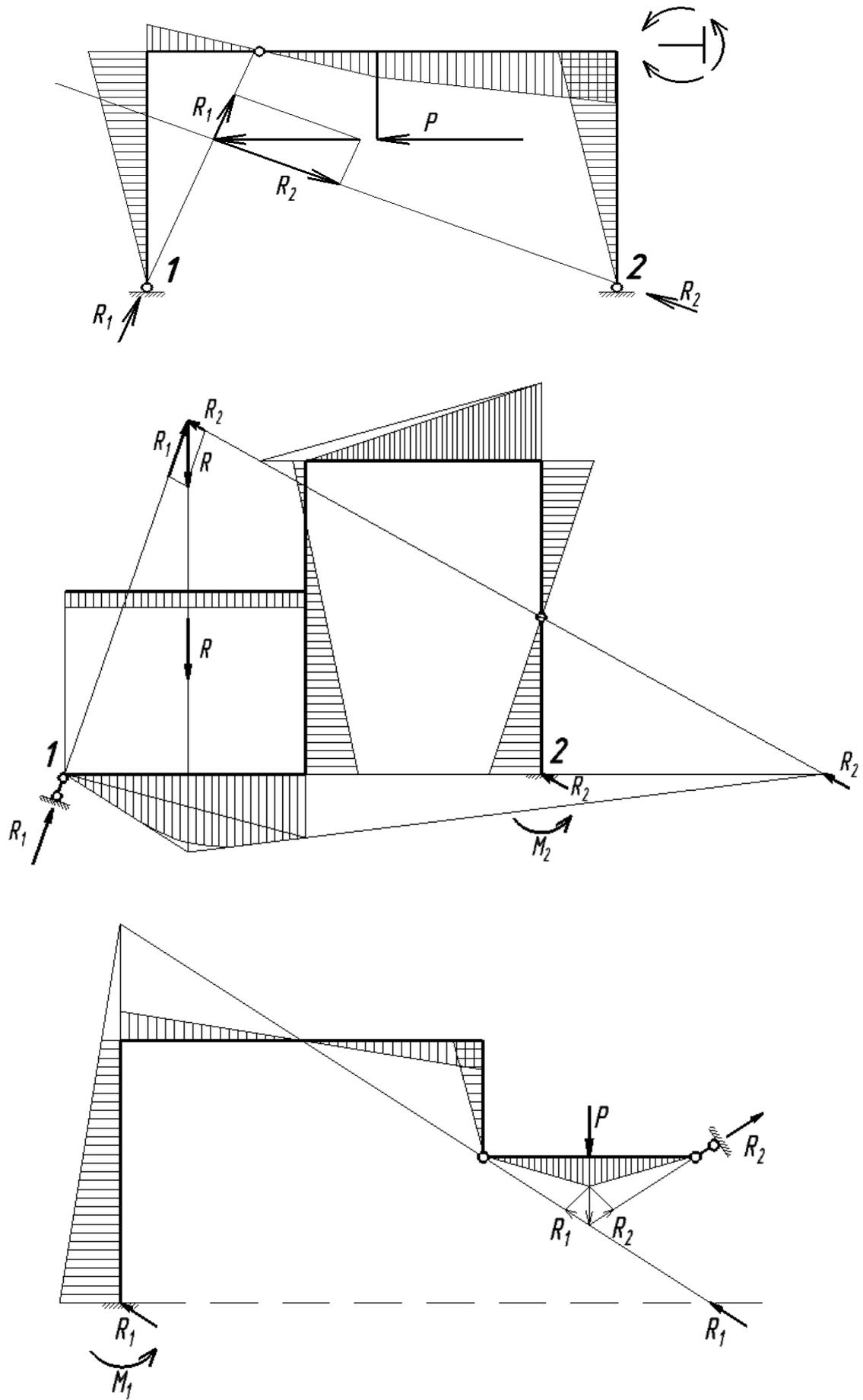


Рис.2.16

3 МНОГОПРОЛЁТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Многопролетной статически определимой балкой называется геометрически неизменяемая статически определимая система, состоящая из однопролетных балок, соединяемых между собой полными идеальными шарнирами.

Необходимым условием геометрической неизменяемости балки является равенство нулю ее степени свободы $W=3D-Ш-C_0=0$. Число дисков Дили отдельных балок зависит от количества шарниров Ш, т.е. $D=Ш+1$. Поэтому выражение $3(Ш+1)-2Ш-C_0=0$ позволяет получить необходимое условие геометрической неизменяемости многопролетной статически определимой балки в виде:

$$Ш = C_0 - 3, \quad (3.1)$$

где C_0 - число опорных связей.

3.1 Образование многопролетных статически определимых балок

Необходимое количество шарниров должно быть расположено таким образом, чтобы система во всех своих частях была геометрически неизменяемая и статически определимая.

Существует три способа расположения шарниров в пролетах балки

- 1) постановка по одному шарниру в пролете (рис.3.1 а);
- 2) постановка по два через пролет (рис.3.1 б);
- 3) комбинированная постановка шарниров (рис.3.1 в).

Для соблюдения условий статической определимости и геометрической неизменяемости во всех частях таких балок при их конструировании необходимо выполнять следующие правила:

1. В каждом пролете должно быть не более двух шарниров.
2. Пролеты с двумя шарнирами следует чередовать с пролетами без шарниров.
3. Если крайняя опора шарнирная, то в примыкающем пролете может быть установлено не более одного шарнира.
4. Если крайняя опора имеет заделку, то в примыкающем пролете должно располагаться не менее одного шарнира.
5. Для того чтобы балка была неподвижной, в горизонтальном направлении достаточно одной связи первого вида

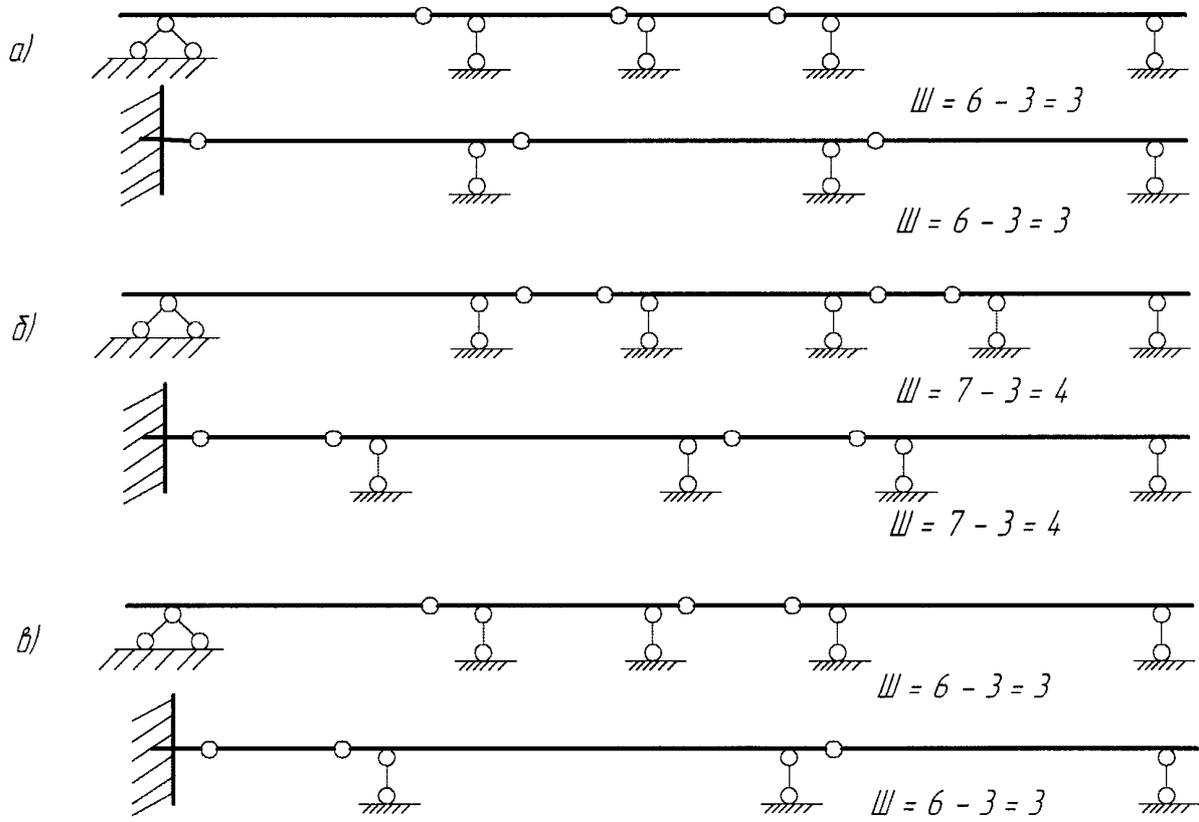


Рис. 3.1

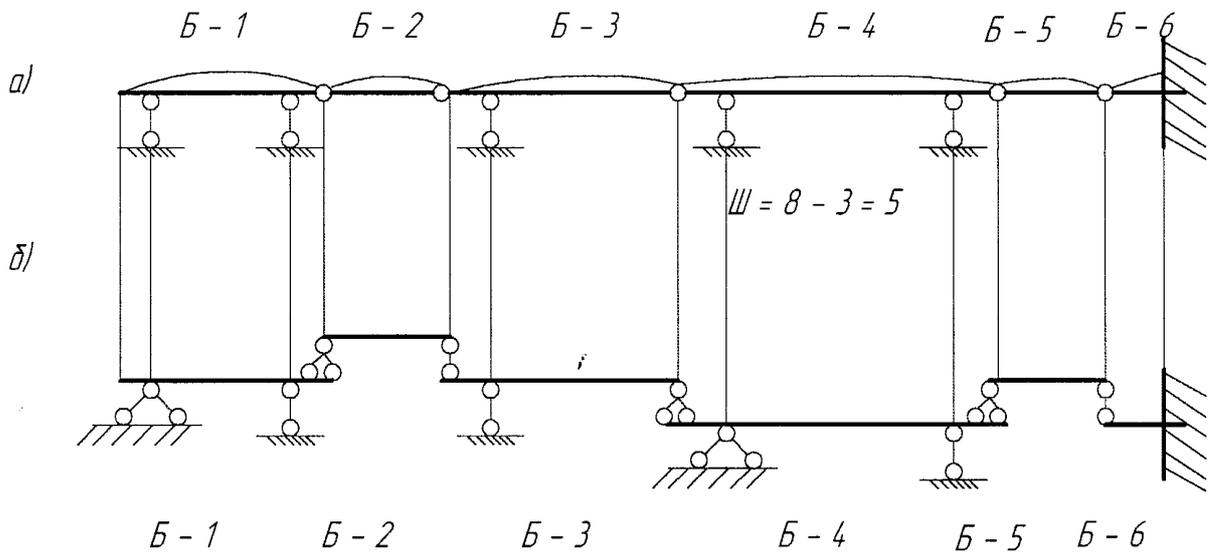


Рис. 3.2

3.2 Аналитический расчет многопролетных статически определимых балок на неподвижную нагрузку

Существует два способа расчета балок: способ расчета балки в целом как статически определимой системы и способ расчета балки путем построения поэтажной схемы.

1. Способ расчета балки в целом как статически определимой системы заключается в определении опорных реакций из условий сопряжения балок в шарнирах и уравнений равновесия всей системы. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил выполняется как в статически определимых системах. Такой путь решения слишком громоздкий. Способ расчета балки путем построения поэтажной схемы является более удобным.
2. Расчет многопролетной статически определимой балки с применением поэтажной схемы.

При правильной постановке пролетных шарниров многопролетная балка разделяется на ряд однопролетных статически определимых балок (рис.3.2 а). Характер взаимодействия между балками может быть выявлен в поэтажной схеме, где можно выделить два вида балок: основные и вспомогательные (рис.3.2 б).

Основные балки (Б-1, Б-4, Б-6) крепятся тремя связями непосредственно к основанию. Вспомогательные балки (Б-2, Б-3, Б-5) опираются на основные.

При изображении поэтажной схемы балки следует иметь в виду, что нарушается общая горизонтальная связь балки, поэтому в каждой простой балке необходимо показывать все три связи, необходимые ей для геометрической неизменяемости и статической определимости.

По условиям работы балки разделяются на независимые и зависимые.

Независимые балки (второстепенные) способны воспринять только местную нагрузку, расположенную в пределах их длины.

Зависимые балки (основные) - это такие, которые испытывают действие не только нагрузки, расположенной непосредственно на них, но и давление со стороны смежных (второстепенных) балок, на них опирающихся.

В поэтажной схеме (рис.3.2 б) балки Б-2 и Б-5 являются независимыми, а остальные - зависимыми.

Поэтажная схема балки определяет порядок расчета балки как совокупности однопролетных балок. Расчет начинают с независимых балок, начиная с самых верхних балок. Затем рассчитывают зависимые балки.

Расчет каждой балки выполняется в следующей последовательности:

1. Определение опорных реакций.
2. Вычисление изгибающих моментов в необходимых для построения эпюры сечениях.
3. Вычисление поперечных сил в характерных сечениях.

При расчете зависимых (основных) балок необходимо учесть давление вышележащих балок, опирающихся на зависимые (основные) балки.

Сила, с которой верхняя балка действует на рассматриваемую балку, равна по величине реакции верхней балки и имеет противоположное направление.

Пример 3.2.1. От заданной нагрузки определить усилия M_p , Q_p в сечениях балки и построить эпюры изгибающих моментов M_p и поперечных сил Q_p (рис.3.3).

Решение:

1. Строим поэтажную схему, выделяя зависимую балку Б-2 и независимые балки Б-1 и Б-3 (рис.3.3).

2. Определяем опорные реакции в независимой балке Б-1 (рис.3.4 а).

$$\sum M_A = 0; \quad -10 \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = 0; \quad R_B = 15 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; \quad R_A = 15 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad 15 - 10 \cdot 3 + 15 = 0.$

3. Вычисляем усилия M и Q в характерных сечениях балки Б-1.

$$M_A = 0; \quad Q_A = R_A = 15 \text{ кН}; \quad M_1 = 15 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1,5 \cdot 1 = 11,25 \text{ кНм};$$

$$Q_1 = 15 - 10 \cdot 1,5 = 0 \text{ кН}; \quad M_B = 0; \quad Q_B = -R_B = -15 \text{ кН}.$$

4. Строим эпюры M_p и Q_p в балке Б-1 (рис. 3.4 а).

5. Определяем реакции в независимой балке Б-3 (рис.3.4 б).

$$\sum M_E = 0; \quad -60 + R_F \cdot 2 = 0; \quad R_F = 30 \text{ кН},$$

$$\sum M_F = 0; \quad R_E \cdot 2 - 60 = 0; \quad R_E = 30 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad -30 + 30 = 0.$

6. Вычисляем усилия M и Q в сечениях балки Б-2 (рис.3.4 б).

$$M_E = 0; \quad Q_E = -R_E = -30 \text{ кН}; \quad M_F = -60 \text{ кНм};$$

$$Q_F^{\text{пр.}} = 0; \quad Q_F^{\text{сл.}} = -R_F = -30 \text{ кН}.$$

7. Строим эпюры M_p и Q_p в балке Б-2 (рис. 3.4 б).

8. Определяем опорные реакции в зависимой балке Б-2 (рис.3.4 в). На балку Б-2 действует местная нагрузка (сила $P=40$ кН) и давление, передаваемое с балок Б-1 и Б-3. Сила R'_B , с которой действует балка Б-1 на балку Б-2, равна по величине реакции R_B и противоположна по направлению. Сила R'_E , с которой действует балка Б-3 на балку Б-2, равна по величине реакции R_E и противоположна по направлению.

$$\sum M_C = 0; 15 \cdot 1 - 40 \cdot 2 - R_D \cdot 4 + 30 \cdot 6 = 0; R_D = 28,75 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; 15 \cdot 5 - R_C \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 0; R_C = 53,75 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = -15 + 53,75 - 40 - 28,75 + 30 = 0.$$

9. Вычисляем усилия M и Q в сечениях балки Б-2

$$M_B = 0; Q_B = -15 \text{ кН}; M_C = -15 \text{ кНм};$$

$$Q_C^{\text{лев.}} = -15 \text{ кН}; Q_C^{\text{пп.}} = -15 + 53,75 = 38,75 \text{ кН};$$

$$M_2 = -15 \cdot 3 + 53,75 \cdot 2 = 62,5 \text{ кНм};$$

$$Q_2^{\text{лев.}} = -15 + 53,75 = 38,75 \text{ кН}; Q_2^{\text{пп.}} = -15 + 53,75 - 40 = -1,25 \text{ кН};$$

$$M_D = 30 \cdot 2 = 60 \text{ кНм}; Q_D^{\text{пп.}} = -30 \text{ кН}; Q_D^{\text{лев.}} = -30 + 28,75 = -1,25 \text{ кН}.$$

10. Строим эпюры M_p и Q_p в балке Б-2 (рис. 3.4 в).

11. Строим эпюры M_p и Q_p в заданной многопролетной балке от заданной нагрузки (рис.3.3), для чего надо совместить на одной оси все построенные ранее эпюры (рис. 3.4 а, 3.4 б, 3.4 в).

12. Производим проверку правильности построения эпюр. Для этого необходимо использовать дифференциальные зависимости между эпюрами, известные из сопротивления материалов:

$$q = \frac{dQ}{dx}; \quad Q = \frac{dM}{dx}.$$

Пример 3.2.2. Для балок, приведенных на рис.3.5, 3.6, от заданной нагрузки определить усилия M и Q в сечениях и построить эпюры изгибающих моментов M_p и поперечных сил Q_p самостоятельно.

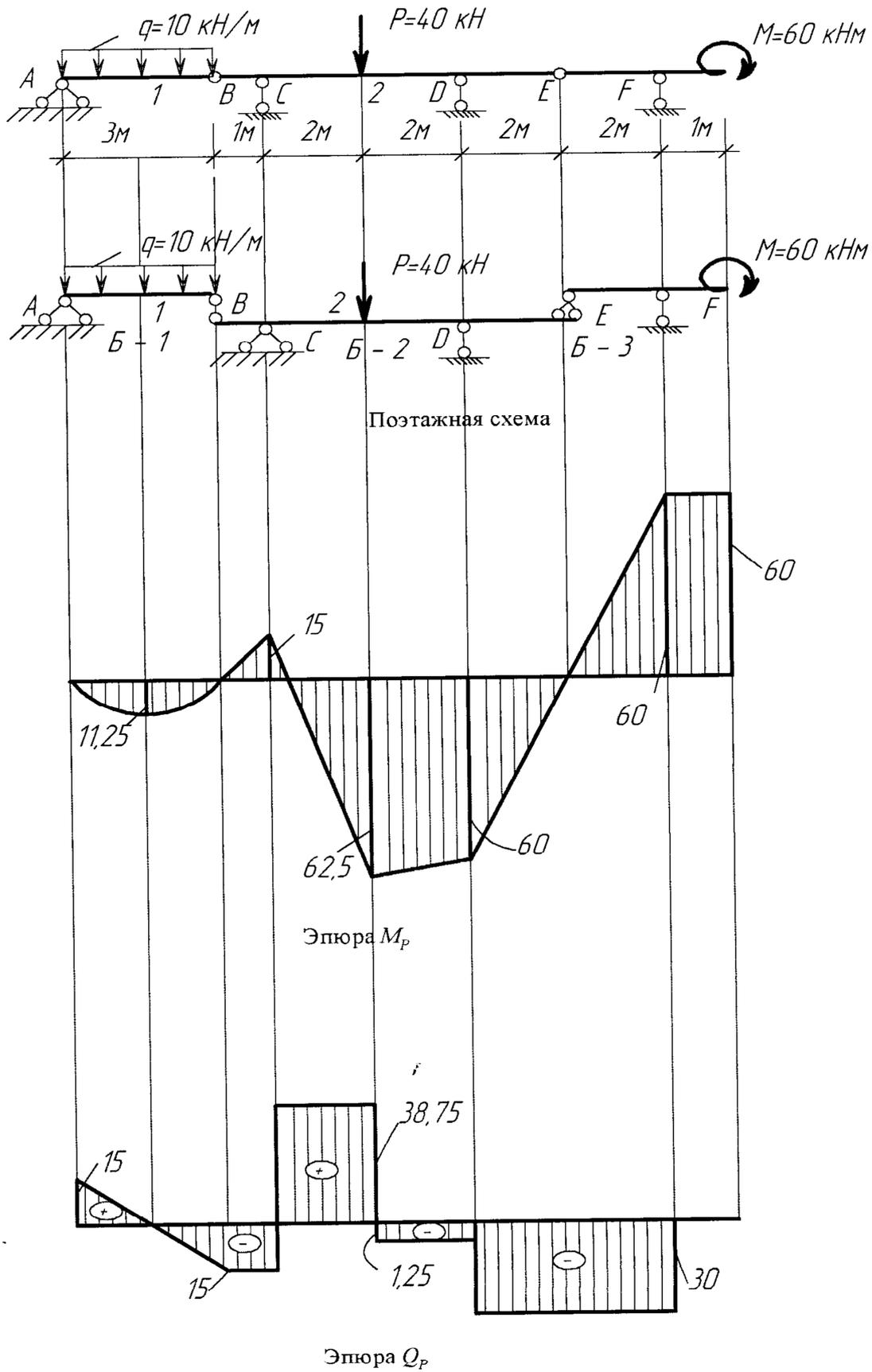


Рис.3.3

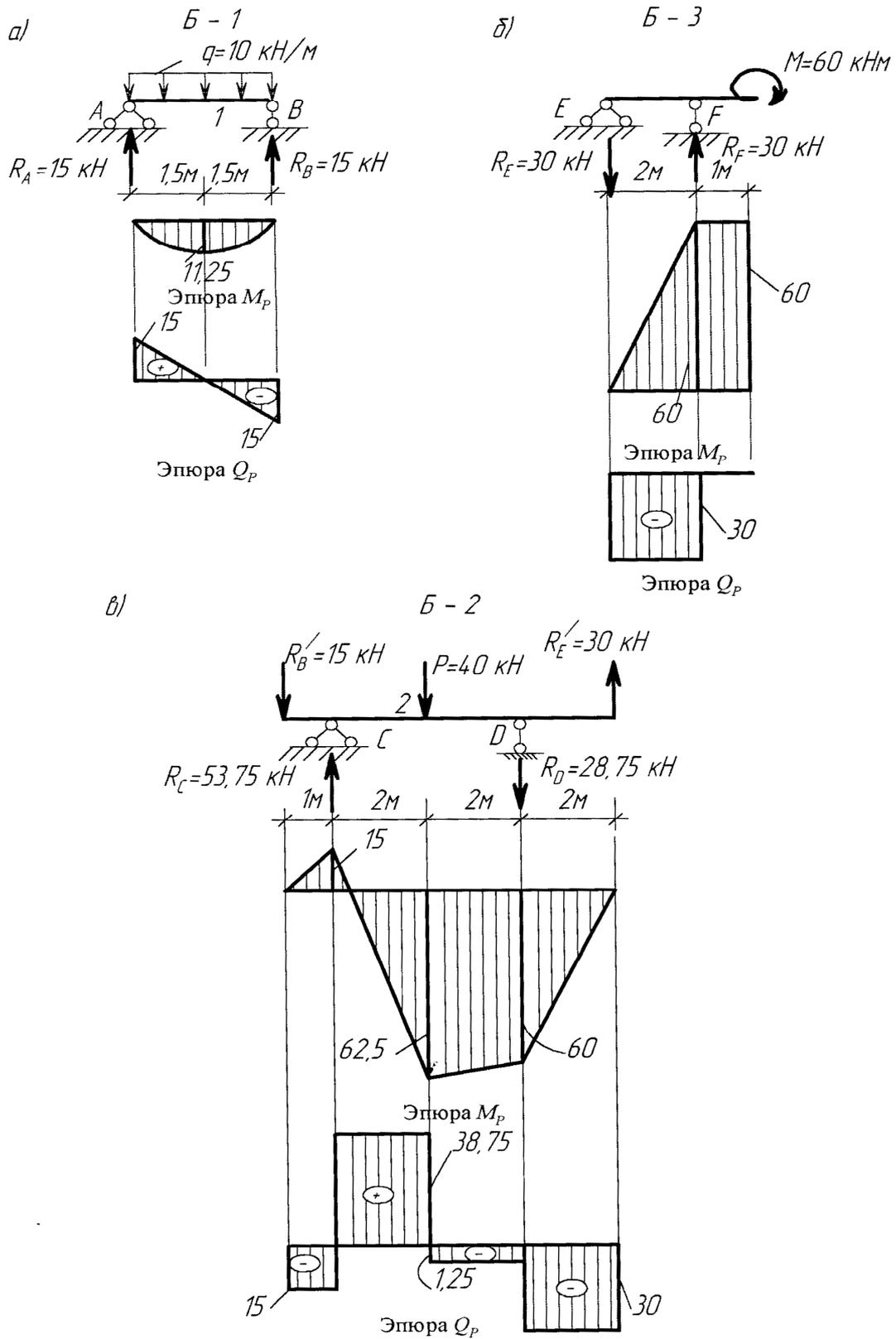
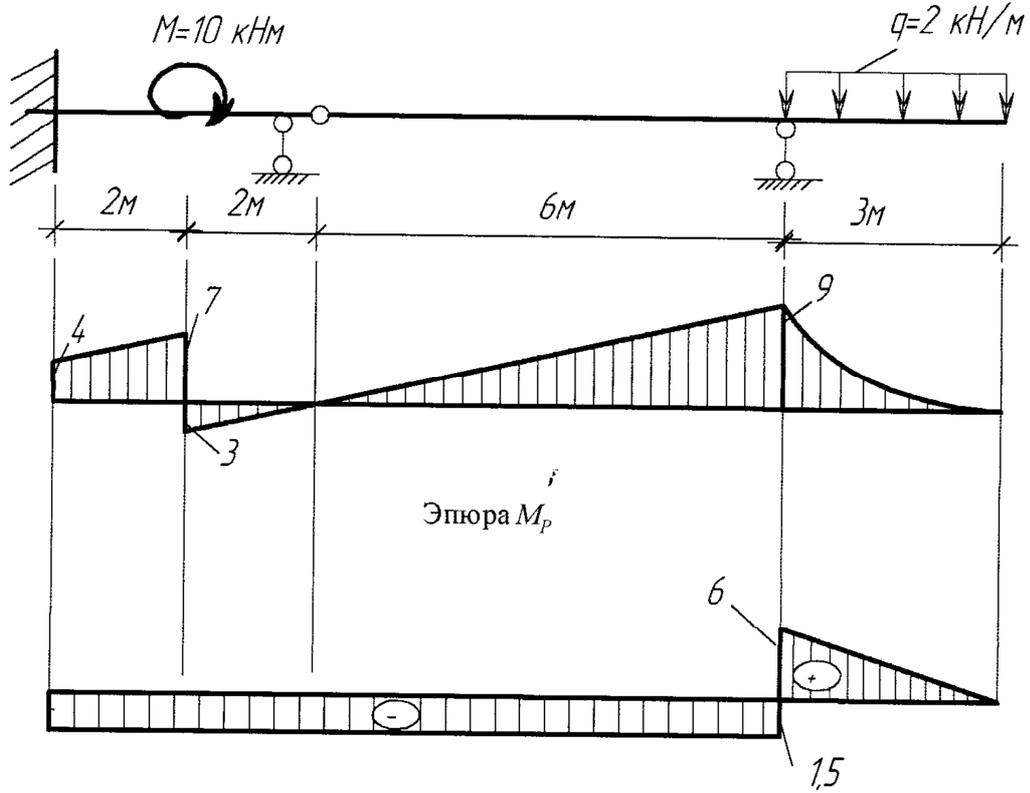
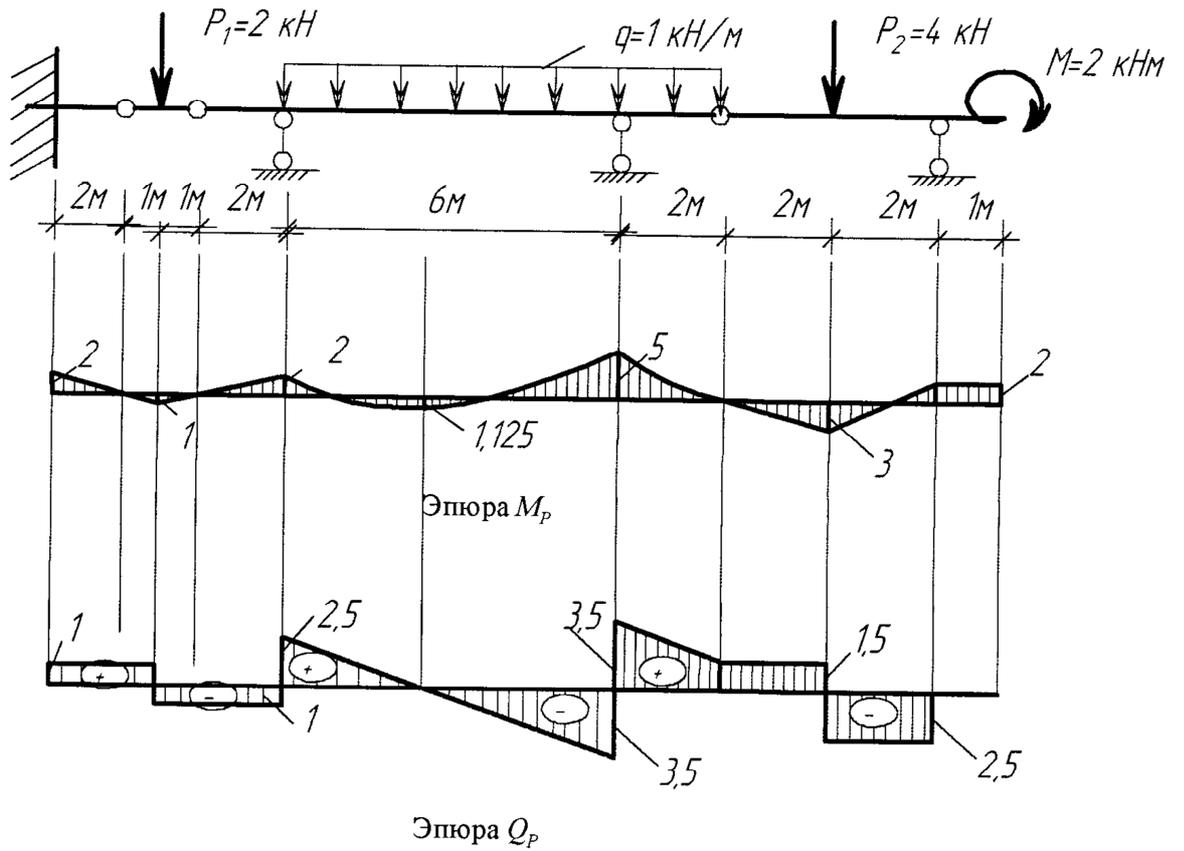


Рис. 3.4



Эпюра Q_p

Рис. 3.5

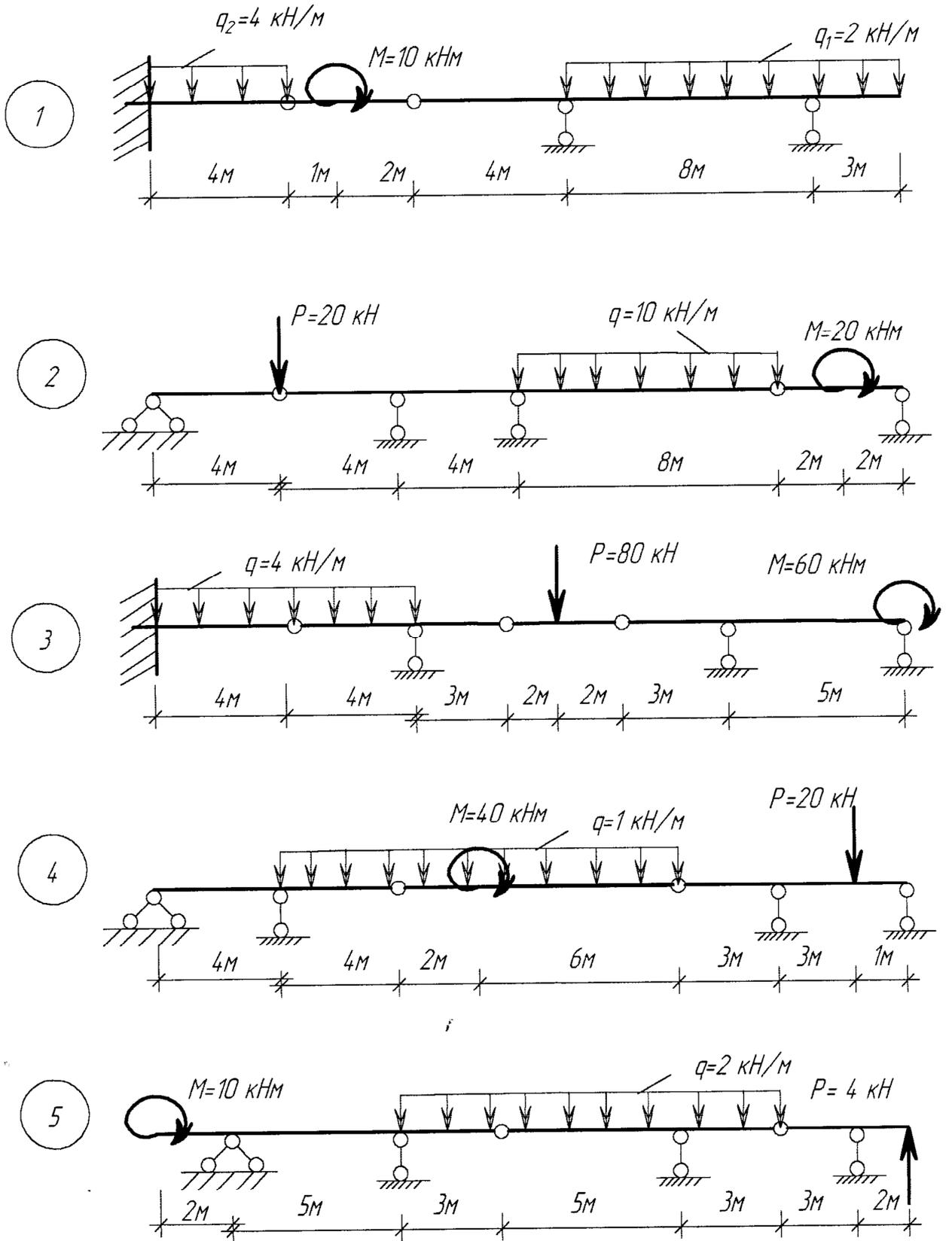


Рис.3.6

3.3 Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий в сечениях многопролетных статически определимых балок

Линией влияния называется графическое изменение изучаемой величины в одном и том же сечении в зависимости от различных положений единичной подвижной нагрузки. Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий в сечениях многопролетных балок удобно выполнять кинематическим методом. Он основан на принципе возможных перемещений Лагранжа: если материальная система находится в равновесии, то сумма работ всех действующих на нее сил на любом возможном бесконечно малом ее перемещении должна быть равна нулю.

Принцип предусматривает уравновешенную систему сил и материальную систему, обладающую возможными бесконечно малыми перемещениями. Это позволяет заменить синусы и тангенсы углов, образованных в результате перемещений углами, а перемещения рассматривать в виде отрезков, перпендикулярных радиусам вращения.

