О.И. Ведяйкина

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФРАНКОГОВОРЯЩИХ СТУДЕНТОВ. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Нижний Новгород
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

О.И. Ведяйкина

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФРАНКОГОВОРЯЩИХ СТУДЕНТОВ. КИНЕМАТИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2024

УДК 531/534(075)
В26
ББК 22.21

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

В.И. Ерофеев – д-р физ-мат. наук, профессор, директор Института проблем машиностроения – филиала ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российкой академии наук» (ИПФ РАН)

В.А. Кикеев – канд. техн. наук, заведующий кафедрой Аэро-гидродинамики, прочности машин и сопротивления материалов ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

Ведяйкина, О.И. Практические занятия по теоретической механике для франкоговорящих студентов. Кинематика : учебное пособие / О.И. Ведяйкина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2024. – 72 с.; ил. – ISBN 978-5-528-00583-6. – Текст : непосредственный.

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы франкоговорящих студентов в процессе изучения дисциплины «Теоретическая механика» раздел «Кинематика». Учебное пособие содержит примеры решения нескольких задач по каждой теме соответствующего раздела.

Предназначено обучающимся в ННГАСУ для подготовки к практическим занятиям по направлению подготовки 08.03.01 Строительство.

ISBN 978-5-528-00583-6

Avant-propos

Представленное учебное пособие предназначено для франкоговорящих студентов, изучающих курс теоретической механики, и является вспомогательным материалом к лекционным и практическим занятиям, позволяющим более полно изучить методы исследования и решения задач кинематики.

Теоретическая механика является одной из фундаментальных наук, при ее изучении закладываются основные знания и понимания, способствующие успешному дальнейшему изучению специализированных, технических наук. Для иностранных студентов первого курса обучения достаточно трудно понимать технические термины и определения на иностранном языке в условиях ограниченного по времени курса предмета. Данное учебное пособие поможет более успешно изучить решение задач раздела кинематика теоретической механики франкоговорящим студентам вузов архитектурно-строительного направления.

В учебном пособии подробно и доступно показан ход решения нескольких задач по каждой теме соответствующего раздела. Каждая задача проиллюстрирована на рисунке.

Ce manuel est destiné aux étudiants francophones qui étudient le cours de la mécanique rationnelle (théorique). Il est un matériau auxiliaire lors de l'étude de de la discipline. Le manuel vous permet d'étudier plus complètement les méthodes de résolution des problèmes de cinématique.

Le manuel décrit en détail et disponible la progression de plusieurs problèmes de cinématique pour chaque sujet. Chaque problème est illustré dans la figure.

1. Cinématique du point

Il y a trois façons de définir le mouvement d'un point:

1. Définition du mouvement du point par le procédé vectoriel

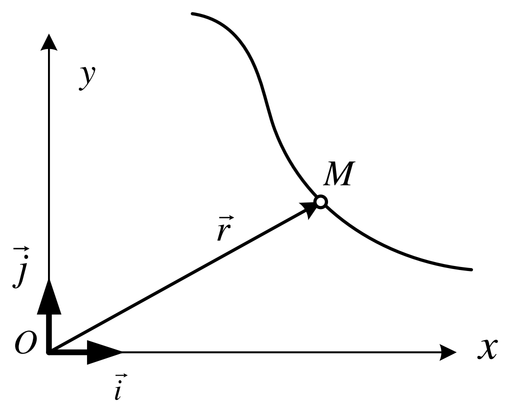

Fig.1.1

La loi do mouvement: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

La vitesse: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$.

L'accélération: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

2. Définition du mouvement par un système de coordonnées

La loi do mouvement: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

La trajectoire: il faut éliminer le temps t des équations du mouvement – y=f(x).

