О.И. Ведяйкина

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФРАНКОГОВОРЯЩИХ СТУДЕНТОВ. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Нижний Новгород
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

О.И. Ведяйкина

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФРАНКОГОВОРЯЩИХ СТУДЕНТОВ. КИНЕМАТИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2024

УДК 531/534(075)
В26
ББК 22.21

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

В.И. Ерофеев – д-р физ-мат. наук, профессор, директор Института проблем машиностроения – филиала ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российкой академии наук» (ИПФ РАН)

В.А. Кикеев – канд. техн. наук, заведующий кафедрой Аэро-гидродинамики, прочности машин и сопротивления материалов ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

Ведяйкина, О.И. Самостоятельная работа по теоретической механике для франкоговорящих студентов. Кинематика : учебное пособие / О.И. Ведяйкина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2024. – 61 с.; ил. – ISBN 978-5-528-00582-9. – Текст : непосредственный.

Учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы франкоговорящих студентов в процессе изучения дисциплины «Теоретическая механика» раздел «Кинематика». Содержательно пособие представляет собой комплект лекций, читаемых для студентов профиля «Промышленное и гражданское строительство» по дисциплине «Теоретическая механика». В процессе самостоятельной работы с учебным пособием студентам в первую очередь необходимо обращать внимание на доказательства основных, составляющих основу курса теорем.

Предназначено обучающимся в ННГАСУ для подготовки к лекционным практическим занятиям по направлению подготовки 08.03.01 Строительство.

ISBN 978-5-528-00582-9

Avant-propos

Представленное учебное пособие предназначено для франкоговорящих студентов, изучающих курс теоретической механики, и является вспомогательным материалом к лекционным и практическим занятиям, позволяющим более полно изучить методы исследования и решения задач кинематики.

Теоретическая механика является одной из фундаментальных наук, при ее изучении закладываются основные знания и понимания, способствующие успешному дальнейшему изучению специализированных, технических наук. Для иностранных студентов первого курса обучения достаточно трудно понимать технические термины и определения на иностранном языке в условиях ограниченного по времени курса предмета. Данное учебно-методическое пособие поможет более успешно изучить решение задач раздела кинематика теоретической механики франкоговорящим студентам вузов архитектурно-строительного направления.

В учебном пособии кратко и сжато представлены определения, теоремы и формулы, необходимые для изучения основ дисциплины. Доказательства некоторых теорем не приводятся в данном пособии и вынесены на самостоятельное изучение студентами.

Ce manuel est destiné aux étudiants francophones qui étudient le cours de la mécanique rationnelle (théorique). Il est un matériau auxiliaire lors de l'étude de de la discipline. Le manuel résume et concis présente les définitions, les théorèmes et les équations nécessaires pour étudier les principes fondamentaux de la discipline. Il contient des informations théoriques de base sur la section "cinématique".

1. Introduction

La mécanique rationnelle (théorique) est la science des lois générales du movement, de l'équilibre et des interactions entre les corps matériels. La tâche principale de la mécanique rationnelle réside dans l' étudie des lois générales du movemen et de l'équilibre des corps matériels soumis à l'action des forces qui leur sont appliqués.

Le cours de mécanique rationnelle est divisé en trois grandes sections: statique, cinématique et dynamique.

On appelle **cinématique** la partie de la mécanique qui étudie les propriétés géométriques du mouvement des corps sans tenir compte de leur inertie (masse) et des forces agissant sur eux.

Le mouvement mécanique – est un changement dans le temps de la position mutuelle dans l'espace des corps matériels (ou un changement dans la position mutuelle des parties du corps).

Un cas particulier de mouvement est l'état de **repos relatif**.

On entend en mécanique par mouvement la changement dans le temps de la position d'un corps donné dans l'espace par rapport à un système d'axes de coordonnées nommé **système de référence**.

Si les coordonnées de tous les points du corps dans le système de référence choisi restent constantes, on dit que le corps est au repos par rapport à ce système de référence. Si les coordonnées de points quelconques du corps se modifient dans le temps, le corps est en mouvement par rapport au système de référence.

Le mouvement du corps s'effectue dans l'espace, dans le temps. En mécanique, le temps est considéré comme universel, c'est-à-dire qu'il s'écoule de la même façon dans tous les systèmes de référence envisagés.

En cinématique le temps est pris comme grandeur variable indépendante. Toutes les autres variables sont considérées comme des fonctions du temps. Le temps est compté à partir d'un certain moment initial $t = t_0$.

Les principaux objets idéalisés de la mécanique rationnelle sont un point matériel, un système mécanique et un corps absolument solide:

- **Un point matériel** – est un point qui a une masse. Le point matériel peut être considéré comme n'importe quel corps matériel, si ses dimensions dans cette tâche particulière peuvent être négligées.
- **Un système mécanique** – est tout ensemble de points matériels.
- **Un corps matériel** – est un système mécanique formé par un ensemble continu de points matériels.
- **Un corps absolument solide** (**corps solide**) – est un corps matériel dont la distance entre deux points quelconques reste toujours la même.

La tâche principale de la cinématique consiste à determiner, connaissant la loi du mouvement du corps (ou du point) donné, toutes les circonstances cinématiques caractérisant le mouvement du corps pris dans son ensemble, ainsi que celui de chacun de ses points séparément (trajectoire, vitesse, acceleration).

Les parties principales de la cinématique sont:

•cinématique du point,

•cinématique du corps solide,

•mouvement composé du point (on n'est pas étudiés dans ce manuel),

•mouvement composé du corps solide (on n'est pas étudiés dans ce manuel).

2. Cinématique du point

2.1 Modes de définition du mouvement du point

Définition du mouvement du point par proceed vectoriel

On peut fixer la position du point à tout instant par un vecteur *r*, mené de l'origine des coordonnées *O* au point *M*. Le vecteur *r* est appelé **rayon vecteur** du point *M*. Le rayon vecteur est un vecteur function du temps *t*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{2.1}$$

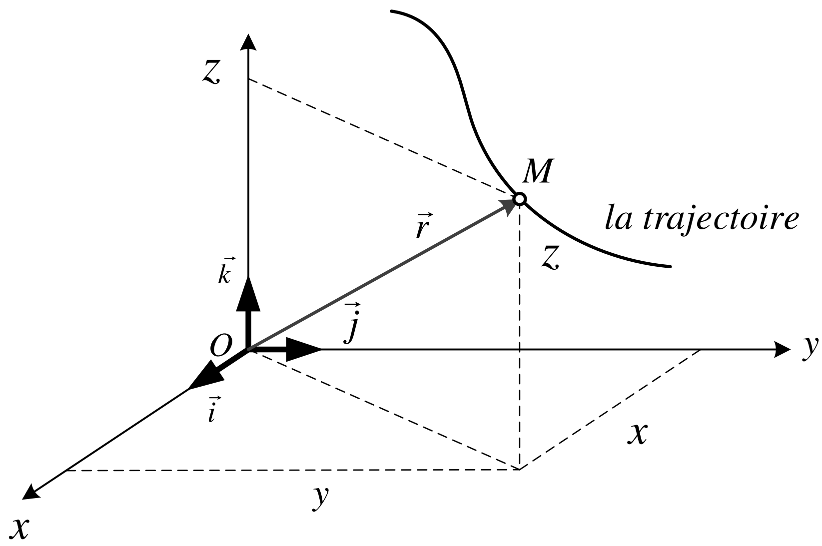


Fig. 2.1

L'expression (2.1) définit la loi du mouvement curviligne du point sous une forme vectorielle.

Le lieu géométrique des extrémités du vecteur *r* détermine la trajectoire du point en mouvement.

Définition du mouvement du point par un système de coordonnées

On peut détermine la position du point par rapport au système de référence donné *Oxyz* en utilisant ses coordonnées cartésiennes *x*, *y*, *z*.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

Les expressions (2.2) sont les équations du mouvement du point dans les axes de coordonnées rectangulaires cartésiens.

Le temps est considéré comme paramètre, les équations (2.2) sont des équations paramétriques de la trajectoire du point. Pour trouver l'équation de la trajectoire sous sa forme habituelle, c'est-à-dire en function des coordonnées du point M seulement, il faut éliminer le temps t des équations du mouvement (2.2).

Le lien entre les méthodes vectorielles et coordonnées pour définir le mouvement d'un point est donnée par la formule

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \tag{2.3}$$

où $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$ – vecteurs unitaires du système de coordonnées cartésiennes.

Mode naturel de description du mouvement

Ce mode de définition est commode dans les cas où la trajectoire du point mobile est connue d'avance.

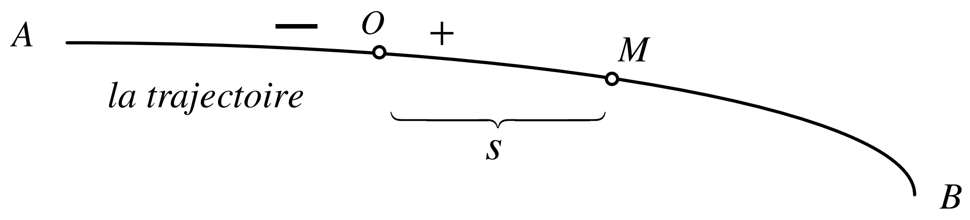


Fig. 2.2

Pour définir le mouvement du point on doit:

1. déterminer la trajectoire du point (la courbe AB de la fig. 2.2);
2. fixer l'origine sur la trajectoire avec l'indication des sens positif et négatif;
3. définir la loi du mouvement du point sur la trajectoire sous la forme:

$$s = s(t) \tag{2.4}$$

où la distance s=OM est la coordonnée curviligne du point.

La coordonnée curviligne détermine la position d'un point et non son chemin.

2.2 Vitesse

Définition de la vitesse du point par proceed vectoriel

Le vecteur vitesse instantanée du point est égal à la dérivée première du rayon vecteur du point par rapport au temps:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{2.5}$$

La vitesse d'un point est une valeur vectorielle, sa direction indique où le corps se déplace actuellement, et le module indique la vitesse de changement de position du point.

Dimension de la vitesse: $[v] = m/s$.

Définition de la vitesse du point un système de coordonnées

Les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées sont égales aux dérivées premières par rapport au temps des coordonnées du point.

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \tag{2.6}$$

Les projections de la vitesse étant connues, son module et son support (c'est-à-dire les angles n_x, n_y, n_z que le vectuer v forme avec les axes de coordonnées) sont donnés par les formules:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} n_x = cos(\vec{v}, x) = v_x/v \\ n_y = cos(\vec{v}, y) = v_y/v. \\ n_z = cos(\vec{v}, z) = v_z/v \end{cases} \tag{2.8}$$

Définition de la vitesse dans la méthode naturelle du mouvement

La valeur numérique de la vitesse instantanée du point est égale à la dérivée première de la coordonnée curviligne s du point par rapport au temps:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2.9}$$

Le vecteur vitesse est dirigé suivant la tangente à la trajectiore, celle-ci étant connue d'avance. Dans ce cas, comme pour le mouvement rectiligne, si $v > 0$, le vecteur vitesse v est dirigé dans le sens positif défini sur la courbe et si $v < 0$, dans le sens négatif.