Пример 3.3.1. Построить линии влияния опорной реакции R_A и внутренних усилий в сечении 1-1 многопролетной балки от единичной подвижной нагрузки (рис.3.7а)

Решение:

1. Строим линию влияния опорной реакции R_A . Устраняем связь в опоре А, превращая балку в механизм с одной степенью свободы. Заменяя влияние устраненной связи положительной реакцией R_A , получим уравновешенную систему сил. Точке приложения реакции R_A в ее направлении придадим бесконечно малое перемещение $\delta = 1$, принятое за масштаб ординат графика перемещений (рис.3.7, б). Используя принцип возможных перемещений, составим уравнение работ $-P \cdot Y_x + R_A \cdot 1 = 0$, откуда $R_A = P \cdot Y_x$. То есть любая ордината графика перемещений, взятая под грузом $P = 1$, выражает опорную реакцию R_A . Следовательно, полученный график перемещений будет представлять собой линию влияния реакции R_A (рис.3.7, в).

2. Строим линию влияния поперечной силы в сечении 1-1. Устраняем в нем связь, обуславливающую наличие поперечной силы, и заменяем влияние этой связи положительной силой Q_1 . Получаем уравновешенную систему сил. Точкам приложения Q_1 в ее направлении придадим бесконечно малое перемещение $\delta = 1$ (рис.3.7,г). Используя принцип возможных перемещений, составим уравнение работ:

$Q_1 \cdot 1 - P \cdot Y_x = 0$, откуда $Q_1 = Y_x$. То есть любая ордината графика перемещений, взятая под грузом $P=1$, выражает поперечную силу Q_1 . Следовательно, полученный график представляет собой линию влияния поперечной силы Q_1 в сечении 1-1 (рис.3.7, д).

Строим линию влияния изгибающего момента в сечении 1-1. Устраняем связь, воспринимающую изгибающий момент, и заменяем ее влияние положительным изгибающим моментом M_1 . Получаем уравновешенную систему сил. Точкам приложения M_1 в его направлении придадим бесконечно малое угловое перемещение $\delta = 1$, принятое за масштаб ординат графика перемещений (рис.3.7, е). Составим уравнение работ $M_1 \cdot \delta - P \cdot Y_x = 0$, откуда $M_1 = Y_x$. То есть любая ордината графика перемещений, взятая под грузом $P=1$, выражает изгибающий момент M_1 в сечении 1-1. Следовательно, полученный график представляет собой линию влияния изгибающего момента M_1 в сечении 1-1. (рис.3.7, ж).

Пример 3.3.2 Построить линии влияния опорной реакции R_A и внутренних усилий в сечении 1-1 многопролетной балки от единичной подвижной нагрузки (рис.3.8, а).

Решение:

1. Строим линию влияния реакции в опоре А.

Устраняем связь, воспринимающую вертикальную составляющую реакции в опоре А (рис.3.8, б), и заменяем ее влияние реакцией R_A , действующей в положительном направлении. Придаем точке приложения R_A в ее направлении бесконечно малое перемещение $\delta = 1$, строим график возможных перемещений, который и будет представлять собой линию влияния R_A (рис.3.8, в).

2. Строим линию влияния поперечной силы в сечении 1-1. Устраняем связь, воспринимающую поперечную силу, и заменяем ее влияние положительной поперечной силой Q_1 . Придаем точкам приложения Q_1 бесконечно малое перемещение $\delta = 1$ (рис.3.8, г), строим график возможных перемещений, который будет представлять собой линию влияния поперечной силы Q_1 (рис.3.8, д).

3. Строим линию влияния изгибающего момента в сечении 1-1. Устраняем связь, воспринимающую изгибающий момент, и заменяем ее влияние положительным изгибающим моментом M_1 . Придаем точкам приложения M_1 бесконечно малое угловое

перемещение $\delta = 1$ (рис.3.8,е), строим график возможных перемещений, который будет представлять собой линию влияния изгибающего момента M_1 (рис.3.8,ж).

Пример 3.3.3 Построить линии влияния опорных реакций R_A , R_C и внутренних усилий в сечениях 1-1 и 2-2 многопролетных балок (рис.3.9). Результаты решения приведены на рисунке.

Пример 3.3.4 Построить линии влияния опорных реакций R_A , R_C и внутренних усилий в сечениях 1-1 и 2-2 многопролетных балок (рис.3.10) самостоятельно.

3.4 Определение изучаемой величины по линиям влияния

Изучаемая величина S по линии влияния от “ n ” сосредоточенных сил выражается

$$S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot Y_i, \quad (3.2)$$

где Y_i - ордината линии влияния под силой P_i .

На прямолинейном участке линии влияния изучаемая величина S от n сосредоточенных моментов M_i выражается

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i, \quad (3.3)$$

где α_i - угол наклона линии влияния на участке « i ».

Угол α_i считается положительным, если направление линии влияния на этом участке не совпадает с направлением сосредоточенного момента M , и отрицательным, если совпадает. Изучаемая величина по линии влияния от n равномерно распределенных нагрузок различных интенсивностей q_i равна $\sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_i$, где ω_i - площадь линии влияния, соответствующая участку загрузки q_i .

Пример 3.4.1 Определить по линиям влияния опорную реакцию R_A и внутренние усилия в сечении 1-1 балки от заданной нагрузки (рис.3.11).

Решение:

1. Строим линии влияния опорной реакции R_A , поперечной силы Q_i и изгибающий момент M_1 в сечении 1-1 от заданной нагрузки по линиям влияния.

$$R_A = 20 \cdot (0,278/1) + 100 \cdot 0,833 + 80 \cdot (-1,25) + 40 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 4 - \\ 40 \cdot 1/2 \cdot 1,25 \cdot 5 = -56,14 \text{ кН},$$

$$Q_1 = -20 \cdot (0,278/1) + 100 \cdot (-0,833) + 80 \cdot 1,25 + 40 \cdot 1/2 \cdot 1,25 \cdot 5 + \\ 40 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 4 = 216,14 \text{ кН},$$

$$M_1 = 20 \cdot 1,111 + 100 \cdot 3,333 + 80 \cdot (-5) - 40 \cdot 1/2 \cdot 5 \cdot 5 = -544,48 \text{ кНм}.$$

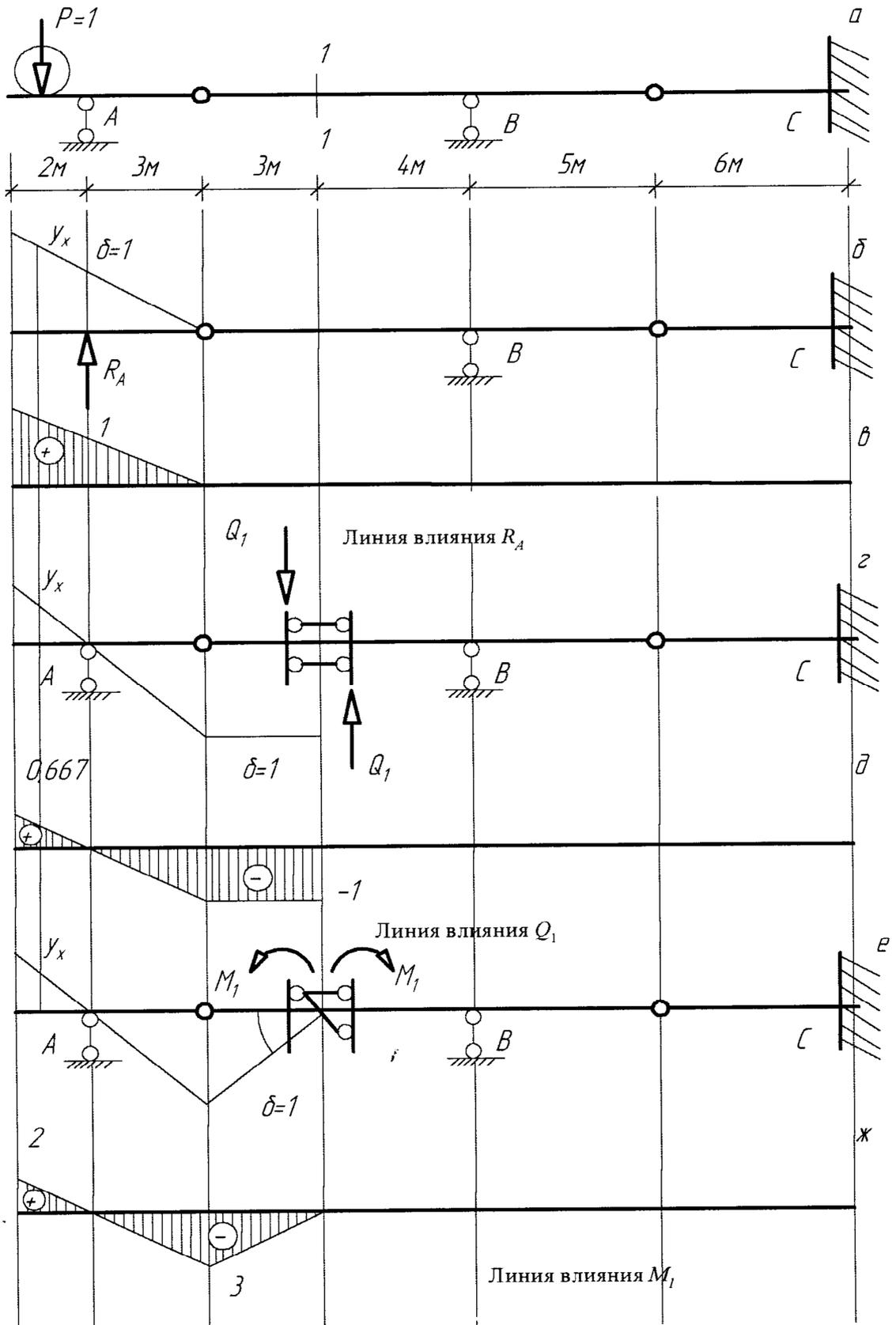


Рис.3.7

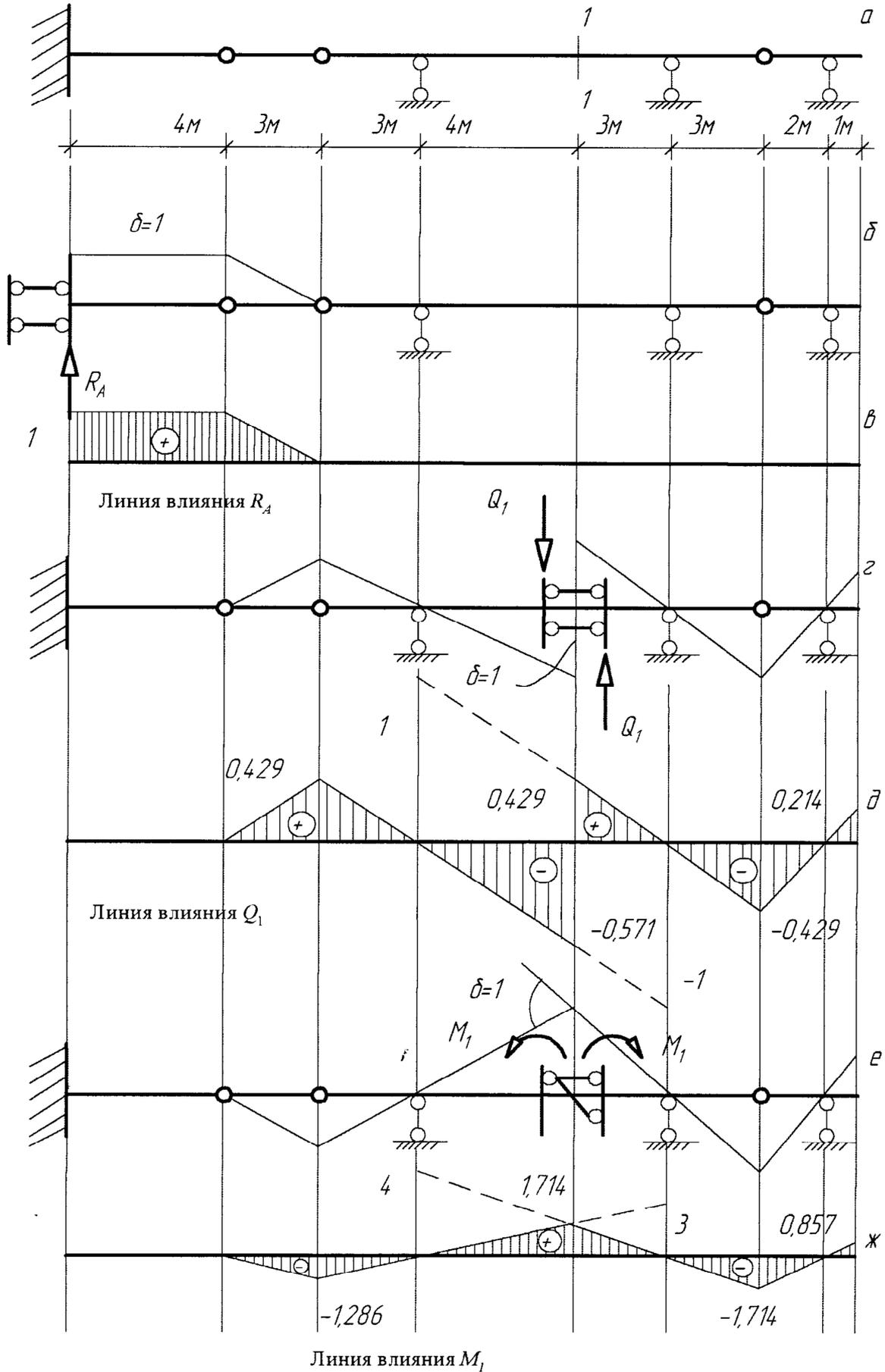


Рис.3.8

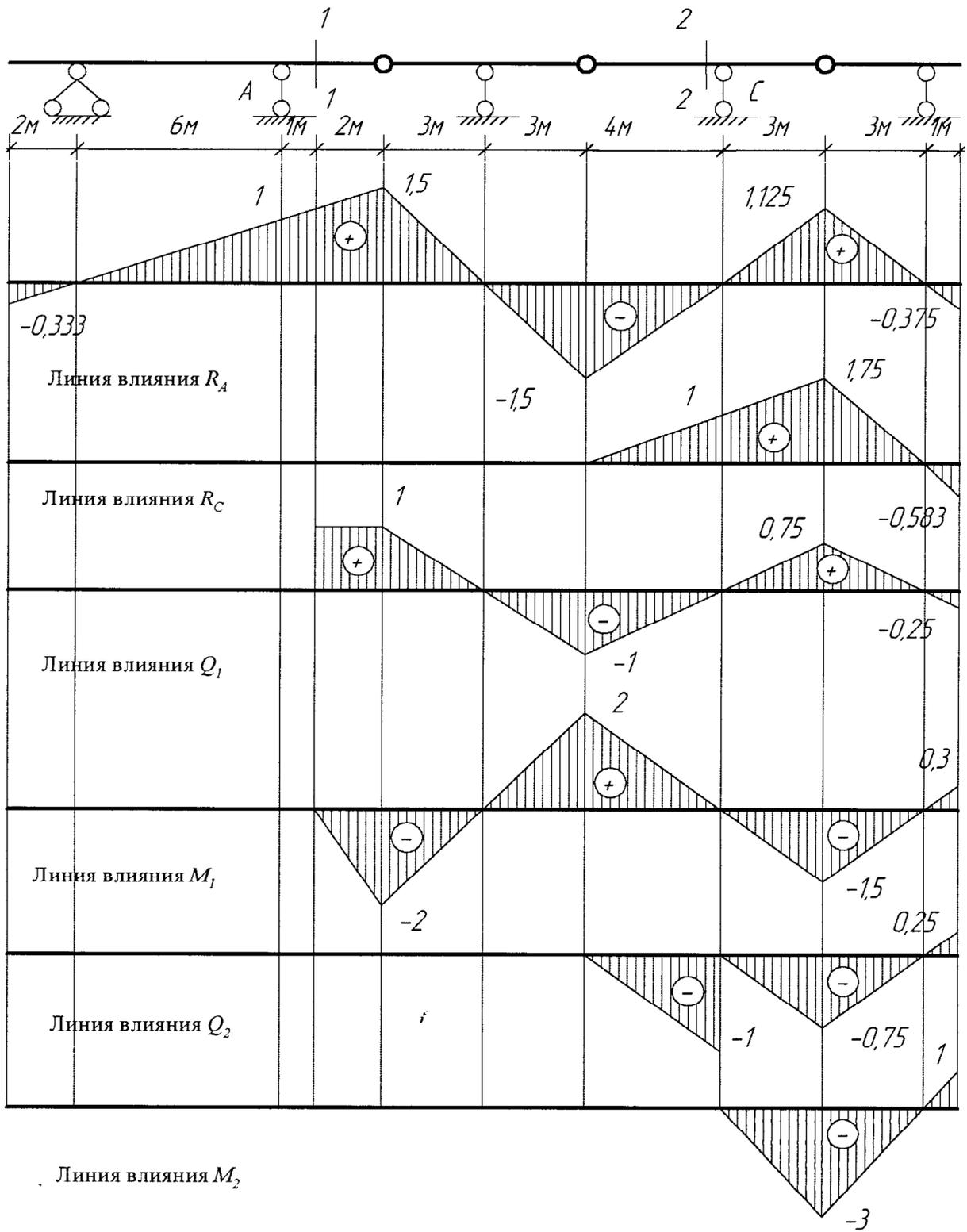


Рис.3.9

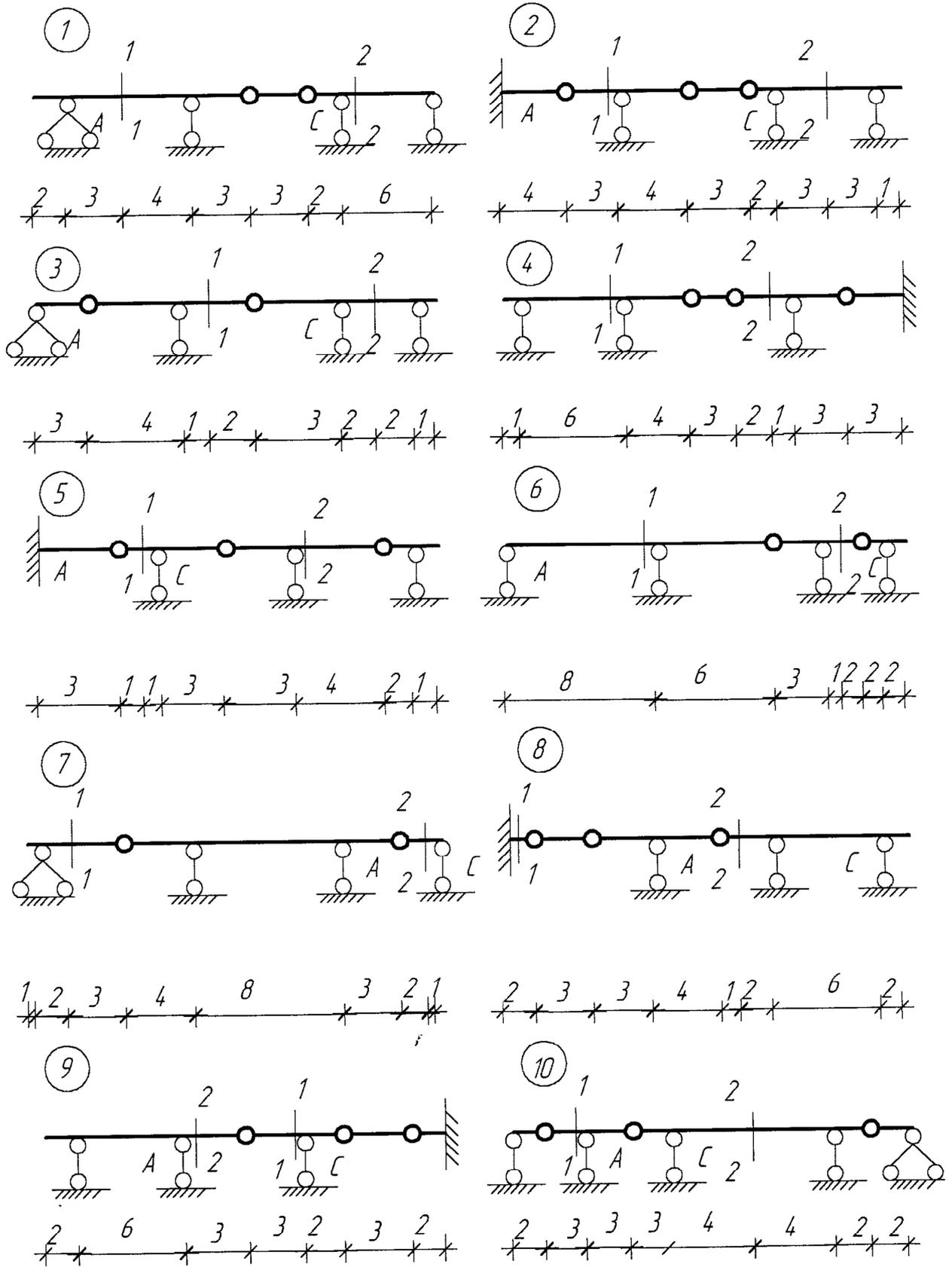


Рис. 3.10

3.5 Применение матриц влияния к расчету многопролетных статически определимых балок

Внутренние усилия S_i в произвольном сечении балки выражаются, согласно принципам независимости действия сил и пропорциональности, в виде:

$$S_i = \bar{S}_{i_1} P_1 + \bar{S}_{i_2} P_2 + \dots + \bar{S}_{i_k} P_k + \dots + \bar{S}_{i_n} P_n, \quad (3.4)$$

где \bar{S}_{i_k} - усилие в сечении i от единичной нагрузки, приложенной в сечении k ;

P_k - действительное силовое воздействие в сечении k . Для вычисления внутренних усилий в r сечениях балки получим:

$$\bar{S} = [L] \cdot \bar{P} \quad (3.5)$$

Здесь:

$$[L] = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \dots & \bar{S}_{1n} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \dots & \bar{S}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{S}_{r1} & \bar{S}_{r2} & \dots & \bar{S}_{rn} \end{bmatrix} - \text{матрица влияния,}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_r \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} - \text{вектор внутренних усилий и внешней нагрузки.}$$

$[L]$ -прямоугольная матрица порядка $(r \times n)$. Она содержит r строк по числу вычисляемых внутренних усилий и n столбцов по количеству независимых внешних нагрузок. В матрице $[L]$ элемент \bar{S}_{i_k} выражает величину усилия в сечении i от единичной нагрузки $P_k = 1$ в сечении k .

Поэтому матрица влияния изгибающих моментов $[M]$ в многопролетной балке:

$$[M] = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \dots & \bar{M}_{1n} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \dots & \bar{M}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_{r1} & \bar{M}_{r2} & \dots & \bar{M}_{rn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

может быть сформирована по столбцам из ординат эпюр изгибающих моментов в r сечениях балки при $P_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) или по строкам из ординат линий влияния

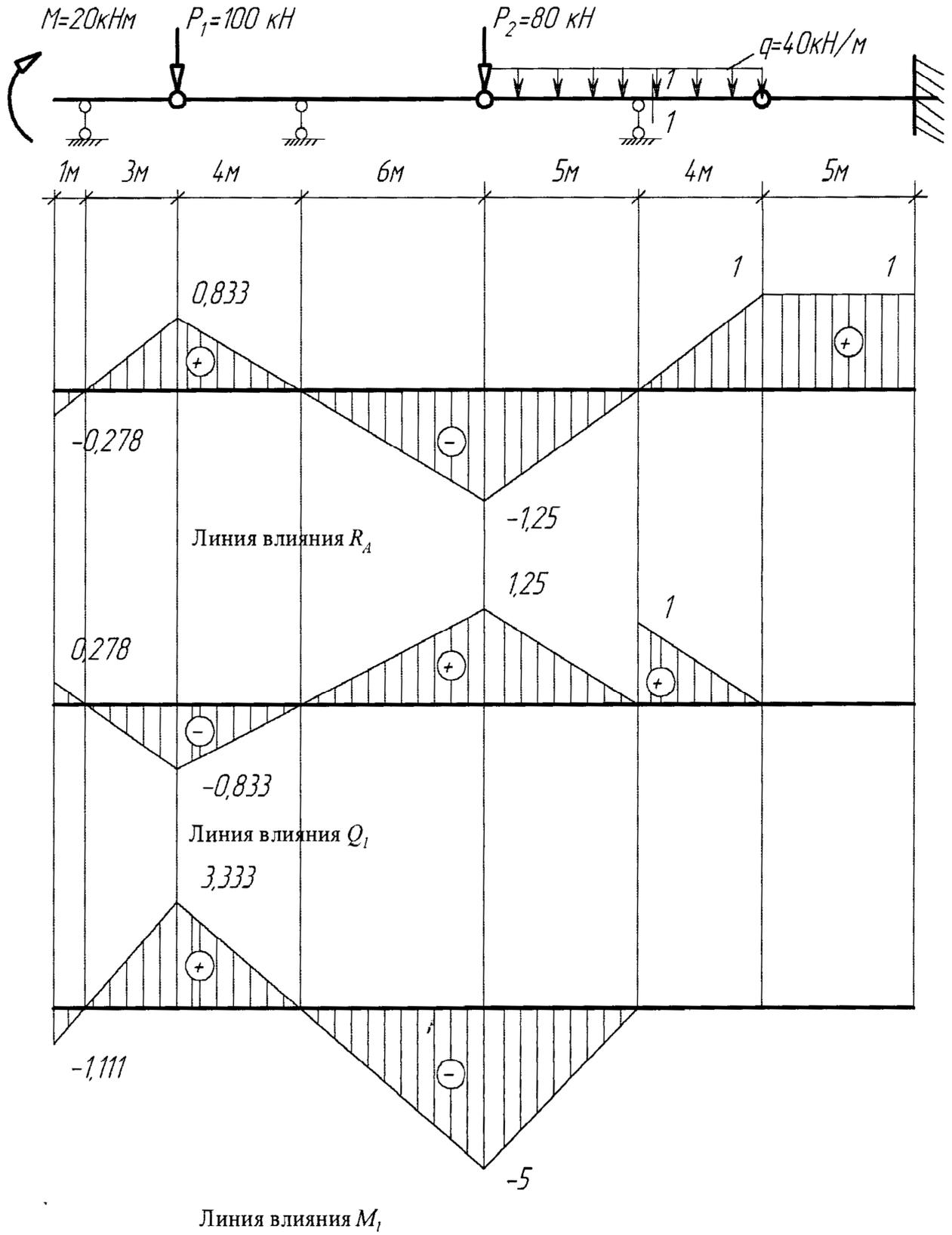


Рис. 3.11

изгибающих моментов для r сечений. В матрице $[M]$ элемент \bar{M}_{ik} выражает изгибающий момент в сечении i при $P_k = 1$. Изгибающие моменты в сечениях балки от заданной нагрузки будут выражаться:

$$\bar{M}_p = [M]\bar{P}, \quad (3.7)$$

где

$$\bar{M}_p = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_r \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{- вектор изгибающих моментов и внешней нагрузки}$$

Пример 3.4.1 Построить эпюру изгибающих моментов в многопролетной статически определимой балке от заданной нагрузки (рис. 3.12, а) с применением матрицы влияния.

Решение:

1. Назначаем расчетные сечения в балке и заданную нагрузку приводим к узловой (рис.3.12, б):

$$P_1 = 50 \text{ кН}, P_2 = P_3 = P_8 = P_9 = 0; P_4 = q \cdot d/2 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН};$$

$$P_5 = P_2 + 2 \cdot q \cdot d/2 = 50 + 2 \cdot 10 \cdot 1 = 70 \text{ кН};$$

$$P_6 = 2 \cdot q \cdot d/2 = 20 \text{ кН}; P_7 = q \cdot d/2 = 10 \text{ кН}.$$

2. Строим линии влияния изгибающих моментов в расчетных сечениях балки от единичной подвижной нагрузки $P = 1$ (рис.3.12, в-и).

3. Формируем матрицу влияния изгибающих моментов и вектор внешней нагрузки:

$$[M] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 8 & 4 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{P} = \begin{vmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

4. Вычисляем вектор изгибающих моментов \bar{M}_p в расчетных сечениях балки.

$$\bar{M}_p = [M] \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 8 & 4 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 70 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ 30 \\ -80 \\ 0 \\ 60 \\ 120 \end{pmatrix}$$

4. Строим эпюру изгибающих моментов в заданной балке от заданной нагрузки (рис.3.12, к).

4 ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

Плоской статически определимой фермой называется шарнирно-стержневая система, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных по концам полными идеальными шарнирами. Стержни, ограничивающие ферму сверху, называются верхним поясом (O_1, O_2, \dots, O_n) (рис.4.1); стержни, ограничивающие ферму снизу, нижним поясом (U_1, U_2, \dots, U_n); стержни, расположенные между поясами, называются решеткой. Она состоит из вертикальных стержней - стоек (V_1, V_2, \dots, V_n) и наклонных стержней – раскосов (D_1, D_2, \dots, D_n). Расстояние между соседними узлами поясов называется панелью фермы d , расстояния между опорами – пролетом L , а максимальное расстояние между поясами – высотой h . Ферма называется статически определимой, если для ее расчета достаточно уравнений равновесия статики, т.е. $2U = C + C_0$, где C - число стержней фермы, C_0 - число опорных связей и U - число узлов фермы.

4.1 Способы расчета ферм

При узловой передаче нагрузки в стержнях ферм возникают только продольные силы N . Для определения этих усилий существуют статические, кинематические и косвенные способы. В настоящем пособии рассматриваются только статические методы, как наиболее удобные для практических расчетов.

4.1.1 Способ вырезания узлов

Способ вырезания узлов заключается в последовательном определении усилий из условий равновесия узлов фермы. Каждый узел можно рассматривать как материальную точку, лежащую на плоскости и находящуюся в равновесии под действием внешних сил и усилий. Уравнения равновесия составляются в виде

$$\sum X = 0, \sum Y = 0.$$

Для независимого определения усилий оси X, Y удобно выбирать направленными перпендикулярно стержням фермы, а неизвестные усилия в стержнях принимать **растягивающими**.

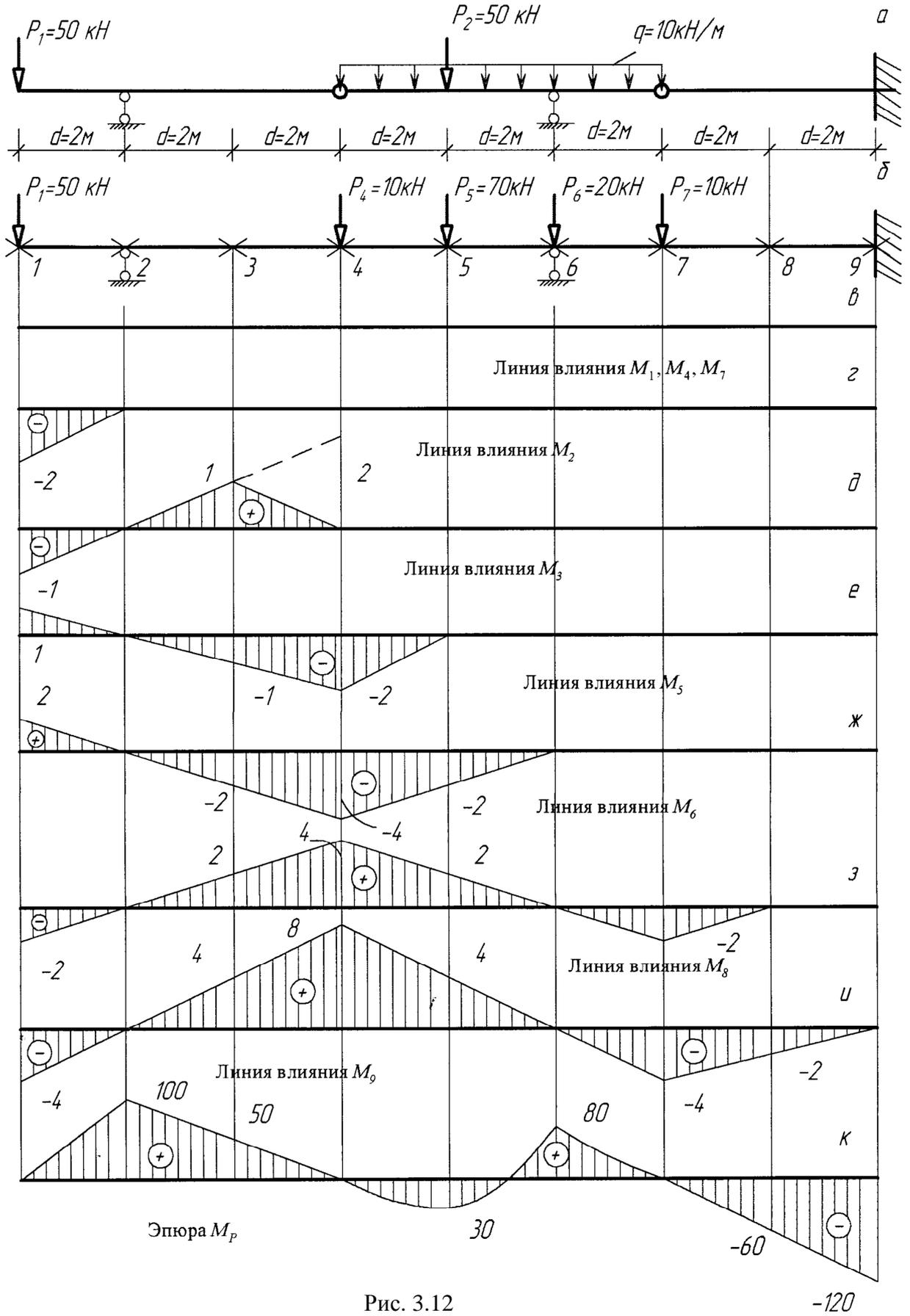


Рис. 3.12

Пример 4.1.1. Определить от заданной нагрузки усилия в стержнях фермы (рис.4.2) способом вырезания узлов.

Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; -20 \times 3 - 20 \times 6 + R_b \times 9 = 0, R_b = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; 20 \times 6 + 20 \times 3 - R_A \times 9 = 0, R_A = 20 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0; -20 - U_2 = 0; U_2 = 20 \text{ кН (растяжение)};$$

$$\sum Y = 0; -20 - V_1 = 0; V_1 = 20 \text{ кН (растяжение)}.$$

2. Вырезаем узел № 2 и рассматриваем его равновесие (рис.4.3, в):

$$\sum X = 0; 20\sqrt{2} - 20\cos 45^\circ + O_2\cos 45^\circ = 0; O_2 = -20 \text{ кН(сжатие)};$$

$$\sum Y = 0; 20\sqrt{2}\cos 45^\circ - 20 - D\cos 45^\circ = 0; D = -20 \text{ кН}$$

3. Вырезаем узел № 3 и рассматриваем его равновесие (рис.4.3, г):

$$\sum X = 0; -20 + U_3 = 0; U_3 = 20 \text{ кН (растяжение)};$$

$$\sum Y = 0; V_2 - 20 = 0; V_2 = 20 \text{ кН (растяжение)}.$$

В качестве проверки используем уравнение

$$\sum Y = 0; -20 - 20 + 20 + 20 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

4. Вырезаем узел А и рассматриваем его равновесие (рис.4.3, а):

$$\sum Y = 0; 20 + O_1\sin 45^\circ = 0; O_1 = -20\sqrt{2} = -28,2 \text{ кН (сжатие)};$$

$$\sum X = 0; 20\cos 45^\circ - U_1\cos 45^\circ = 0; U_1 = 20 \text{ кН (растяжение)}.$$

5. Вырезаем узел № 1 и рассматриваем его равновесие (рис.4.3, б):

$$\sum X = 0; -20 + U_2 = 0; U_2 = 20 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; V_1 - 20 = 0; V_1 = 20 \text{ кН}.$$

6. Вырезаем узел № 4 и рассматриваем его равновесие (рис.4.3, д):

$$\sum X = 0; 20 + O_3\sin 45^\circ = 0; O_3 = -20\sqrt{2} = -28,2 \text{ кН (сжатие)}.$$

7. Вырезаем узел В и проверяем справедливость результатов (рис.4.3, е):

$$\sum X = 0; -20 + 20\sqrt{2}\cos 45^\circ = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

$$\sum Y = 0; -20\cos 45^\circ + 20\cos 45^\circ = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Несмотря на простоту, в этом способе имеются определенные недостатки:

- наличие тригонометрических функций влияет на точность решения;
- ошибка в определении усилия для одного стержня приводит к неверному решению для всей фермы;

- для определения усилия в одном или нескольких конкретных стержнях необходимо последовательно рассматривать несколько узлов фермы. Используя способ последовательного вырезания узлов, можно получить частные случаи равновесия наиболее часто встречающихся узлов фермы. Двухстержневой ненагруженный узел (рис.4.4, а) будет находиться в равновесии, если оба усилия N_1 и N_2 нулевые, что следует из уравнений $\sum X = 0, \sum Y = 0$. Равновесие нагруженного двухстержневого узла в зависимости от направления нагрузки будет при однозначных усилиях N_1 и N_2 (рис.4.4, б), разнозначных - N_1 и N_2 (рис.4.4, в) или одном нулевом усилии $N_2 = 0$ (рис.4.4, г). Трехстержневой ненагруженный узел (рис.4.4, д) будет находиться в равновесии, если усилия N_1 и N_2 равны, а усилие N_3 равно нулю.