La vitesse:

- projections de la vitesse sur les axes de coordonnées: $\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}$

- Le module de la vitesse: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

L'accélération:

- projections de l'accélération sur les axes de coordonnées: $\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \end{cases}$

- Le module de l'accélération: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

3. Mode naturel de description du mouvement

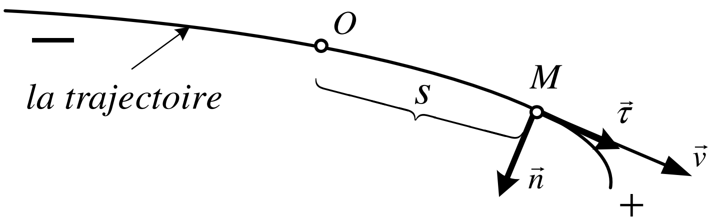

Fig.1.2

La loi do mouvement: $s = f(t)$.

La trajectoire: donnée.

La vitesse: $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}$,

où $v_\tau = \dot{s}$ - projection de la vitesse sur la tangente.

Le module de la vitesse: $v = |v_\tau|$.

L'accélération: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$,

où $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}$ – l'accélération tangentielle,

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – l'accélération normale (est dirigée vers l'intérieur de la concavité de la courbe), ρ – le rayon de courbure de trajectoire, $k = \frac{1}{\rho}$ – la courbure.

Le module de l'accélération: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Le signe du produit scalaire des vecteurs d'accélération et de vitesse permet de déterminer si le mouvement est accéléré ou ralenti. il est positif avec un mouvement accéléré, il est négatif avec un mouvement ralenti.

Problème 1.1. Définition du mouvement du point par le procédé vectoriel

Un mouvement du point est défini par le procédé vectoriel: $\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{4}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{\sin t}\,\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{3t}\,\vec{\boldsymbol{k}}$.

L'accélération du point dirige parallèlement à quel axe?

Solution:

On trouve le vecteur de vitesse:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{\cos t}\,\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{3}\,\vec{\boldsymbol{k}},$$

et le vecteur l'accélération:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\boldsymbol{sin\, t}\, \vec{\boldsymbol{j}}.$$

<u>Réponse</u>: le vecteur d'accélération est parallèle à l'axe Y.

Problème 1.2. <u>Définition du mouvement du point par le procédé vectoriel</u>

Un mouvement du point est défini par le procédé vectoriel:

$$\vec{r} = 0,3\, t^2\, \vec{i} + 0,1\ t^3\, \vec{j}.$$

Il faut déterminer le module de l'accélération du point à $t = t_1 = 2$(s).

<u>Solution:</u>

On trouve le vecteur de vitesse:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 0,6\, t\, \vec{i} + 0,3\ t^2\, \vec{j},$$

et le vecteur l'accélération:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = 0,6\, \vec{i} + 0,6\ t\vec{j}\ .$$

On trouve le vecteur d'accélération à $t = t_1 = 2$s.

$$\vec{a}|_{t=2c} = 0,6\, \vec{i} + 0,6 \cdot 2\, \vec{j} = 0,6\, \vec{i} + 1,2\, \vec{j}.$$

On détermine le module de l'accélération**:**

$$a = \sqrt{0,6^2 + 1,2^2} = 0,6\sqrt{5}\ (\text{m/s}^2).$$

<u>Réponse</u>: $a = 0,6\sqrt{5}$ (m/s^2).

Problème 1.3. Définition du mouvement par un système de coordonnées

Il faut déterminer la trajectoire, le rayon de courbure, la vitesse et l'accélération d'un point M à $\boldsymbol{t=0s}$. Le mouvement de le point est donné par les équations $\boldsymbol{x = 5\,cos2t\ \ (m)}$, $\boldsymbol{y = 3\,sin2t\ \ (m)}$.

Solution:

1. On utilise l'identité trigonométrique $\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ pour déterminer la trajectoire. On élimine le temps t des équations:

$$\boldsymbol{(x/5)^2 + (y/3)^2 = 1}.$$

Il s'ensuit que la trajectoire est une ellipse avec des demi-axes de 5m et 3m dont le centre est à l'origine.