Par conséquent, la valeur algébrique de la vitesse détermine en même temps le module du vecteur et son sens.

2.3 Accélération

Définition de l'accélération du point par proceed vectoriel

Le vecteur accélération instantanée du point est égal à la dérivée première du vecteur vitesse ou à la dérivée seconde du rayon vecteur du point par rapport au temps:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{ ou } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{2.10}$$

L'accélération caractérise le changement de vecteur de la vitesse.

Dimension de l'accélération: $[a] = m/s^2$.

Définition de l'accélération du point un système de coordonnées

Les projections de l'accélération sur les axes de coordonnées sont égales aux dérivées premières des projections des vitesses ou aux dérivées secondes des coordonnées du point par rapport au temps.

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \tag{2.11}$$

Le module et la direction de l'accélération seront donnés par les formules:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} l_x = cos(\vec{a}, x) = a_x/a \\ l_y = cos(\vec{a}, y) = a_y/a. \\ l_z = cos(\vec{a}, z) = a_z/a \end{cases} \tag{2.13}$$

Définition de l'accélération dans la méthode naturelle du mouvement

Le rayon de courbure est égal au rayon du cercle qui coïncide le mieux avec la courbe au voisinage du point donné.

$$\rho = 1/k \tag{2.14}$$

Dimension du rayon de courbure: $[\rho] = m$.

La courbure est égale à l'inverse du rayon de courbure ρ au point donné:

$$k = 1/\rho \tag{2.15}$$

Pour l'exemple:

1. Un cercle est une courbe de courbure constante. À tous les points du cercle, son rayon de courbure est égal au rayon du cercle ($\rho = R$).
2. Une ligne droite est une ligne de courbure constante. À tous ses points, le rayon de courbure est infini et la courbure est nulle ($\rho \to \infty$).
3. Une ellipse ou une parabole a une valeur de rayon de courbure différente à différents points.

Les axes naturels (la tangent et la normale principale) ont leur origine au point mobile M et se déplacent avec lui dans l'espace. Dirigeons un des axes suivant la tangente $\vec{\tau}$ à la trajectoire, dans le sens positif, et l'autre, suivant la normale $\vec{\boldsymbol{n}}$, vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

L'accélération dans la méthode naturelle du mouvement est composée d'une accélération tangentielle (projection de l'accélération sur la tangente) et d'une accélération normale (projection de l'accélération normale principale):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (2.16)$$

La projection de l'accélération du point sur la tangente est égale à dérivée première de la valeur numérique de la vitesse ou à la dérivée seconde de la coordonnée curviligne par rapport au temps:

$$|a_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = |\dot{v}| \qquad (2.17)$$

L'accélération tangentielle est dirigée tangente à la trajectoire et est déterminée par la projection du vecteur d'accélération sur la tangente, dont le signe indique dans quelle direction elle est dirigée.

La projection de l'accélération sur la normale principale est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon de courbure de la trajectoire au point donné de la courbe:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{2.18}$$

L'accélération normale est dirigée sur la normale principale et sa projection sur la normale est toujours positive. Pour cette raison, l'accélération normale est toujours dirigée vers la concavité de la trajectoire.

Le module d'accélération:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} \tag{2.19}$$

2.4 Cas particuliers du mouvement du point

Mouvement rectiligne et curviligne

La trajectoire en **mouvement curviligne** est une courbe et sa courbure a une valeur finie et son rayon de courbure n'est pas égal à zéro.

La trajectoire en **mouvement rectiligne** est une ligne droite.

Si la trajectoire du point est une droite ($\rho = \infty$), alors ($a_n = 0$) et l'accélération du point se réduit à l'accélération tangentielle: $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ и $a = \left|\frac{dv}{dt}\right|$.

Comme dans ce cas la vitesse change seulement de grandeur, il en résulte que **l'accélération tangentielle caractérise la variation de la vitesse en valeur numérique**.

Mouvement uniforme

Un mouvement est **uniforme** si la valeur numérique de la vitesse reste toujours constante: $v = const$. Alors $|a_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = 0$ et l'accélération du point se réduit à l'accélération normale: $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Dans ces conditions, le vecteur acceleration $\vec{a}$ est constamment dirigé suivant la normale à la trajectoire du point.

Comme dans ce cas l'accélération provient seulement de la variation de la direction de la vitesse, il s'ensuit que **l'accélération normale caractérise la variation de la vitesse en direction**.

Trouvons la loi du mouvement uniforme. Il résulte de la formule (2.9) que $ds/dt = v = const$ ou $ds = vdt$. Prenant les integrals des deux membres de l'égalité on obtient la loi du mouvement uniforme:

$$s = v_\tau t + s_0. \qquad (2.20)$$

Mouvement rectiligne uniforme

Dans ces cas $a_\tau = a_n = 0$ et par suite, $a = 0$. La vitesse du point en tant que vecteur est constant: $\vec{v} = \overrightarrow{const}$.

Mouvement uniformément varié

Mouvement accéléré ou retardé

1. Le type de mouvement peut être déterminé par l'emplacement des vecteurs de vitesse et d'accélération tangentielle (fig. 2.3). Si les deux vecteurs sont dirigés dans le même sens, alors le mouvement est accéléré, et s'il est différent, alors retardé.

2. En mouvement accéléré, le produit des projections des vecteurs de vitesse et d'accélération sur la tangente à la trajectoire sera positif ($v_\tau a_\tau > 0$) et en mouvement retardé – négatif ($v_\tau a_\tau < 0$).

3. Le type de mouvement peut être déterminé par la formule:

$$a_v = \vec{a} \cdot \vec{e}_v = \frac{(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})}{v} = \frac{a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z}{v} \tag{2.21}$$

Pour $a_v > 0$ le mouvement est accéléré et pour $a_v < 0$ – retardé.

$|a_\tau| = |a_v|$ pour cette raison, on peut utiliser la formule pour définir le module d'accélération tangentielle:

$$|a_\tau| = \left|\frac{a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z}{v}\right| \tag{2.22}$$

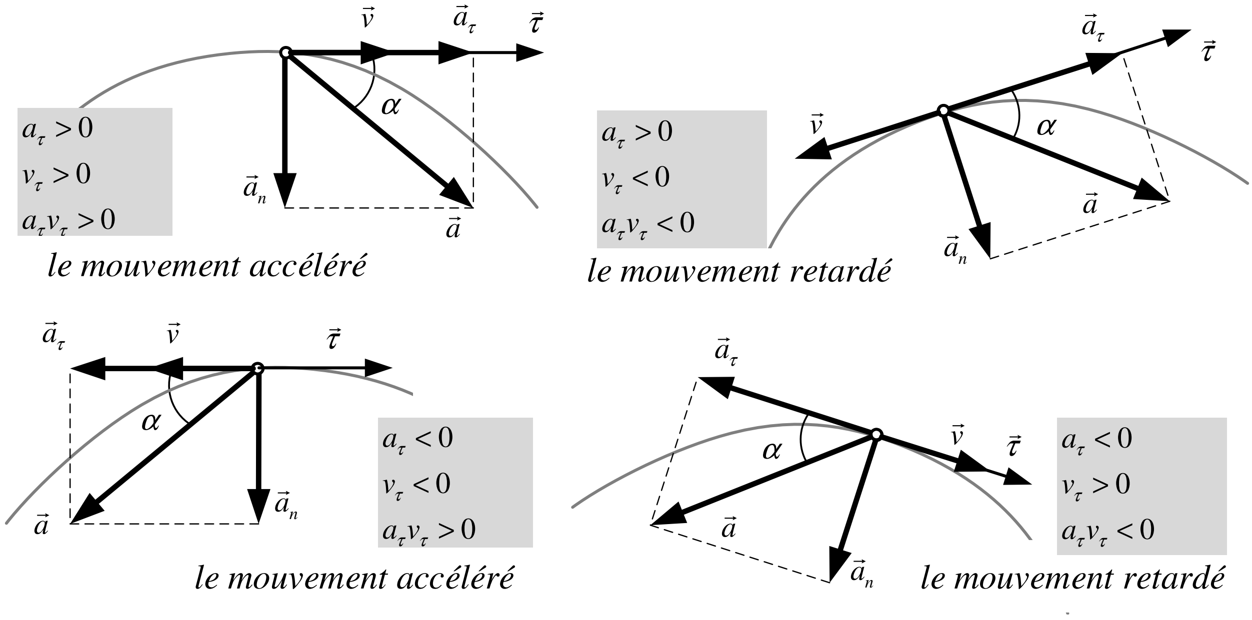


Fig. 2.3

Mouvement uniformément varié

Par **mouvement uniformément varié** on entend un mouvement où l'accélération tangentielle a une valeur constante: $a_\tau = const.$

Il est le mouvement uniformément accéléré ou le mouvement uniformément retardé.

En intégrant deux fois l'égalité $\frac{dv}{dt} = a_\tau = const$, nous obtenons des expressions pour la vitesse et la loi du mouvement uniformément varié:

$$v = a_\tau t + v_0; \quad s = a_\tau \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0. \qquad (2.23)$$

3. Mouvement du corps solide

En cinématique, comme en statique, on considére tous les corps solides comme étant absolument invariables, c’est-à-dire que on admet que la distance entre deux points quelconques du corps reste constant durant tout le mouvement.

Les équations de mouvement d'un solide doivent permettre à tout moment de déterminer la position et les caractéristiques cinématiques de n'importe quel point de celui-ci.

Les mouvements les plus simples d'un solide sont les mouvements de translation et de rotation.

3.1 Mouvement de translation

On entend par **mouvement de translation** du corps solide un mouvement pendant lequel chaque droite appurtenant au corps se déplace tout en restant parallèle à ell-même.

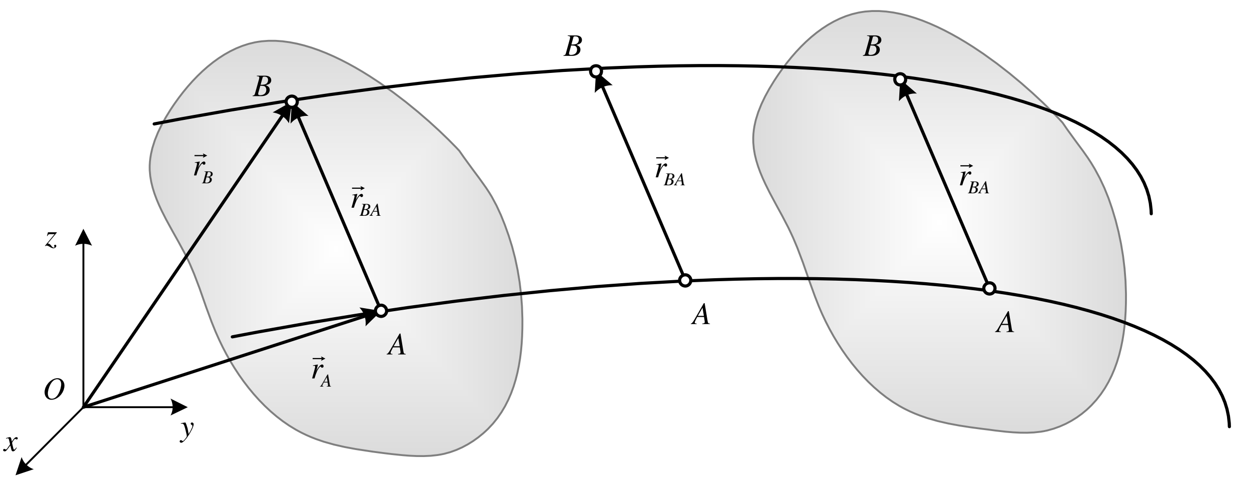


fig. 3.1

Théorème

Pendant le mouvement de translation tous les points du corps décrivent des trajectoires égales (superposables) et à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction.