Равновесие нагруженного трехстержневого узла в зависимости от направления нагрузки будет при разнозначном по сравнению с нагрузкой усилие N_3 (рис.4.4, е), однозначном N_3 (рис.4.4, ж) или попарно равных значениях усилий $N_1 = N_2, N_3 = -P$ (рис.4.4, з). Четырехстержневой ненагруженный узел, в зависимости от положения стержней, будет в равновесии при разнозначных усилиях N_1 и N_2 (рис.4.4, и), однозначных - N_1 и N_2 (рис.4.4, к) и попарно равных $N_1 = N_2, N_3 = N_4$ (рис.4.4, л).

4.1.2 Способ простых сечений

Способ простых сечений заключается в определении неизвестных усилий из условия равновесия любой отсеченной части фермы. На отсеченную часть действуют силы и усилия, образуя плоскую, произвольную систему сил, для которой можно -

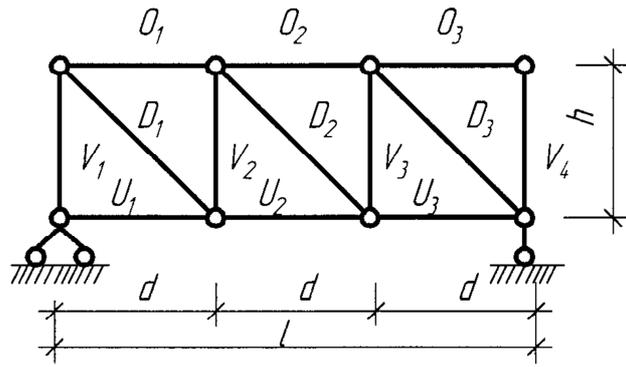


Рис.4.1

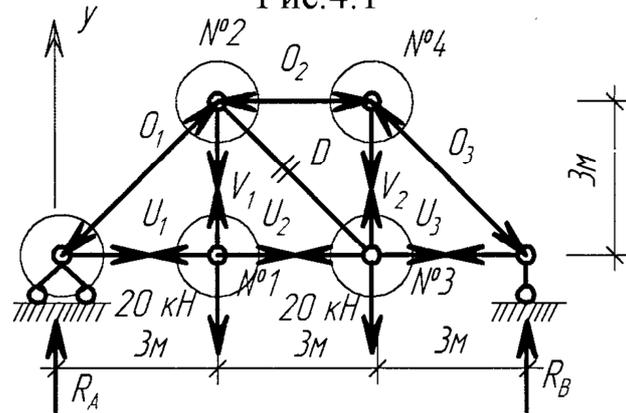


Рис.4.2

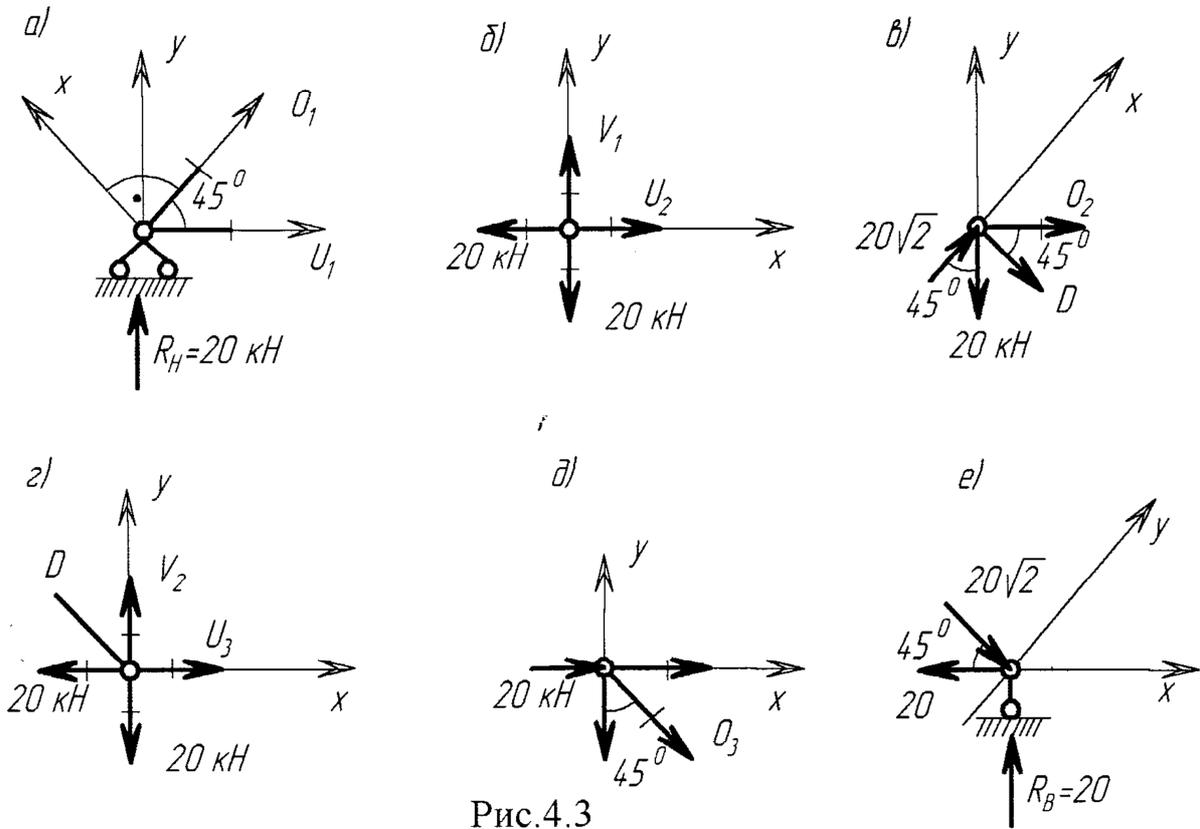


Рис.4.3

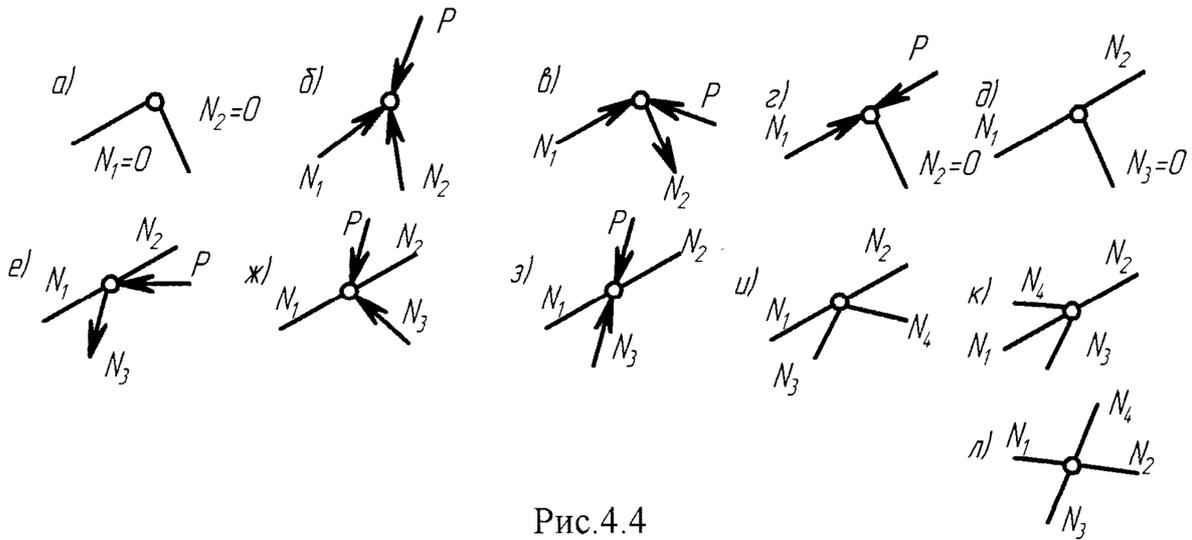


Рис.4.4

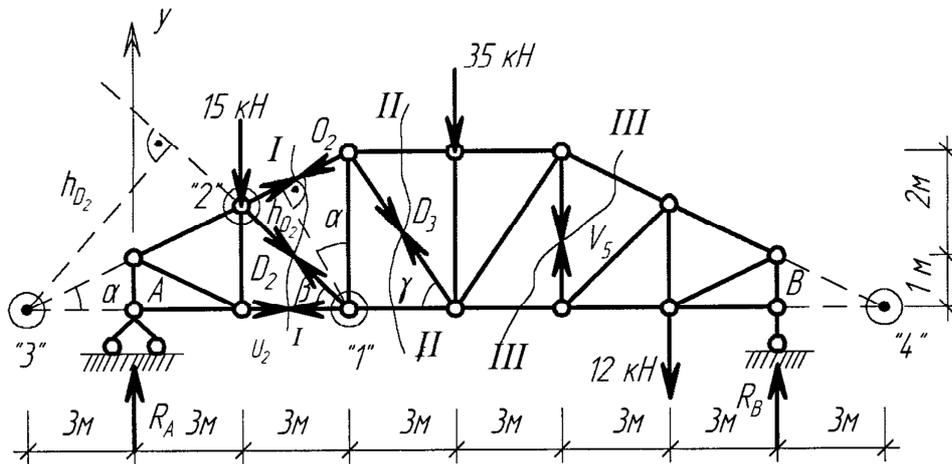


Рис.4.5

составить три уравнения статики в виде . Здесь 1, 2, 3
 моментные точки, выбираемые на пересечении двух из трех стержней, попавших в сечение. Поэтому сквозное сечение следует проводить не более чем через три стержня. В фермах с параллельными поясами уравнениями равновесия будут такие: где ось Y проводится перпендикулярно поясам (двум параллельным стержням, перерезанным сечением).

Пример 4.1.2. Определить от заданной нагрузки усилия стержнях фермы (рис.4.5) способом простых сечений.

в

Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; -15 \times 3 - 35 \times 9 - 12 \times 15 + R_B \times 18 = 0; \quad R_B = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; 15 \times 15 + 35 \times 9 + 12 \times 3 - R_A \times 18 = 0; \quad R_A = 32 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 - 15 - 35 - 12 + 32 + 30 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

2. Определяем усилие O_2 . Проводим сечение I-I, назначаем моментную точку «1», рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде:

$$\sum M_1 = 0; -R_A \times 6 + 15 \times 3 - O_2 \times h_{O_2} = 0;$$

где $h_{O_2} = 3 \times \cos\alpha$ - плечо усилия O_2 относительно точки «1»,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 0,3218 \text{ рад}, \cos\alpha = 0,9487,$$

$$h_{O_2} = 3 \times 0,9487 = 2,85 \text{ м.} \quad \text{Тогда: } O_2 = \frac{45 - 32 \times 6}{2,85} = -51,58 \text{ кН (сжатие)}.$$

3. Определяем усилие D_2 . Используя сечение I-I, назначаем моментную точку «3», рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_3 = 0; 32 \times 3 - 15 \times 6 - D_2 \times h_{D_2} = 0;$$

где $h_{D_2} = 3 \times \sin\beta$ – плечо усилия D_2 относительно точки «3», $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$;

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) = 0,5880 \text{ рад}, \quad \sin\beta = 0,5547, \quad h_{D_2} = 9 \times 0,5547 = 4,99 \text{ м}.$$

$$\text{Тогда: } D_2 = \frac{(32 \times 3 - 90)}{4,99} = 1,20 \text{ кН (растяжение)}.$$

4. Определяем усилие U_2 :

$$\sum M_2 = 0; -R_A \times 3 + U_2 \times 2 = 0; \quad U_2 = \frac{32 \times 3}{2} = 48 \text{ кН(растяжение)}.$$

5. Определяем усилие D_3 . Проводим сечение II-II, рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде:

$$\sum Y = 0: R_A - 15 - D_3 \times \sin\gamma = 0, \text{ где } \gamma = 45^\circ, \sin\gamma = 0,7071.$$

$$\text{Тогда: } D_3 = \frac{(32 - 15)}{0,7071} = 24,04 \text{ кН (растяжение)}.$$

6. Определяем усилие V_5 . Проводим сечение III-III, назначаем моментную точку

«4», рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде:

$$\sum M_A = 0; -V_5 \times 9 - R_B \times 3 + 12 \times 6 = 0; \quad V_5 = \frac{72 - 30 \times 3}{9} = 2 \text{ кН (сжатие)}.$$

Пример 3.1.3. От заданных узловых нагрузок определить усилия в стержнях 1-2, 2-3, 1-7, 5-6, 3-7, 2-5 фермы (рис.4.6) способами простых сечений и вырезания узлов.

Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad 10 \times 3 - 20 \times 3 - 30 \times 6 + R_B \times 12 = 0; \quad R_B = 17,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \quad 10 \times 15 - R_A \times 12 + 20 \times 9 + 30 \times 6 = 0; \quad R_A = 42,5 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad -10 + 42,5 - 20 - 30 + 17,5 = 0.$$

2. Определяем усилие N_{1-2} . Проводим сечение I-I, назначаем моментную точку «7», рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_7 = 0; \quad 10 \times 3 + N_{1-2} \times 3 = 0 \text{ и определяем } N_{1-2} = -10 \text{ кН (сжатие)}.$$

3. Определяем усилие N_{2-3} . Проводим сечение II-II, назначаем моментную точку «7», рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_7 = 0; \quad 10 \times 3 - 20 \times 3 + N_{2-3} \times 3 = 0 \text{ и определяем } N_{2-3} = 10 \text{ кН (растяжение)}.$$

4. Определяем усилие N_{1-7} . Проводим сечение III-III, рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad -10 + R_A + N_{1-7} = 0 \text{ и определяем } N_{1-7} = 10 - 42,5 = -32,5 \text{ кН (сжатие)}$$

5. Определяем усилие N_{5-6} . Проводим сечение II-II, назначаем моментную точку «3», рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_3 = 0; \quad R_B \times 6 + N_{1-7} \times 3 = 0 \text{ и определяем } N_{1-7} = -35 \text{ кН (сжатие)}.$$

6. Определяем усилие N_{3-7} . Проводим сечение II-II, рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad R_B \times 30 + N_{3,7} \times \sin \alpha = 0,$$

где $\sin \alpha = 3 / \sqrt{3^2 + 6^2} = 0,4472$, и определяем

$$N_{3,7} = (30 - 17,5) / 0,4472 = 27,95 \text{ кН (растяжение)}.$$

7. Определяем усилие $N_{2,5}$. Вырезаем узел 5, рассматриваем его равновесие, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad -20 - N_{2,5} = 0, \text{ и определяем } N_{2,5} = -20 \text{ кН (сжатие)}.$$

Пример 4.1.4. От заданных узловых нагрузок определить усилия в стержнях 1-2, 2-3, 4-5, 5-6, 1-6, 2-6, 3-6, 3-7, 6-7 фермы (рис.4.7) способами простых сечений и вырезания узлов.

Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad 20 \times 3 - 40 \times 3 + R_B \times 9 - 10 \times 12 = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \quad 20 \times 12 - R_A \times 9 + 40 \times 6 - 10 \times 3 = 0; \quad R_A = 50 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad -20 + R_A - 40 + R_B - 10 = 0.$$

2. Определяем усилие $N_{1,2}$. Проводим сечение I-I, назначаем моментную точку «б», рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_b = 0; \quad 20 \times 9 - R_A \times 6 + N_{1,2} \times 5 = 0 \text{ и определяем } N_{1,2} = 24 \text{ кН (растяжение)}$$

3. Определяем усилие $N_{4,5}$. Используя сечение I-I, назначаем моментную точку «1», рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \times 3 - N_{4,5} \times 5 = 0 \text{ и определяем } N_{4,5} = 12 \text{ кН (растяжение)}.$$

4. Определяем усилие $N_{1,6}$. Проводим сечение I-I, рассматриваем равновесие левой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad -40 - N_{5,2} = 0 \text{ и определяем } N_{5,2} = -40 \text{ кН (сжатие)}.$$

$$\sum Y = 0; \quad -20 + R_A + N_{1,6} \times \sin \alpha = 0, \text{ где } \sin \alpha = 5 / \sqrt{6^2 + 5^2} = 0,6402,$$

и определяем $N_{1,6} = (20 - 50) / 0,6402 = -46,86 \text{ кН (сжатие)}$.

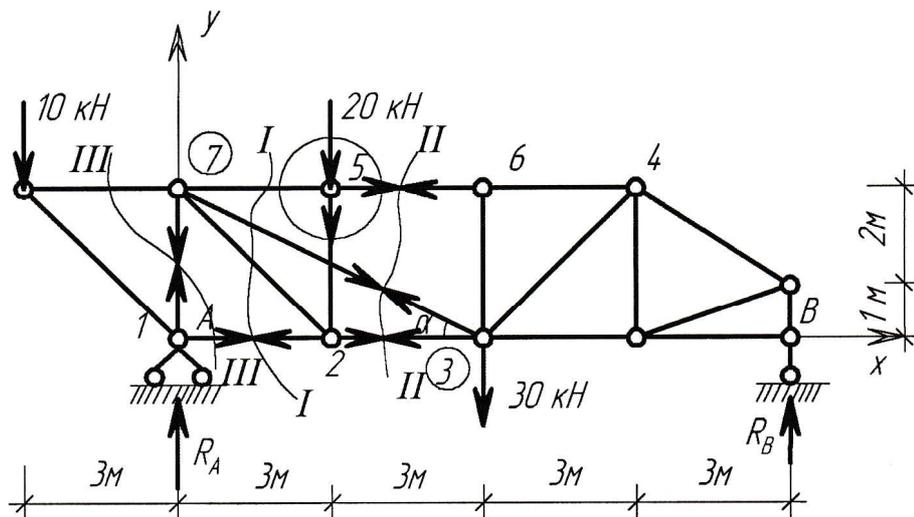


Рис.4.6

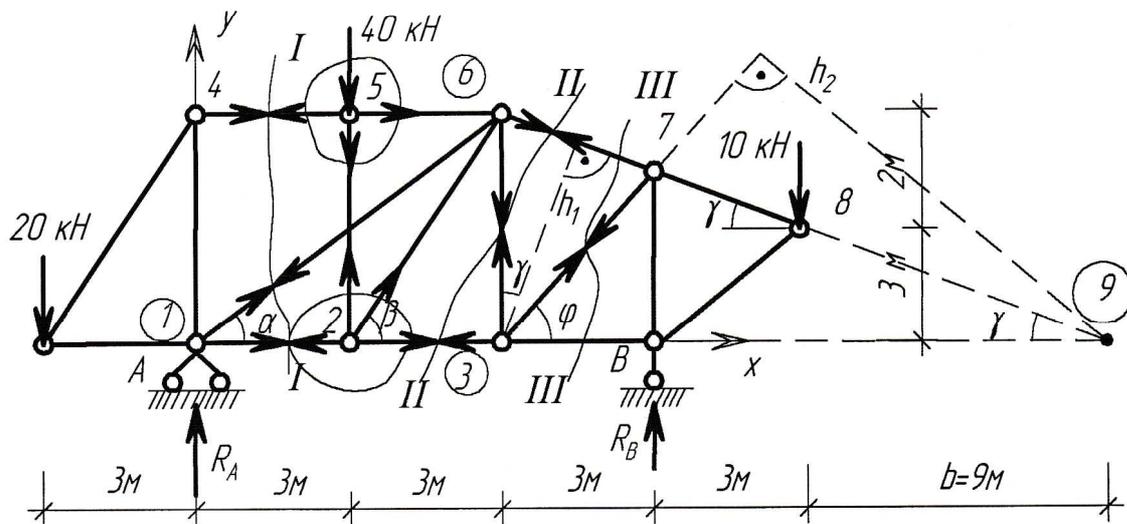


Рис.4.7

5. Определяем усилие $N_{5.6}$. Вырезаем узел 5, рассматриваем его равновесие, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum X = 0; \quad -N_{4.5} + N_{5.6} = 0 \text{ и определяем } N_{5.6} = N_{4.5} = 12 \text{ кН (растяжение).}$$

6. Определяем усилие $N_{5.2}$. Рассматриваем равновесие узла 5,

$$\sum Y = 0; \quad -40 + N_{5.2} = 0 \text{ и определяем } N_{5.2} = -40 \text{ кН (растяжение).}$$

7. Определяем усилие $N_{2,6}$. Вырезаем узел 2, рассматриваем его равновесие, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad N_{2,5} + N_{2,6} \times \sin \alpha = 0, \quad \text{где } \sin \alpha = 5 / \sqrt{3^2 + 5^2} = 0,8575,$$

и определяем $N_{2,6} = -N_{2,5} / \sin \alpha = -(-40) / 0,8575$ кН (растяжение).

8 Определяем усилие $N_{2,3}$. Проводим сечение II-II, назначаем моментную точку «6», рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_6 = 0; \quad -N_{2,3} \times 5 + R_B \times 3 - 10 \times 6 = 0 \text{ и}$$

$$\text{определяем } N_{2,3} = (20 \times 3 - 10 \times 6) / 5 = 0.$$

9. Определяем усилие $N_{3,6}$. Проводим сечение II-II, назначаем моментную точку «9», рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_9 = 0; \quad -N_{3,6} \times (b + 6) - R_B \times (b + 3) + 10 \times 6 = 0,$$

где $b = 3 / \operatorname{tg} \gamma = 3 / (2/6) = 9$ м и определяем $N_{3,6}$

$$N_{3,6} = (10 \times 9 - 20 \times 12) / 15 = -10 \text{ кН (сжатие)}.$$

10. Определяем усилие $N_{6,7}$. Проводим сечение II-II, назначаем моментную точку «3», рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_3 = 0; \quad N_{6,7} \times h_1 + R_B \times 3 - 10 \times 6 = 0,$$

где $h_1 = 5 \times \cos \gamma = 5 \times 6 / \sqrt{6^2 + 2^2} = 4,743$ м и определяем $N_{6,7}$

$$N_{6,7} = (10 \times 6 - 20 \times 3) / 4,742 = 0.$$

11. Определяем усилие $N_{3,7}$. Проводим сечение III-III, назначаем моментную точку «9», рассматриваем равновесие правой отсеченной части, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_9 = 0; \quad N_{3,7} \times h_2 - R_B \times (3 + b) + 10 \times b = 0,$$

где $h_2 = (6 + b) \times \sin \varphi = 15 \times 4 / \sqrt{3^2 + 4^2} = 12,0$ м и определяем $N_{3,7}$

$$N_{3,7} = (20 \times 12 - 10 \times 9) / 12,0 = 12,5 \text{ кН (растяжение)}.$$

4.1.3 Способ замкнутых сечений

Способ замкнутых сечений применяется для расчета ферм, в которых нельзя провести простое сечение и нет двухстержневых узлов. Замкнутое сечение должно пересекать по одному разу не более трех стержней, а остальные стержни - по два раза, образующих тем самым уравновешивающую систему сил, которую не следует учитывать в уравнениях равновесия.

Пример 4.1.5. От заданной нагрузки определить усилия в стержнях фермы (рис. 4.8) способом замкнутых сечений.

Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad -10 \times 3 - 35 \times 6 - 40 \times 3 + R_B \times 9 = 0; \quad R_B = 40 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \quad -40 \times 3 + 10 \times 6 + 35 \times 3 - V_A \times 9 = 0; \quad V_A = 5 \text{ кН},$$

$$\sum X = 0; \quad -H_A + 40 = 0; \quad H_A = 40 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad -10 - 35 + 5 + 40 = 0.$$

2. Определяем усилие V_1 . Проводим замкнутое сечение, назначаем моментную точку «1», рассматриваем равновесие внутренней отсеченной части фермы, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_A \times 9 - H_A \times 9 - V_1 \times 9 + 35 \times 3 = 0$$

и определяем $V_1 = (-5 \times 9 - 40 \times 6 + 105) / 9 = -20$ кН (сжатие).

3. Определяем усилие O_2 . Рассматривая равновесие внутренней части фермы, составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum X = 0; \quad -H_A - O_2 = 0 \text{ и определяем } O_2 = -40 \text{ кН (сжатие)}.$$

4. Определяем усилие V_2 . Назначаем моментную точку «2», рассматриваем равновесие внутренней части фермы и составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_2 = 0; \quad H_A \times 6 - 35 \times 6 - V_2 \times 9 = 0;$$

$$V_2 = (-40 \times 6 - 210) / 9 = -50 \text{ кН (сжатие)}.$$

5. Определяем усилия O_1 и D_1 . Вырезаем узел 3, рассматриваем его равновесие (рис. 4.9, а), составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad -40 + D_1 \times \sin \alpha + O_1 \times \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad V_x - D_1 \times \cos \beta + O_1 \times \sin \alpha = 0,$$

где $\operatorname{tg} \alpha = 1$; $\alpha = \arctg 1 = 0,7854$ рад; $\cos \alpha = \sin \alpha = 0,707$;

$\operatorname{tg} \beta = 9/3 = 3$; $\beta = \arctg 3 = 1,249$ рад; $\cos \beta = 0,316$; $\sin \beta = 0,9487$ и

определяем $D_1 = -15,81$ кН (сжатие) и $O_1 = -35,36$ кН (сжатие).

6. Определяем усилие D_2 . Вырезаем узел 4 и рассматриваем его равновесие (рис. 4.9, б):

$$\sum X = 0; \quad O_1 \times \cos \alpha + D_2 \times \cos \alpha - 40 = 0; \quad D_2 = 21,22 \text{ кН (растяжение).}$$

7. Определяем усилия D_3 и O_3 . Вырезаем узел 5, рассматриваем его равновесие (рис. 4.9, в), составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad O_1 - D_3 \times \cos \alpha + O_3 \times \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad -35 - D_3 \times \sin \alpha - O_3 \times \sin \alpha = 0;$$

определяем $D_3 = 3,54$ кН (растяжение) и $O_3 = -53,03$ кН (сжатие).

7. Определяем усилие D_4 . Вырезаем узел 6 и рассматриваем его равновесие (рис. 4.9, г):

$$\sum X = 0; \quad O_3 \times \sin \alpha - D_4 \times \cos \beta = 0; \quad D_4 = 39,52 \text{ кН (растяжение).}$$

В качестве проверки:

$$\sum Y = 0; \quad -O_3 \times \sin \alpha - D_4 \times \cos \beta + 50 = 0;$$

$$-53,03 \times 0,707 - 39,52 \times 0,316 + 50 = 0; \quad 0 = 0.$$

3.1.4. Способ совместных сечений

Способ совместных сечений заключается в определении усилий из решения совместной системы уравнений равновесия, составленных для отсеченных частей фермы двумя или более сечениями.

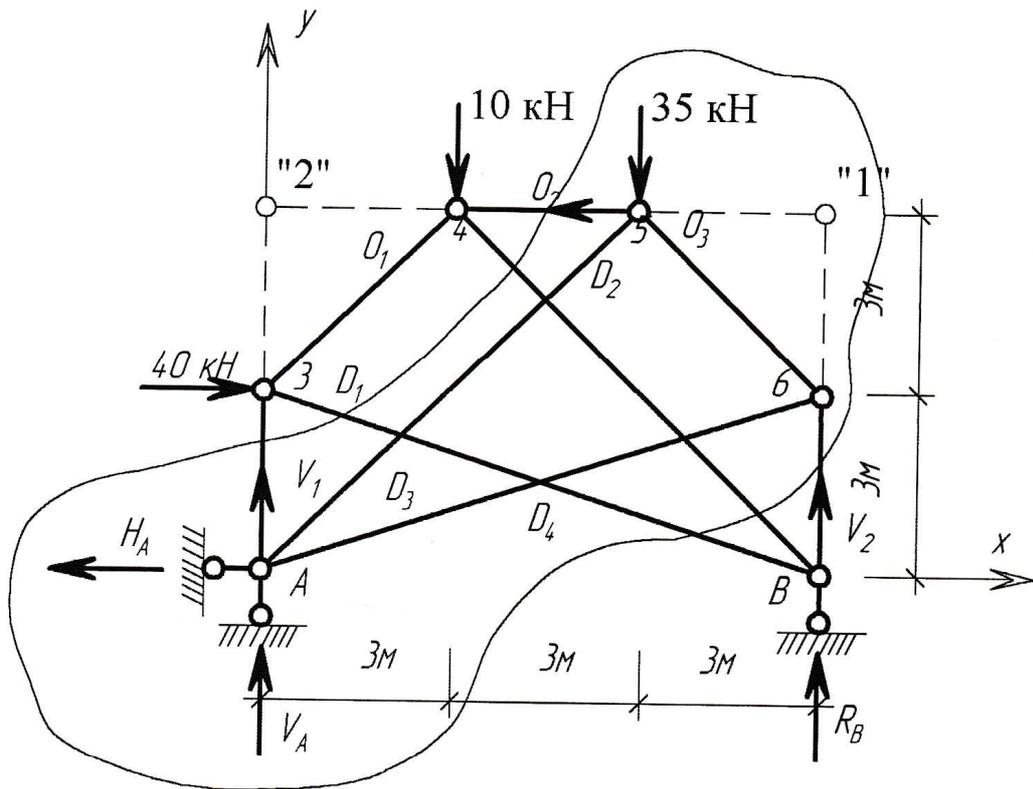


Рис.4.8

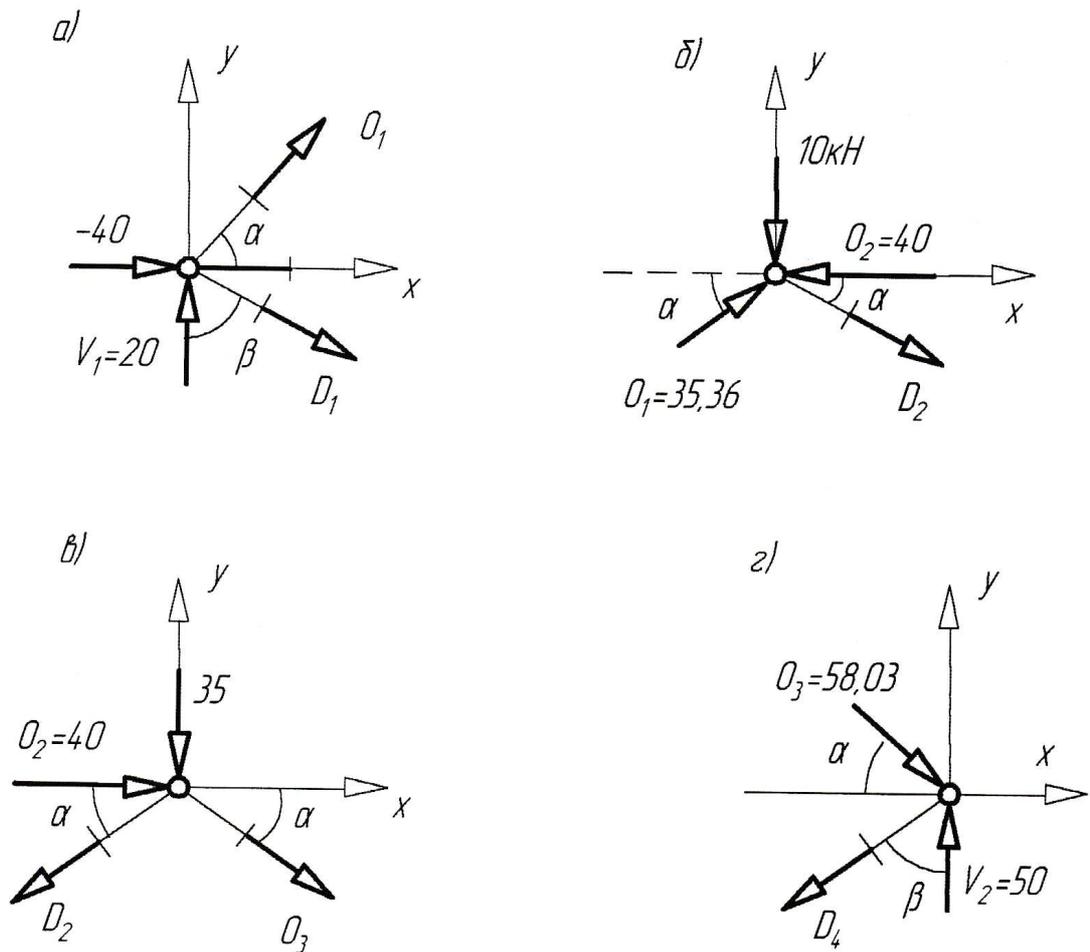


Рис.4.9

Пример 4.1.6. Определить усилия в стержнях фермы (рис. 4.10) от заданной нагрузки способом совместных сечений.

Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad -25 \times 3 - 40 \times 6 - 45 \times 9 + R_B \times 9 = 0; \quad R_B = 80 \text{ кН};$$

$$\sum M_6 = 0; \quad -R_A \times 9 + 15 \times 9 + 25 \times 6 + 40 \times 3 = 0; \quad R_A = 45 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \quad -15 - 25 - 40 - 45 + 80 + 45 = 0; \quad 0 = 0.$$

2. Определяем усилия D_3 и D_4 . Проводим совместное простое сечение I-I и вырезаем узел 1, рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы и узла 1

(рис. 4.11, а), составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad R_A - 15 - 25 + D_3 \times \sin \alpha - D_4 \times \sin \alpha = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad D_3 \times \cos \alpha + D_4 \times \cos \alpha = 0;$$

$$\text{Где } \operatorname{tg} \alpha = 2/3; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \alpha = 0,588; \quad \cos \alpha = 0,832; \quad \sin \alpha = 0,5547$$

и определяем $D_4 = 4,51 \text{ кН}$ (растяжение), $D_3 = -4,51 \text{ кН}$ (сжатие).

3. Определяем усилия D_5 и D_6 . Проводим совместное сечение II-II и вырезаем узел 2. Рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы и узла 2

(рис. 4.11, б), составляем уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R_A - 15 - 25 - 25 - 40 + D_5 \times \sin \alpha - D_6 \times \sin \alpha = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad D_5 \times \cos \alpha + D_6 \times \cos \alpha = 0$$

и определяем $D_5 = 31,55 \text{ кН}$ (растяжение), $D_6 = -31,55 \text{ кН}$ (сжатие).