2. On détermine la position du point à $\boldsymbol{t = 0c}$ par ses coordonnées:

$$\boldsymbol{x}|_{\boldsymbol{t=0}} = 5\text{ m},\quad \boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{t=0}} = 0.$$

3. On trouve la vitesse du point par ses projections:

$$\boldsymbol{v_x = \dot{x} = -10\,sin2t,\quad v_y = \dot{y} = 6\,cos2t.}$$

À $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{v_x|_{t=0} = 0}$, $\boldsymbol{v_y\big|_{t=0} = 6\ \ m/s}$.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 6\ \ (m/s)}.$$

4. On trouve l’accélération du point par ses projections:

$$a_x = \dot{v}_x = -20\ cos2t,$$

$$a_y = \dot{v}_y = -12\ sin2t.$$

À $t = 0$:

$$a_x|_{t=0} = -20 \quad m/s^2,$$

$$a_y\big|_{t=0} = 0.$$

Le module de l’accélération: $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_e{}^2} = 20$ (m/s^2).

La figure 1.3 montre que l'accélération est perpendiculaire à la vitesse, c'est-à-dire qu'elle est une accélération normale. Il n'y a pas d'accélération tangentielle à un moment donné. On va s'en assurer.

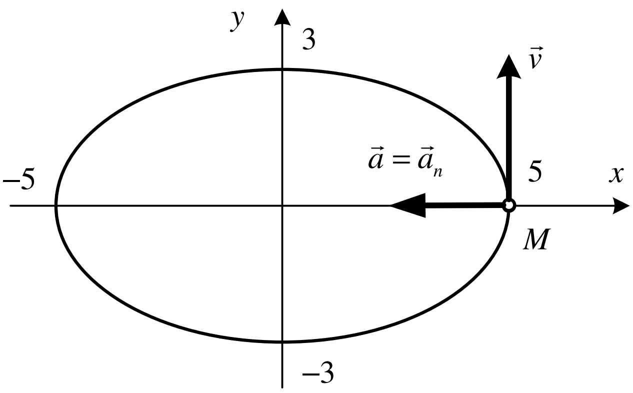

Fig.1.3

On trouve l'accélération tangentielle par la formule:

$$|a_\tau| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right| = 0.$$

On trouve l'accélération sur la normale principale:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \;\rightarrow\; \boldsymbol{a_n} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 - a_\tau{}^2}} = \mathbf{20}\ (\text{m/s}^2).$$

5. On trouve le rayon de courbure de trajectoire:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{\mathbf{6^2}}{\mathbf{20}} = \mathbf{1,8}\ (\text{m}).$$

<u>Réponse</u>: M (5; 0), $\boldsymbol{v} = \mathbf{6}$ (m/s), $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_n} = \mathbf{20}$(m/s^2), $\boldsymbol{a_\tau} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1,8}$ (m).

Problème 1.4. <u>Définition du mouvement par un système de coordonnées</u>

La loi du mouvement du poids larguée de l'avion est donnée par un systèm de coordonnées: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 60\ t} \\ \boldsymbol{y = 5\ t^2}. \end{cases}$

L'avion vole à une altitude de h=320m.

Il faut déterminer: la trajectoire du poids (du point M), distance horizontale entre les points de largage de l'avion et le contact au sol, la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure de trajectoire au point de contact au sol.

<u>Solution:</u>

1. On élimine le temps t des équations pour déterminer la trajectoire. On exprime t de la première equation: $\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{60}}$,

et on substitue dans la seconde:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{5}\boldsymbol{t^2} = \mathbf{5}\,\frac{\boldsymbol{t^2}}{\mathbf{60^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{720}}\boldsymbol{x^2}.$$

Comme $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Il s'ensuit que la trajectoire est la branche droite de la parabole (fig.1.4):