Preuve du théorème

Soit un corps solide qui effectue un mouvement de translation par rapport au système d'axes *Oxyz*. Prenons deux points du corps arbitraries *A* et *B*, dont les positions sont déterminées par les rayons vecteurs $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_\mathrm{B}$. Traçons le vecteur $\vec{r}_{BA}$, joignant ces points.

En mouvement de translation, le vecteur $\vec{r}_\mathrm{BA}$ ne change pas de direction et ne change pas de longueur (le corps est absolument solide), c'est-à-dire $\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{const}$.

Il s'ensuit que la trajectoire du point *B* se déduit de la trajectoire du point *A* par un déplacement parallèle de tous ses points d'une grandeur égale au vecteur constant $\vec{r}_\mathrm{BA}$. Par conséquent, les trajectoires des points *A* et *B* seront en effet égales.

Comme il est facile de le voir (fig.3/1): $\vec{r}_\mathrm{B} = \vec{r}_A + \vec{r}_{\mathrm{B}A}$.

Pour trouver les vitesses des points *A* et *B*, dérivons les deux membres de l'égalité par rapport au temps: $\dot{\vec{r}}_\mathrm{B} = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{\mathrm{B}A}$.

Comme $\dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_B \qquad \dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A \qquad \dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{0}$.

Il en résulte que: $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.

C’est-à-dire que les vitesses des points A et B du corps sont à tout instant égales en module et en direction.

Après avoir pris les dérivées par rapport au temps des deux membres de l’égalité obtenue, on trouve: $\vec{a}_B = \vec{a}_A$.

Les accélérations des points A et B du corps sont aussi à tout instant égales en module et en direction.

Le théorème est donc démontré.

Conclusion

Le mouvement de translation du corps est complètement défini par le mouvement d’un de ses points (par exemple, le centre de gravité). La vitesse et l’accélération communes à tous les points du corps est appelées vitesse du corps et accélération du corps.

Remarquons que les notions de vitesse et d’’accélération du corps n’ont de sens que pour le mouvement de translation seulement. Dans tous les autres cas les points du corps se déplacent avec des vitesses et des accélérations différentes.

3.2 Mouvement de rotation

On appelle **mouvement de rotation** du corps solide un mouvement dans lequel deux points quelconques du corps (ou qui lui sont liés invariablement) restent fixes. La droite passant par les points immobiles est appelée **axe de rotation**.

Les points du corps, ne se trouvant pas sur l'axe, décrivent des circonférences dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation.

On dessine à travers l'axe de rotation un plan qui, au moment initial, occupe la position Π. Dans le processus de rotation, ce plan (fig. 3.2) tournera d'un angle φ (l'angle de rotation du corps) qui varie avec le temps:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{3.1}$$

L'équation (2.1) exprime **la loi du mouvement de rotation** du corps solide.

Le signe de l'angle φ est défini par la règle de la vis droite.

L'angle est toujours mesuré en radians $[\varphi] = rad$.

La vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε sont les caractéristiques cinématiques essentielles du mouvement de rotation du corps solide.

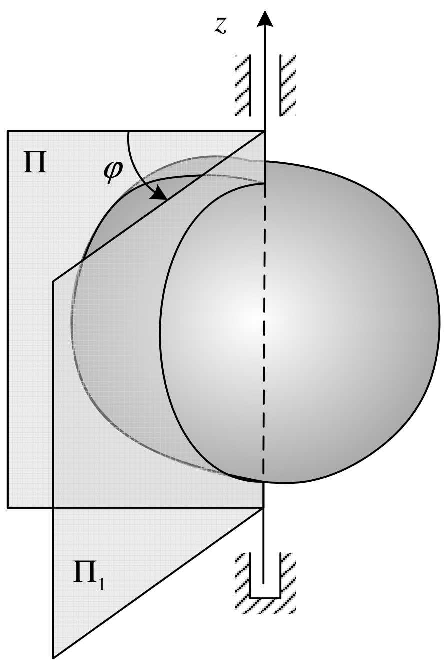


Fig. 3.2

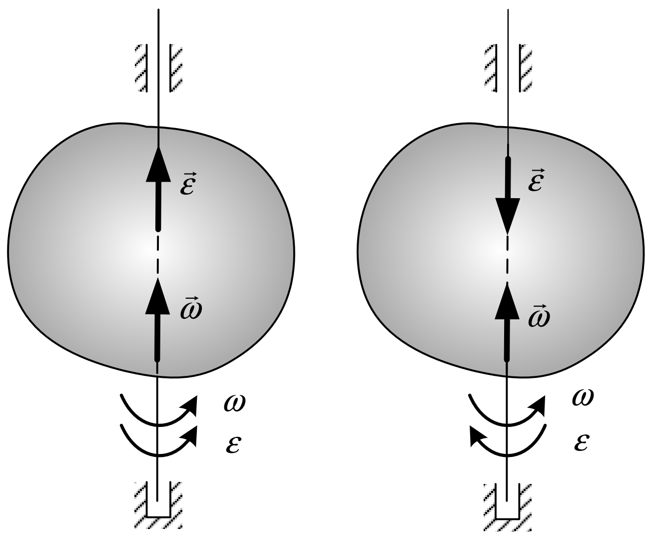


Fig. 3.3

La vitesse angulaire du corps est égale numériquement à la dérivée première de l’angle de rotation par rapport au temps:

$$\omega = \dot{\varphi} \tag{3.2}$$

Dimension de la vitesse angulaire $[\omega] = \frac{rad}{s} = \frac{1}{s} = s^{-1}$.

Lorsque $\omega > 0$ l'angle de rotation φ augmente et lorsque $\omega < 0$ diminue.

L’accélération angulaire du corps est égale numériquement à la dérivée première de la vitesse angulaire ou à la dérivée seconde de l’angle de rotation du corps par rapport au temps:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{3.3}$$

Dimension de l’accélération angulaire $[\varepsilon] = \frac{rad}{s^2} = \frac{1}{s^2} = s^{-2}$.

Si le module de la vitesse angulaire s’accroît avec le temps, la rotation du corps est appelée accélérée et s’il décroît, elle est retardée (fig. 3.3).

Il est facile de voir que la rotation sera accélérée quand les valeurs ω et ε ont le même signe ($\omega \cdot \varepsilon > 0$), et elle sera retardée, quand les signes sont différents ($\omega \cdot \varepsilon < 0$).

La vitesse angulaire et l'accélération angulaire caractérisent la rotation du corps comme un tout. Les vitesses et les accélérations des points individuels du corps seront différentes.

3.3 Rotation uniforme et uniformément variée

La rotation du corps est appelée **uniforme** quand la vitesse angulaire est constante: $\omega_z = const.$ Ainsi $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 0.$

En rotation uniforme $d\varphi/dt = \omega = const$ ou $d\varphi = \omega dt.$ Prenant les integrals des deux membres de l'égalité on obtient la loi de la rotation uniforme:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

La rotation est appelée **uniformément variée** quand l'accélération angulaire du corps reste constant durant tuot le mouvement: $\varepsilon_z = const.$ Elle est <u>la rotation uniformément accélérée</u> ou <u>la rotation uniformément retardée</u>.

En intégrant deux fois l'égalité $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = const$, nous obtenons des expressions pour la vitesse et la loi de la rotation uniformément variée:

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0;$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0,$$

où φ_0 et ω_0 − valeurs initiales de l'angle de rotation et de la vitesse angulaire.

3.4 La vitesse du point d'un corps en rotation

On examine un point M du corps solide qui se trouve à la distance R de l'axe de rotation z (fig. 3.4).

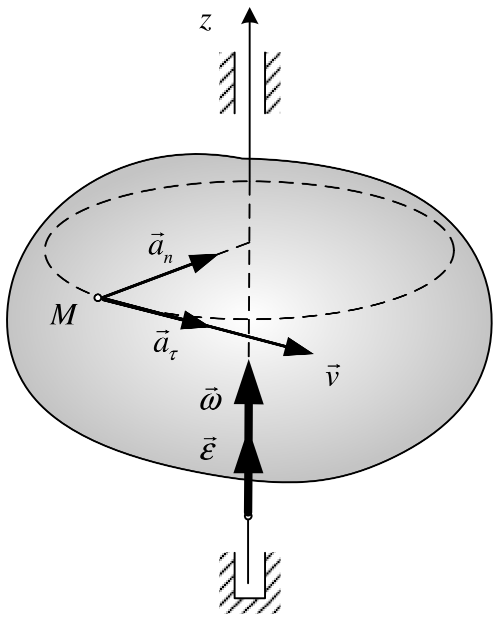


Fig. 3.4

Pendant la rotation du corps le point M décrit une circonférence de rayon R, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation et le centre est sur l'axe lui-même (fig. 3.5).

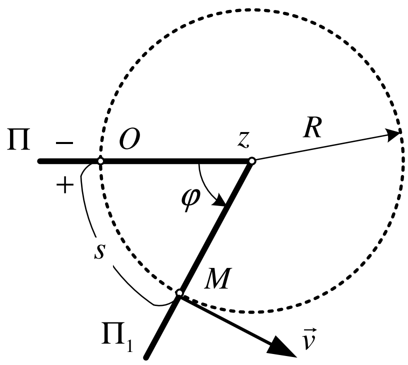


Fig. 3.5

En regardant vers l'axe de rotation, nous montrons la trajectoire du point M.

Pour le début du compte de la coordonnée curviligne S, nous prenons le point O.

Le corps est tourné à l'angle φ, ainsi le point se déplace à la distance S.

De la géométrie, la relation entre l'angle et la longueur de l'arc est connue:

$$s = \varphi R$$

En prenant le dérivé par rapport au temps, nous trouvons la vitesse du point:

$$v = \dot{s} = \dot{\varphi} R = \omega R \tag{3.4}$$

Le vitesse v est appelée **vecteur vitesse linéaire**.

Ainsi, la valeur numérique de la vitesse linéaire d’un point d’un corps solide en rotation est égale au produit de la vitesse angulaire du corps par la distance de ce point à l’axe de rotation.

Le vecteur vitesse linéaire est dirigé suivant la perpendiculaire au segment reliant l'axe de rotation au point M.

3.5 L’accélération du point d’un corps en rotation

De la cinématique des points, on sait que l'accélération complète est la somme vectorielle des accélérations tangentielles et normales (fig. 3.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Trouver la valeur de l'accélération tangentielle en rotation:

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \varepsilon R,$$

au final:

$$a_\tau = \varepsilon R. \qquad (3.5)$$

L'accélération normale est déterminée par la formule:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R},$$

d'où

$$a_n = \omega^2 R. \qquad (3.6)$$

L'accélération tangentielle a_τ est portée par la tangent à la trajectoire (et est dirigée dans le sens du mouvement quand la rotation est accélérée, et dans le sens oppose quand la rotation est retardée); l'accélération normale a_n est toujours portée par le rayon *R* et dirigée vers l’axe de rotation (fig.3.6).