4. Определяем усилия O_2 и U_2 . Проводим сечение III-III, назначаем моментную точку «3», рассматриваем равновесие левой отсеченной части и составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_3 = 0; \quad R_A \times 3 + 15 \times 3 - O_2 \times 4 = 0; \quad \text{и определяем } O_2 = -22,5 \text{ кН (сжатие).}$$

Аналогично составляем уравнения равновесия в виде

$$\sum M_4 = 0; \quad -R_A \times 3 + 15 \times 3 + U_2 \times 4 = 0; \quad \text{и определяем } U_2:$$

$$U_2 = 22,5 \text{ кН (растяжение).}$$

5. Определяем усилия O_3 и U_3 . Проводим сечение IV-IV, назначаем моментную точку «5» и составляем уравнения равновесия в виде

$\sum M_6 = 0$; $R_B \times 3 - 45 \times 3 - U_3 \times 4 = 0$; и определяем $U_3 = 26,25$ кН (растяжение),

$\sum M_5 = 0$; $-R_B \times 3 - 45 \times 3 + O_3 \times 4 = 0$; и определяем $O_3 = -26,25$ кН (сжатие).

6. Определяем усилия $O_1, U_1, D_1, D_2, V_1, V_2$.

Рассматривая равновесие узлов 7 и А, находим: $O_1 = 0$, $V_2 = -15$ кН (сжатие), $V_1 = -45$ кН (сжатие), $U_1 = 0$.

Рассматривая равновесие узла 8 (рис. 4.11, в), составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum X = 0; D_1 \times \cos \alpha + D_2 \times \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; -15 + 45 + D_1 \times \sin \alpha - D_2 \times \sin \alpha = 0$$

и определяем усилия $D_1 = -27,04$ кН (сжатие), $D_2 = 21,04$ кН (растяжение).

7. Определяем усилия V_4, V_6, V_7 . Рассматривая равновесие узлов 4, 6, 9, составляем уравнения равновесия в виде (рис. 4.11, г)

$$\sum Y = 0; -V_4 + D_1 \times \sin \alpha - 25 = 0, \text{ откуда } V_4 = -10 \text{ кН (сжатие);}$$

аналогично для узлов 6, 9

$$\sum Y = 0; -V_6 - D_3 \times \sin \alpha - 40 = 0, \text{ откуда } V_6 = -42,5 \text{ кН (сжатие);}$$

$$\sum Y = 0; -D_5 \times \sin \alpha - 45 - V_7 = 0, \text{ откуда } V_7 = -62,5 \text{ кН (сжатие).}$$

8. Определяем усилия V_3 и V_5 .

Рассматривая равновесия узлов 3 и 5, составляем уравнения равновесия в виде

$$\sum Y = 0; D_2 \times \sin \alpha + V_3 = 0; \quad \sum Y = 0; D_4 \times \sin \alpha + V_5 = 0,$$

откуда $V_3 = -15$ кН (сжатие), $V_5 = -2,5$ кН (сжатие).

4.2 Шпренгельные фермы

Шпренгельными называются фермы, состоящие из основной фермы и шпренгелей (рис. 4.12, 4.13). Шпренгель - это простая двухопорная ферма, служащая для уменьшения расчетной длины панели основной фермы и передачи нагрузки в ее узлы. Шпренгели опираются в узлы основной фермы, работают только на местную нагрузку и в зависимости от расположения стержней бывают одноярусные (рис. 4.12) и двухъярусные (рис. 4.13). Одноярусный шпренгель передает нагрузку в узлы основной фермы того же пояса, к которому она приложена, двухъярусный - в узлы основной

фермы другого пояса, оказывая влияние на примыкающие к нему стойки основной фермы. Для шпренгельных ферм характерны следующие типы стержней:

1) стержни, принадлежащие только основной ферме. Например, U_1, D_1, V_1 и другие. Усилия в них определяются из расчета основной фермы, то есть $U_1 = U_1^0, D_1 = D_1^0, V_1 = V_1^0$;

2) стержни, принадлежащие только шпренгелям. Например, V_2, D_3, V_4 и другие. Усилия в них определяются из расчета шпренгелей, то есть

$$V_2 = V_2^{\text{ш}}, \quad D_3 = D_3^{\text{ш}}, \quad V_4 = V_4^{\text{ш}}.$$

3) стержни, принадлежащие основной ферме и шпренгелям. Например, D_2, D_4, U_2 (рис.4.13), O_3 (рис.4.12) и другие. Усилия в них определяются в виде алгебраической суммы усилий в стержнях основной фермы и шпренгелях, то есть

$$D_2 = D_1^0 + D_2^{\text{ш}}, \quad D_4 = D_4^0 + D_4^{\text{ш}}, \quad U_2 = U_2^0 + U_2^{\text{ш}}.$$

Расчет шпренгельных ферм как статически определимых систем можно выполнять любым из рассмотренных ранее методов. При возникающих сложностях их применения удобно выделять основную ферму, заменяя действующую нагрузку эквивалентной, и шпренгели, загруженные только местной нагрузкой.

Пример 4.2.1. Аналитически определить усилия в указанных стержнях ферм от заданной нагрузки (рис.4.14).

Результаты решения: 1) $V_2 = 20$ кН; $O_2 = -20$ кН;

2) $O_6 = -40$ кН; $V_2 = -44,72$ кН; $V_3 = 20$ кН;

3) $O_1 = 23,72$ кН; $V_2 = 7,5$ кН;

4) $U_2 = 47,44$ кН; $D_4 = -15,81$ кН;

5) $O_1 = -10$ кН; $D_3 = -14,14$ кН;

6) $O_1 = -20$ кН; $D_3 = -14,14$ кН; $U_4 = -30$ кН.

Усилия в указанных стержнях ферм (рис. 4.15-4.17) вычислить самостоятельно.

4.3 Определение знаков усилий в стержнях ферм

Пример 4.3.1. Определить знаки усилий в стержнях фермы (рис.4.18 а) от нагружения силой P .

Решение:

1. Определяем опорные реакции. В балочной ферме при вертикальной нагрузке опорные реакции вертикальны.
2. Вырезаем узел A и, согласно частным случаям равновесия узлов (рис. 4.4,г), определяем знаки усилий: в стойке V_1 сжатие, а в стержне U_1 усилие равно нулю.
3. Вырезаем узел 1, рассматриваем его равновесие (рис. 4.18, б, в) и определяем знаки усилий: O_1 - сжатие, D_1 - растяжение.
4. Вырезаем узел 2, рассматриваем его равновесие (рис.4.18, г, д) и определяем знаки усилий: U_2 - растяжение, V_2 - сжатие.

Аналогично определяются знаки усилий в других стержнях фермы.

Рассмотренные методы вычисления усилий позволяют определять знаки продольных сил в стержнях ферм для простейших случаев загрузки.

Пример 4.3.2. Определить знаки усилий в стержнях фермы (рис. 4.19, 4.20), загруженных силой P . Знаки усилий в стержнях ферм (рис. 4.21, 4.22) определить самостоятельно.

4.4 Линии влияния усилий в стержнях ферм

Линии влияния представляют собой графическое изменение изучаемого «усилия» в зависимости от различных положений единичной подвижной нагрузки. Будем считать, что подвижная нагрузка с помощью дополнительных устройств передается только в узлы фермы. Грузовым поясом называется тот пояс, по которому перемещается подвижный груз или в узлы которого передается его давление. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм наиболее удобно выполнять статическим методом, используя способ вырезания узлов, способы замкнутых и совместных сечений, а также способ простых сечений, различая при этом пролетные и консольные сечения.

Пример 4.4.1. Построить линии влияния усилий в стержнях O_3 , D_2 , U_3 , V_3 , V_4 фермы (рис.4.23) от единичного подвижного груза $P=1$ при верхнем грузовом поясе.

1. Строим линии влияния опорных реакций R_A, R_B . Устанавливаем груз $P=1$ в про-

извольное положение, составляем уравнения равновесия в виде

$$\sum M_A = 0; -P \times X + R_B \times 18 = 0;$$

$\sum M_B = 0; -R_A \times 18 + P \times (18 - X) = 0$ и получаем уравнения линий влияния опорных реакций:

$$R_A = (18 - X)/18, \quad R_B = X/18 \text{ в виде прямых линий (рис. 4.23).}$$

2. Строим линию влияния усилия в стержне O_3 . Проводим пролетное сечение I-I, выбираем моментную точку «1» и рассматриваем два положения груза.

Решение:

а) груз $P=1$ находится правее рассеченной грузовой панели 2-4. Для левой отсеченной части фермы составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_1 = 0; \quad -R_A \times 9 - O_3 \times h_{O_3} = 0;$$

где $h_{O_3} = 5 \times \cos \alpha$ - плечо усилия O_3 относительно точки «1»,

$$\alpha = \arctg 1/3 = 0,3218; \quad \cos \alpha = 0,9487; \quad \sin \alpha = 0,3162; \quad h_{O_3} = 4,74 \text{ м.}$$

Получаем уравнение правой ветви линии влияния усилий O_3 :

$$O_3 = -9/4,74 - R_A = -1,899 R_A,$$

представляющие собой ординаты линии влияния реакции R_A с постоянным коэффициентом - 1,899. Строим правую ветвь линии влияния усилия O_3 , которая будет справедлива справа от панели 2-4.

б) груз $P = 1$ находится левее рассеченной грузовой панели 2-4. Для правой отсеченной части фермы составляем уравнение равновесия в виде

$\sum M_1 = 0; -R_B \times 9 - O_3 \times h_{O_3} = 0$. Получаем уравнение левой ветви линии влияния усилия O_3 : $O_3 = -9/4,74 \times R_B = -1,899 R_B$, представляющее собой ординаты линии влияния реакции R_B с постоянным коэффициентом - 1,899. Строим левую ветвь линии влияния O_3 , которая будет справедлива слева от панели 2-4. На участке рассеченной грузовой панели ветви соединяем передаточной прямой. Из чертежа видно, что ветви линии влияния пересекаются под моментной точкой «1».

3. Строим линию влияния усилия в стержне D_2 . Используя пролетное сечение I-I, выбираем моментную точку «3» и рассматриваем два положения груза:

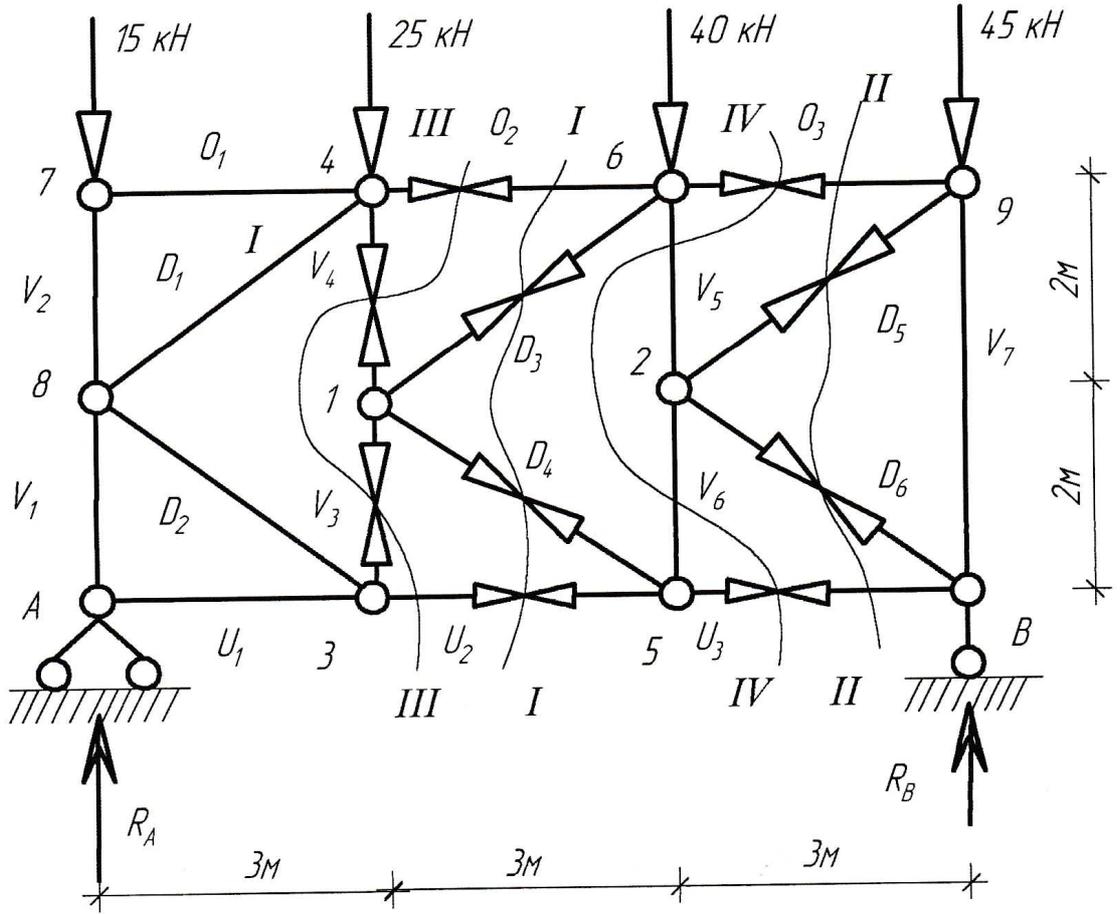


Рис.4.10

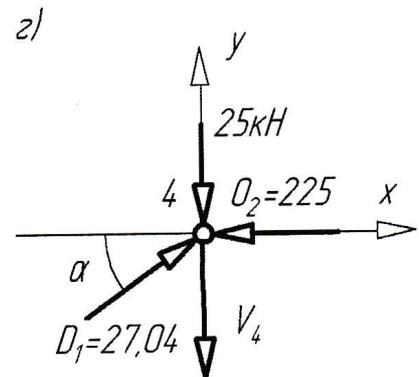
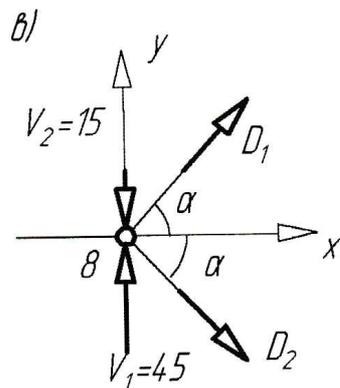
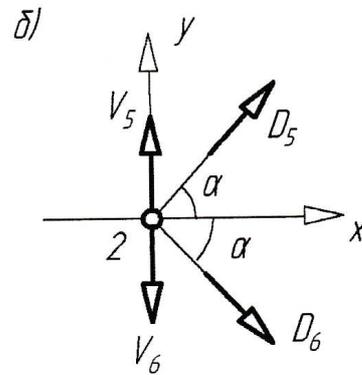
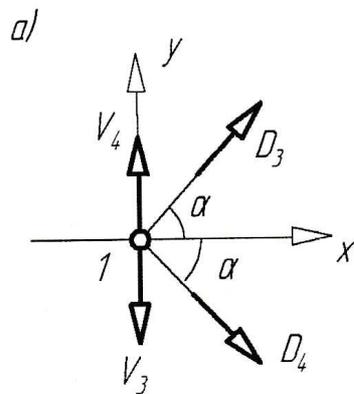