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{720}x^2}.$$

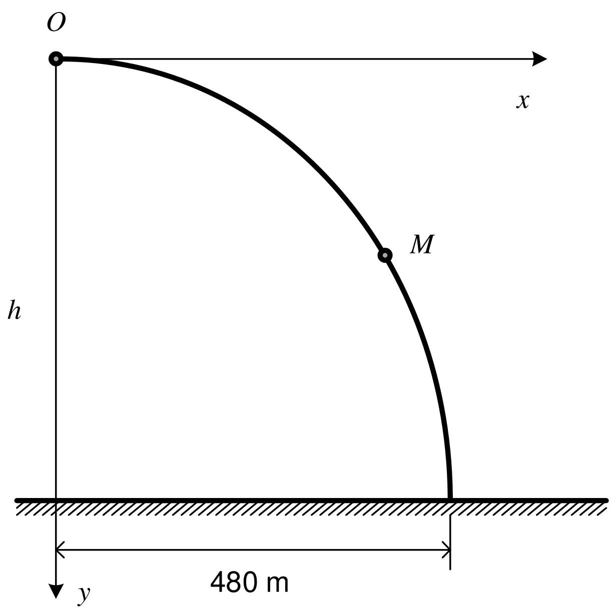

Fig.1.4

2. On trouve la position du point M_1 moment dans le temps t_1 à $y = h = 320$ (m).

Parce que $\boldsymbol{y = 5t^2} \ \rightarrow \ \boldsymbol{t_1} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{5}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{5}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{320}}{\boldsymbol{5}}} = \boldsymbol{8}$ (s).

Avec cela: $\boldsymbol{x_1 = 60t_1 = 60 \cdot 8 = 480}$ (m).

3. On détermine la vitesse et l'accélération au point de contact au sol.

Les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées sont:

$$\boldsymbol{v_x = \dot{x} = 60},$$

$$\boldsymbol{v_y = \dot{y} = 10t}.$$

Les projections de l'accélération sur les axes de coordonnées sont:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 0,$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = 10.$$

On determine le module de la vitesse:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{60^2 + (10t)^2} = 10\sqrt{6^2 + t^2}.$$

À $t = t_1 = 8c \;\rightarrow\; v = 10\sqrt{6^2 + 8^2} = 100$ (m/s).

On détermine le module de l'accélération (il est indépendant du temps):

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

4. On trouve l'accélération normale et tangentielle du point:

$$|a_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|10\frac{2t}{2\sqrt{36+t^2}}\right| = \left|\frac{10t}{\sqrt{36+t^2}}\right|,$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{100 - \frac{100t^2}{36+t^2}} = \frac{60}{\sqrt{36+t^2}}.$$

5. On trouve le rayon de courbure de trajectoire:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5}{3}(36 + t^2)^{\frac{3}{2}},$$

À $t = t_1 = 8c \;\rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5}{3}(36 + 8^2)^{\frac{3}{2}} = 1666{,}7$ (m).

<u>Réponse</u>: $x_1 = 480$ (m), $v = 100$ (m/s), $a = 10$ (m/s^2), $\rho = 1666{,}7$ (m).

Problème 1.5. Mode naturel de description du mouvement

Le mouvement du point est défini par mode naturel sur une trajectoire donnée. La loi do mouvement: $\boldsymbol{s = 1 - 2t + 3t^2}$. L'accélération sur la normale principale: $\boldsymbol{a_n = 2\frac{m}{s^2} = const}$.

Il faut déterminer le rayon de courbure de la trajectoire à t=1s.

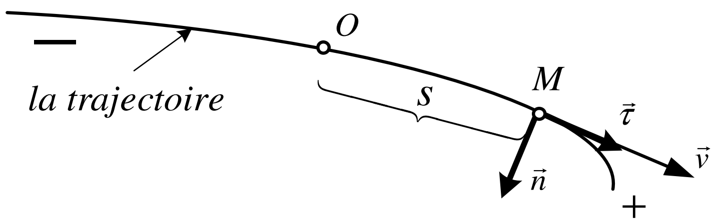

Fig. 1.5

Solution:

On trouve l'équation de vitesse:

$$\boldsymbol{v_\tau = \dot{s} = -2 + 6t}.$$

On trouve le module de la vitesse à t=1s:

$$\boldsymbol{v|_{t=1} = |-2 + 6 \cdot 1| = 4} \text{ (m/s)}.$$

Le rayon de courbure de la trajectoire à t=1s:

$$\boldsymbol{\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4^2}{2} = 8} \text{ (m)}.$$

Réponse: $\boldsymbol{\rho = 8}$ (m).