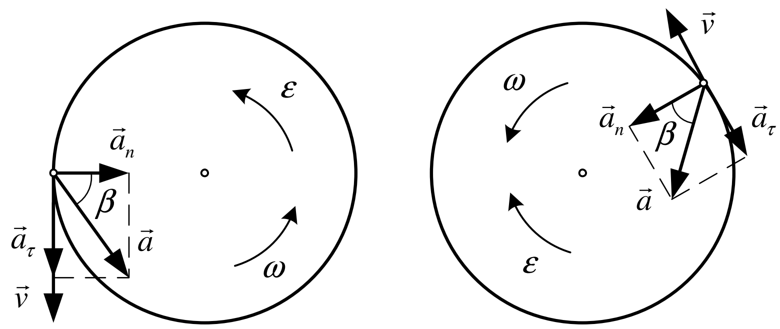


Fig. 3.6

3.6 Transformation du mouvement de rotation

Dans les éléments en mouvement des machines, il y a souvent des transformations de mouvements:

- conversion d'un mouvement de rotation en un autre,
- conversion d'un mouvement de rotation en mouvement de translation

(et vice versa).

Les types de transformations sont illustrés dans la figure 3.8.

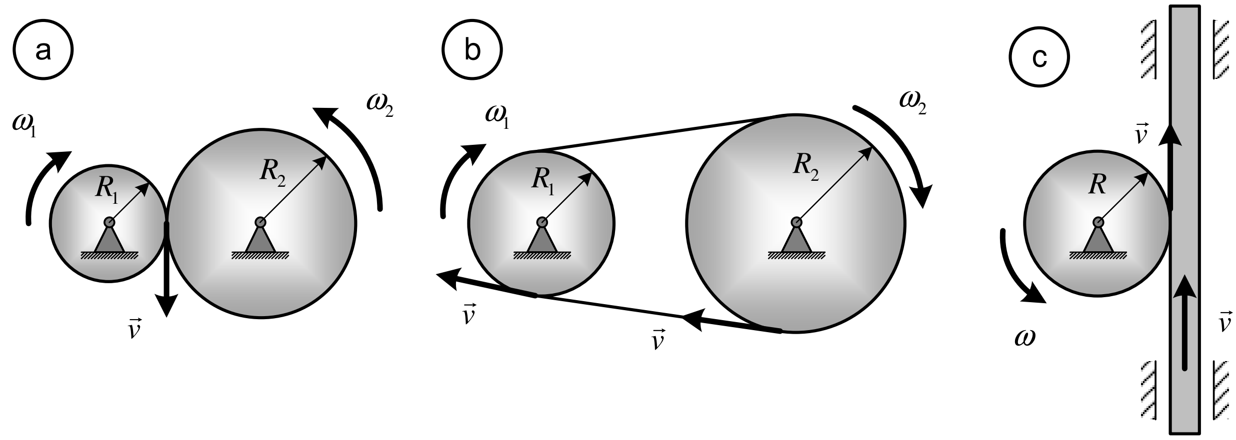


Fig. 3.8

Les connexions entre les vitesses de deux mouvements différents sont appelées liaisons cinématiques.

Ils sont établis à partir de la condition de l'absence de glissement entre les corps en interaction, c'est-à-dire de la condition de l'égalité des vitesses de deux corps au point de contact.

Donc pour fig. 3.8 (a, b):

$$\omega_1 R_1 = v = \omega_2 R_2$$

où

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{3.7}$$

Les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux rayons correspondants.

Pour la transmission illustrée à la fig. 3.8, c rapport:

$$v = \omega R.$$

3.7 Analogies mécaniques

On peut remarquer que les formules des mouvements de translation et de rotation coïncident, ne différant que par l'ensemble des caractères qui les composent.

Par exemple, lorsque vous remplacez les caractéristiques cinématiques du mouvement de translation par les caractéristiques cinématiques du mouvement de rotation, les équations du mouvement de translation sont automatiquement converties en formules de mouvement de rotation.

Tableau des analogies mécaniques

Mouvement de translation (mouvement de point matériel)	Mouvement de rotation
La loi du mouvement de translation $s = s(t)$	La loi du mouvement de rotation $\varphi = \varphi(t)$
La vitesse $v = \lvert\dot{s}\rvert$	La vitesse angulaire $\omega = \lvert\dot{\varphi}\rvert$
L'accélération tangentielle $a_\tau = \lvert\ddot{s}\rvert$	L'accélération angulaire $\varepsilon = \lvert\ddot{\varphi}\rvert$
Le mouvement uniforme $v = const,$ $s = vt + s_0$	La rotation uniforme $\omega = const,$ $\varphi = \omega t + \varphi_0$
Le mouvement uniformément varié $a_\tau = const,$ $v = a_\tau t + v_0,$ $s = \frac{a_\tau t^2}{2} + v_0 t + s_0$	La rotation uniformément variée $\varepsilon = const,$ $\omega = \varepsilon t + \omega_0,$ $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$

4. Mouvement plan du corps solide

4.1 Equations du mouvement plan

On entend par **mouvement plan du corps solide** pendant lequel tous ses points se déplacent parallèlement à un plan fixe.

Un solide effectue un mouvement plan par rapport à un plan fixe *Oxy* (fig.4.1). Nous sélectionnons deux sections dans le corps: la section *S* dans le plan *Oxy* et la section *S'* dans le plan *O'x'y'*. Une proite relie les points *M* et *M'*, qui appartiennent respectivement aux sections *S* et *S'*.

Dans le processus de mouvement, le point *M* ne sortira pas du plan *Oxy*, et le point *M'* sortira du plan *O'x'y'*. La droite *MM'* sera parallèle à l'axe z tout le temps et son mouvement est donc de translation.

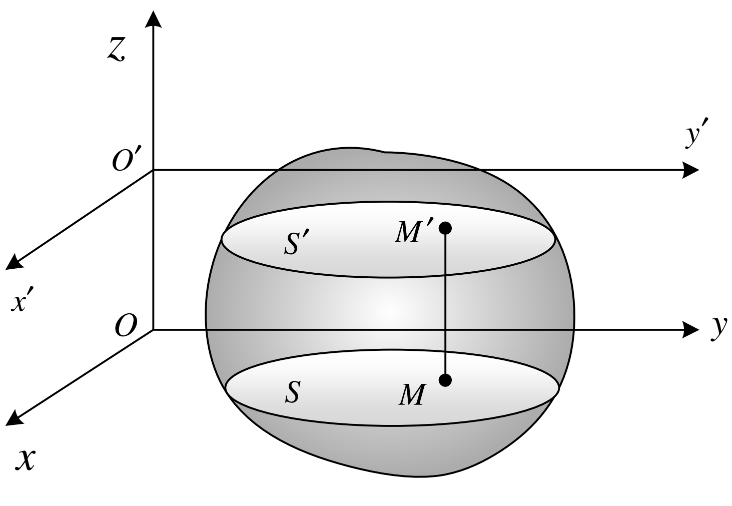


Fig. 4.1

Au cours du mouvement plan, tous les points du corps situés sur une droite *MM’* perpendiculaire aux plans *Oxy* et *O’x’y’* se déplacent de façon identique. C’est pourquoi, pour l’étude du mouvement de cette droite *MM’*, il suffit d’étudier le mouvement d’un point *M*. <u>Alors pour l’étude du mouvement d’un corps, il suffit d’étudier le mouvement de la section *S*</u>.

On considère le mouvement d'une figure plate (fig. 4.2). On choisit un système de coordonnées fixe *Oxy*. On choisit le point *C* sur la figure plate, que on appelle le pôle. On passe à travers le point *C* un système de coordonnées qui se déplacera avec le corps. La position du point *C* à tout moment est déterminée par les coordonnées du pôle. En même temps le corps peut tourner autour du pôle *C*. La valeur de cette rotation détermine l'angle φ.

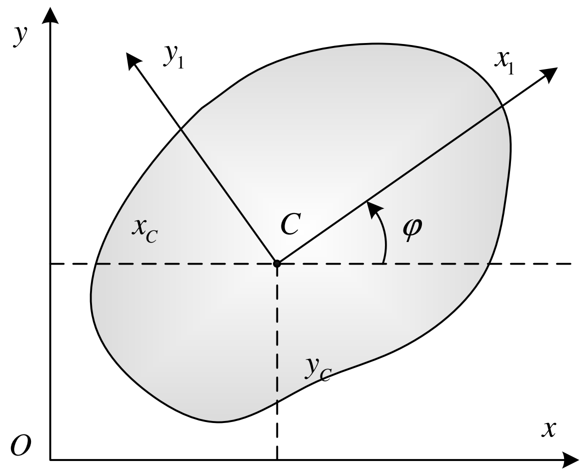


Fig.4.2

Les coordonnées du pôle et l'angle de rotation lors de la conduite changent, c'est-à-dire dépendent du temps.

$$\begin{cases} x_C = x_C(t) \\ y_C = y_C(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

Les équations sont appelées **équations du mouvement plan du corps solide**.

À partir de ces équations, on peut trouver les caractéristiques cinématiques essentielles du mouvement plan:

- la vitesse $\vec{v}_C$ et l'accélération $\vec{a}_C$ du pôle,
- la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et l'accélération angulaire $\vec{\varepsilon}$ du corps.

Il en découle que le mouvement plan du corps solide est composé d'un mouvement de translation dans lequel tous les points se déplacent de la même façon que le pole, et d'un mouvement de rotation autour de ce pole.

Il faut remarquer que:

- le mouvement plat peut être représenté comme une collection de deux mouvements: de translation et de rotation,
- l'angle de rotation (φ) et les caractéristiques cinématiques de la partie de rotation ($\vec{\omega}$ et $\vec{\varepsilon}$) ne dépendent pas du choix du pôle,
- les coordonnées du pole (x_C , y_C) et les caractéristiques cinématiques du mouvement de translation ($\vec{v}_C$ et $\vec{a}_C$) dépendent du choix du pôle.

Les équations 4.1 permettent de trouver la vitesse et l'accélération du pôle ($\vec{v}_C$ et $\vec{a}_C$). Pour trouver la vitesse et l'accélération des autres points du corps, il faut utiliser les théorèmes sur addition des vitesses et des accélérations en mouvement plan.

4.2 Théorème sur addition des vitesses en mouvement plan

Théorème

La vitesse de chaque point *M* du corps est la somme géométrique de la vitesse d'un point, pris comme pôle, et de la vitesse du point *M* lors de sa rotation avec le corps autour du pôle:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC} \tag{4.2}$$

Preuve du théorème

On choisit sur une figure plate deux points *C* et *M*. Le point *C* est le pôle (fig. 4.3). La position de tout point *M* est déterminée dans le système d'axes *Oxy* par le rayon vecteur $\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}_{MC}$.