Рис.4.11

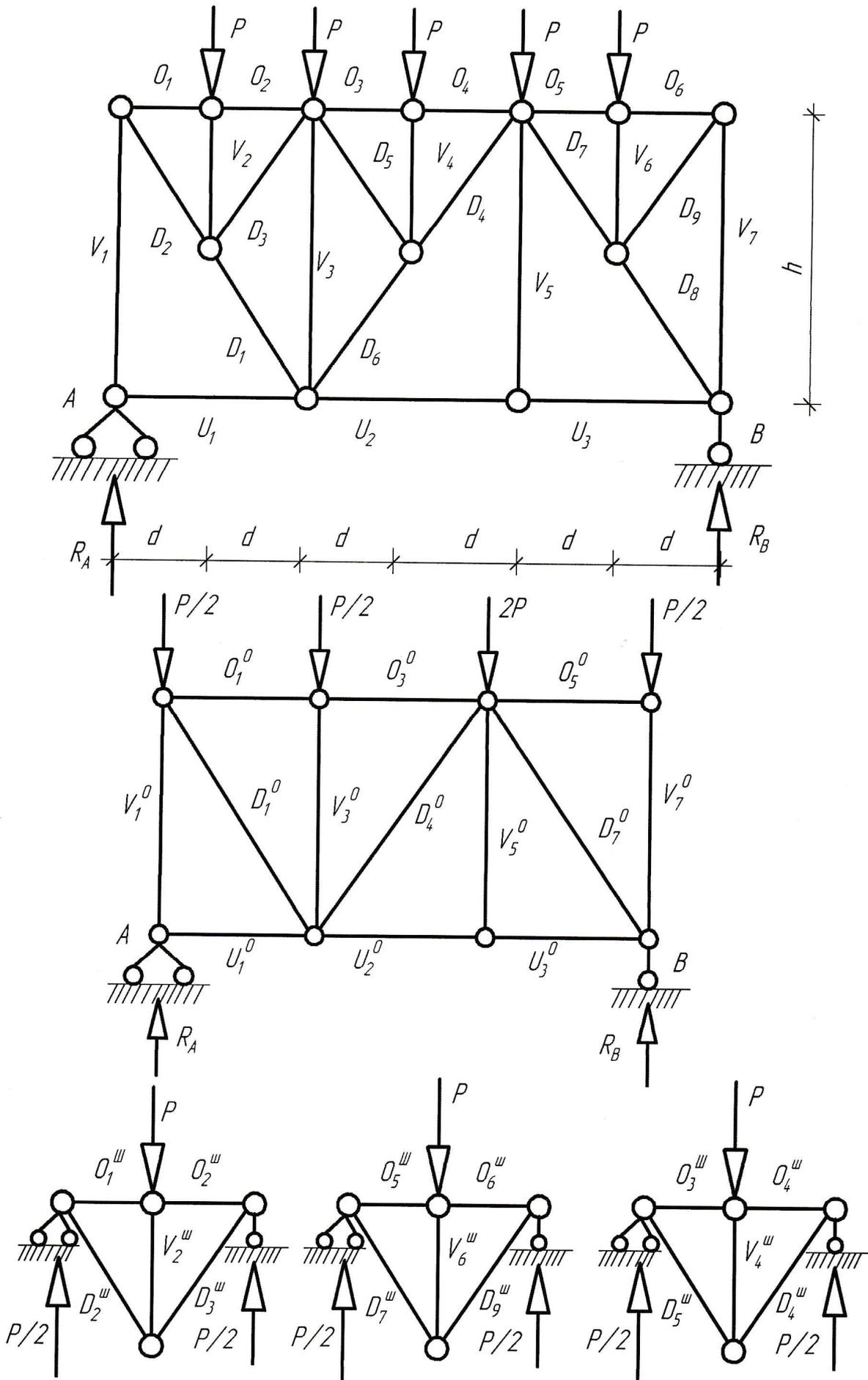


Рис.4.12

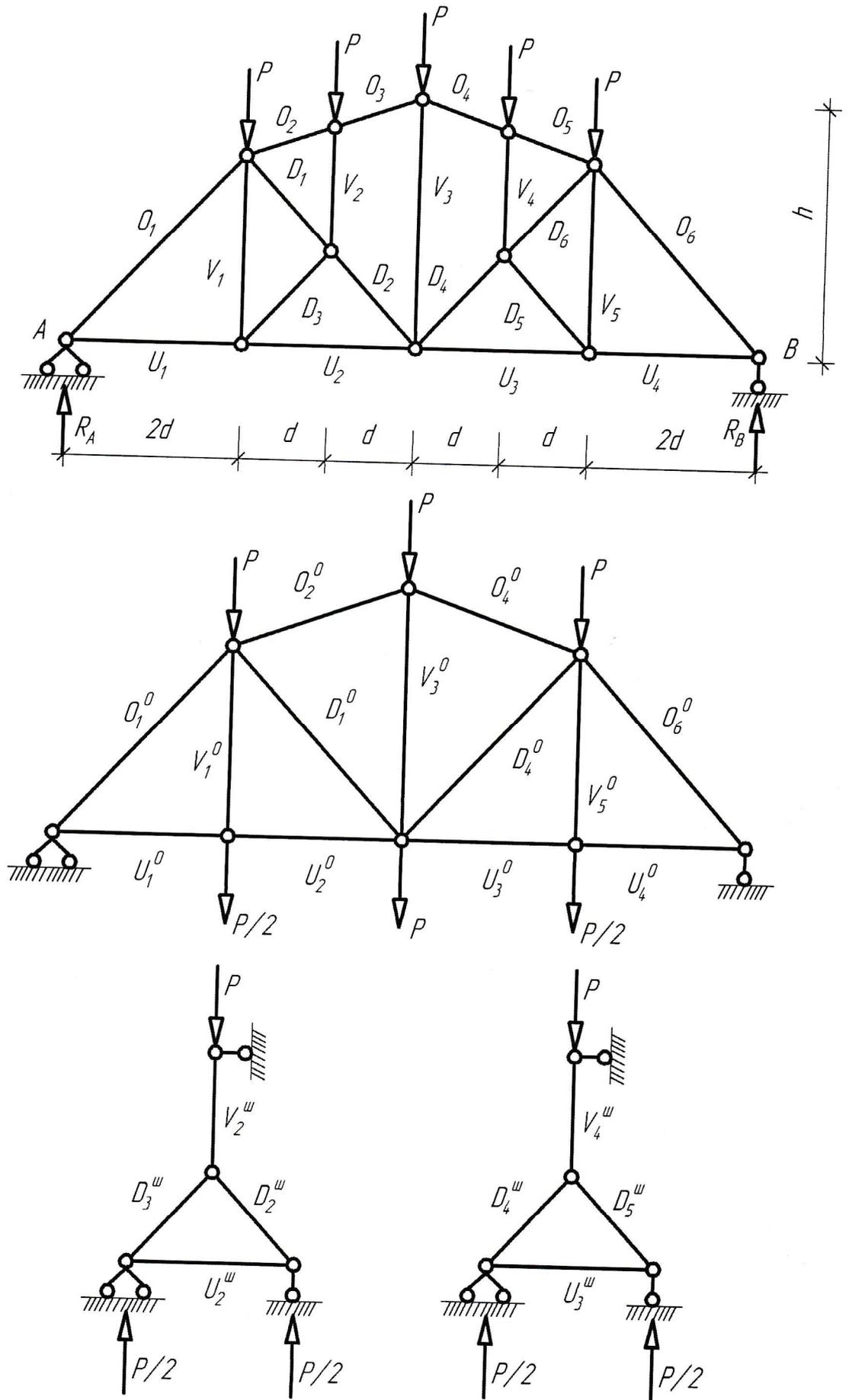


Рис.4.13

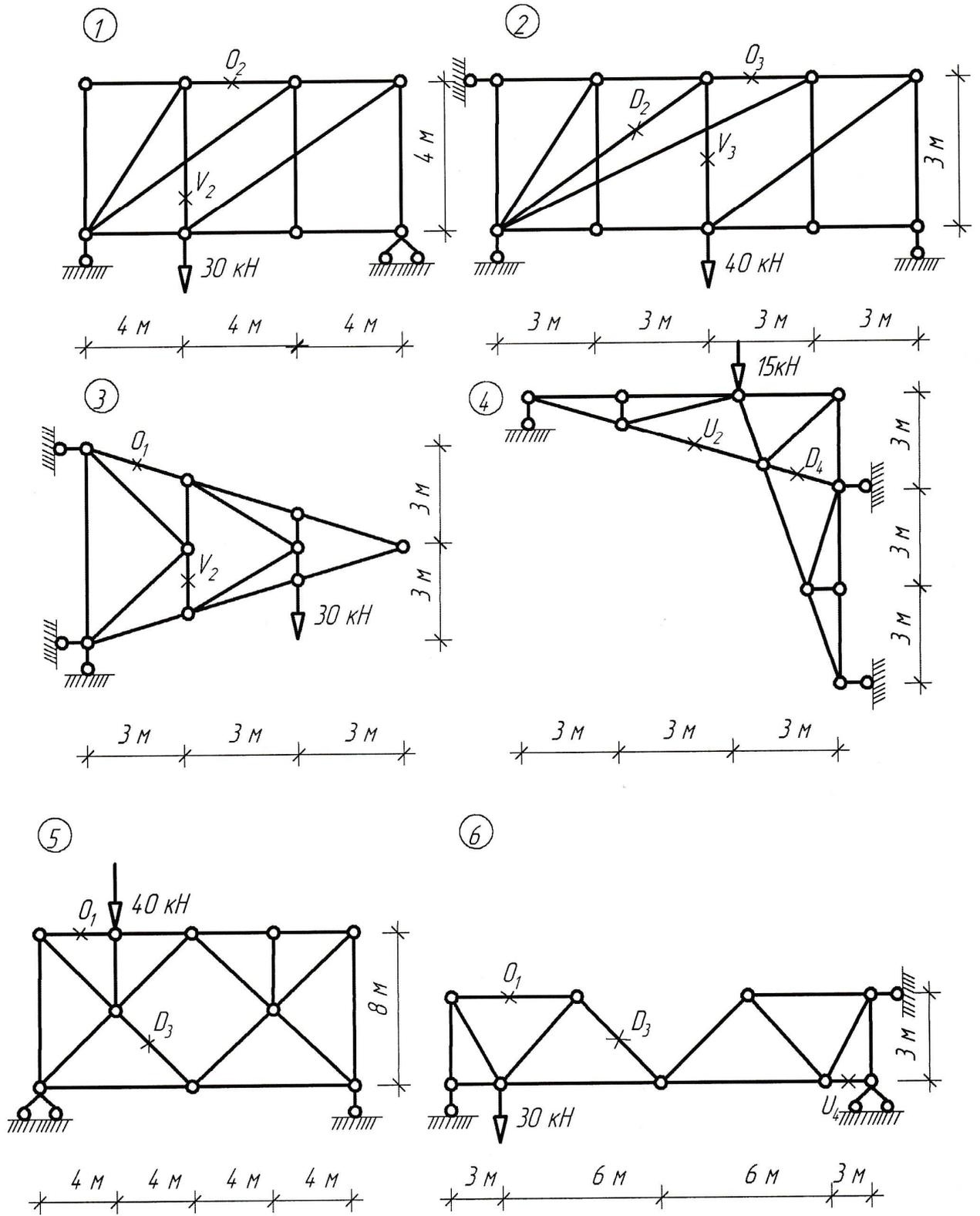


Рис. 4.14

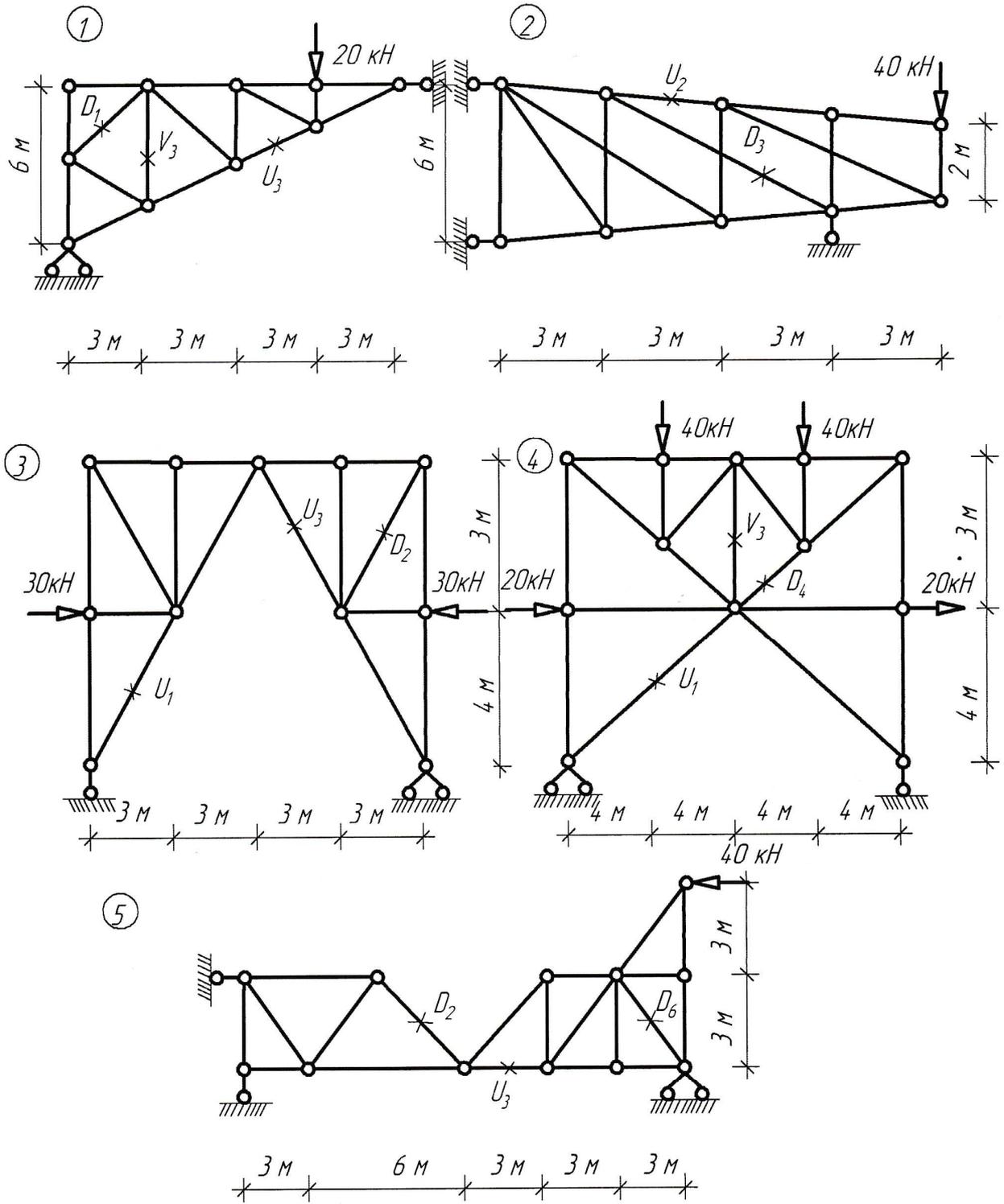


Рис. 4.15

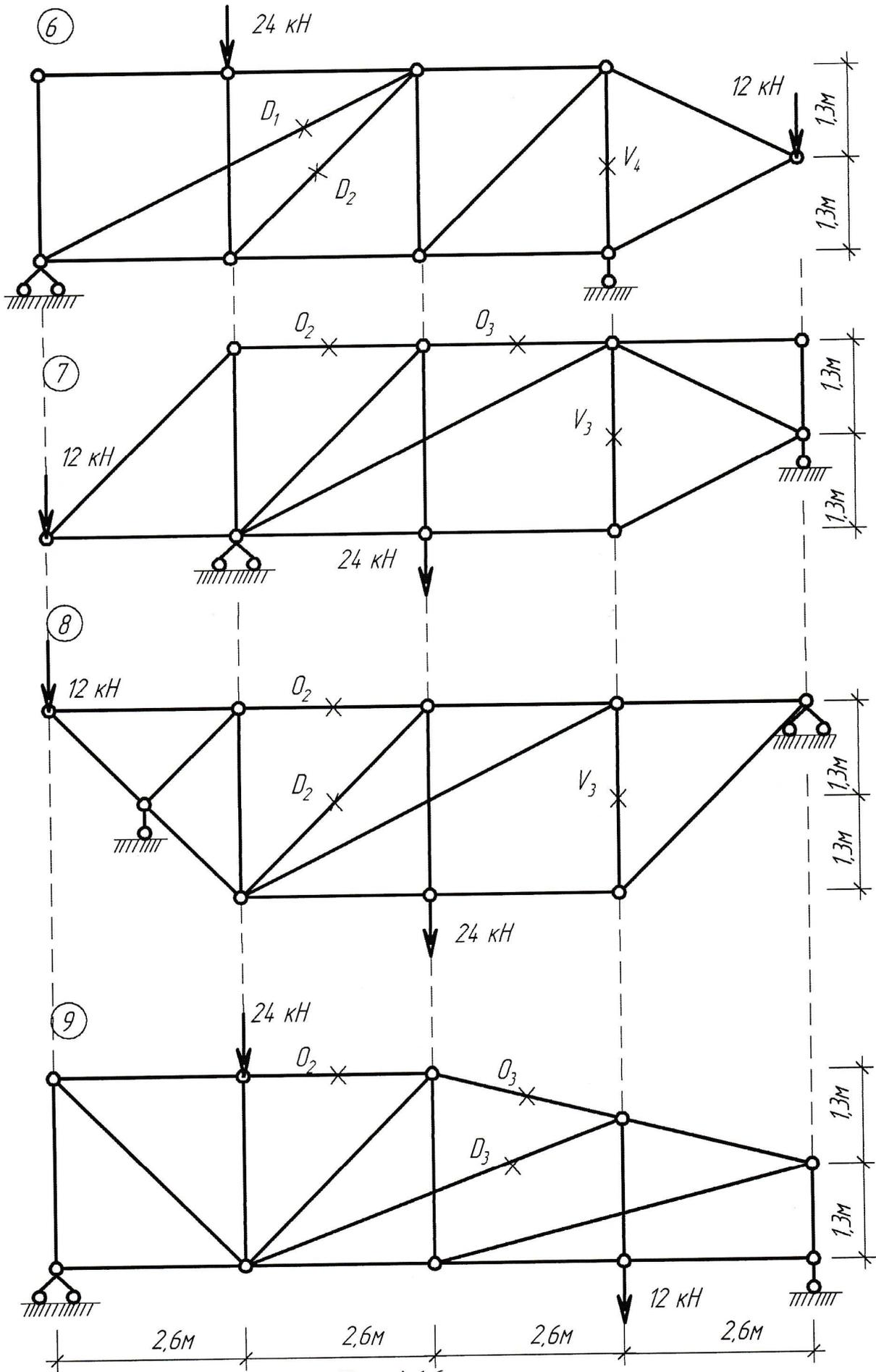


Рис.4.16

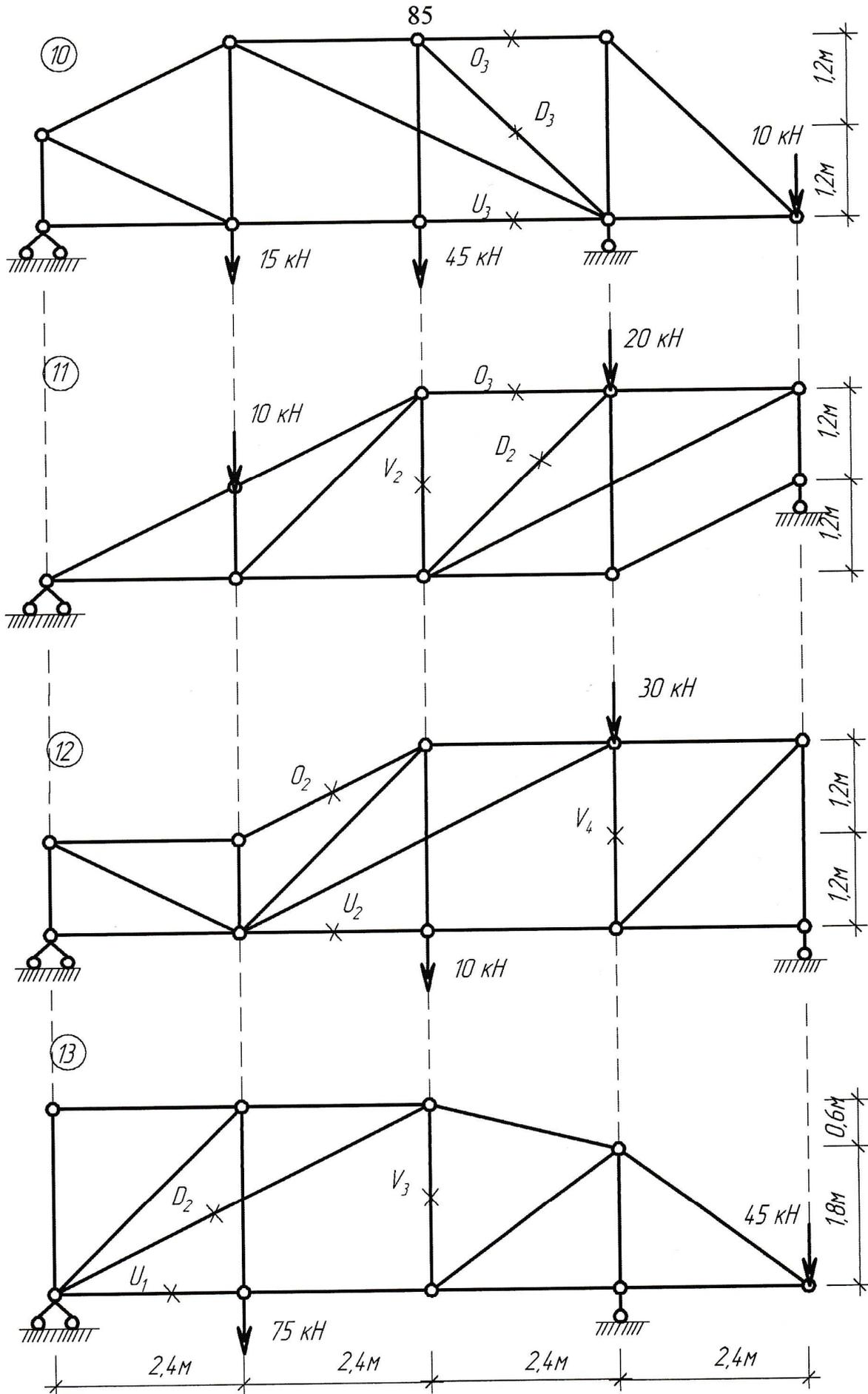


Рис.4.17

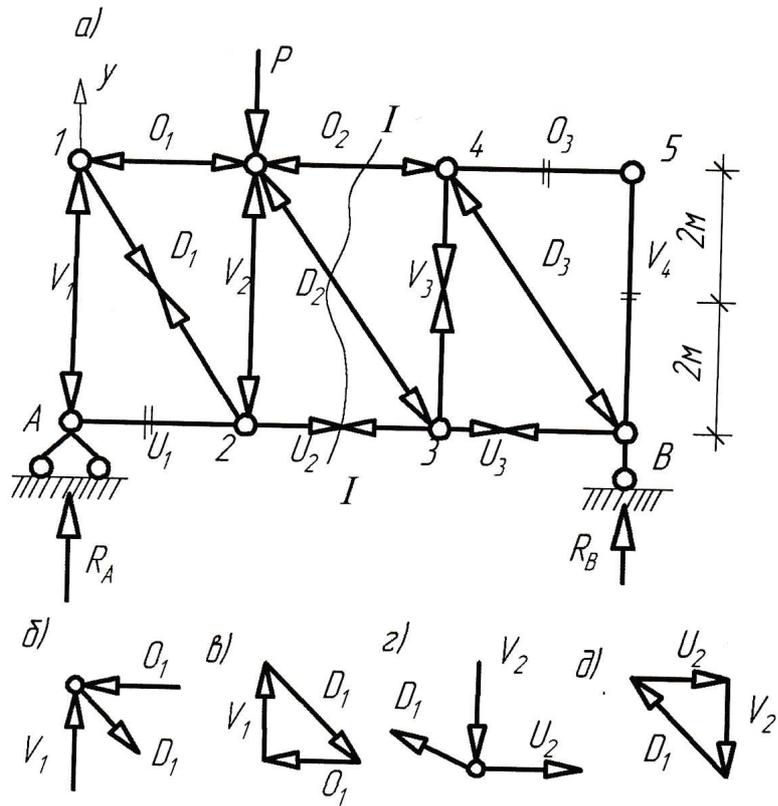


Рис.4.18

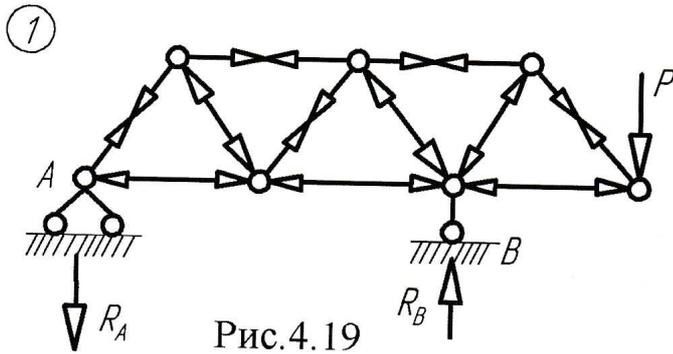


Рис.4.19

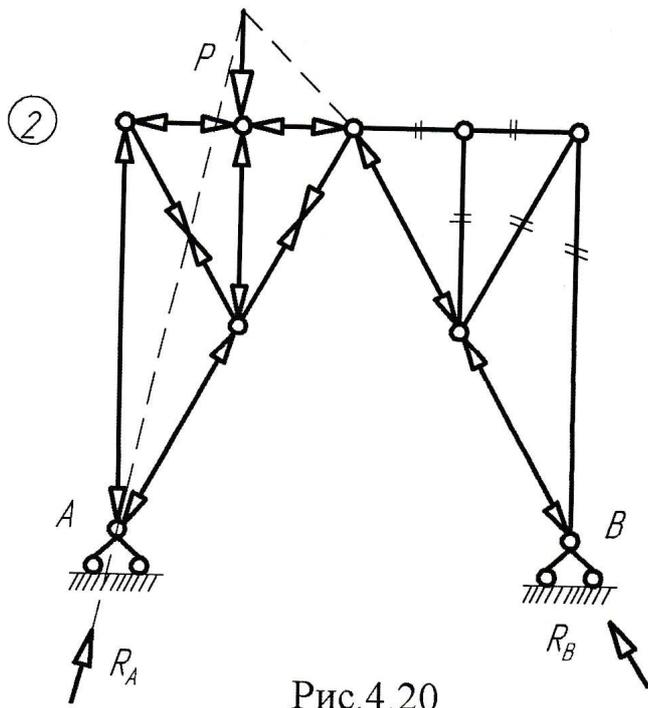


Рис.4.20

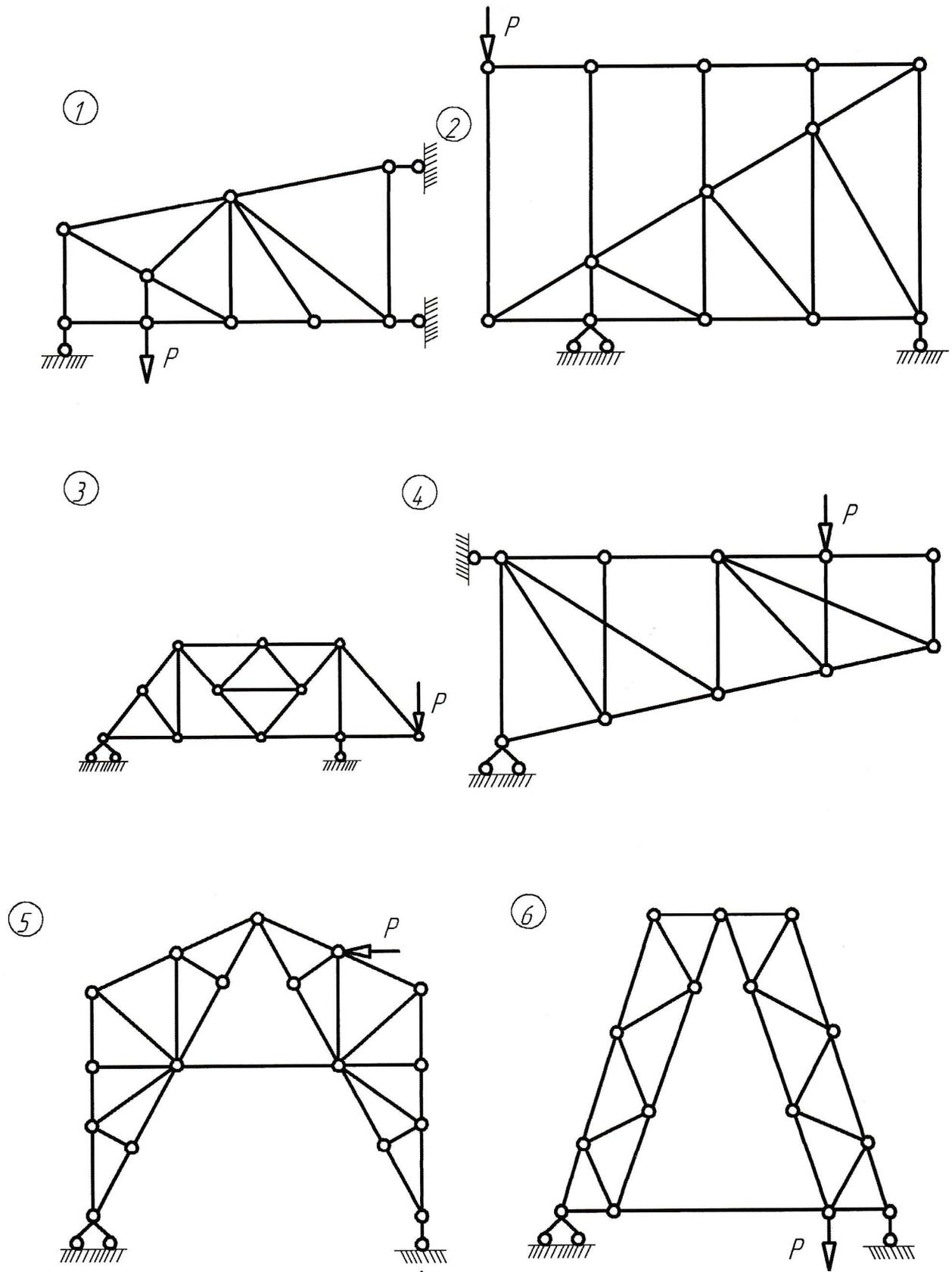


Рис. 4.21

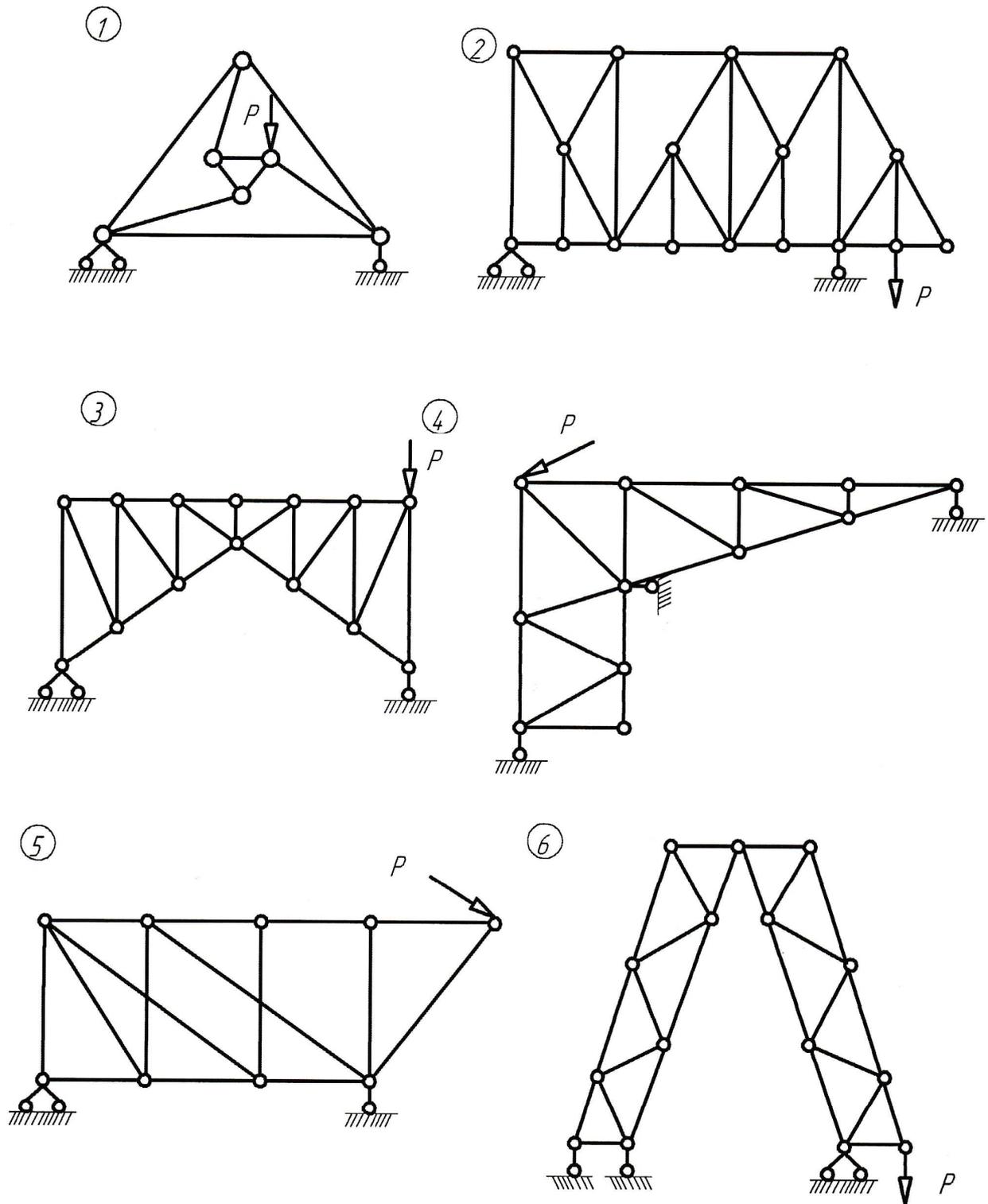


Рис. 4.22

а) при положении груза $P=I$ правее панели 2-4 уравнение равновесия для левой отсеченной части фермы имеет вид:

$$\sum M_3 = 0; \quad -R_A \times 6 - D_2 \times h_{D_2} = 0,$$

где $h_{D_2} = 15 \times \sin \beta$ - плечо усилия D_2 относительно точки «3»,

$$\beta = \arctg 4/3 = 0,9273; \quad \sin \beta = 0,8; \quad \cos \beta = 0,6; \quad h_{D_2} = 12 \text{ м.}$$

Получаем уравнение правой ветви линия влияния усилия D_2 :

$$D_2 = 6 \times R_A / 12 = 0,5 \times R_A \text{ в виде прямой, справедливой справа от панели 2-4.}$$

б) при положении груза $P=I$ левее панели 2-4 уравнение равновесия для правой отсеченной части фермы имеет вид:

$$\sum M_3 = 0; \quad R_B \times 24 + D_2 \times h_{D_2} = 0.$$

Получаем уравнение левой ветви влияния усилия D_2 :

$D_2 = -24 \times R_B / 12 = -2 \times R_B$ в виде прямой, справедливой слева от панели 2-4, пересекающейся с правой ветвью под моментной точкой «3». Передаточную прямую проводим в пределах рассеченной панели 2-4.

4. Строим линию влияния усилия в стержне U_3 . При положении груза $P=I$ правее панели 2-3, используя сечение I-I, составляем уравнение равновесия для левой отсеченной части фермы в виде

$\sum M_2 = 0; \quad -R_A \times 6 + U_3 \times 4 = 0$. Получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия U_3 ,

$$U_3 = -1,5 \times R_A.$$

Поскольку ветви пересекаются под моментной точкой «2», проводим левую ветвь линии влияния, а в пределах рассеченной грузовой панели соединяем их передаточной прямой.

5. Строим линию усилия в стойке V_3 . Вырезаем узел 4, рассматриваем два положения груза $P=I$.

а) груз $P=I$ находится вне узла 4. Для этого узла составляем уравнение равновесия в виде

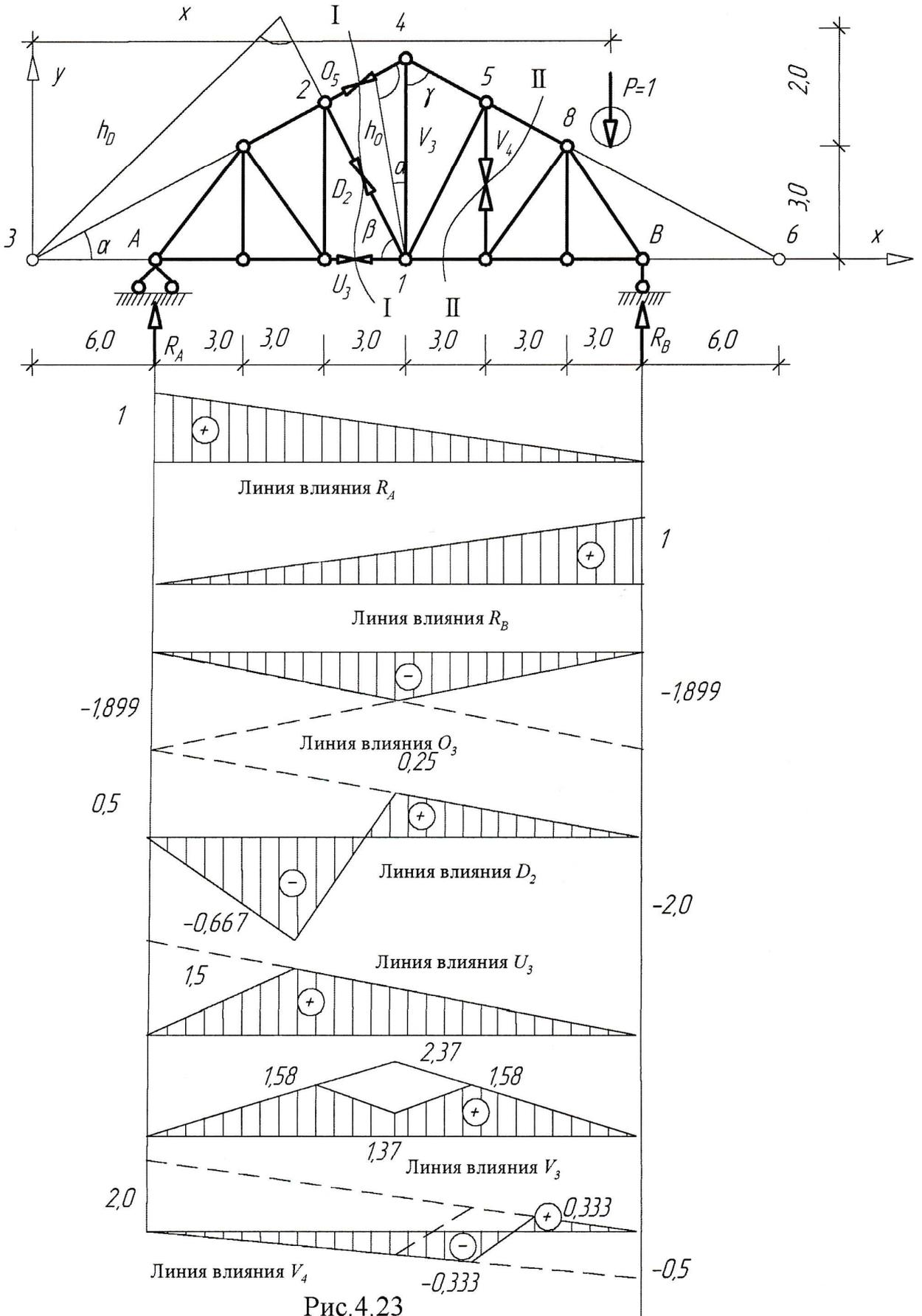


Рис.4.23

$$\sum Y = 0; \quad -2 \times O_3 \times \cos \gamma - V_3 = 0, \quad \text{где } \gamma = \pi/2 - \alpha = 1,2490 \text{ рад.}$$

Получаем уравнение линии влияния усилия V_3 :

$V_3 = -2,498 \times O_3$, представляющее собой ординаты линии влияния усилия O_3 с постоянным коэффициентом - 2,498.

б) груз $P=1$ находится в узле 4. Для этого узла составляем уравнения равновесия в виде

$$\sum Y = 0; \quad -2 \times O_3 \times \cos \gamma - 1 - V_3 = 0.$$

Получаем ординату линии влияния усилия в стойке V_3 при положении груза в узле 4:

$$V_3 = -2,498 \times O_3 - 1 = 1,37.$$

В пределах рассеченных грузовых панелей 2-4 и 4-5 проводим передаточные прямые.

б. Строим линию влияния усилия в стойке V_4 . Проводим пролетное сечение II-II, выбираем моментную точку «б» и рассматриваем два положения груза.

а) груз $P=1$ находится правее рассеченной грузовой панели 5-8. Для левой отсеченной части составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_b = 0; \quad -R_A \times 24 + V_4 \times 12 = 0.$$

Получаем выражение для правой ветви линии влияния усилия V_4 :

$$V_4 = 2 \times R_A,$$

представляющее собой ординаты линии влияния реакции R_A с постоянным коэффициентом 2. Строим правую ветвь линии влияния усилия V_4 , которая будет справедлива справа от панели 5-8. Поскольку ветви пересекаются под моментной точкой «б», проводим левую ветвь линии влияния, а в пределах рассеченной грузовой панели 5-8 соединяем их передаточной прямой. При перемене грузового пояса ветви линий влияния остаются без изменений. Меняется лишь положение передаточной прямой. В частности, линия влияния усилия V_4 будет иной (штриховая линия) при перемещении груза $P=1$ по нижнему поясу, так как рассеченная грузовая панель в этом случае будет 1-7.

Ординаты линий влияния усилий, построенных от $P = 1$, не имеют размер-

ности.

Пример 4.4.2. Построить линии влияния усилий в стержнях O_2 , U_2 , D_2 , V_3 консольной фермы (рис. 4.24) от единичной подвижной нагрузки $P = 1$ при верхнем грузовом поясе.

В этом случае при построении линии влияния удобно рассматривать равновесие только отсеченной свободной части фермы.

Решение:

1. Строим линию влияния усилия в стержне O_2 . Проводим консольное сечение I-I. Используя моментную точку «1», рассматриваем два положения груза $P=1$.

а) груз $P=1$ находится левее рассеченной грузовой панели 4-5. Для правой отсеченной свободной части составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_I = 0; \quad O_2 \times h_{O_2} = 0,$$

где $h_{O_2} = 3$ м - плечо усилия O_2 относительно точки «1». Получаем уравнение левой ветви линии влияния усилия $O_2 = 0$. Строим левую ветвь линии влияния, которая будет совпадать с осью линии влияния и справедлива слева от панели 4-5.

б) груз $P = 1$ находится правее рассеченной грузовой панели 4-5. Для той же правой отсеченной свободной части составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_I = 0; \quad O_2 \times h_{O_2} - P \times x_I = 0.$$

Получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия O_2 .

$$O_2 = x_I / h_{O_2} = x_I / 3$$

в виде прямой линии, справедливой справа от рассеченной грузовой панели 4-5. Для ее построения достаточно двух характерных точек: при $x_I = 0$ получаем $O_2 = 0$, при $x_I = 6$ м $O_2 = 2$. Ветви линии влияния также пересекаются под моментной точкой.

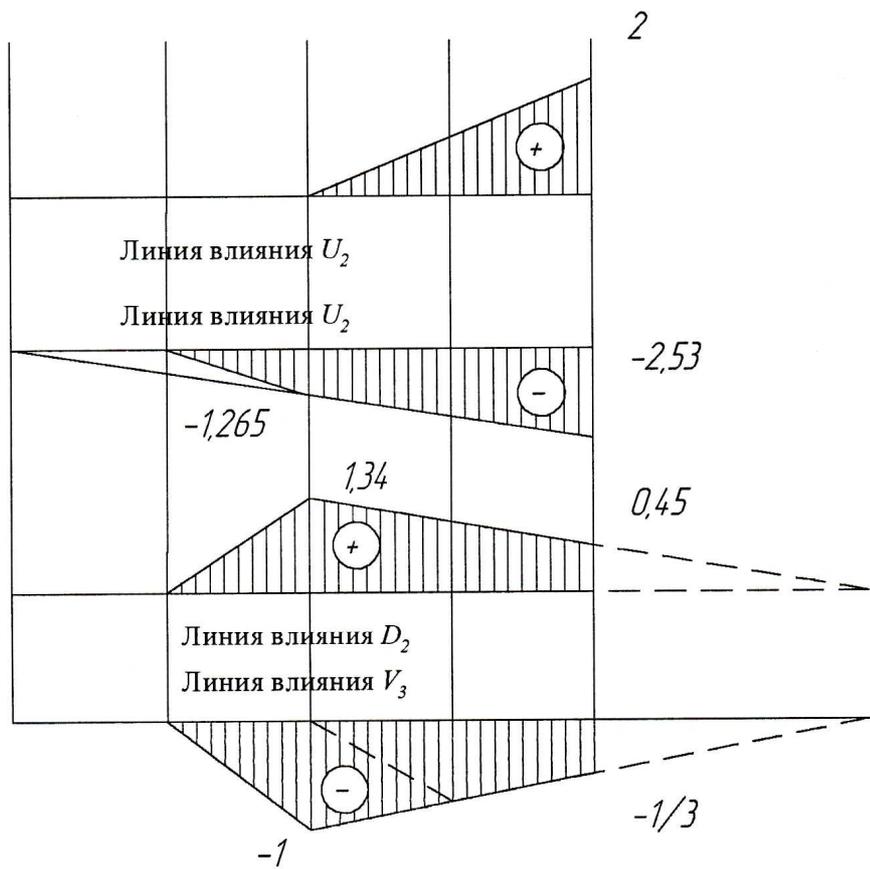
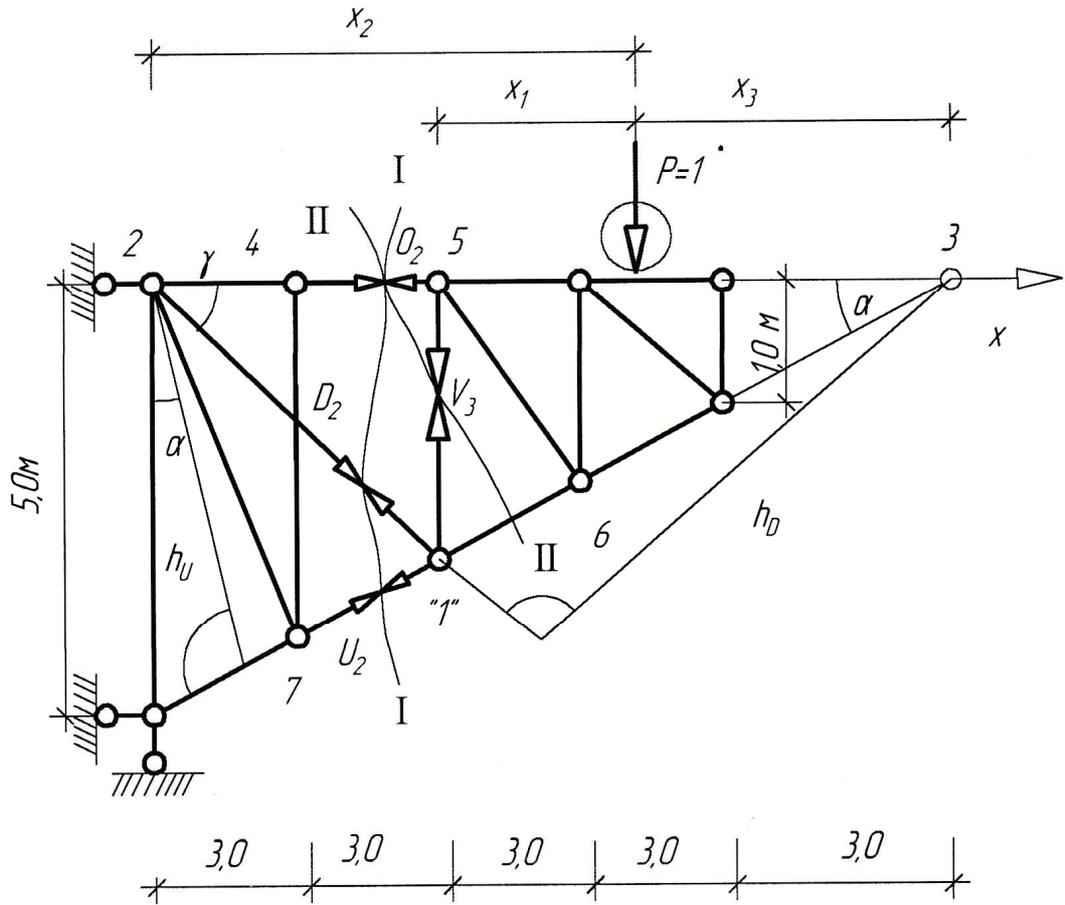


Рис.4.24

2. Строим линию влияния усилия в стержне U_2 . Используя консольное сечение I-I, выбираем моментную точку «2» и рассматриваем два положения груза.

а) груз $P=1$ находится левее рассеченной грузовой панели 4-5. Для правой отсеченной свободной части составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_2 = 0; - U_2 \times h_{U_2} = 0,$$

где $h_{U_2} = 5 \times \cos \alpha$ - плечо усилия U_2 относительно точки «2»;

$$\alpha = \arctg(1/3) = 0,3218; \quad \cos \alpha = 0,9487; \quad \sin \alpha = 0,3162; \quad h_{U_2} = 4,74 \text{ м.}$$

Получаем уравнение левой ветви линии влияния усилия $U_2 = 0$.

Строим левую ветвь, которая будет совпадать с осью линии влияния, и справедлива слева от панели 4-5.

б) груз $P=1$ находится правее рассеченной грузовой панели 4-5. Для той же правой отсеченной свободной части составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_2 = 0; \quad - U_2 \times h_{U_2} - P \times x_2 = 0.$$

Получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия U_2 :

$$U_2 = - x_2 / h_{U_2} = -x_2 / 4,74$$

в виде прямой линии, справедливой справа от рассеченной грузовой панели 4-5. Для ее построения достаточно двух точек:

$$\text{при } x_2 = 0 \quad U_2 = 0;$$

$$\text{при } x_2 = 12 \text{ м} \quad U_2 = -2,53.$$

На участке рассеченной грузовой панели ветви соединяем передаточной прямой. Ветви линии влияния пересекаются под моментной точкой «2».

4. Строим линию влияния усилия в стержне D_2 . Используя консольное сечение I-I, выбираем моментную точку «3», проводим левую ветвь линии влияния, которая совпадает с ее осью и справедлива слева от рассеченной грузовой панели 4-5. Для построения правой ветви устанавливаем груз $P = 1$ справа от панели 4-5, составляем для правой отсеченной части уравнение равновесия в виде

$$\sum M_3 = 0; \quad -D_2 \times h_{D_2} + P \times x_3 = 0,$$

где $h_{D_2} = 15 \times \sin \beta$ - плечо усилия D_2 относительно точки «3»;

$$\beta = \arctg 1/2 = 0,4636; \sin\beta = 0,4472; h_{D_2} = 6,71 \text{ м.}$$

Получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия D_2 :

$$D_2 = x_3/h_{D_2} = x_3/6,71$$

в виде прямой линии, справедливой справа от панели 4-5. В пределах рассеченной грузовой панели ветви линии влияния соединяем передаточной прямой.

Пример 4.4.3. Построить линии влияния усилий в указанных стержнях ферм (рис. 4.25-4.27) при соответствующем грузовом поясе самостоятельно.

4.5 Пример расчета статически определимой шпренгельной фермы

Для плоской статически определимой шпренгельной фермы (рис. 4.28) требуется:

1. Аналитически определить усилия в четырех стержнях O_3 , D_5 , V_3 , U_3 третьей панели фермы от равномерно распределенной нагрузки $q = 20$ кН/м.
2. Построить линии влияния усилий в тех же стержнях.
3. Определить по линиям влияния усилия в тех же четырех стержнях от равномерно распределенной нагрузки.

Решение:

1. Аналитический расчет

- а) приводим заданную нагрузку к узловой (рис. 4.29): $P = 20 \times 3,5 = 70$ кН,
- б) определяем опорные реакции: $R_A = R_B = 1 \times ql/2 = 1 \times 20 \times 42/2 = 420$ кН,
- в) проводим сечение I-I и рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4.30),
- г) определяем усилие в стержне O_3 . Составляем уравнение равновесия в виде $\sum M_1 = 0$, $-420 \times 21 + 35 \times 21 + 70 \times (17,5 + 14 + 10,5 + 7) - O_3 \times h_{O_3} = 0$,
где $h_{O_3} = 4$ м - плечо усилия O_3 относительно точки «1».
Отсюда $O_3 = -1163,75$ кН (сжатие),
- д) определяем усилие в стержне U_5 . Составляем уравнение равновесия в виде $\sum M_2 = 0$, $-420 \times 14 + 35 \times 14 + 70 \times (10,5 + 7 + 3,5) + U_5 \times h_{U_5} = 0$,
где $h_{U_5} = 4$ м - плечо усилия U_5 относительно точки «2».