Problème 1.6. Mode naturel de description du mouvement

Le point *M* se déplace le long d'un cercle qui a un rayon *R*=2(m). Au début le point est en position *O*. Le mouvement du point est défini par mode naturel: $\boldsymbol{S = 2\pi t - \frac{\pi}{4}t^2}$. La direction positive du compte est dans le sens des aiguilles d'une montre.

Il faut déterminer la position du point *M*, la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ et l'accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ (l'accélération normale $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\tau}}$ et tangentielle $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}}$) à *t*=2(s).

Le mouvement à un moment donné est-il accéléré ou retardé?

Solution:

1. On trouve la position du point *M* à *t*=2c (le point M_1).

$$\boldsymbol{s|_{t=2c} = 2\pi \cdot 2 - \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 = 4\pi - \pi = 3\pi}.$$

Il faut trouver l'angle correspondant à la longueur de l'arc puisque le point se déplace le long du cercle.

Le rapport entre l'angle central du cercle et la longueur de l'arc correspondant est:

$$\boldsymbol{S = \alpha R}.$$

L'angle central:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{s}{R} = \frac{3\pi}{2} = 270^0}.$$

On montre le point M_1 sur la figure 1.6.

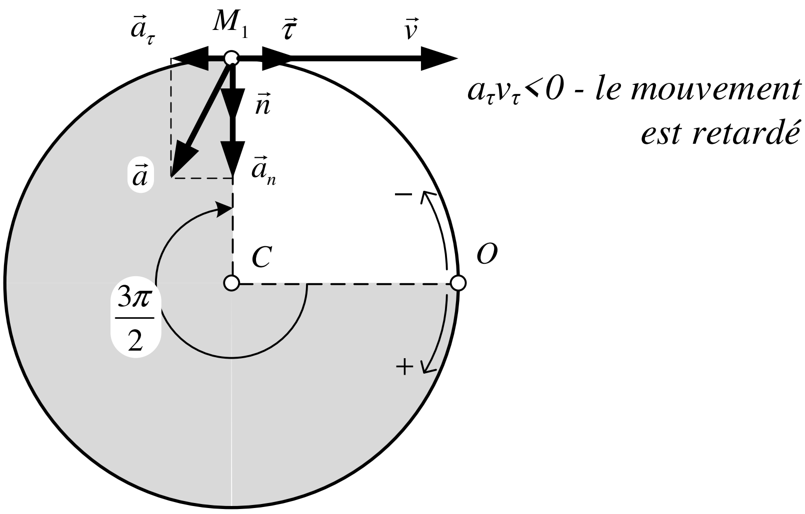

Fig.1.6

2. On trouve la vitesse du point:

$$\boldsymbol{v_\tau = \dot{s} = 2\pi - \frac{\pi}{2}t},$$

$$\boldsymbol{v_\tau|_{t=2c} = 2\pi - \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi = 3,14} \text{ (m/s)}.$$

$\boldsymbol{v_\tau > 0}$ → le vecteur de vitesse est dirigé vers la direction positive du compte. Le module de la vitesse**:** $\boldsymbol{v = |v_\tau|}$.

3. On trouve l'accélération du point:

L'accélération tangentielle:

$$\boldsymbol{a_\tau = \ddot{s} = -\frac{\pi}{2} = -1,57} \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

L'accélération normale:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{3.14^2}{2} = 4,93} \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

On trouve le module de l'accélération:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1,57^2 + 4,93^2} = 5,17} \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

4. On détermine le cas du mouvement:

Les grandeurs $\boldsymbol{v_\tau}$ et $\boldsymbol{a_\tau}$ sont différents ce qui signifie que les vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\tau}}$ sont dirigé dans des directions différentes.