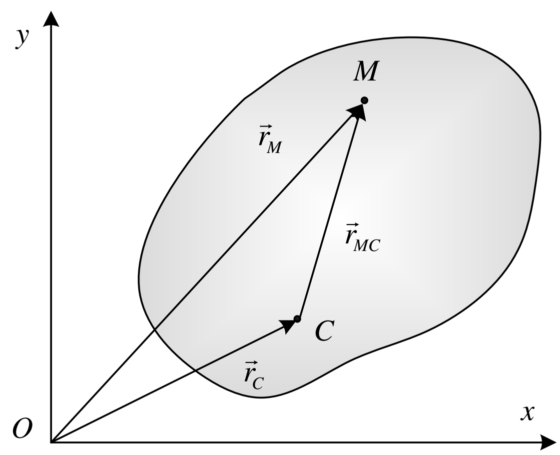


Fig. 4.3

$\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_{MC}$,

où $\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_M$ – la vitesse du point *M*,

$\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C$ - la vitesse du point *C*,

$\vec{v}_{MC} = \dot{\vec{r}}_{MC}$ - la vitesse du point *M*, quand $r_{MC} = const$, c'est-à-dire quand le point A tourne autour du pôle *C*.

Alors

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}$$

Le théorème est démontré.

La direction et le module du vecteur $\vec{v}_{MC} = \dot{\vec{r}}_{MC}$ sont déterminés par les règles adoptées pour le mouvement de rotation:

- la vitesse est perpendiculaire au segment *MC* et orientée vers la rotation,
- le module de vitesse est égal: $v_{MC} = \omega\, r_{MC}$.

On trouve le module et la direction de la vitesse $\vec{v}_M$ en construisant le parallélogramme correspondant (fig. 4.4).

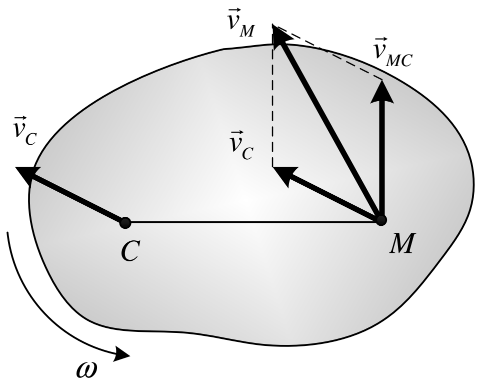


Fig. 4.4

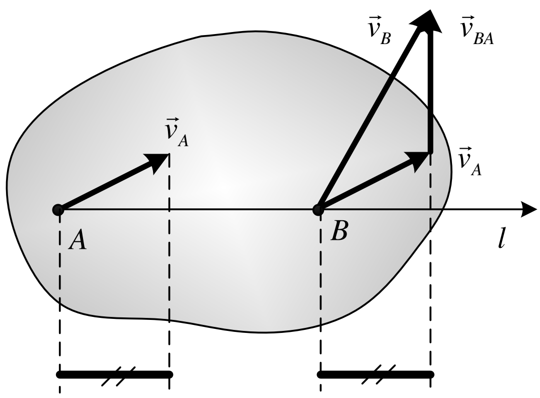


Fig. 4.5

Corollaire du théorème

Les projections des vitesses de deux points du corps solide sur la droite joignant ces points sont égales entre ells.

Sioent deux points quelconques *A* et *B* du corps. Prenant le point *A* pour le pôle, on obtient que $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ (fig. 4.5).

Prijetant les deux membres de l'égalité sur la droite *l*, compte tenu de ce que le vecteur $\vec{v}_{BA}$ est perpendiculaire à *l* (la projection de la vitesse par axe est nulle), on trouve que

$$[\vec{v}_\mathrm{B}]_l = [\vec{v}_\mathrm{A}]_l. \tag{4.3}$$

4.3 Centre instantané des vitesses

Par **centre instantané des vitesses** on entend le point du corps, dont la vitesse à l'instant donné est égale à zéro: $v_P = 0$.

Montrer qu'un tel point existe toujours.

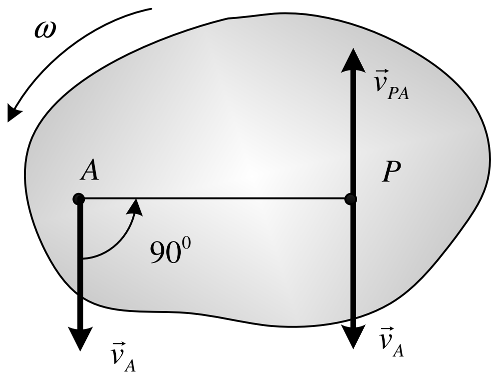


Fig. 4.6

Un corps (fig. 4.6) tourne à la vitesse angulaire ω.

On considère un point arbitraire A, dont la vitesse dans un moment donné est $\vec{v}_A$. On tourne la vitesse de 90 degrés sur la vitesse angulaire. Dans cette direction, on met de côté le segment $|AP| = \frac{v_A}{\omega}$.

Le point obtenu P a une vitesse nulle.

On choisit le point A pour le pôle.

Alors $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$.

La vitesse $\vec{v}_{PA}$ est perpendiculaire au segment PA et est dirigée vers l'opposé de la vitesse $\vec{v}_A$. Les modules de vitesse $\vec{v}_{PA}$ et $\vec{v}_A$ sont égaux ($v_{PA} = \omega|PA| = \omega \frac{v_A}{\omega} = v_A$). De là, il est clair que $\vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{0}$, et le point P est le centre instantané des vitesses.

Nota bene

1. La position du centre instantané des vitesses sur la figure en mouvement n'est pas la même, dans le processus de mouvement, sa position change constamment.

2. Le centre instantané des vitesses peut être à l'extérieur du corps.

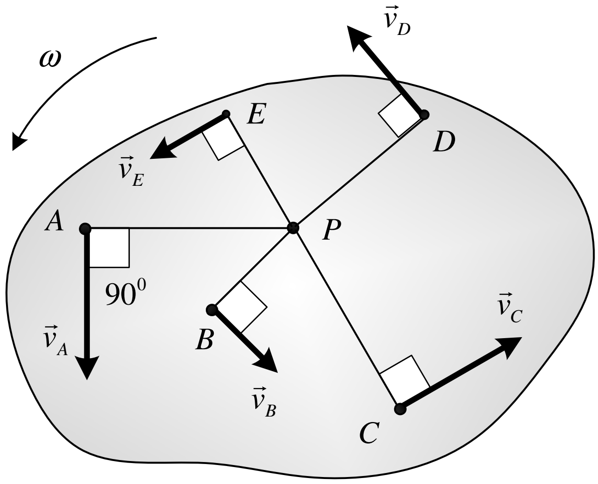
3. Si la vitesse angulaire du corps est actuellement nulle, le centre instantané des vitesses est situé à l'infini. Dans ce cas, les vitesses de tous les points du corps sont les mêmes. Le mouvement d'un corps à un moment donné est appelé un mouvement de translation instantané, contrairement au mouvement de translation dans lequel $\omega = 0$ à un moment donné.

Choisissez le centre instantané des vitesses comme pôle. Alors la vitesse d'un point *M* arbitraire est: $\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{\mathrm{MP}}$.

Conclusion

La vitesse de tout point du corps est égale à sa vitesse de rotation autour du centre instantané des vitesses.

Donc, la vitesse $\vec{v}_M$ est perpendiculaire au segment *PM* dans le sens de rotation et son module est égal $v_M = \omega \cdot PM$ (fig. 4.7).



$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_D}{PD} = \frac{v_E}{PE}$$

Fig. 4.7

4.4 Trouver le centre instantané des vitesses

Les moyens de trouver le centre instantané des vitesses.

1. On connaît la vitesse angulaire ω et la vitesse de n'importe quel point $\vec{v}_A$ du corps (fig. 4.8,a).

Pour déterminer le centre instantané des vitesses, il faut:

- Tourner le vecteur de vitesse de 90 degrés dans le sens de rotation du corps.
- Dans cette direction, mettre de côté le segment $AP = \frac{v_A}{\omega}$ et obtenir la position du point P, qui est le centre instantané des vitesses.

2. Les directions des vitesses de deux points $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ d'une figure plane sont connues et ces vitesses ne sont pas parallèles les unes aux autres (fig. 4.8, b). Pour déterminer le centre instantané des vitesses, il faut:

Tracer les perpendiculaires à la direction des vitesses à partir des points *A* et *B* jusqu'au point de leur intersection *P*, qui est le point du centre instantané des vitesses.

En cela $\frac{v_A}{|AP|} = \frac{v_B}{|BP|} = \omega$.

3. Les vitesses de deux points $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ d'une figure plane sont parallèles les uns aux autres et perpendiculaires au segment *AB*.

Le centre instantané des vitesses provient de la condition que les modules de vitesse des points *A* et *B* sont proportionnels aux distances de ces points à lui:

$$\frac{v_A}{|AP|} = \frac{v_B}{|BP|} = \omega.$$

Deux options sont possibles:

- le centre instantané des vitesses est situé entre les points A et B lorsque les vitesses sont dirigées dans des directions différentes (fig.4.8, c);
- le centre instantané des vitesses est en dehors du segment AB lorsque les vitesses ne sont pas égales et sont dirigées dans un sens (fig. 4.8, d).

4. Les vitesses de deux points d'une figure plane $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont modulo égales et parallèles les unes aux autres (fig. 4.8, e, f).

Le centre instantané des vitesses est situé à l'infini et les vitesses de tous les points sont parallèles. Les modules de vitesse de tous les points du corps sont les mêmes. Le mouvement du corps est le mouvement de translation instantané $\omega = 0$.