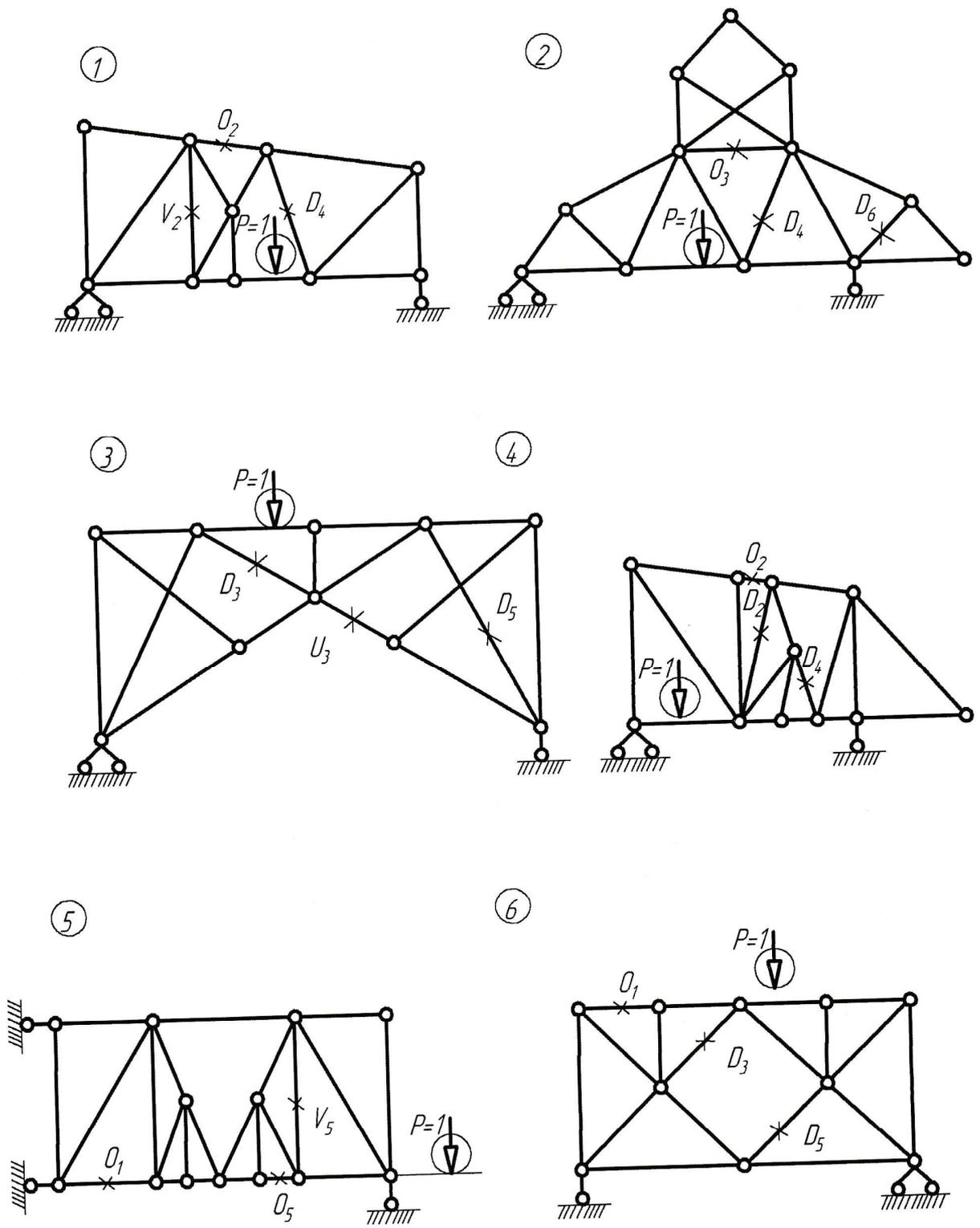


Рис. 4.25

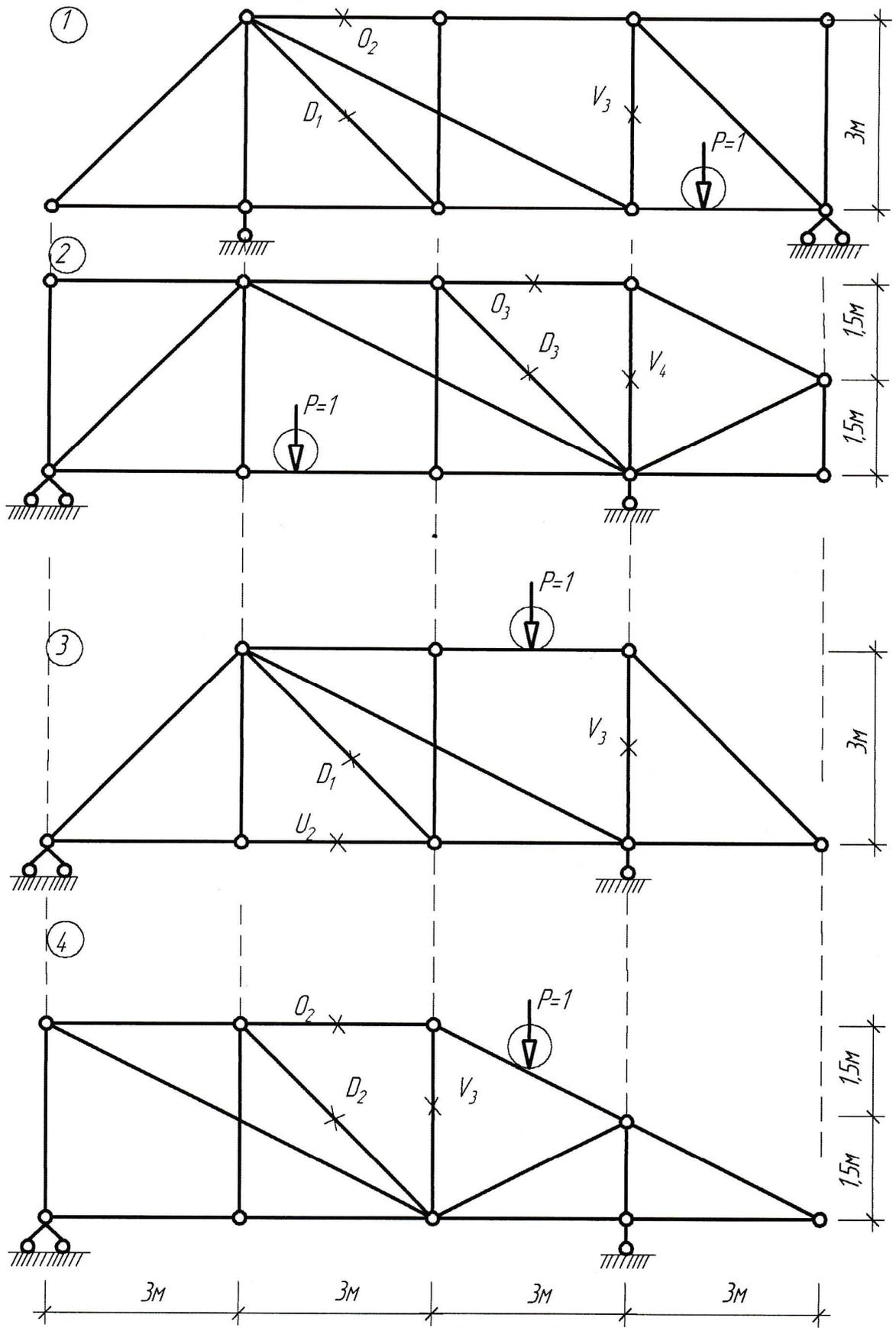


Рис.4.26

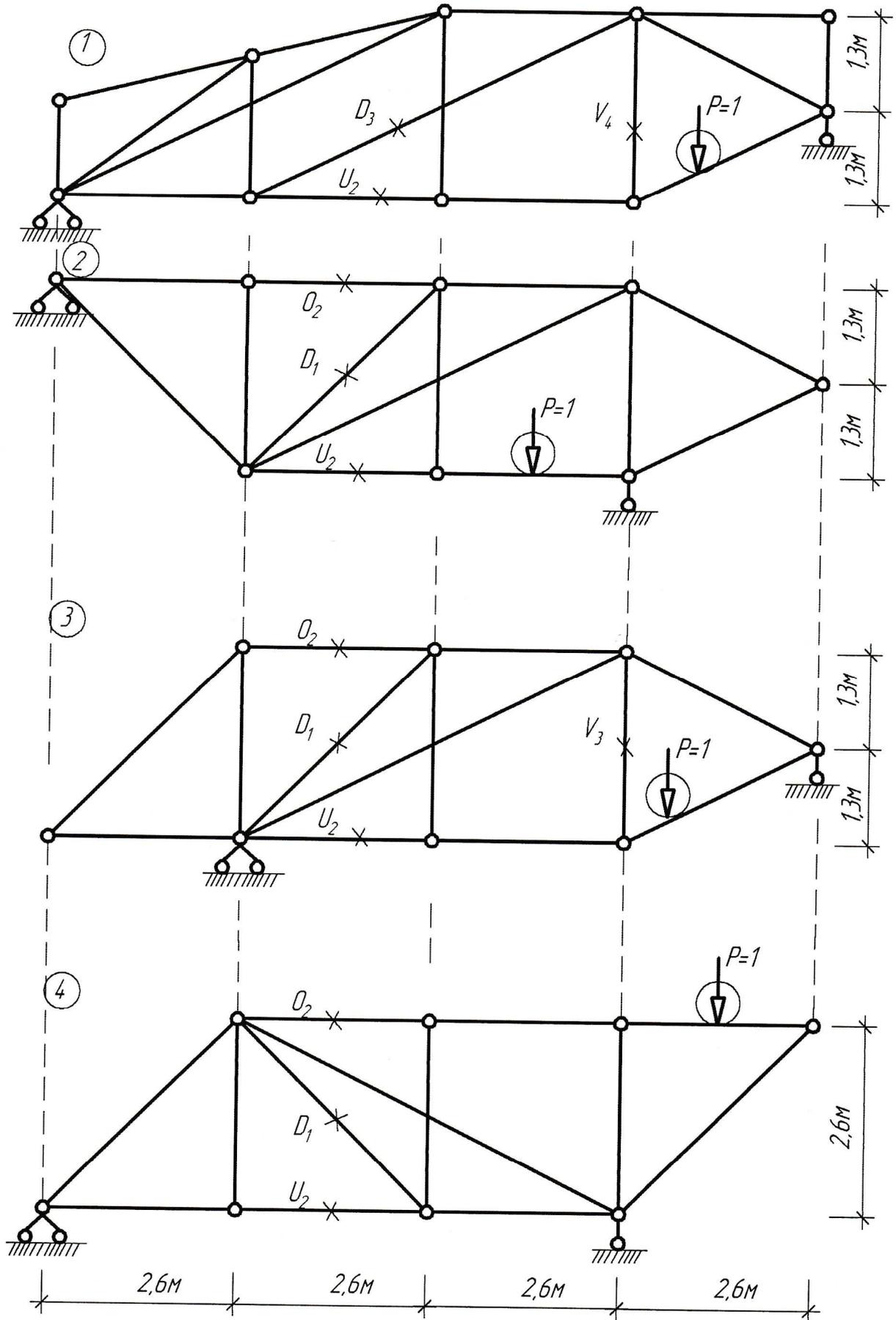


Рис.4.27

Тогда $U_5 = 980$ кН (растяжение);

е) определяем усилие в стержне D_5 . Составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y = 0, \quad 420 - 35 - 70 \times 4 - D_5 \times \cos \alpha = 0,$$

где $\alpha = \arctg 7/4 = 1,052$ рад; $\cos \alpha = 0,4961$,

тогда $D_5 = 211,63$ (растяжение).

ж) выделяем основную ферму и шпренгели, заменяем заданную нагрузку эквивалентной (рис. 4.31), проводим сечение II-II и рассматриваем равновесие левой отсеченной части (рис. 4.32),

з) определяем усилие в стержне V_5 . Составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_3 = 0, \quad (420 - 35 \times 2) \times a - 70 \times 2 \times (7 + a) - 70 \times (14 + a) + V_5 \times (14 + a) = 0,$$

где $a = 2 \times \text{ctg} \beta$; $\beta = \arctg 2/14 = 0,1419$ рад; $a = 14$ м.

Тогда $V_5 = 0$.

2. Построение линий влияния внутренних усилий:

а) строим линии влияния опорных реакций R_A и R_B . Составляем условия равновесия: (рис.4.33)

$$\sum M_A = 0; -P \times x + R_B \times 42 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \times 42 + P \times (42 - x) = 0$$

и получаем уравнения линий влияния опорных реакций:

$$R_A = (42-x)/42 \quad \text{и} \quad R_B = x/42.$$

б) строим линии влияния усилия O_3 . Проводим сечение I-I и рассматриваем два положения груза.

1) груз $P=1$ находится левее рассеченной грузовой панели 4-5. Для правой отсеченной части составляем условие равновесия в виде

$$\sum M_I = 0, \quad O_3 \times 4 + R_B \times 21 = 0$$

и получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия $O_3 = -5,25 R_B$.

2) груз $P=1$ находится правее рассеченной грузовой панели 4-5. Для левой отсеченной части составляем условие равновесия в виде

$$\sum M_I = 0, \quad O_3 \times 4 + R_B \times 21 = 0$$

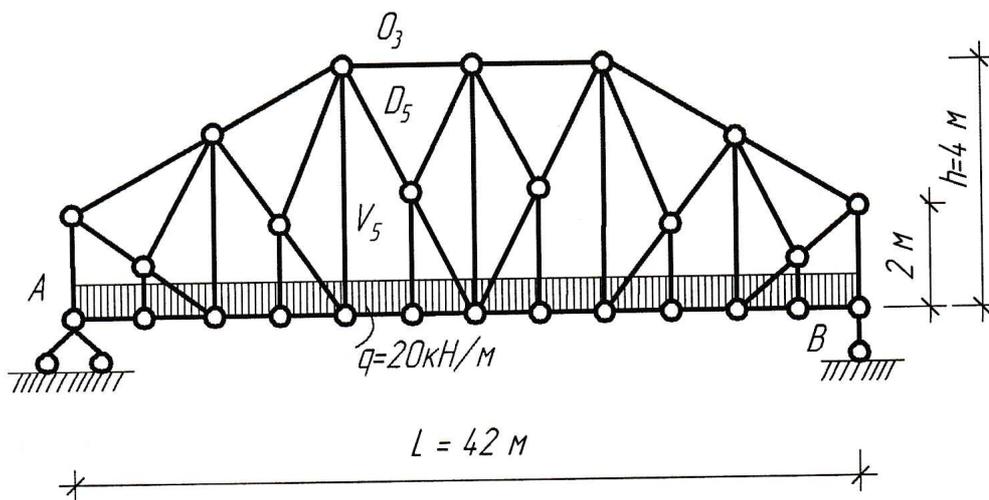


Рис. 4.28

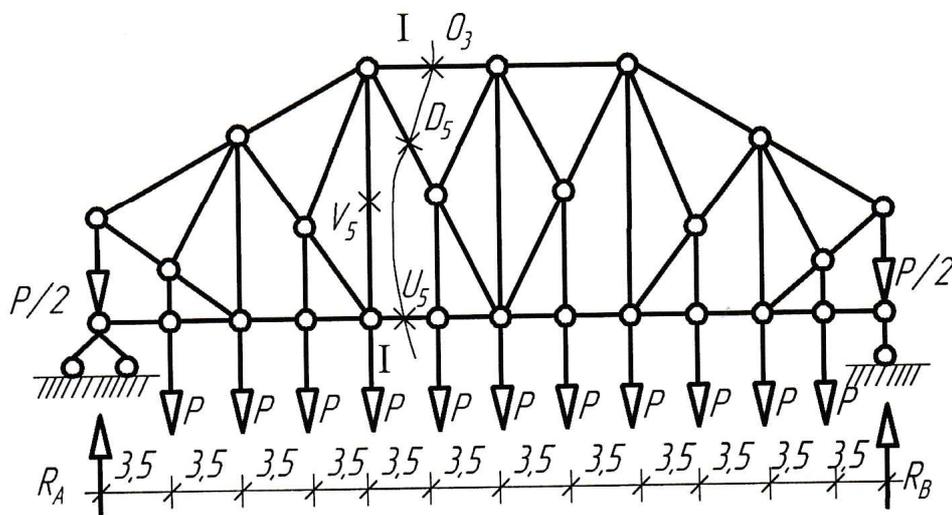


Рис. 4.29

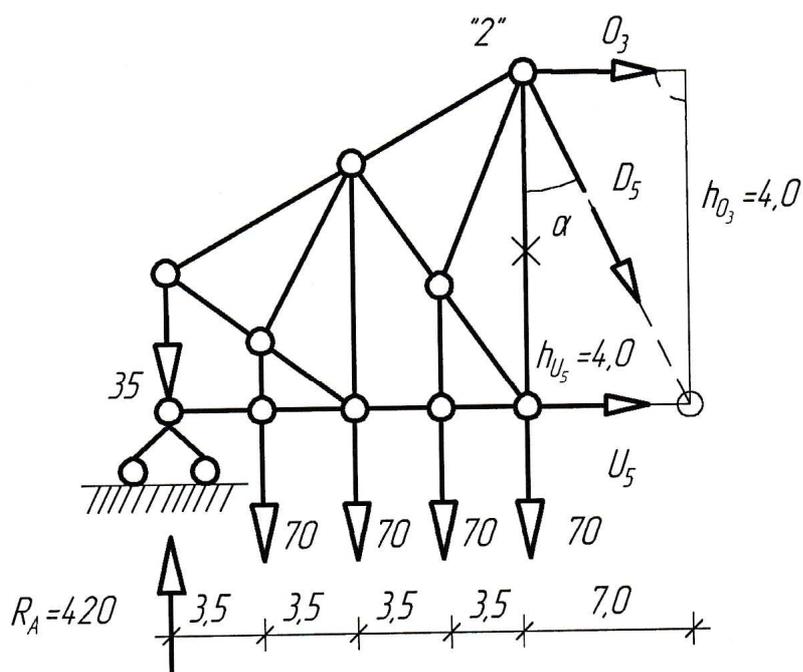


Рис. 4.30

и получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия $O_3 = -5,25 R_A$.

В пределах рассеченной грузовой панели 4-5 будет справедлива передаточная прямая.

в) строим линию влияния усилия U_5 . Рассматриваем два положения груза.

1) груз $P = 1$ находится левее рассеченной грузовой панели 1-4. Для правой отсеченной части составляем условие равновесия в виде

$$\sum M_2 = 0, \quad -U_5 \cdot 4 + R_B \cdot 28 = 0$$

и получаем уравнение левой ветви линии влияния усилия $U_5 = 7R_B$.

1) груз $P = 1$ находится правее рассеченной грузовой панели 1-4. Для левой отсеченной части составляем условие равновесия в виде

$$\sum M_2 = 0, \quad -R_A \cdot 14 + U_5 \cdot 4 = 0$$

и получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия $U_5 = 3,5 R_A$.

В пределах рассеченной грузовой панели 1-4 будет справедлива передаточная прямая.

г) строим линию влияния усилия D_5 . Рассматриваем два положения груза.

1) груз $P = 1$ находится левее рассеченной грузовой панели 4-5. Для правой отсеченной части составляем условие равновесия в виде

$$\sum Y = 0, \quad R_B + D_5 \cdot \cos \alpha = 0$$

и получаем уравнение левой ветви линии влияния усилия D_5

$$D_5 = -R_B / \cos \alpha = -2,016 R_B.$$

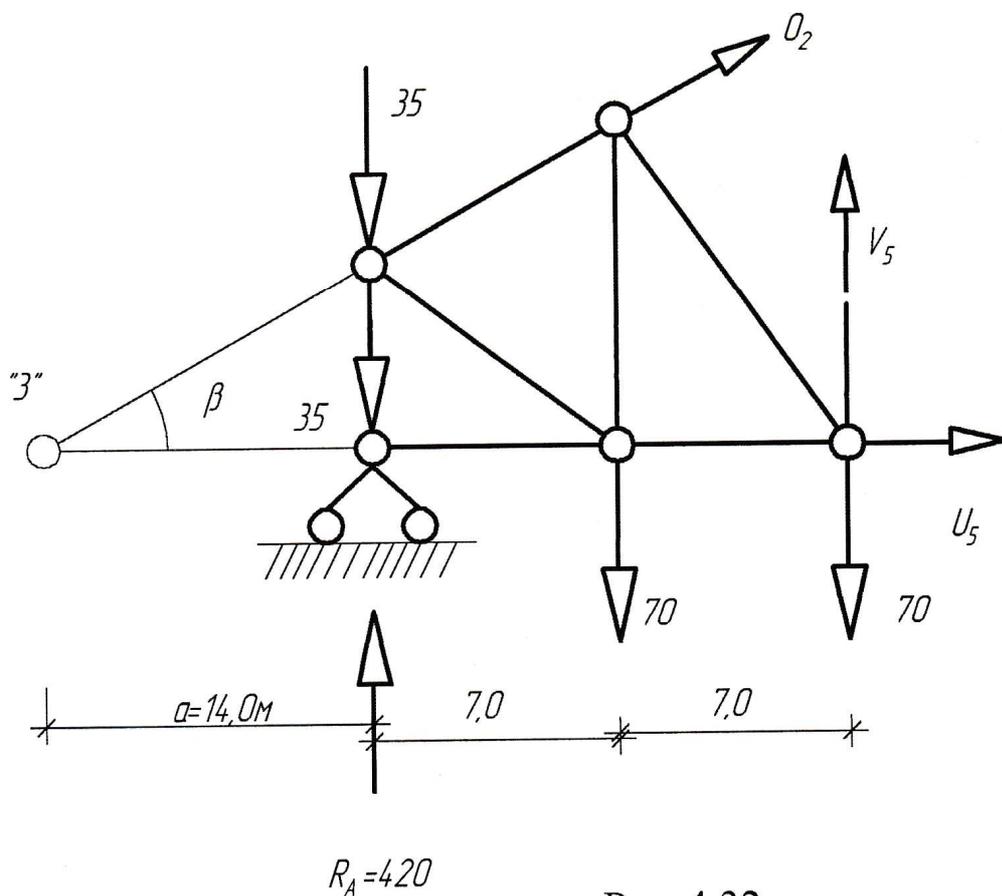
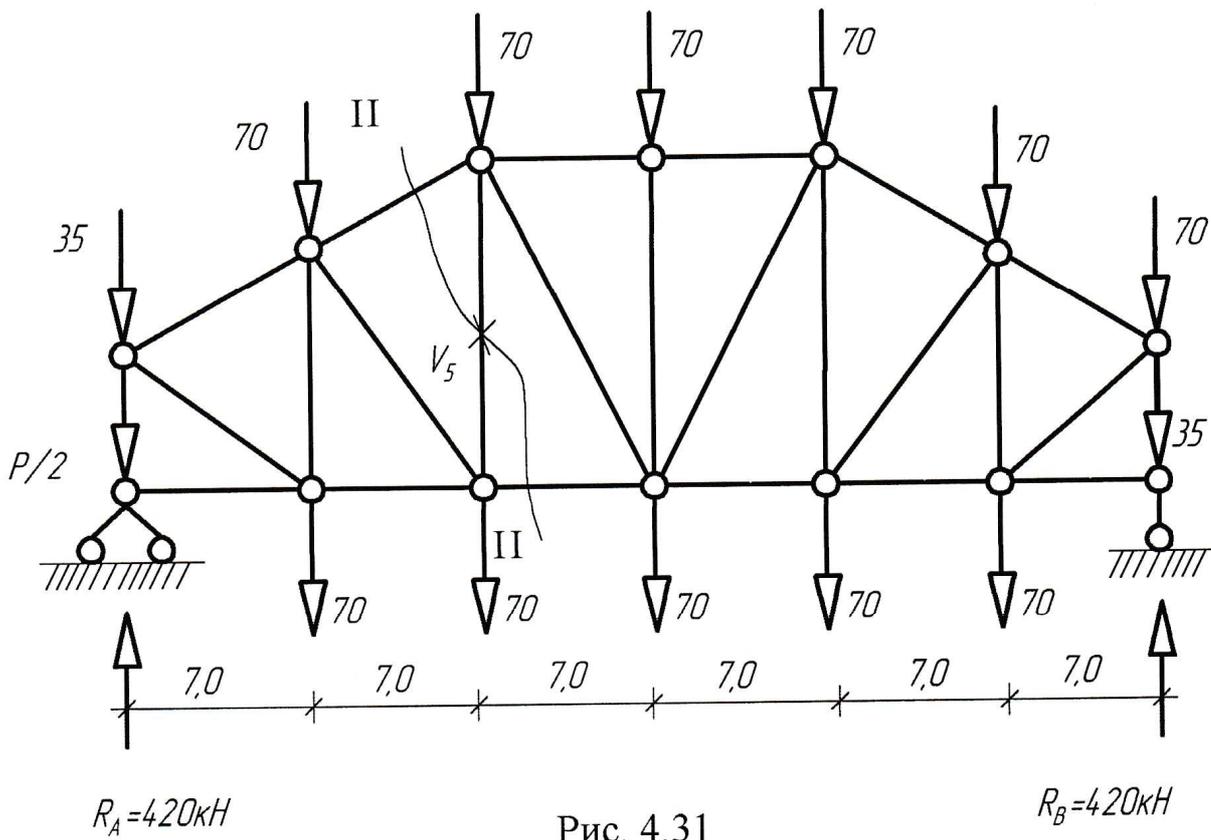
2) груз $P = 1$ находится правее рассеченной грузовой панели 4-5. Для левой отсеченной части составляем условие равновесия в виде

$$\sum Y = 0, \quad R_A - D_5 \cdot \cos \alpha = 0$$

и получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия $D_5 = R_A / \cos \alpha = -2,016 R_A$.

д) строим линию влияния усилия V_5 . Выделяя основную ферму, проводим сечение II-II и рассматриваем два положения груза.

1) груз $P = 1$ находится левее рассеченной грузовой панели 1-4. Для правой отсеченной части составляем условие равновесия в виде



$$\sum M_3 = 0, \quad R_B \times (42 + a) - V_5 \times (14 + a) = 0$$

и получаем уравнение левой ветви линии влияния усилия V_5 :

$$V_5 = -0,5 \times R_A.$$

2) груз $P = 1$ находится правее рассеченной грузовой панели 1-4. Для левой отсеченной части составляем условия равновесия в виде

$$\sum M_3 = 0, \quad R_A \times a + V_5 \times (14 + a) = 0$$

и получаем уравнение правой ветви линии влияния усилия V_5 :

$$V_5 = -0,5 \times R_A.$$

Примыкающие к стойке V_5 двухъярусные шпренгеля оказывают влияние на ординаты линии влияния, которые получены постановкой груза $P = 1$ в узлы 5 и 6.

3. Определение усилий O_3 , U_5 , D_5 , V_5 от равномерно распределенной нагрузки по линиям влияния

$$O_3 = -70 \times (0,4375 + 0,875 + 1,3125 + 1,75 + 3,0625 + 2,625 + 2,1875 + 1,75 + 1,3125 + 0,875 + 0,4375) = -1163,75 \text{ кН (сжатие)}$$

$$U_5 = q \times \omega = 20 \times 1/2 \times 42 \times 2,3333 = 980,0 \text{ кН (растяжение)}$$

$$D_5 = 70 \times (-0,168 - 0,336 - 0,504 - 0,672 + 1,176 + 1,008 + 0,840 + 0,672 + 0,504 + 0,336 + 0,168) = 211,68 \text{ кН (растяжение)}$$

$$V_5 = 70 \times (0,167 + 0,333 - 0,0005 + 0,6667 - 0,292 - 0,25 - 0,208 - 0,167 - 0,125 - 0,083 - 0,042) = 0 \text{ кН.}$$

4. Сравнение результатов аналитического расчета и расчета по линиям влияния

Способы расчета \ Усилия	O_6 (кН)	U_5 (кН)	D_5 (кН)	V_5 (кН)
Аналитическое решение	-1163,75	980,0	211,63	0
По линиям влияния	-1163,75	980,0	211,68	0
Погрешность расчета (%)	0	0	0,024	0

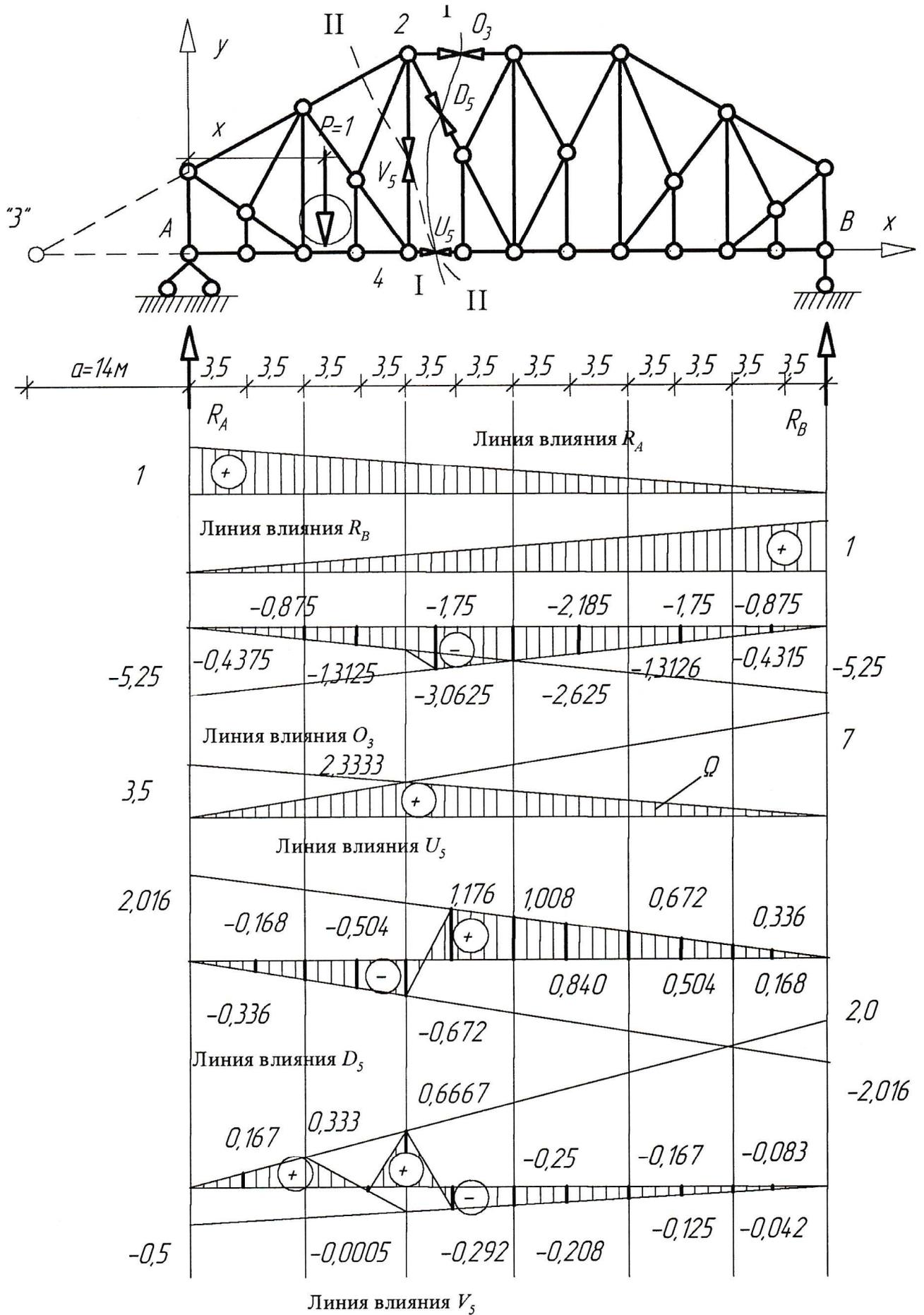


Рис. 4.33

5 ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ

Статически определимая трехшарнирная арка образуется двумя криволинейными стержнями, соединенными между собой ключевым шарниром «С» и с основанием - пятовыми шарнирами «А» и «В» (рис.4.1). Будем рассматривать только простые арки, в которых пятовые шарниры лежат на одном уровне, нагруженные вертикальной нагрузкой. Расстояние между опорами называется пролетом арки - l , а высота от уровня опор до ключевого шарнира - стрелой подъема f . Геометрические характеристики арок вычисляются по следующим формулам.

Для параболических арок:

$$y = \frac{4 \cdot f}{l^2} x(l - x); \quad (5.1)$$

$$tg\varphi = \frac{4 \cdot f}{l^2} (l - 2x); \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}}. \quad (5.2)$$

Для круговых арок:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f; \quad (5.3)$$

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}; \quad \sin\varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \quad \cos\varphi = \frac{y + R - f}{R}. \quad (5.4)$$

Для синусоидальных арок:

$$y = f \sin \frac{\pi}{l} x; \quad (5.5)$$

$$tg\varphi = \frac{\pi}{l} f \cos \frac{\pi}{l} x. \quad (5.6)$$

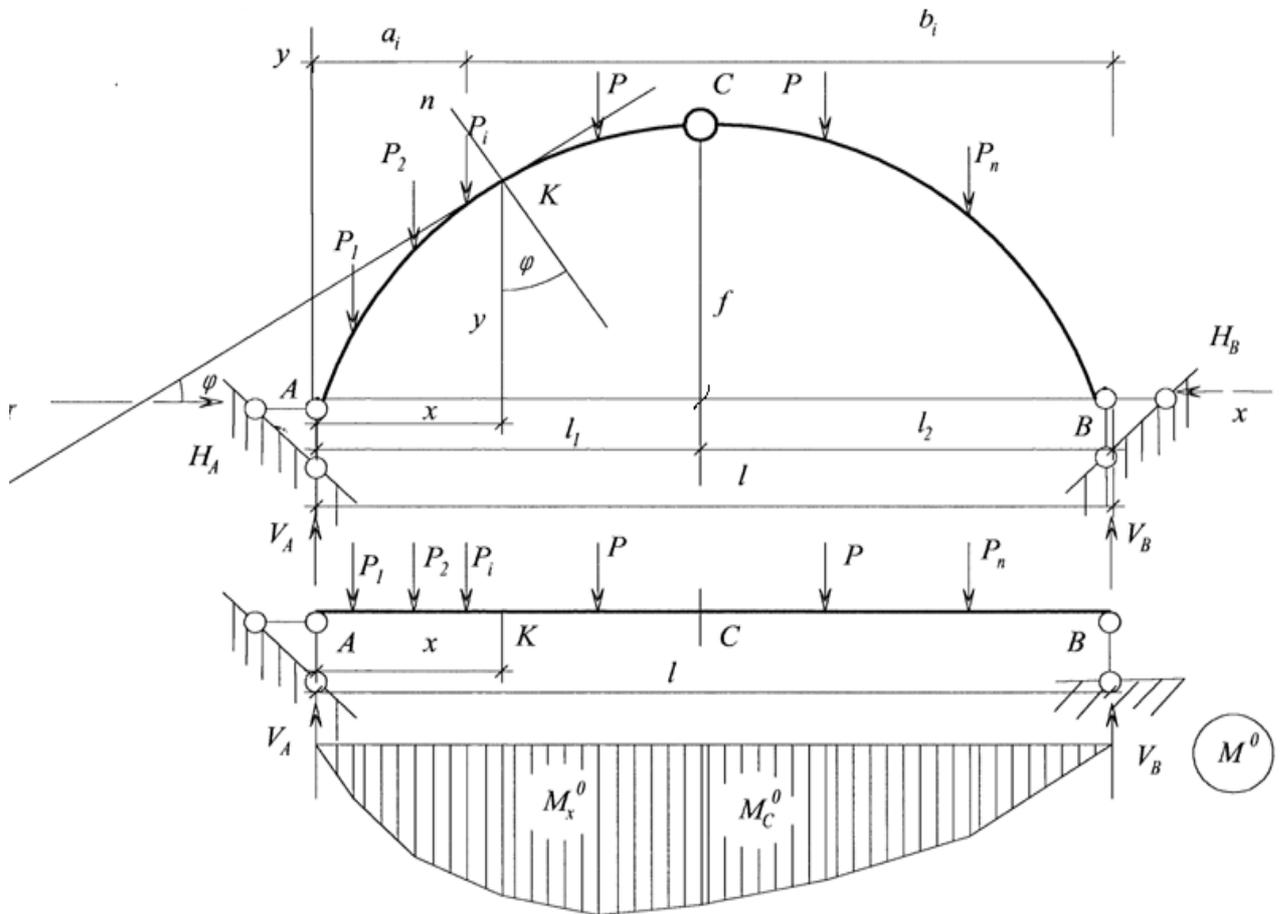


Рис. 4.1

5.1 Расчет на неподвижную нагрузку

5.1.1 Определение опорных реакций

Рассмотрим трехшарнирную арку с пятовыми шарнирами, расположенными на одном уровне, при действии вертикальной нагрузки (рис. 5.1).

Разложим каждую опорную реакцию на две составляющие: одну по направлению линии, соединяющей пятовые шарниры, другую по вертикали. Для определения четырех неизвестных V_A, V_B, H_A, H_B составим три уравнения равновесия для всей арки:

$\sum X = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$ и условие шарнирного соединения полуарок ключевым шарниром $\sum M_C^{\text{лев}} = 0$ или $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$.