Ainsi, le mouvement du point *M* à *t*=2s est retardé.

<u>Réponse</u>: $\boldsymbol{v} = \mathbf{3,14}$(m/s^2), $\boldsymbol{a_\tau} = \mathbf{1,5}$ (m/s^2), $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{4,93}$ (m/s^2),

$\boldsymbol{a} = \mathbf{5,17}$ (m/s^2).

2. Mouvement du corps solide

Les types les plus simples de mouvement du corps solide sont les mouvements de translation et de rotation.

On entend par **mouvement de translation** du corps solide un mouvement pendant lequel chaque droite appurtenant au corps se déplace tout en restant parallèle à ell-même. Le mouvement de translation du corps est défini par le mouvement d'un de ses points (par exemple, le centre de gravité).

On appellee **mouvement de rotation** du corps solide un mouvement dans lequel deux points quelconques du corps restent fixes. La droite passant par les points immobiles est appellee **axe de rotation**.

La vitesse angulaire instantanée du corps est numériquement égale à la dérivée première de l'angle de rotation par rapport au temps*:* $\omega_z = \dot{\varphi}$.

Le module de la vitesse angulaire: $\mathrm{\omega} = |\mathrm{\omega_z}| = |\dot{\mathrm{\varphi}}|$.

Unité de mesure: $[\mathrm{\omega}] = \frac{\mathrm{radian}}{\mathrm{seconde}} = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1}$.

Lorsque $\omega_z > 0$ l'angle de rotation φ augmente et lorsque $\omega_z < 0$ diminue.

L'accélération angulaire instantanée du corps est numériquement égale à la dérivée première de la vitesse angulaire ou à la dérivéeseconde de l'angle de rotation du corps par rapport au temps*:* $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$.

Le module de l'accélération angulaire: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Unité de mesure: $[\varepsilon] = \frac{radian}{seconde^2} = \frac{1}{s^2} = s^{-2}$.

Si $\omega_z \cdot \varepsilon_z > 0$ la rotation du corps est appelée accélérée, et si $\omega_z \cdot \varepsilon_z < 0$ – la rotation du corps est appelée retardée.

La vitesse du point d'un corps en rotation: $v = \omega R$.

L'accélération totale du point:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

où $a_\tau = \varepsilon R$ - l'accélération tangetielle est portée par la tangent à la trajectoire (fig. 2.1),

$a_n = \omega^2 R$ - l'accélération normale est toujours portée par le rayon R et dirigée vers l'axe de rotation (fig. 2.1).

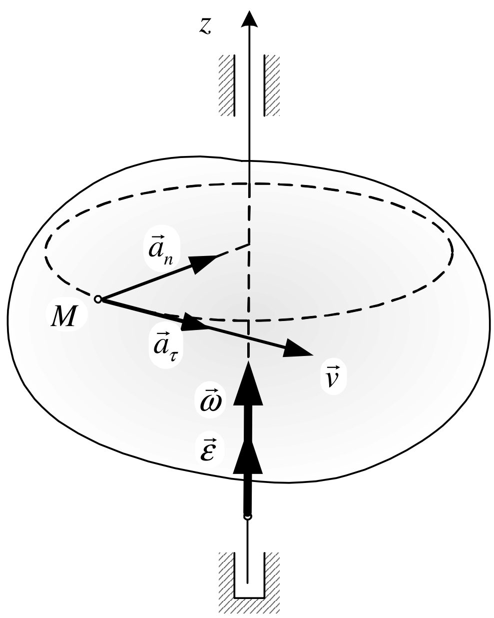

Fig.2.1

Problème 2.1. Le mouvement de rotation du corps solide

Le disque de rayon R = 10 (cm) tourne autour de l'axe *Ox* par la loi $\varphi = 2 + t^3$ (fig.2.1).