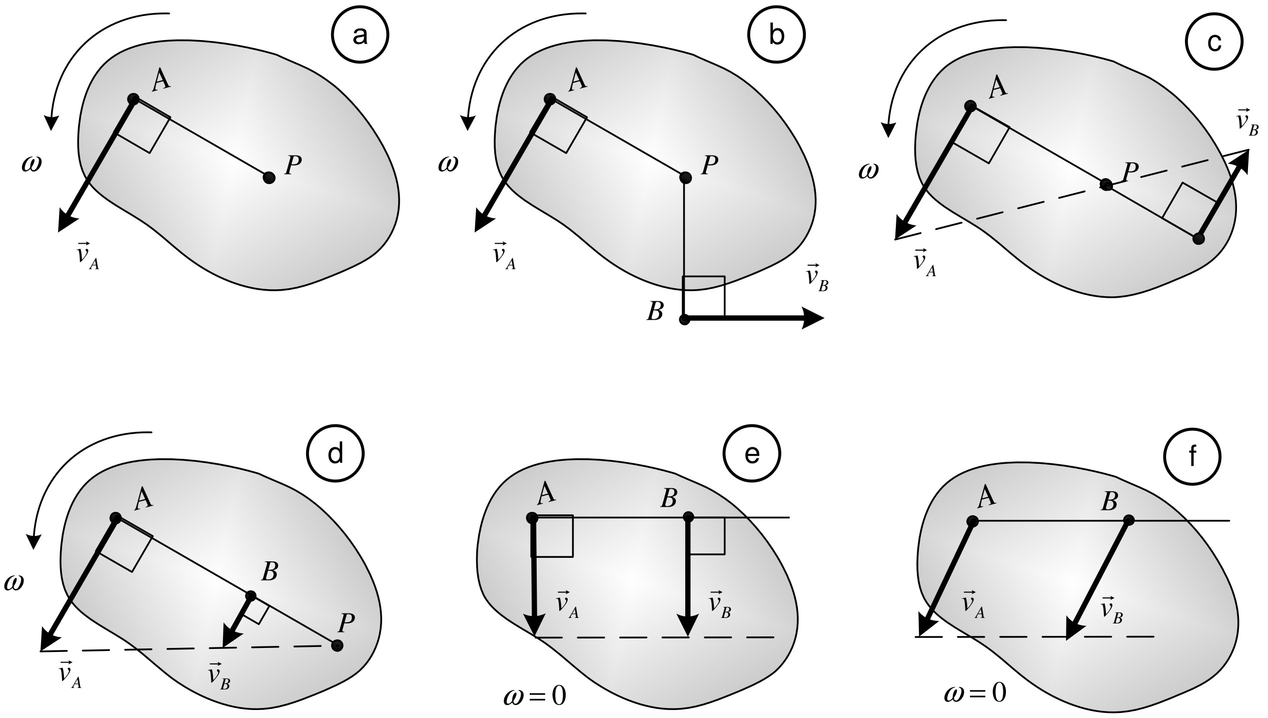


Fig. 4.8

5. Si le mouvement plan est réalisé par voie de roulement sans glissement d'un corps cylindrique sur la surface d'un autre, immobile, le point de contact P (fig. 4.9) possèdé à l'instant considéré une vitesse nulle et, par consequent, est le centre instantané des vitesses ($v_P = 0$, car en l'absence de glissement les points de contact des deux corps doivent avoir des vitesses égales et le deuxième corps est immobile).

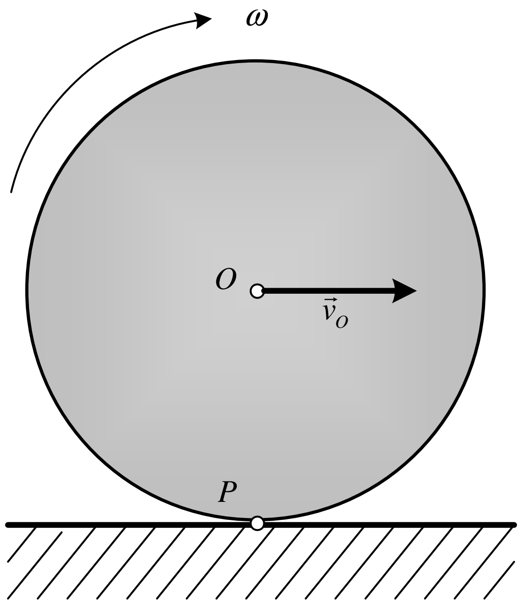


Fig. 4.9

4.5 Théorème sur addition des accélérations en mouvement plan

Théorème

L'accélération de n'importe quell point *M* du corps, au point de vue géométrique, se compose de l'accélération d'un autre point, pris pour pôle, et de l'accélération du point *M* dans sa rotation avec le corps autour de ce pôle:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}. \tag{4.4}$$

Preuve du théorème

Par le théorème sur addition des vitesses en mouvement plan, on a:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{\mathrm{P}} + \vec{v}_{M\mathrm{P}}.$$

Différencier cette égalité dans le temps. On reçoit:

$$\dot{\vec{v}}_M = \dot{\vec{v}}_{\mathrm{C}} + \dot{\vec{v}}_{M\mathrm{C}},$$

où $\dot{\vec{v}}_M$ – l’accélération du point *M*, $\dot{\vec{v}}_C$ – l’accélération du point *C*,

$\dot{\vec{v}}_{MC}$ – l’accélération du point *M* dans sa rotation autour du point *C* (autour du pôle).

Le théorème est démontré.

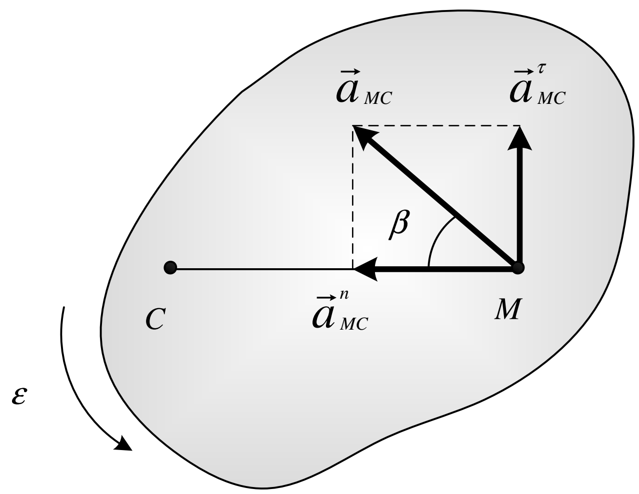


Fig. 4.10

L'accélération $\vec{a}_{MC}$ est déterminée par les règles du mouvement de rotation, c'est-à-dire égale à la somme des accélérations tangentielles et normales (fig. 4.10):

$$\vec{a}_{MC} = \vec{a}^{\tau}_{MC} + \vec{a}^{n}_{MC}.$$

Alors l'accélération totale du point *M* est égale:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{MC} + \vec{a}^{n}_{MC}. \tag{4.5}$$

5. Mouvement composé du point

5.1 Mouvements relatif, d'entraînement et absolu

Un mouvement composé du point est appelé un tel mouvement de point, qui est considéré simultanément dans deux systèmes de référence.

Un exemple est le mouvement d'une personne à l'intérieur d'un wagon en mouvement, tandis que le wagon passe devant une plate-forme fixe. Le mouvement de l'homme peut être vu dans le système de coordonnées associé au wagon ou dans le système de coordonnées associé à la plate-forme (c'est-à-dire au Sol).

On examine le mouvement du point simultanément par raport à deux systèmes de référence, dont l'un est considéré conventionnellement comme fixe (**système de référence fixe**) (le système $O_1x_1y_1$ de la fig. 5.1), tandis que l'autre se déplace de façon déterminée par rapport au premier (**système de référence mobile**) (le système Oxy de la fig. 5.1).

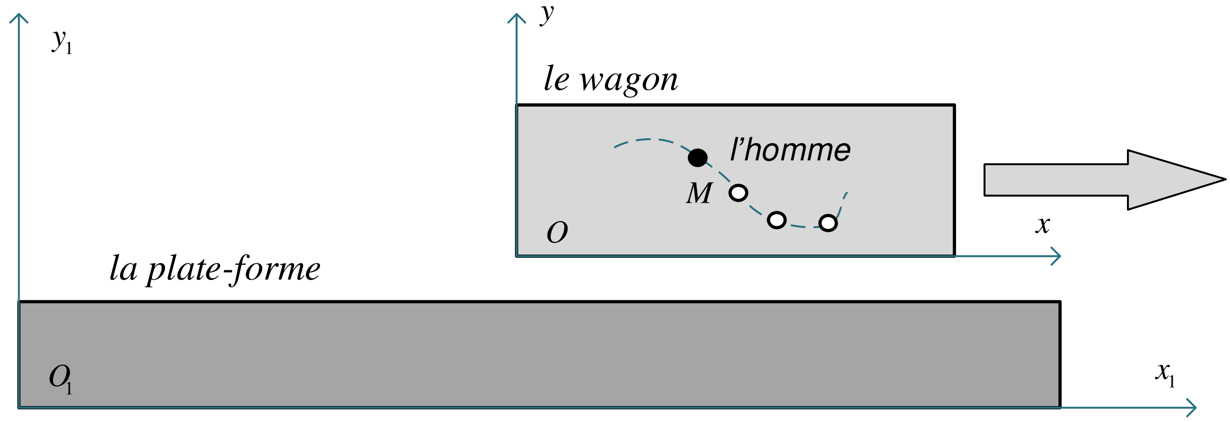


Fig. 5.1

Dans de tels cas, on peut distinguer trois types de mouvement: relatif, d'entraînement et absolu.

1. Le mouvement du point par rapport au système de référence fixe (le système $O_1x_1y_1$) est appelé **le mouvement absolu ou composé** (le mouvement de l'homme par rapport à la plate-forme).

Les caractéristiques du mouvement absolu sont **la vitesse absolue** $\vec{v}_a$ et **l'accélération absolue** $\vec{a}_a$, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un système de coordonnées fixe (par rapport à la plate-forme). Ils sont indiqués par l'indice «a».

2. Le mouvement du point par rapport aux axes de coordonnées mobiles (le système de référence Oxy) est appelé **le mouvement relatif** (le mouvement de l'homme par rapport au wagon).

Les caractéristiques du mouvement absolu sont **la vitesse relative** $\vec{v}_r$ et **l'accélération relative** $\vec{a}_r$, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un système de coordonnées mobile (par rapport au wagon). Ils sont indiqués par l'indice «r».

3. Le mouvement du système de coordonnées mobile (le système Oxy) par rapport au système fixe (le système $O_1x_1y_1$) est **le mouvement d'entraînement** pour le point (le mouvement du wagon par rapport à la plate-forme). Dans un système de coordonnées mobile, la position du point M change tout le temps.

La vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ et **l'accélération d'entraînement** $\vec{a}_e$ sont la vitesse et l'accélération du point du système de coordonnées mobile avec lequel le point mobile coïncide actuellement. Ils sont indiqués par l'indice «e».

Exemple

La grue à tour transporte la charge P (fig. 5.2, a). Elle tourne autour de son axe (l'angle φ varie) et le chariot de la grue se déplace le long de sa flèche (la distance R varie). La hauteur de la charge P reste constante.

La hauteur de la charge ne change pas et, par conséquent, la charge P se déplace dans le plan horizontal (fig. 5.2, b) situé à une hauteur de H.

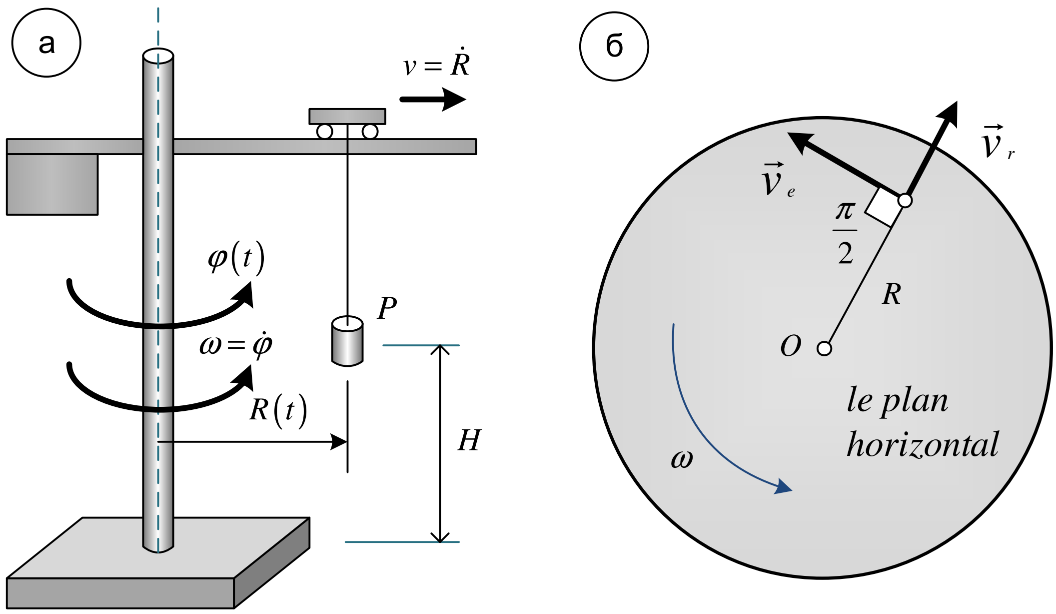


Fig. 5.2

Le système de coordonnées associé à la Sol est absolu et que le système de référence associé à la grue est relatif. Ensuite, le mouvement de la charge par rapport à la grue est un mouvement Relatif, le mouvement de la cargaison par rapport au Sol est un mouvement absolu et le mouvement d'entraînement est la rotation de la grue.