Вертикальные составляющие опорных реакций представляют собой опорные реакции в простой балке при пролете, равном расстоянию между пятовыми шарнирами:

$$\sum M_A = 0; V_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i a_i; \quad (5.7)$$

$$\sum M_B = 0; V_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i b_i. \quad (5.8)$$

Проектируя все силы на ось X, убеждаемся, что горизонтальные составляющие реакций равны между собой по абсолютной величине и противоположны по направлению:

$$\sum X = 0; H_A = H_B. \quad (5.9)$$

Для определения распора $H = H_A = H_B$ составим условие равновесия левой части арки в виде суммы моментов относительно ключевого шарнира:

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; V_A l_1 - \sum P_i^{\text{лев}} (l_1 - a_i) - Hf = 0. \quad (5.10)$$

Из рис. 4.1 видно, что

$$V_A l_1 - \sum P_i^{\text{лев}} (l_1 - a_i) = M_C^0$$

выражает изгибающий момент в сечении «С» простой балки под ключевым шарниром арки. Получим выражение для определения распора:

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (5.11)$$

5.1.2 Определение изгибающих моментов

Выразим изгибающий момент в произвольном сечении «х» (рис.5.1):

$$M_x = V_A x - \sum P_i^{\text{лев}} (x - a_i) - Hy,$$

где $V_A x - \sum P_i^{\text{лев}} (x - a_i) = M_x^0$ - изгибающий момент в сечении балки, расположенном под соответствующим сечением арки. Таким образом:

$$M_x = M_x^0 - Hy. \quad (5.12)$$

4.1.1 Определение поперечных сил

Для вычисления поперечной силы в произвольном сечении «х» будем проектировать все силы, расположенные слева от этого сечения на нормальную ось п.

$$Q_x = V_A \cos \varphi - \sum P_i^{\text{лев}} \cos \varphi - H \sin \varphi = \left(V_A - \sum P_i^{\text{лев}} \right) \cos \varphi - H \sin \varphi,$$

где $V_A - \sum P_i^{\text{лев}} = Q_x^0$ - поперечная сила в сечении балки, расположенном под соответствующим сечением арки. Таким образом:

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi. \quad (5.13)$$

4.1.2 Определение продольных сил

Для вычисления продольной силы в произвольном сечении “х” будем проектировать все силы, расположенные слева от этого сечения на касательную ось τ .

$$N_x = -V_A \sin \varphi + \sum P_i^{\text{лев}} \sin \varphi - H \cos \varphi, \quad \text{или}$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi + H \cos \varphi). \quad (5.14)$$

Пример 5.1. Для трехшарнирной параболической арки (рис.5.2) вычислить аналитически внутренние усилия в сечениях и построить эпюры изгибающих моментов M_x , поперечных Q_x и продольных N_x сил. При определении усилий направление осей проекций принято в соответствии с декартовой системой координат.

Решение:

1. Определяем координаты намеченных сечений и углы наклона касательной к оси арки в этих сечениях, используя зависимости (5.1), (5.2)

$$y = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x(l - x); \quad y = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l - 2x).$$

Полученные значения заносим в таблицу 4.1.

2. Определяем составляющие опорные реакции арки (5.5), (5.6)

$$\sum M_A = 0; (1,4 \cdot 5^2)/2 + 3 \cdot 10 + 1,6 \cdot 5 \cdot 17,5 - V_B \cdot 20 = 0; V_B = 9,375 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 20 - 1,4 \cdot 5 \cdot 17,5 - 3 \cdot 10 - (1,6 \cdot 5^2)/2 = 0; V_A = 8,625 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{лев.с.}} = 0; 8,625 \cdot 10 - H_A \cdot 5 - 1,4 \cdot 5 \cdot 7,5 = 0; H_A = 6,75 \text{ кН}.$$

2. Производим проверку найденных составляющих опорных реакций:

$$\sum X = 0; 6,75 - 6,75 = 0, \sum Y = 0; 8,625 - 1,4 \cdot 5 - 3 - 1,6 \cdot 5 + 9,375 = 0,$$

$$\sum M_C^{\text{лев.с.}} = 0; 8,625 \cdot 10 - 6,75 \cdot 5 - 1,4 \cdot 5 \cdot 7,5 = 0.$$

3. Строим балочные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (M_x^0, Q_x^0) от заданной нагрузки (рис.5.3).

4. Определяем внутренние усилия M_x, Q_x и N_x по формулам (5.7)-(5.9) в сечениях арки. Все вычисления сводим в таблицу 5.1.

5. Строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от заданной нагрузки (рис 5.4).

б. Выполняем статическую проверку. Рассматриваем равновесие левой отсеченной части трехшарнирной арки относительно сечения 5 и составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X = 0; & \quad 6,75 - 6,881 \cdot 0,97 - 0,3 \cdot 0,242 = 0, \\ \sum Y = 0; & \quad 8,625 - 1,4 \cdot 5 - 3 + 6,881 \cdot 0,242 - 0,3 \cdot 0,97 = 0, \\ \sum M_5^{\text{лев.с.}} = 0; & \quad -8,625 \cdot 12,5 + 6,75 \cdot 4,687 + 1,4 \cdot 5 \cdot 10 + 3 \cdot 2,5 = 0.\end{aligned}$$

Аналогично рассчитываем равновесие правой отсеченной части арки относительно сечения б и составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X = 0; & \quad -6,75 + 6,566 \cdot 0,895 + 1,791 \cdot 0,447 = 0, \\ \sum Y = 0; & \quad 9,374 - 1,6 \cdot 5 + 1,791 \cdot 0,895 - 6,566 \cdot 0,447 = 0, \\ \sum M_6^{\text{пр.с.}} = 0; & \quad -1,575 - 1,6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 6,75 \cdot 3 \cdot 3,75 + 9,374 \cdot 5 = 0.\end{aligned}$$

Вычислить значения внутренних усилий в сечениях 1 и 2 трехшарнирной арки (рис.5.5).

Результаты решения:

1)	$M_1 = 1,15 \text{ кНм};$	$Q_1 = 2,1/-2,07 \text{ кН};$	$N_1 = -9,05/6,28 \text{ кН}.$
	$M_2 = 2,65 \text{ кНм};$	$Q_2 = -0,01 \text{ кН};$	$N_2 = -7,56 \text{ кН}.$
2)	$M_1 = 0;$	$Q_1 = 0,79 \text{ кН};$	$N_1 = -25,53 \text{ кН}.$
	$M_2 = 3,75 \text{ кНм};$	$Q_2 = -1,19 \text{ кН};$	$N_2 = -25,83 \text{ кН}.$
3)	$M_1 = 1,67 \text{ кНм};$	$Q_1 = 1,16 \text{ кН};$	$N_1 = -12,01 \text{ кН}.$
	$M_2 = -11,37 \text{ кНм};$	$Q_2 = -2,04 \text{ кН};$	$N_2 = -12,31 \text{ кН}.$
4)	$M_1 = -54,5 \text{ кНм};$	$Q_1 = 5,99 \text{ кН};$	$N_1 = -40 \text{ кН}.$
	$M_2 = -0,96 \text{ кНм};$	$Q_2 = -13,03 \text{ кН};$	$N_2 = -44 \text{ кН}.$

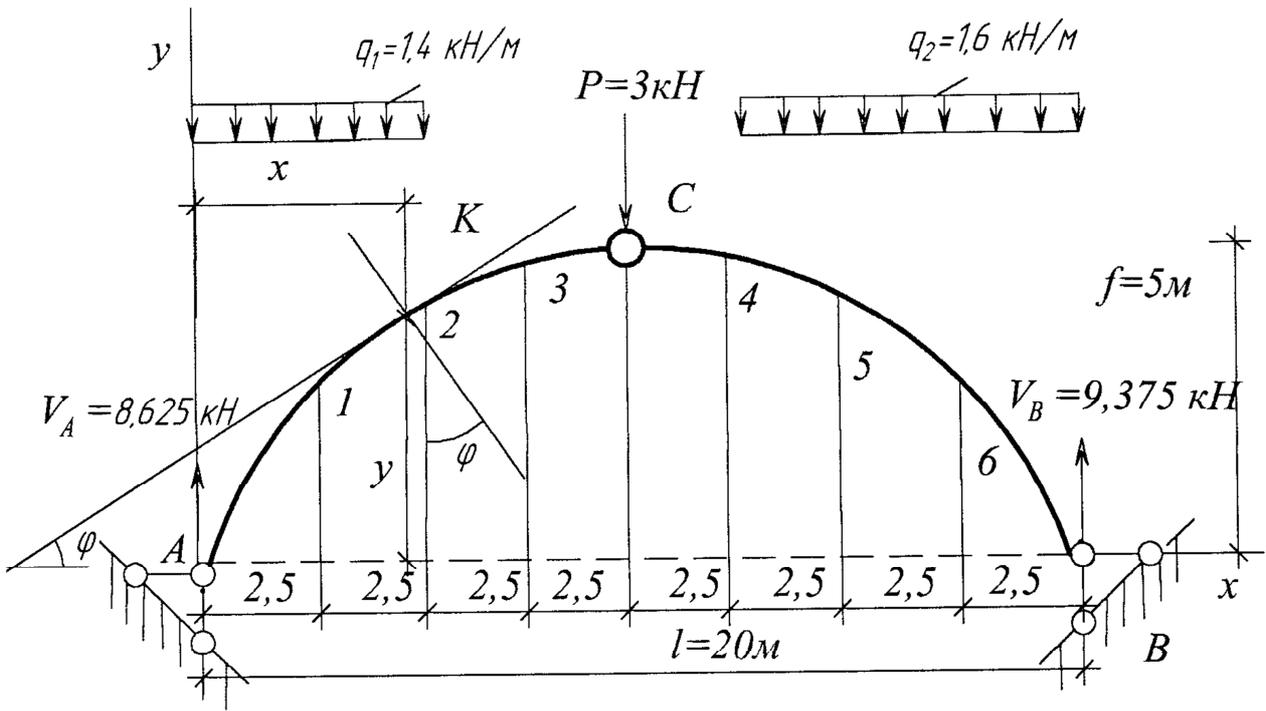


Рис. 5.2

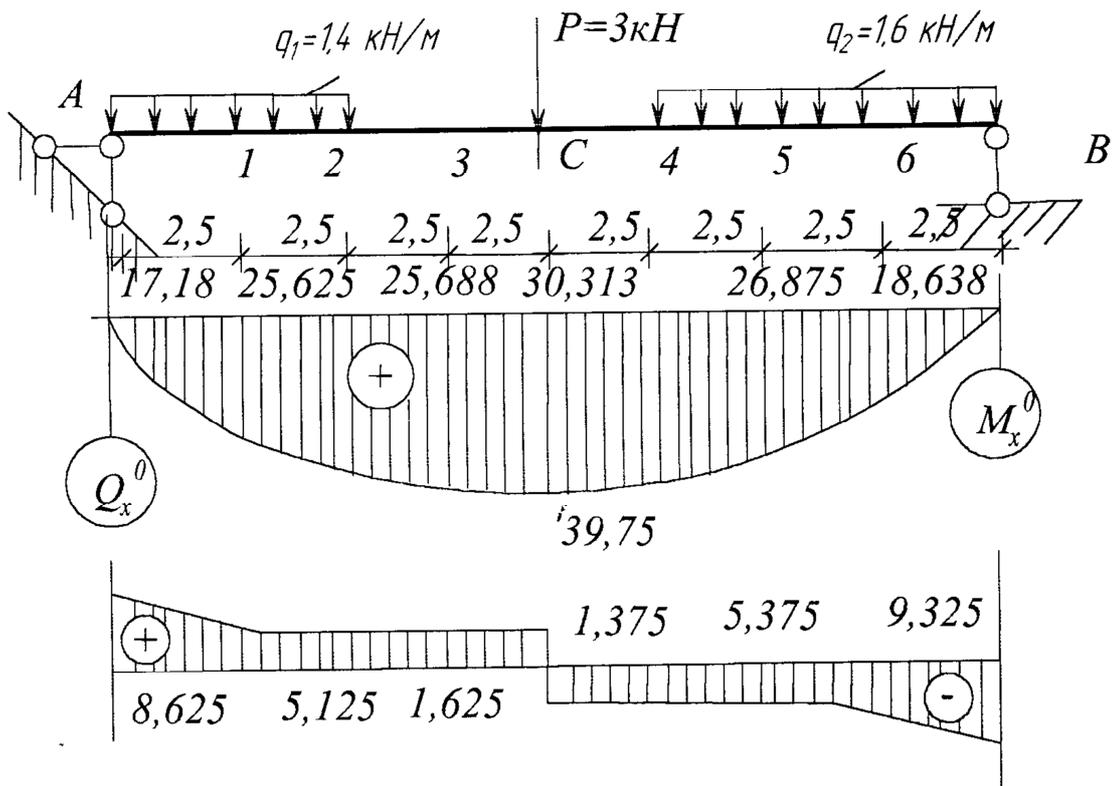


Рис. 5.3

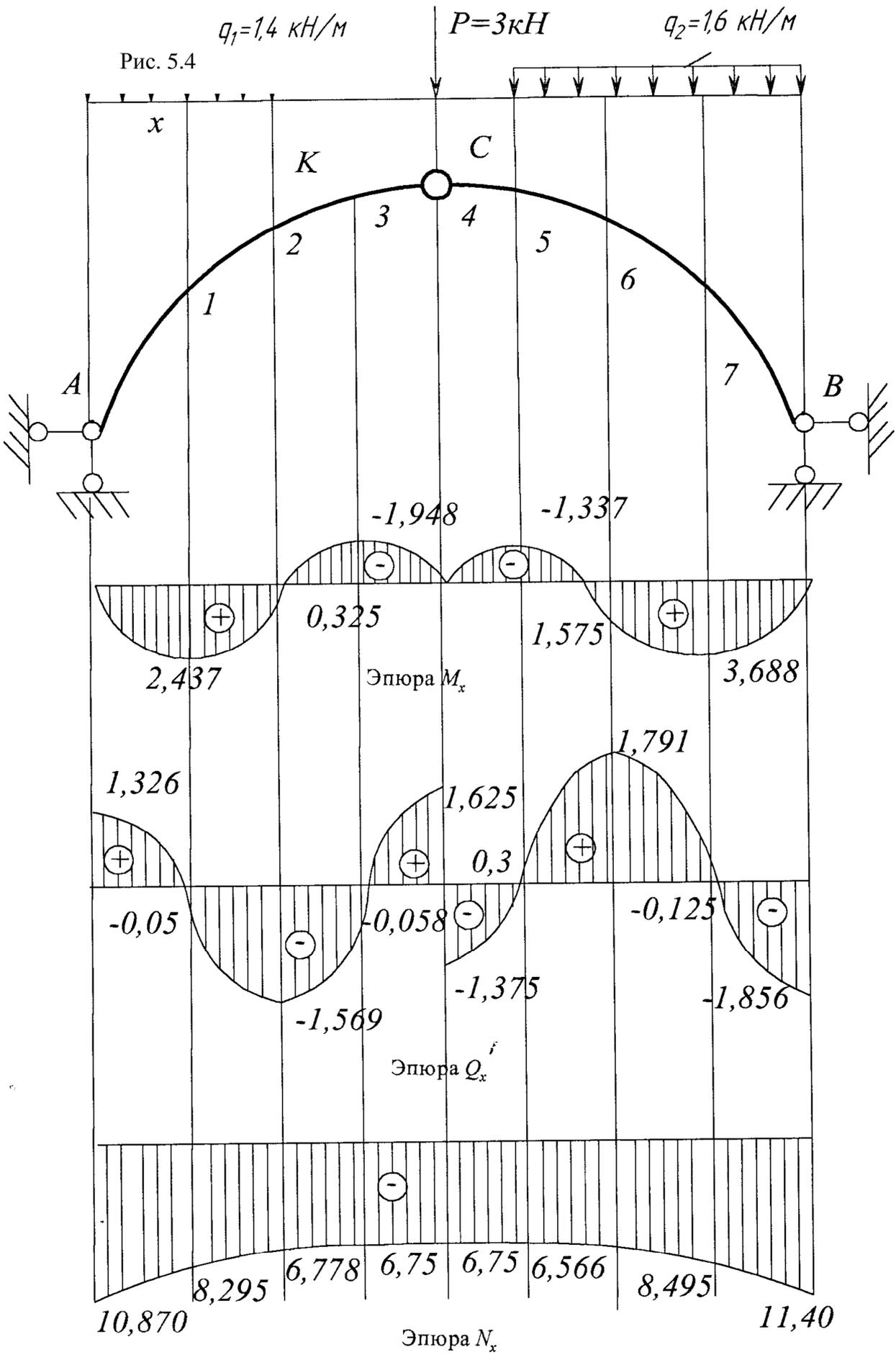


Рис.5.4

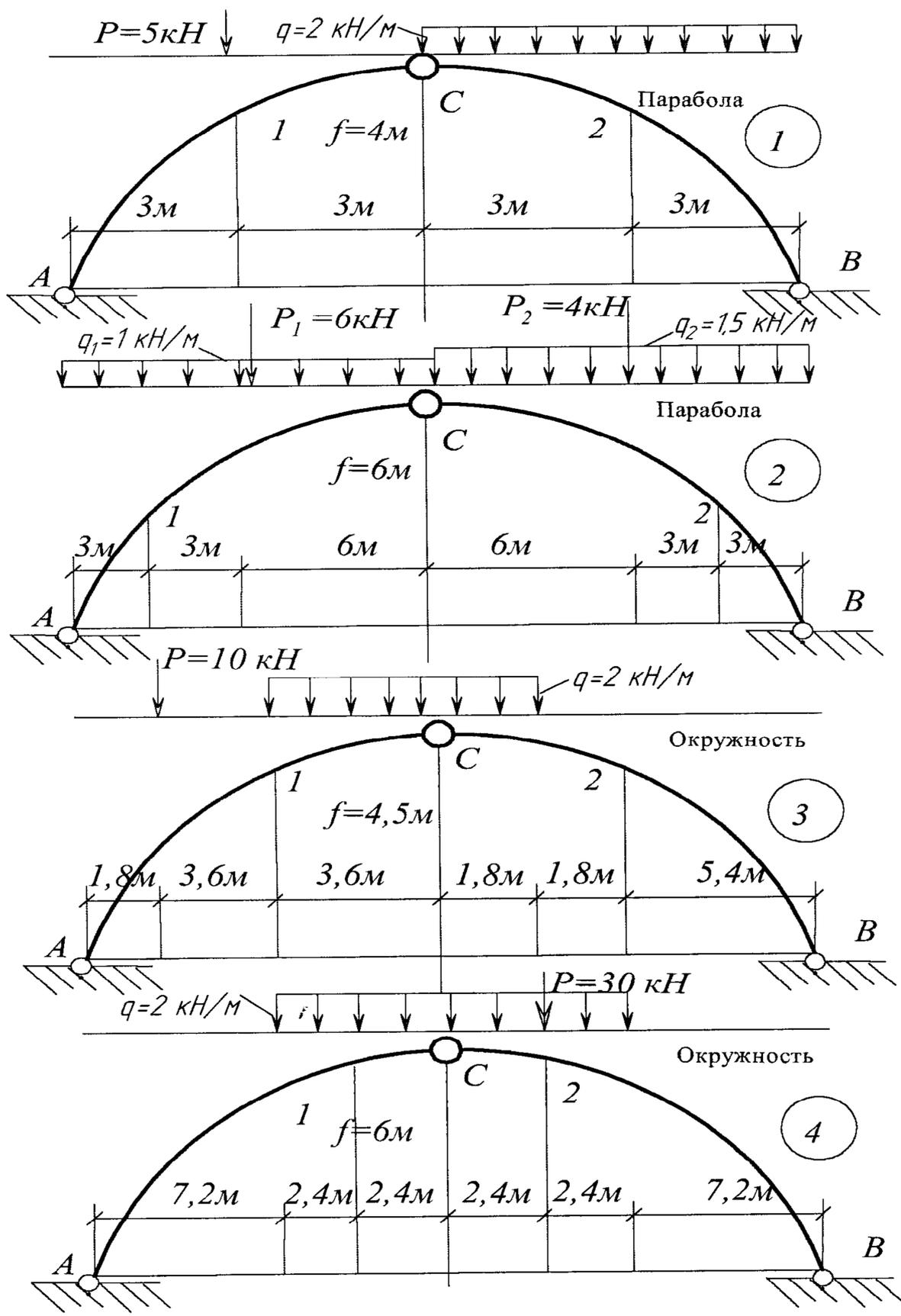


Рис.5.5

Таблица 5.1

№ сечений	x	y	$\operatorname{tg} \varphi$	φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	Q_x^0	$Q_x^0 \cdot \cos \varphi$	$Q_x^0 \cdot \sin \varphi$	$-H \cdot \sin \varphi$	$H \cdot \cos \varphi$	M_x^0	$-H \cdot y$	Q_x	N_x	M_x
A	0	0	1,0	45°	0,707	0,707	8,625	6,098	6,098	-4,772	4,772	0	0	1,326	-10,87	0
1	2,5	2,1875	0,75	36°54	0,6	0,78	5,125	4,0	3,025	-4,05	5,27	17,187	-14,75	-0,05	-8,295	24,37
2	5,0	3,75	0,5	26°36	0,447	0,895	1,625	1,455	0,723	-3,024	6,05	25,625	-25,3	-1,569	-6,778	0,325
3	7,5	4,687	0,25	14°	0,242	0,97	1,625	1,576	0,393	-1,634	6,5475	29,688	-31,637	-0,058	-6,94	-1,949
C	10,0	5,0	0	0	0	1,0	$\frac{1,625}{-1,375}$	$\frac{1,625}{-1,375}$	0	0	6,75	33,75	-33,75	$\frac{1,625}{-1,375}$	$\frac{-6,75}{-6,75}$	0
4	12,5	4,687	-0,25	-14°	-0,242	0,97	-1,375	-1,334	0,333	1,634	6,5475	30,313	-31,637	0,3	-6,881	-1,337
5	15,0	3,75	-0,5	-26°36	-0,447	0,895	-1,375	-1,235	0,516	3,024	6,05	26,375	-25,3	1,791	-6,566	1,575
6	17,5	2,1875	-0,75	-36°54	-0,6	0,78	-5,375	-4,175	3,225	4,05	5,27	18,433	-14,75	-0,125	-8,495	3,688
B	20,0	0	-1,0	-45°	-0,707	0,707	-5,375	-6,628	6,628	4,772	4,772	0	0	-1,856	-11,4	0

6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Силловые, температурные и кинематические воздействия вызывают перемещения точек и сечений статически определимых систем ($\Delta_{ip}, \Delta_{it}, \Delta_{ic}$). Перемещения различают: линейные по заданному направлению; истинное перемещение точки; взаимное линейное перемещение точек; угловое перемещение сечения; взаимное угловое перемещение сечений.

6.1 Определение перемещений от заданной нагрузки

Перемещения в статически определимых системах от нагрузки находятся по формуле Мора-Максвелла:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} \partial s + \sum_{i=1}^m \int_0^l \mu \frac{\bar{Q}_i Q_p}{EG} \partial s + \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{N}_i N}{EA} \partial s, \quad (6.1)$$

где m - число участков или стержней; M_p, Q_p, N_p - изгибающий момент, поперечная и продольная силы в рассматриваемом сечении системы, вызванные действующей нагрузкой; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ - внутренние усилия в том же сечении, вызванные единичным силовым фактором, определяющим точку и направление изучаемого перемещения. Единичными силовыми факторами являются: сосредоточенная сила $P_i = 1$ при вычислении линейных перемещений или сосредоточенный момент $M_i = 1$ при вычислении угловых перемещений. Для систем, стержни которых работают в основном на изгиб (балки, рамы), влияние поперечных и продольных сил незначительно, и ими в практических расчетах пренебрегают. Поэтому перемещения выражаются в виде:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} \partial s. \quad (6.2)$$

Знак перед интегралом на рассматриваемом участке следует принимать положительным, если обе перемножаемые эпюры расположены по одну сторону от оси стержня, и отрицательным, если эпюры расположены с разных сторон от оси стержня. Для систем, элементы которых работают в основном на центральное растяжение - сжатие (фермы), используют формулу:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} \partial s. \quad (6.3)$$

Учитывая, что стержни ферм обычно по длине имеют постоянную жесткость, и при узловой нагрузке усилия в пределах длины стержня не меняются, формула (6.3) принимает вид:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_i N l_i}{EA} = \sum_{i=1}^m \bar{N}_i N \rho_i, \quad (6.4)$$

где ρ_i - физико-геометрическая характеристика стержня.

6.2 Вычисление интеграла Мора-Максвелла

6.2.1 Правило А.Н. Верещагина

На прямолинейном участке стержня длиной l и постоянной жесткости вычисление интеграла в формуле перемещений (6.2) может быть сведено к перемножению эпюр, если одна из подынтегральных функций линейная:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} \partial s = \frac{\omega y_0}{EI}, \quad (6.5)$$

где ω - площадь, в общем случае, криволинейной эпюры изгибающих моментов;

y_0 - ордината прямолинейной эпюры изгибающих моментов, взятая в сечении под центром тяжести криволинейной эпюры. Для систем, состоящих из прямолинейных стержней постоянной жесткости на части или всей их длине, подынтегральная функция \bar{M}_i - кусочно-линейная на m - участках, перемещения вычисляются по правилу А.Н. Верещагина следующим образом:

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j y_{oj}}{EI_j} \quad (6.6)$$

Пример 6.2.1. Определить горизонтальное перемещение правого узла рамы точки i_1 от нагрузки (рис.6.1 а).

Решение:

Строим эпюры в заданной раме:

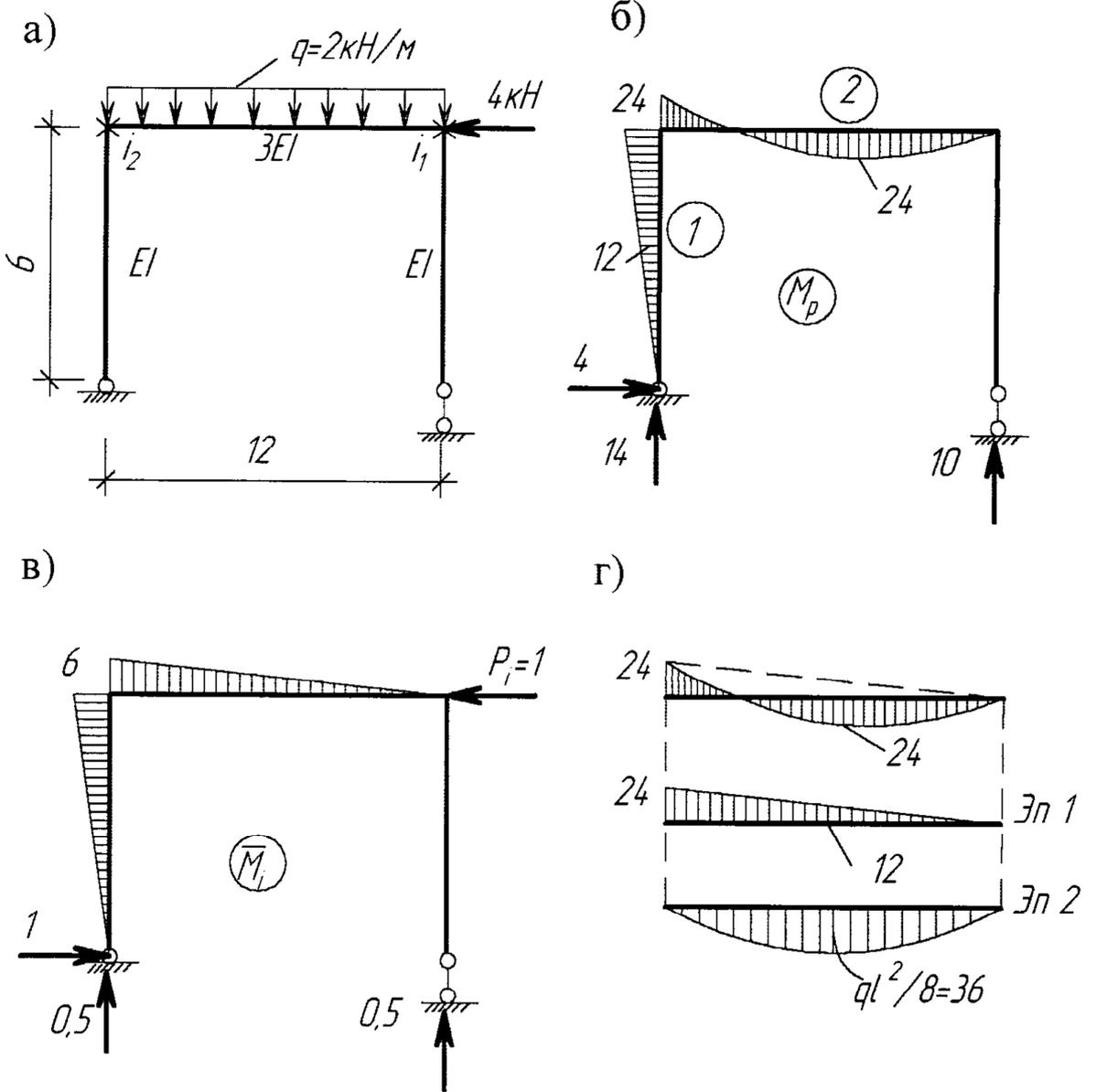


Рис. 6.1

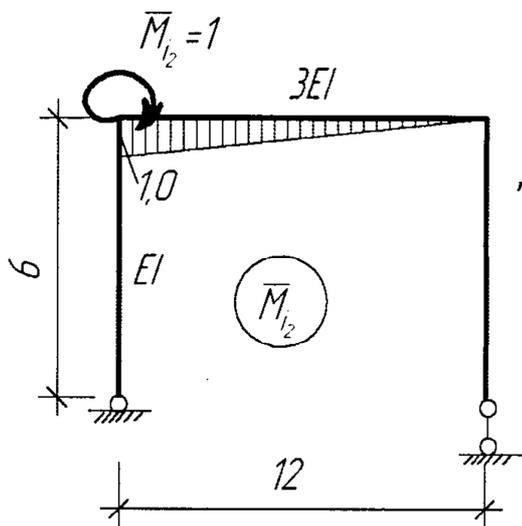


Рис. 6.2

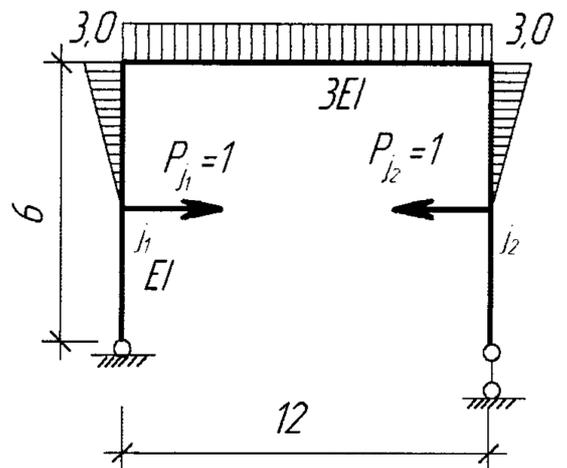


Рис. 6.3

- 1) от нагрузки (рис. 6.1 б);
- 2) от силы $P_{i_1}=1$, приложенной в точке i_1 по направлению перемещения (рис.6.1 в).

Эпюры только на двух участках (1), (2). Для упрощения расчетов, представим эпюру на участке (2) в виде двух эпюр (рис. 6.1 г). Суммарная эпюра двух последних должна быть эквивалентна исходной.

Вычисление перемещения по Верещагину:

$$\Delta_{i_1,p} = \sum_1^2 \frac{\omega_j y_o}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) \cdot \frac{1}{3EI} = \frac{192}{EI} \text{ (м)}.$$

Здесь знак «-» в скобках при втором слагаемом указывает на то, что перемножаемые эпюры расположены с разных сторон стержня.

Пример 6.2.2. Для той же рамы примера 5.2.1. Определить угловое перемещение левого узла рамы точки i_2 от нагрузки (рис. 6.2).

Решение:

Строим эпюру от единичного момента $\bar{M}_{i_2} = 1$. Направление момента выбираем произвольно (по часовой стрелке). Определяем перемещение

$$\Delta_{i_p} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{16}{EI} \text{ (м)}.$$

Знак «+» говорит о том, что направление углового смещения узла i_2 происходит по выбранному направлению \bar{M}_{i_2} .

Пример 6.2.3. Для заданной рамы определить взаимное линейное смещение точек от заданной нагрузки. Прикладываем к точкам i_1 и i_2 взаимно уравновешивающую систему сил и строим эпюру \bar{M}_i (рис. 6.3).

Решение:

Определяем перемещение

$$\Delta_{i_p} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 24 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) + \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot 3 \right) - \frac{1}{3EI} \left(\frac{3}{2} \cdot 36 \cdot 12 \cdot 3 \right) \right) = -\frac{54}{EI} \text{ (м)}.$$

6.2.2 Формула Симпсона

Вычисление интеграла в формуле (6.2) может быть выполнено по формуле Симпсона:

$$\int_0^{e=nd} f(x) dx = \frac{d}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n].$$

Если подынтегральная функция на двух смежных участках длиной d изменяется по квадратичной параболе при четном количестве участков n , где f_0, f_1, \dots, f_n - значения функции в этих точках. В частном случае при двух участках длиной $d = l/2$ формула Симпсона:

$$\int_0^l f(x) dx = \frac{l}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

дает точный результат, если $f(x)$ - многочлен не выше третьей степени. При кусочно-гладкой функции $f(x)$ это выражение будет справедливо в каждом из « m » участков.

Поэтому для вычисления интеграла в формуле (6.2) получим выражение:

$$\int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} ds = \frac{l}{6EI} (\overline{M}_i^{\text{лев}} M_p^{\text{лев}} + 4\overline{M}_i^{\text{ср}} M_p^{\text{ср}} + \overline{M}_i^{\text{пр}} M_p^{\text{пр}}), \quad (6.7)$$

где $\overline{M}_i^{\text{лев}}, M_p^{\text{лев}}, \overline{M}_i^{\text{пр}}, M_p^{\text{пр}}$ - значения изгибающих моментов по концам участка l , $\overline{M}_i^{\text{ср}}, M_p^{\text{ср}}$ - значения изгибающих моментов в среднем сечении участка l .

Пример 6.2.4. Определить горизонтальное перемещение правого узла рамы точки i_1 от нагрузки (рис.6.1 а), используя формулу Симпсона.

Решение:

Строим эпюры в заданной раме:

1) от нагрузки (рис. 6.1 б);

2) от силы $P_{i_1} = 1$, приложенной в т. i_1 по направлению перемещения (рис.6.1);

3) определяем горизонтальное перемещение:

$$\Delta_{i_1 p} = \frac{6}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 12 + 6 \cdot 24) + \frac{12}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 24 - 4 \cdot 3 \cdot 24 + 0 \cdot 0) = \frac{192}{EI} \text{ (м)}.$$

Здесь знак «-» в скобках при втором слагаемом указывает на то, что перемножаемые эпюры расположены с разных сторон стержня.

Пример 6.2.5 Определить вертикальное и угловое перемещение правого узла рамы i (рис.6.4 а).

Решение:

1. Строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки M_p (рис.6.4 б).

2. Строим эпюру изгибающих моментов от единичного силового фактора $P_i = 1$ (рис.6.4 в).

3. Определяем прогиб узла i используя формулу Симпсона:

$$\Delta_{ip} = \frac{l}{6EI} \left(\frac{5}{8} ql^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{4 \cdot 9}{16} ql^2 \cdot l + \frac{3}{8} ql^2 \cdot \frac{l}{2} \right) + \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left(\frac{3}{8} ql^2 \cdot \frac{l}{2} + \frac{4 \cdot 5}{32} ql^2 \cdot \frac{l}{4} + 0 \cdot 0 \right) + \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left(0 \cdot 0 + \frac{4 \cdot 3}{32} \cdot ql^2 \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{8} ql^2 \cdot \frac{l}{2} \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{467ql^4}{768EI} = 0,249(\text{м}).$$

4. Строим эпюру изгибающих моментов от единичного силового фактора $M_i = 1$ (рис.6.4 г).