La vitesse relative de la charge $\vec{v}_r$ est dirigée dans le rayon de l'axe de la grue.

La vitesse d'entraînement est la vitesse que le point où se trouve la charge a à la suite de la rotation de la grue. Elle est dirigée dans le sens de rotation de la grue perpendiculairement au segment OP.

La tâche principale est de trouver les caractéristiques cinématiques du mouvement absolu à partir des caractéristiques connues des mouvements relatifs et d'entraînement.

5.2 Composition des vitesses

Théorème sur la composition des vitesses

La vitesse absolue du point est égale à la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

Preuve du théorème

Le système de référence $Oxyz$ – est le système de référence mobile avec les orthèses $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, dans lequel le point mobile M est spécifié par le vecteur rayon $\vec{r}$ et a les coordonnées x, y, z.

Le système de référence $O_1x_1y_1z_1$ – est le système de référence fixe, dans lequel la position des points M et O est déterminée par les vecteurs $\vec{\rho}$ et $\vec{\rho}_0$.

Il est clair que $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, puisque $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}$ et $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

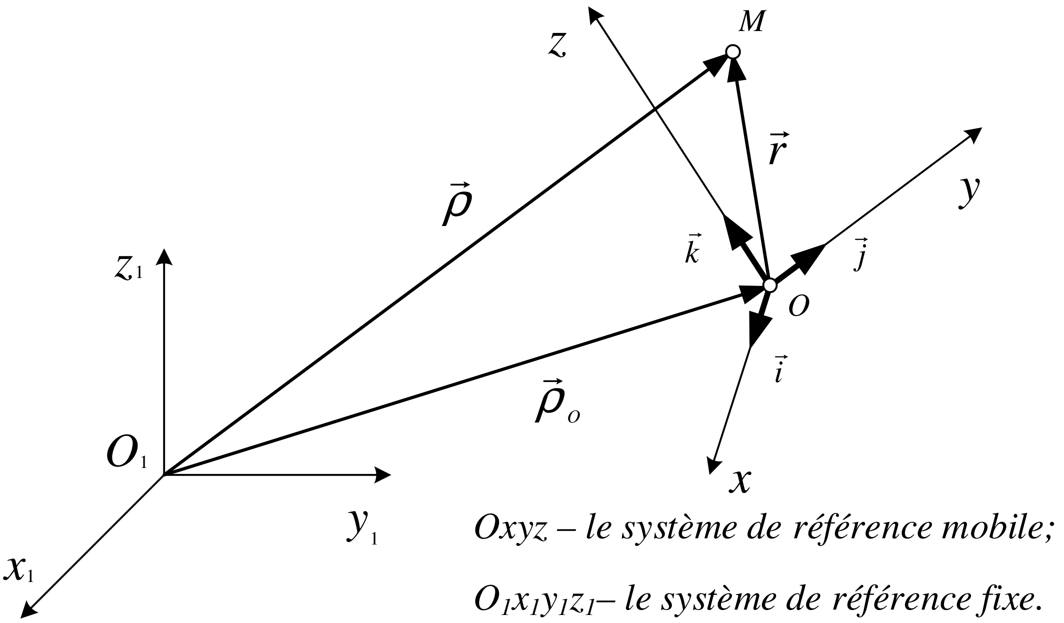


Fig. 5.3

La vitesse relative $\vec v_r$ (vitesse du point par rapport au système de coordonnées mobile) est obtenu à la différenciation dans le temps du vecteur $\vec r$ dans l'hypothèse que les vecteurs unitaires $\vec\imath, \vec\jmath, \vec k$ stationnaires ($\vec\imath, \vec\jmath, \vec k = const$), et les coordonnées x, y, z changent:

$$\vec v_r = \dot{\vec r}\Big|_{\substack{\vec\imath=const\\ \vec\jmath=const\\ \vec k=const}} = \dot x\vec\imath + \dot y\vec\jmath + \dot z\vec k. \qquad \text{(a)}$$

La vitesse d'entraînement $\vec v_e$ (vitesse qu'un point acquiert à la suite du mouvement d'un système de coordonnées mobile par rapport à un système de coordonnées fixe) est obtenu à la différenciation dans le temps du vecteur $\vec\rho$. Le changement des coordonnées du point ne se produit que par le changement du vecteur $\vec\rho_O$, ainsi que par la rotation des les vecteurs unitaires du système de coordonnées mobile $\vec\imath, \vec\jmath, \vec k$, et les coordonnées du point M dans le système de coordonnées mobile x, y, z ne changent pas (le point se déplace avec le système):

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{\rho}}\Big|_{\substack{x=const \\ y=const \\ z=const}} = \dot{\vec{\rho}}_O + x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}}. \tag{b}$$

La vitesse absolue $\vec{v}_a$ (vitesse du point par rapport au système de coordonnées fixe) est définie comme la dérivée temporelle du rayon vecteur $\vec{\rho}$, au cours de laquelle il est pris en compte que tous les éléments de l'expression sont des variables:

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}}_O + \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}}. \tag{c}$$

En comparant les formules (a), (b) et (c), on vue que l'égalité est juste:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \tag{5.1}$$

Le théorème est démontré.

Nota bene

Le point décrit des trajectoires différentes dans les mouvements relatifs, d'entraînement et absolus et les vitesses correspondantes sont toujours dirigées tangentes à ces trajectoires.

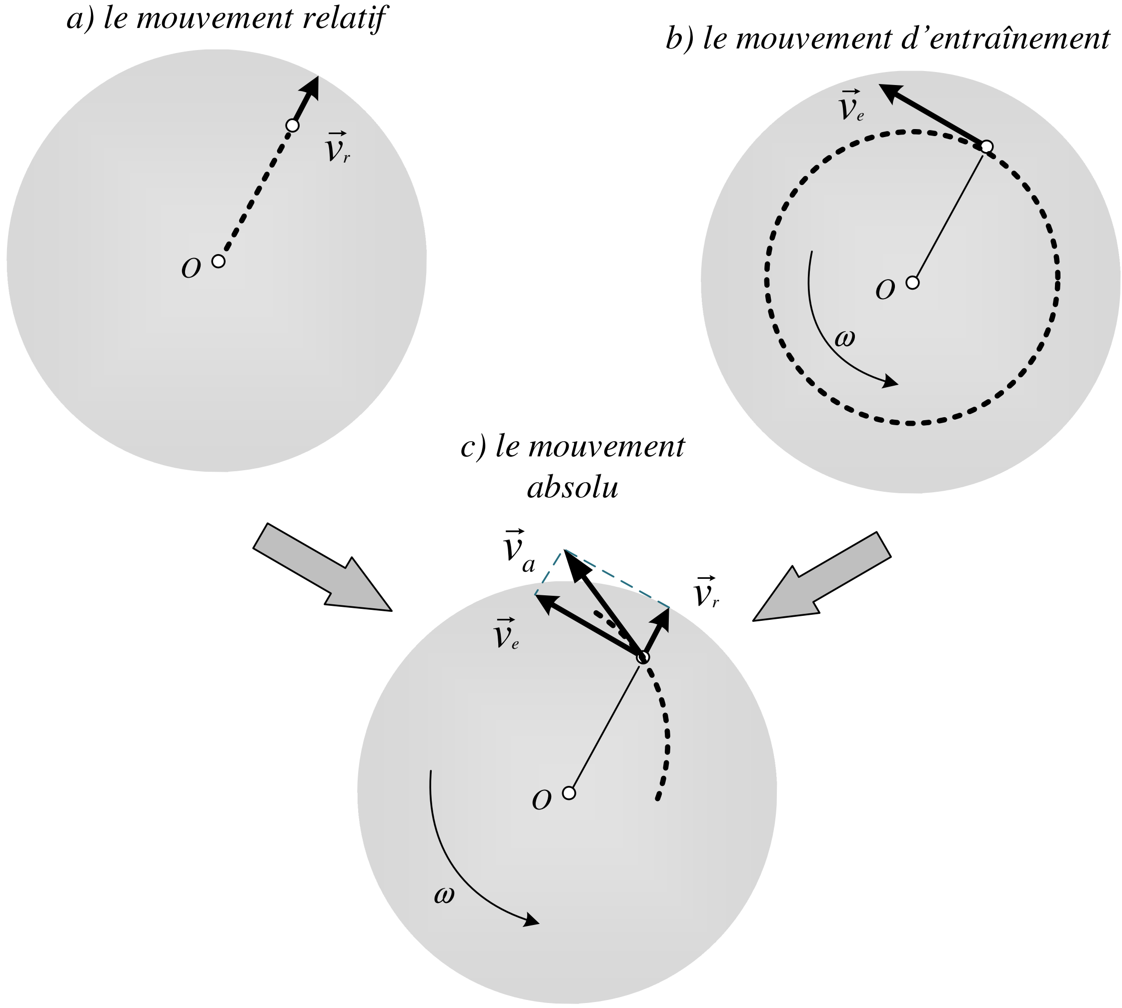


Fig. 5.4

Ainsi, dans l'exemple d'une grue, la trajectoire du mouvement relatif de la charge est une ligne droite (fig. 5.4, a), la trajectoire de la charge dans le mouvement d'entraînement est un cercle (fig. 5.4, b), et la trajectoire du mouvement absolu est une spirale en expansion (fig. 5.4,c).

5.3 Composition des accélérations. Théorème de Coriolis

On considère comment les points d'accélération sont définis dans un mouvement composé.

L'accélération relative $\vec{a}_r$ (accélération du point par rapport au système de coordonnées mobile) est obtenue par différenciation dans le temps du vecteur de vitesse relative $\vec{v}_r$.

On suppose que les vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont stationnaires ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} = const$), et les coordonnées x, y, z changent:

$$\vec{a}_r = \dot{\overrightarrow{v_r}}\Big|_{\substack{\vec{\imath}=const \\ \vec{\jmath}=const \\ \vec{k}=const}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}. \tag{a}$$

L'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ (l'accélération que le point acquiert à la suite du mouvement du système de coordonnées mobile par rapport au système fixe) est obtenue par différenciation temporelle du vecteur $\vec{v}_e$.

Dans ce cas, il est pris en compte que dans le mouvement d'entraînement, le changement des coordonnées du point ne se produit que par le changement du vecteur $\vec{\rho}_O$, ainsi que par la rotation des vecteurs unitaires du système de coordonnées mobile $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Les coordonnées du point M dans le système de coordonnées mobile x, y, z ne changent pas (le point se déplace avec le système):

$$\vec{a}_e = \dot{\overrightarrow{v_e}}\Big|_{\substack{x=const \\ y=const \\ z=const}} = \ddot{\vec{\rho}}_O + x\ddot{\vec{\imath}} + y\ddot{\vec{\jmath}} + z\ddot{\vec{k}}. \tag{b}$$

L'accélération absolue $\vec{a}_a$ (l'accélération du point par rapport au système de coordonnées fixe) est définie comme la dérivée temporelle du vecteur de vitesse absolue $\vec{v}_a$.

Il est pris en compte que tous ceux qui entrent dans l'expression de la valeur sont des variables :

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{v}_a} = \dot{\vec{\rho}}_O + \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} + \underline{\underline{2\left(\dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right)}} + x\ddot{\vec{\imath}} + y\ddot{\vec{\jmath}} + z\ddot{\vec{k}}. \quad \text{(c)}$$

En comparant les formules (a), (b) et (c), on vue que l'expression pour l'accélération absolue, à l'exception des accélérations d'entraînement et relatives, comprend un autre groupe de termes, qui est une accélération appelée une accélération Coriolis :

$$\vec{a}_{cor} = 2\left(\dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right).$$

Ainsi, le théorème suivant est juste:

Théorème

L'accélération absolue du point est égale à la somme de trois accélérations: l'accélération relative, caractérisant la variation de la vitesse relative dans le mouvement relatif, l'accélération d'entraînement, caractérisant la variation de la vitesse d'entraînement dans le mouvement d'entraînement, et l'accélération Coriolis, qui caractérise les variations de la vitesse relative dans le mouvement d'entraînement et de la vitesse d'entraînement dans le mouvement reletif:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor}. \quad (5.2)$$

5.4 Calcul de l’accélération de Coriolis

L'accélération de Coriolis peut être calculée plus simplement en utilisant des formules Poisson. Elles montrent comment les vecteurs unitaires du système de coordonnées (ortes) changent, tandis que le système de coordonnées lui-même tourne par rapport à un certain axe «u» (fig. 5.5).

Les formules de Poisson ont la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega} \times \vec{\imath} \\ \dot{\vec{\jmath}} = \vec{\omega} \times \vec{\jmath} \\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} \end{cases}$$

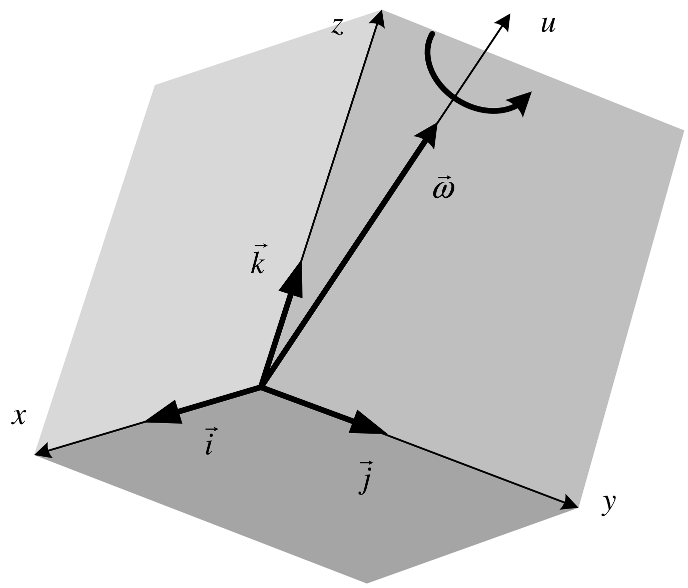


Fig. 5.5

Si l'on considère que la vitesse angulaire des vecteurs unitaires est en fait la vitesse angulaire du mouvement d’entraînement, on peut écrire:

$$\vec{a}_{cor} = 2\left(\dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right) = 2\vec{\omega}_e \times \left(\dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}\right).$$

Puisque $\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}_r$ – est la vitesse relative, alors :

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \tag{5.3}$$

Ainsi, l'accélération Coriolis du point est égale au double produit vectoriel de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement par la vitesse relative du point. Le module d'accélération Coriolis est égal à:

$$a_{cor} = 2\ \omega_e\ v_r\ sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r) \tag{5.4}$$

Le formule (5.4) montre que l'accélération Coriolis peut s'annuler dans les cas suivants:

- quand le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation (la vitesse angulaire de rotation d'entraînement est nulle $\vec{\omega}_e = 0$);

- quand le mouvement relatif est inexistant (la vitesse relative est nulle $\vec{v}_r = 0$);

- quand le mouvement relatif s'effectue dans la direction parallèle à l'axe de rotation d'entraînement (quand les vecteurs $\vec{\omega}_e$ et $\vec{v}_r$ sont parallèles les uns aux autres, $sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r) = 0$).

La direction de l'accélération Coriolis est déterminée par la règle de Joukovski.

Règle de Joukovski

Pour obtenir la direction de l'accélération Coriolis, il faut:

projeter le vecteur de vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d’entraînement;

tourner la projection résultante de 90^0 dans le sens de la rotation.

5.5 Accélération Coriolis lors du mouvement des corps sur la surface de la terre

Tout corps se déplaçant par rapport à la surface de la Terre reçoit l'accélération Coriolis.

Le module de vitesse angulaire de la Terre est très petit, donc le résultat de cette accélération peut être observé soit à des vitesses de mouvement très élevées (mouvement des balles, des projectiles, des missiles), soit à une action prolongée des forces (mouvement des rivières, des trains).

Le vecteur de vitesse angulaire de la Terre est dirigé du pôle Sud au pôle Nord. Il est facile de déterminer la direction de l'accélération Coriolis en fonction de la direction du mouvement du corps, étant donné que:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Lorsque le corps se déplace vers le Nord, l'accélération Coriolis est dirigée vers l'ouest.

Lorsque le corps se déplace vers le Sud, l'accélération Coriolis est dirigée vers l'est.

Lorsque le corps se déplace vers l'Est, l'accélération Coriolis est dirigée par rapport à l'axe de la Terre.

Lorsque le corps se déplace vers l'Ouest, l'accélération Coriolis est dirigée vers l'axe de la Terre.

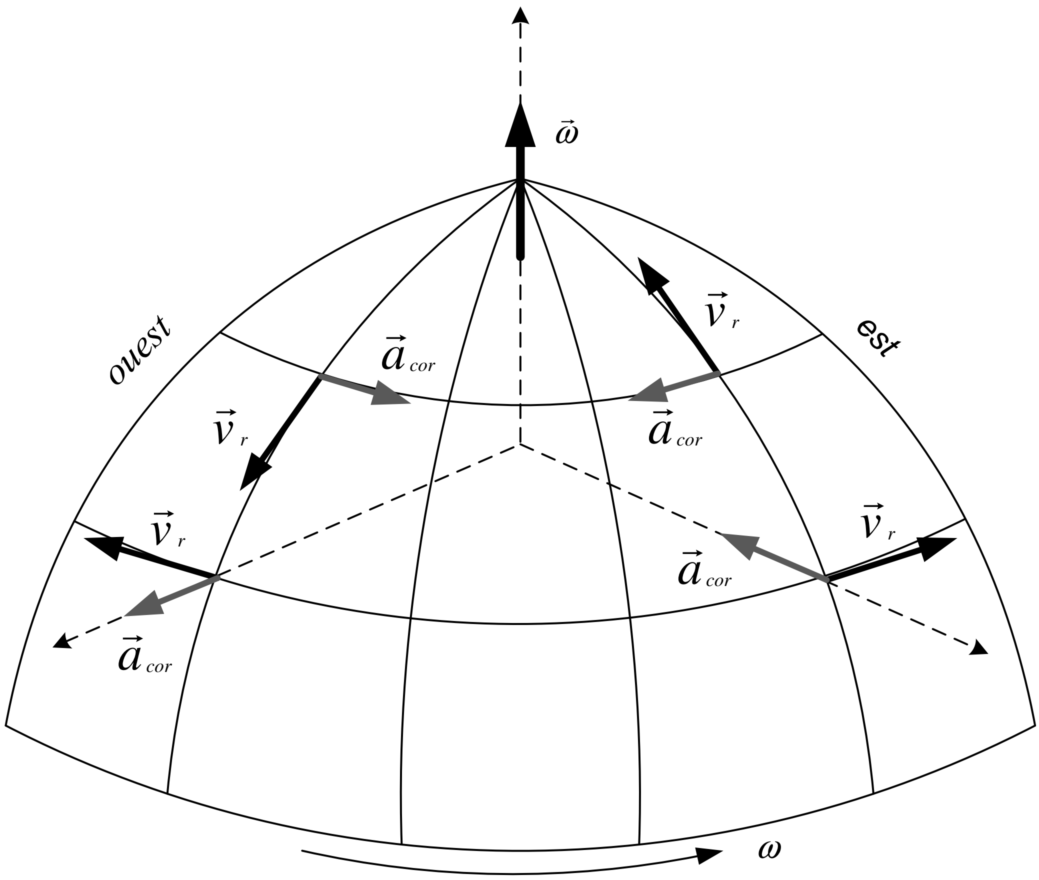


Fig. 5.6

Pour résumer, on peut dire que dans l'hémisphère Nord, l'accélération Coriolis est dirigée vers la gauche en mouvement.

Exemples d'action de l'accélération Coriolis dans l'hémisphère Nord:

- déviation du Gulf Stream et d'autres courants;
- déviation de flux d'air;
- rotation des cyclones dans le sens antihoraire;
- les rivières érodent la rive droite;
- le rail droit sur les chemins de fer s'use plus rapidement.

Dans l'hémisphère Sud, l'accélération Coriolis a une direction inverse, de sorte que ces effets se manifestent en miroir par rapport à l'hémisphère Nord.

Liste de références

1. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие / В.А. Диевский. — 2--е изд., испр. - СПб.: «Лань», 2008. - 320 с.
2. Лойцанский Л.Г., А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том первый. Статика и кинематика. 2006г.
3. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. О.Э. Кепе. – Спб.: Изд. «Лань», 2008.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
5. Тарг. С.М. Краткий курс теоретической механики. Уч.-изд / С.М.Тарг. – М.: Наука, 1968. – 480 с.
6. Targ S. Éléments de mécanique rationnelle/ S.Targ. – Moscou: Mir, 1966. – 479 c.
7. Маковкин Г.А., Ведяйкина О.И. Решение задач по кинематике: учебное пособия. – Н.Новгород, Нижегород.гос.архитекрут.-строит.ун-т, 2016. – 69с.

Table des matières

Ведяйкина Ольга Ивановна

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФРАНКОГОВОРЯЩИХ СТУДЕНТОВ. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Подписано в печать формат 60x90 1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 2,0. Усл. печ. л. 2,2 Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65
http://www. nngasu.ru, srec@nngasu.ru