5. Определяем угловое перемещение правого узла i , используя правило Верещагина:

$$\Delta_{ip} = -\frac{1 \cdot l \cdot 2}{2 \cdot 6EI} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} ql^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} ql^2 \right) - \frac{1 \cdot l \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot EI} \cdot \frac{1}{8} ql^2 = -\frac{9ql^3}{16EI} = -0,0288(\text{рад}).$$

Знак «минус» показывает, что угловое перемещение узла i происходит в направлении, противоположном $M_i = 1$.

Пример 6.2.6. Определить взаимное горизонтальное перемещение точек i и взаимное угловое перемещение сечений «а» рамы (рис.6.5) от заданной нагрузки $q = 30$ кН/м при $EI = 10$ кНм.

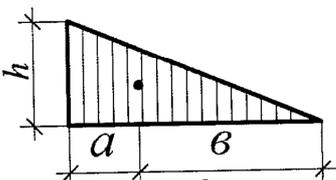
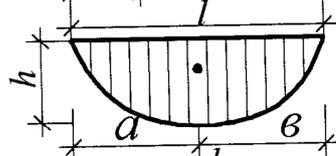
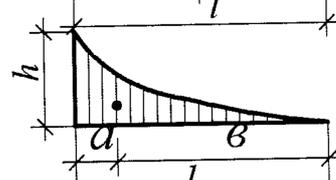
Решение:

1. Строим эпюру изгибающих моментов в заданной раме от заданной нагрузки M_p .

2. Строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_i в заданной раме от единичного силового фактора $P_i = 1$.

3. Определяем взаимное горизонтальное перемещение сечений i :

Таблица 6.1

Вид эпюры	Площадь ω	Координаты центра тяжести	
		a	b
	$\frac{1}{2} hl$	$\frac{1}{3} l$	$\frac{2}{3} l$
	$\frac{2}{3} hl$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{1}{3} hl$	$\frac{1}{4} l$	$\frac{3}{4} l$

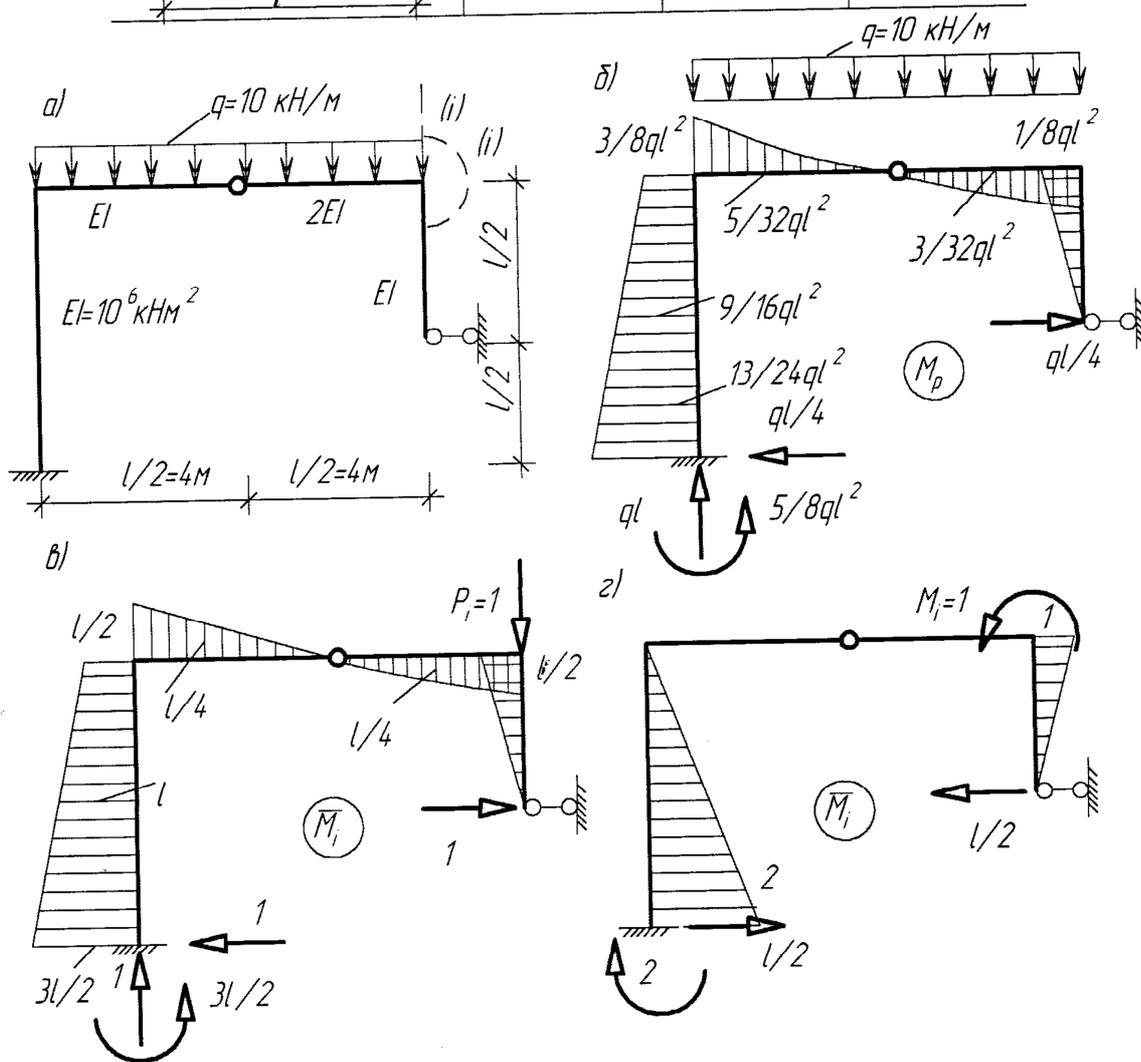


Рис. 6.4

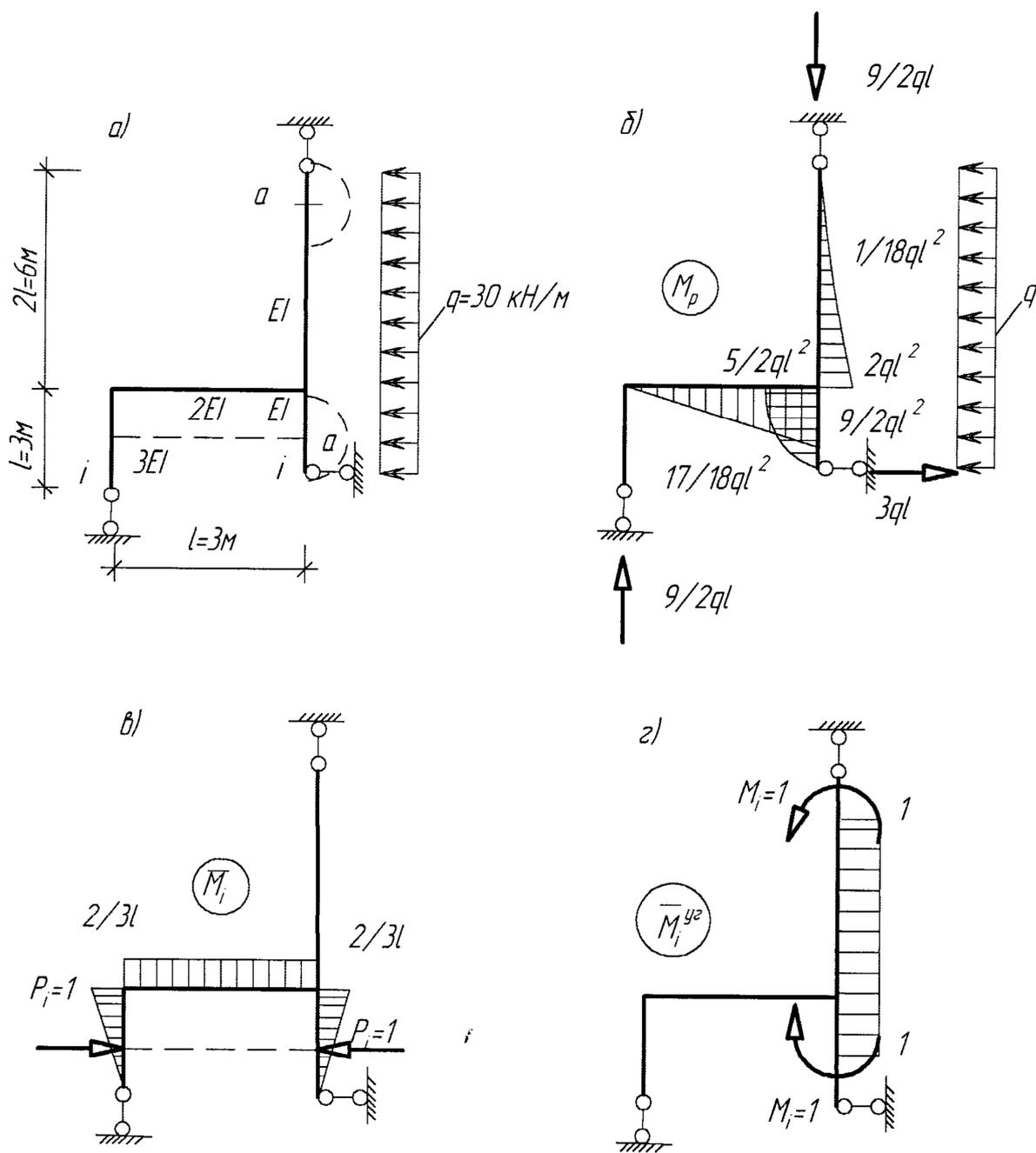


Рис. 6.5

Знак «минус» показывает, что взаимное горизонтальное перемещение сечений будет происходить в направлении, противоположном $P_i=1$.

4. Строим эпюру изгибающих моментов $\overline{M}_i^{\text{угл}}$ в заданной раме от единичного силового фактора $M_i=1$.

5. Определяем взаимное угловое перемещение сечений «а»:

$$\Delta_{ip}^{\text{угл}} = -\frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{8}ql^2 + 2ql^2 \right) \left(2l - \frac{1}{3}l \right) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8}q \left(\frac{5l}{3} \right)^2 \cdot 1 = -0,00125(\text{рад}),$$

$$-\frac{1}{2EI} \left(\frac{5}{2}ql^2 + \frac{17}{18}ql^2 \right) \frac{2l}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{1}{8}q \left(\frac{2}{3}l \right)^2 \right) \cdot 1 = -\frac{25ql^3}{162EI} = -0,00125(\text{рад}).$$

6.3 Определение перемещений от изменения температурного режима

Перемещения в статически определимых системах при изменении температурного режима определяются по формуле:

$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^m \alpha t_0 \overline{N}_t ds + \sum_{j=1}^m \int_0^l \alpha \frac{\Delta t}{h} \overline{M}_t ds, \quad (6.8)$$

где m - число участков с меняющимся температурным режимом, α - коэффициент линейного расширения материала, $t_0 = (t_1+t_2)/2$ - приращение температуры на уровне нейтрального слоя стержня; $\Delta t = (t_1-t_2)$ - перепад температур; t_1, t_2 - приращение температуры наружных и внутренних волокон стержня; h - высота поперечного сечения стержня в плоскости изгиба; $\overline{N}_t, \overline{M}_t$ - выражения продольной силы и изгибающего момента в произвольном сечении стержня с меняющейся температурой, вызванные единичным силовым фактором, определяющим точку и направления изучаемого перемещения. Единичными и силовыми факторами являются: сосредоточенная сила $P_t=1$ при вычислении линейных перемещений или сосредоточенный момент $M_t=1$ при вычислении угловых перемещений. При постоянных по длине стержня высоты поперечного сечения h и приращений температур t_1, t_2 формула для вычисления перемещений принимает вид:

$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^m \alpha t_0 \omega_{\overline{N}_t} + \sum_{j=1}^m \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega_{\overline{M}_t}, \quad (6.9)$$

где $\omega_{\overline{N}_t}, \omega_{\overline{M}_t}$ - площади эпюр продольных сил и изгибающих моментов на стержне с меняющейся температурой от единичного силового фактора. Каждое слагаемое в (6.9) считается положительным, если деформации, вызванные единичным силовым фак-

тором и изменением температурного режима совпадают, и отрицательным, если эти деформации не совпадают.

Пример 6.3.1 Определить горизонтальное перемещение точки i , вызванное изменением температурного режима в ригеле и стойке металлической рамы (рис. 6.6, а) при $h_p = 0,5$ м, $h_{ст} = 0,4$ м и $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$.

Решение:

1. Строим эпюру продольных сил \bar{N}_t в заданной раме от единичного силового фактора $P_i = 1$ (рис.6.6, б).

2. Строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_t в заданной раме от единичного силового фактора $P_i = 1$ (рис.6.6, в).

3. Определяем горизонтальные перемещения точки i .

$$\Delta_{it} = 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{-10 + 20}{2} \right) \cdot 1 \cdot 10 - 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{10 + 20}{0,5} \right) \left(\frac{6 + 3}{2} \right) \cdot 10 + 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{30 + 20}{2} \right) \cdot 0,3 \cdot 6 + 1,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{30 - 20}{0,4} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = -0,03111 \text{ м.}$$

Знак "минус" показывает, что горизонтальное перемещение точки i происходит в направлении, противоположном направлению $P_i = 1$.

6.4 Определение перемещений от кинематических воздействий

Перемещения в статически определимых системах при кинематических воздействиях определяются по формуле:

$$\Delta_{ic} = - \sum_{j=1}^k r_{ji} C_j, \quad (6.10)$$

где k - число опор, испытывающих кинематические воздействия; r_{ji} - реакция в опоре, получившей кинематическое воздействие, от единичного силового фактора, определяющего точку и направление изучаемого перемещения, C_j - величина кинематического воздействия. Реакция r_{ji} считается положительной, если ее направление совпадает с направлением кинематического воздействия, и отрицательной, если не совпадает.

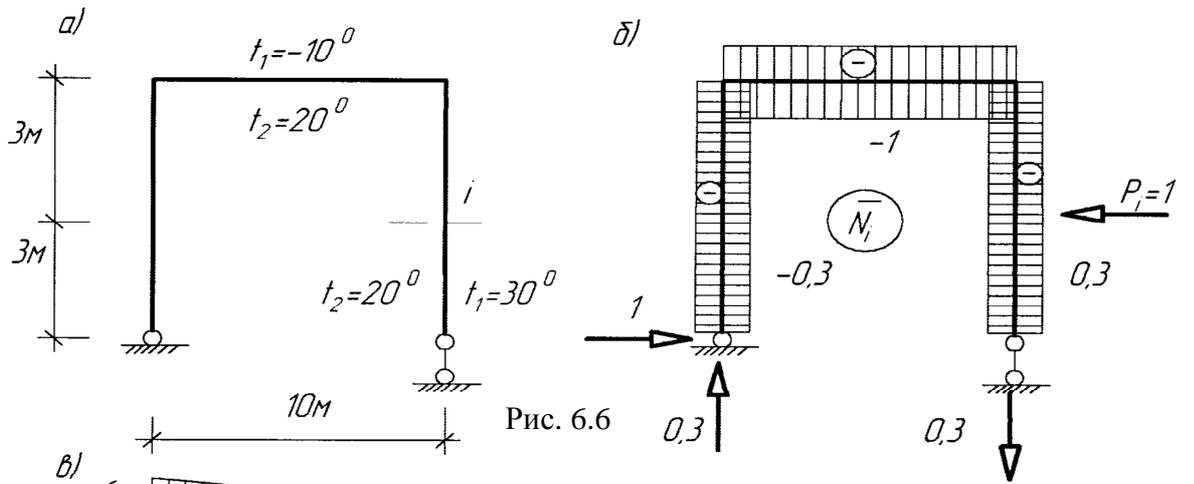


Рис. 6.6

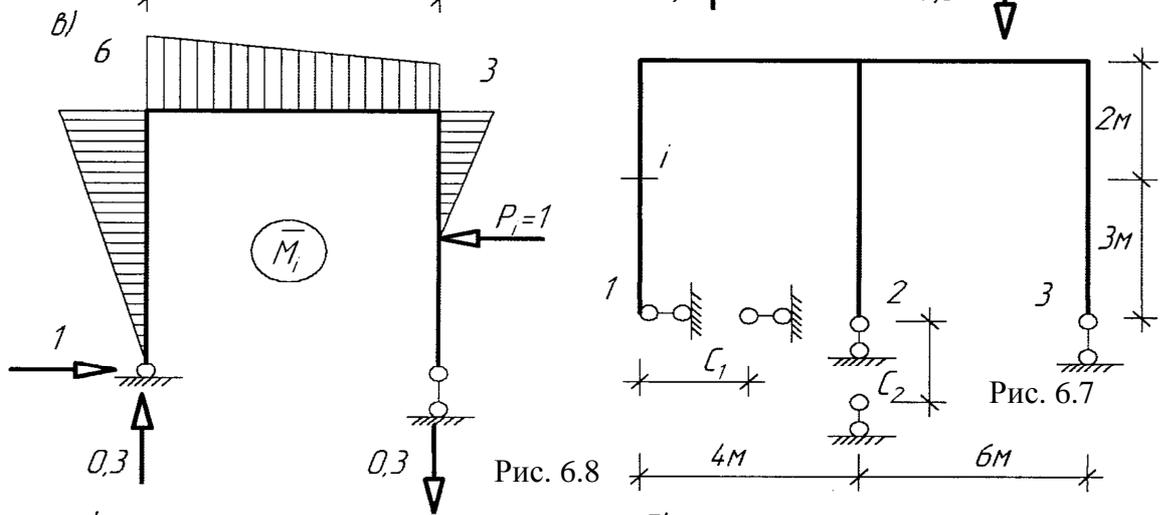


Рис. 6.7

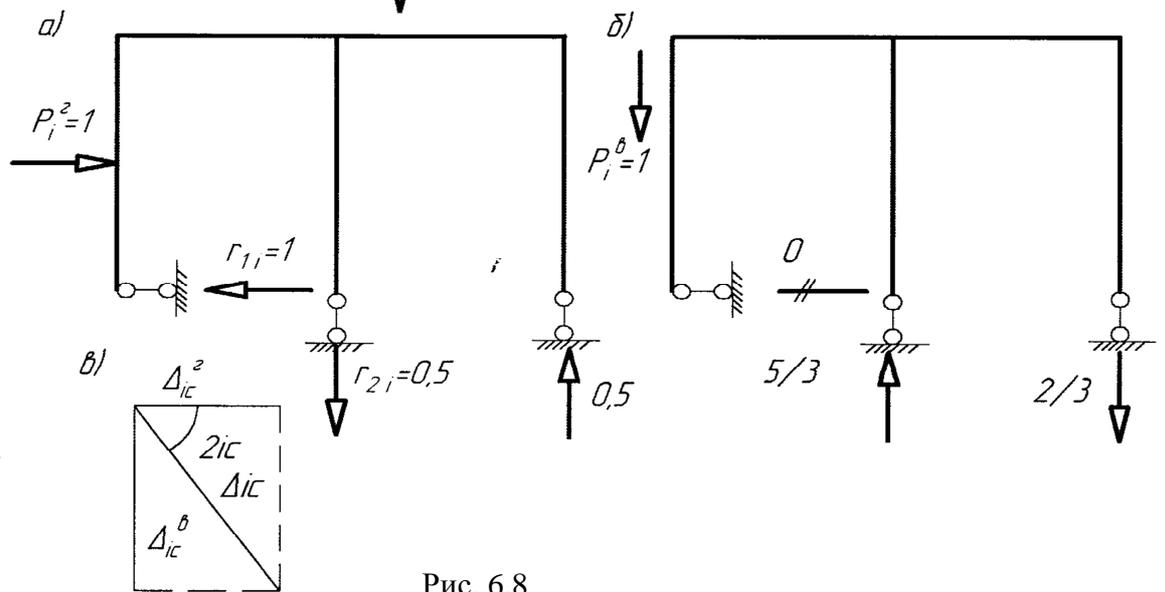


Рис. 6.8

Пример 6.4.1. Определить действительное перемещение точки i (рис.6.7), вызванное кинематическими воздействиями $C_1 = 0,04\text{м}$ и $C_2 = 0,03\text{м}$.

Решение:

1. Определяем реакции в опорах от горизонтального силового фактора

$$P_i^Г = 1 \text{ (рис.6.8 а).}$$

2. Вычисляем горизонтальное перемещение точки i :

$$\Delta_{ic}^Г = -(-1) - 0,04 - 0,5 - 0,03 = 0,025 \text{ м ,}$$

то есть направление горизонтального перемещения точки «г» совпадает с направлением единичного силового фактора $P_i^Г = 1$

3. Определяем реакции в опорах от вертикального силового фактора $P_i^В = 1$ (рис.6.8б).

4. Вычисляем вертикальное перемещение точки i :

$$\Delta_{ic}^В = -0 - 0,04 - \left(-\frac{5}{3}\right) - 0,03 = 0,05 \text{ м , то есть направление вертикального пере-}$$

мещения точки i совпадает с направлением единичного силового фактора

$$P_i^В = 1 .$$

5. Определяем истинное перемещение и направление перемещения точки i (рис.6.8 в).

$$\Delta_{ic}^ист = \sqrt{0,025^2 + 0,05^2} = 0,056 \text{ м; } \alpha_{ic} = \arctg(0,05/0,025) = 63^\circ 26'.$$

Пример 6.4.2. Определить перемещение точки i в указанном направлении от заданной нагрузки или от изменения температурного режима, или от кинематического воздействия (рис. 6.9,6.10), считая жесткости стержней EI постоянными.

Результаты решения:

- 1) $\Delta_{ip} = 0$; 2) $\Delta_{it} = 10\alpha l$; 3) $\Delta_{ip} = 21,33/EI$; 4) $\Delta_{ip} = 640/EI$;
 5) $\Delta_{it} = \frac{7,5\alpha l}{h}$; 6) $\Delta_{it} = 10\alpha l$; 7) $\Delta_{ic} = 0,02\text{м}$; 8) $\Delta_{ic} = \frac{0,3}{l}$;
 9) $\Delta_{ic} = 0,4\text{м}$; 10) $\Delta_{ip} = 493,33/EI$.

Пример 6.4.3. Определить перемещение точки i в заданном направлении от указанных воздействий (рис. 6.11) самостоятельно, считая жесткости стержней EI постоянными.

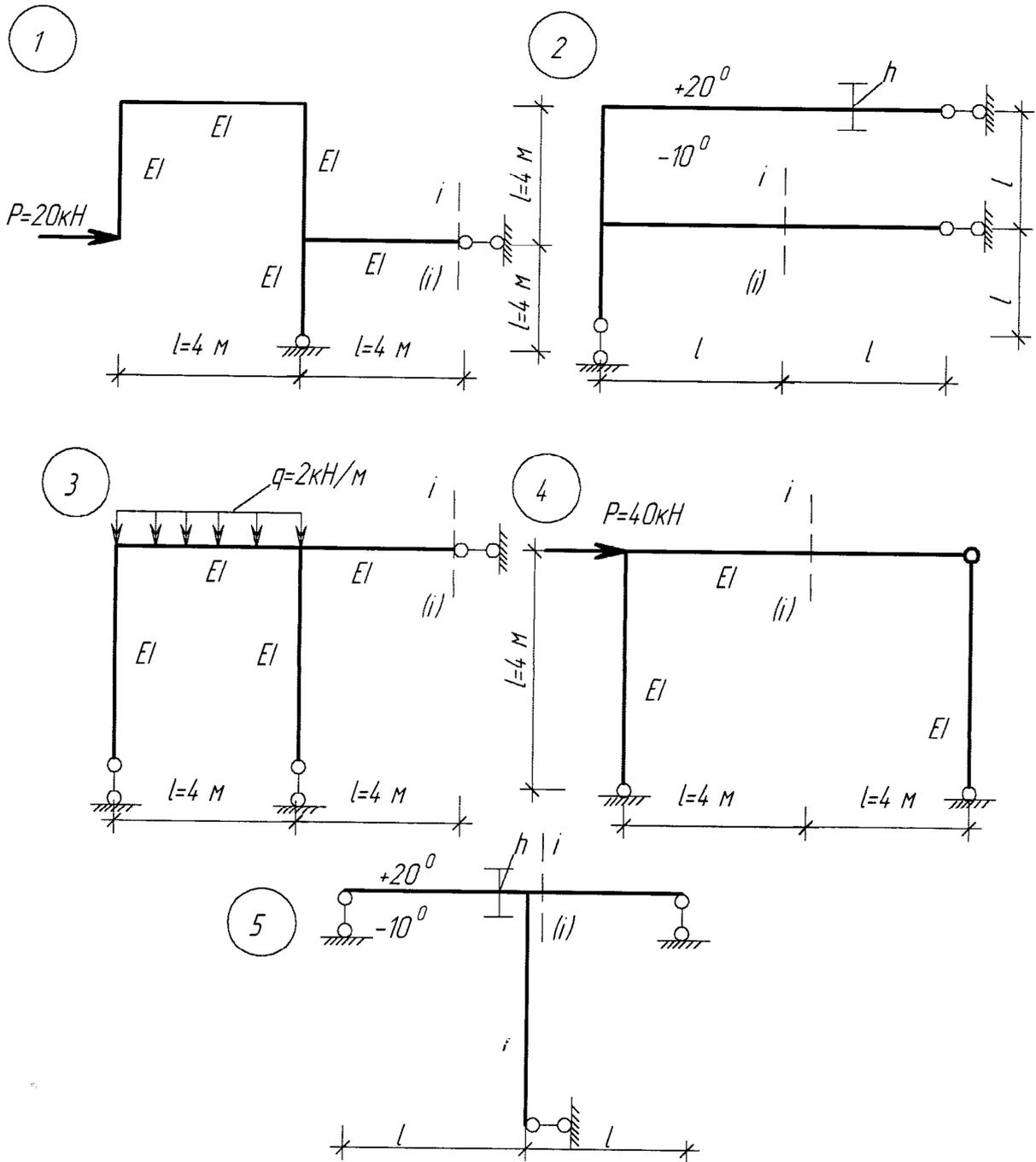


Рис.6.9

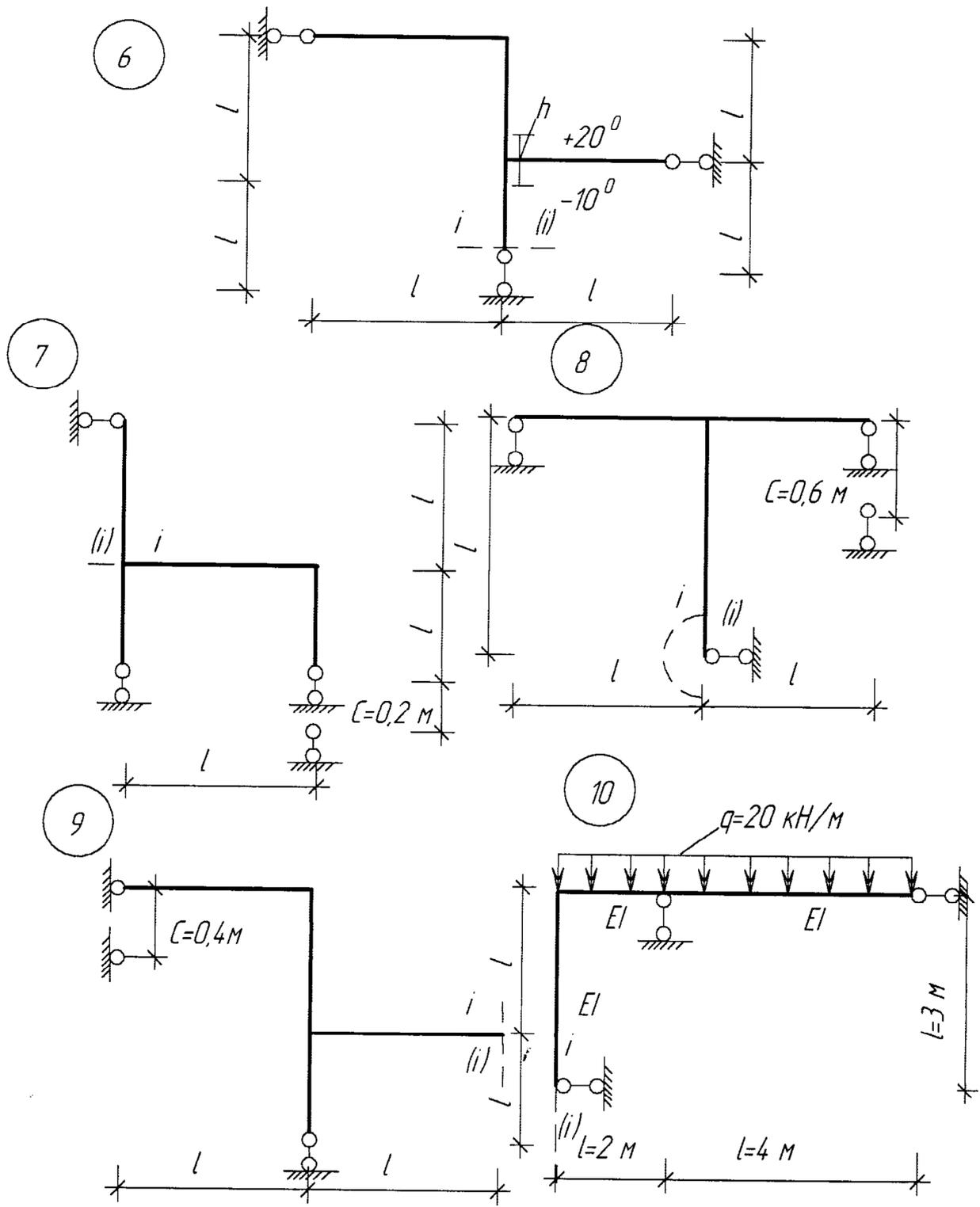


Рис. 6.10

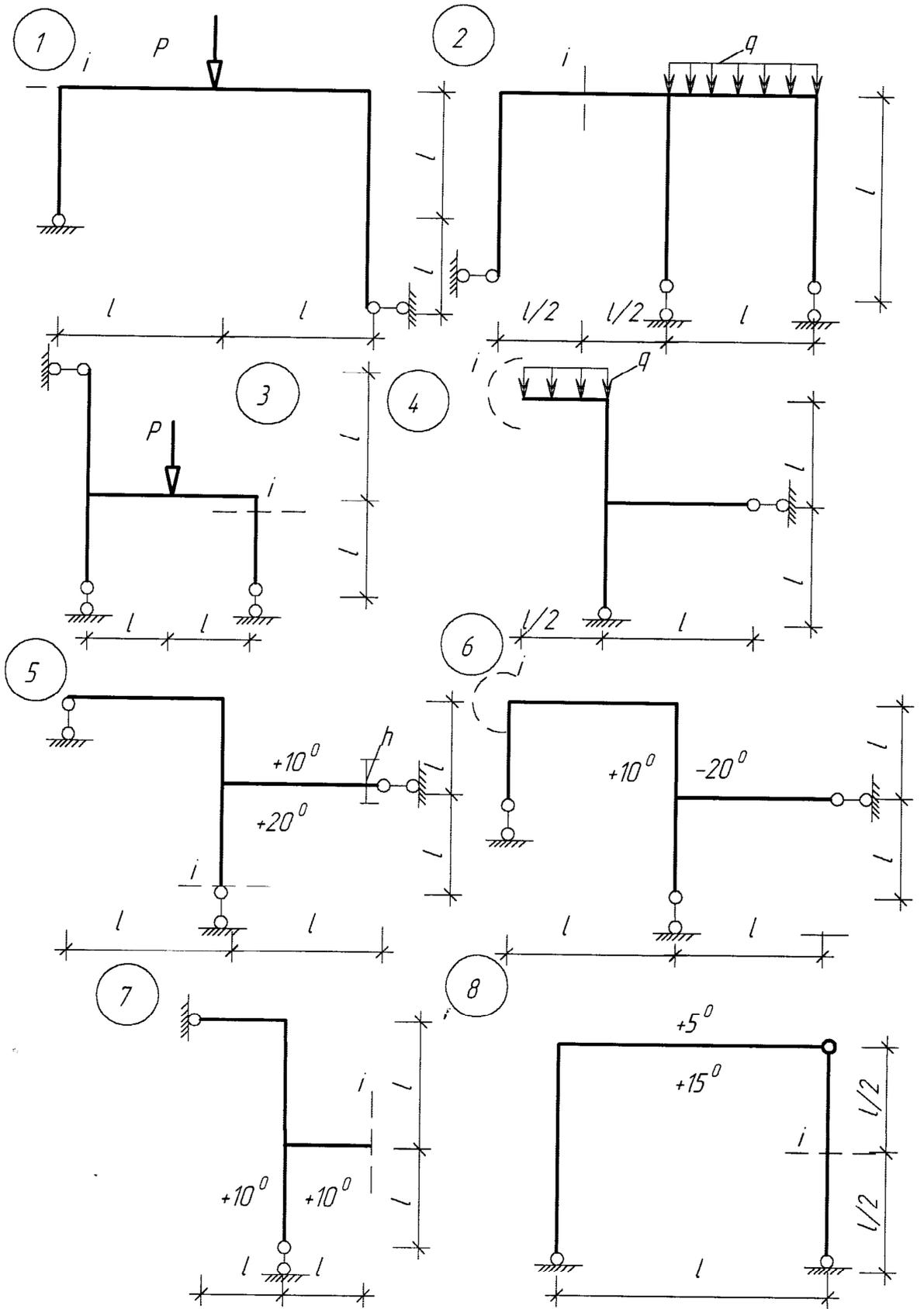


Рис. 6.11

Литература

1. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб.пособие для студентов вузов по строит. спец. Ч.1 : Статически определимые системы / Н. Н. Анохин. - 2-е изд., доп. и перераб. - М. : АСВ, 2007. - 336 с. : ил. - 336-00.
2. Дарков, А.В. Строительная механика : учеб.для студентов строит. спец. вузов/А.В. Дарков, Н. Н. Шапошников. - 9-е изд., испр. - СПб. : Лань, 2004. - 655 с. : ил. - 331-00.
3. Шеин, А. И. Краткий курс строительной механики : учеб.для студентов вузов по направлению 270100 "Стр-во" / А. И. Шеин. - М. : Изд. Дом "БАСТЕТ", 2011. - 272 с. : ил. - 407-00.
4. Леонтьев, Н. Н. Основы строительной механики стержневых систем :Учеб.для студентов строит. спец. вузов / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. - М. : Изд-во АСВ, 1996. - 542 с. : ил. - 34-00.
5. Смирнов, А.Ф., Александров, А.В.,Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика/ Под.ред.А.Ф.Смирнова - М.: Стройиздат, 1981. - 511 с.
6. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики : (Статистика стержневых систем): Учеб.пособие для студентов строит. спец. вузов / Под общ. ред. Г.К.Клейна. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Высш. шк., 1980. - 384 с. : ил. - 0-00.

Борис Борисович Лампси
Надежда Юрьевна Трянина
Сергей Георгиевич Юдников
Ирина Владимировна Половец
Анна Александровна Юлина
Борис Борисович Лампси
Павел Алексеевич Хазов

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть I. Статически определимые системы

Учебное пособие

Редактор Д.М. Фетюкова

Подписано в печать Формат 60x90 1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная.

Уч.-изд. л. . Усл. печ. л. . Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

603950, Нижний Новгород, Ильинская, 65

Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, Ильинская, 65