Il faut déterminer l'accélération normale du point *A* à *t*=2(s).

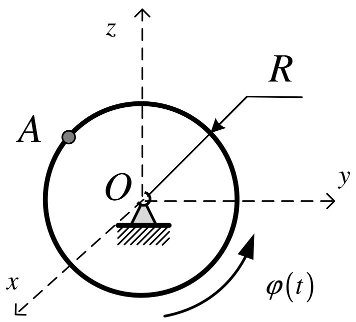

Fig.2.2

Solution:

On trouve aisément la vitesse angulaire du disque:

$$\omega_Z = \dot{\varphi} = 3t^2.$$

En substituent le temps t=2s dans l'équation donnant, on trouve:

$$\omega_Z = 3 \cdot 2^2 = 12\ (s^{-1}).$$

L'accélération normale du point A on peut determiner par l'équation:

$$a_A^n = \omega^2 R = 12^2 \cdot 10 = 1440\ \text{(cm/s}^2\text{)}.$$

Réponse: $a_A^n = 1440$ (m/s²).

Problème 2.2. Le mouvement de rotation du corps solide

Le corps tourne uniformément autour de l'axe z à la vitesse angulaire $\omega = 6$ (s^{-1}).

À quel angle le corps tournera-t-il pendant le temps t =2 (s)?

Solution:

Par condition de tâche, la rotation du corps est uniforme. Par conséquent, l'angle auquel le corps tourne on peut rechercher par la formule:

$$\varphi = \omega t = 6 \cdot 2 = 12 \text{ (rad)}.$$

Réponse: $\varphi = 12$ (rad).

3. Transformation du mouvement de rotation

Dans les éléments mobiles des mécanismes, il y a souvent des transformations de mouvement:

- convertir un mouvement de rotation en un autre,
- conversion du mouvement de rotation en mouvement de translation

(et vice versa).

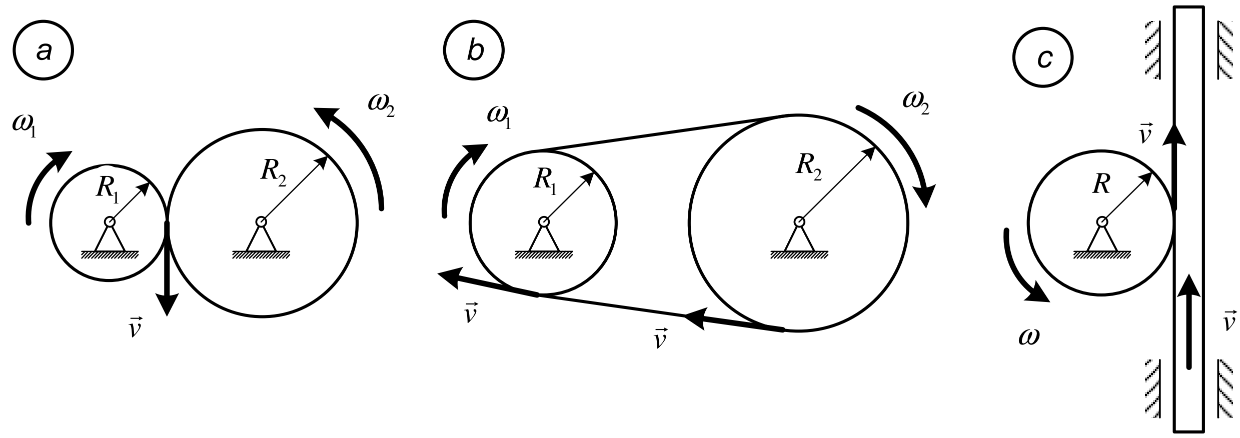

Fig.3.1

Les relations entre les vitesses de deux mouvements différents sont établies à partir de la condition de l'absence de glissement entre les corps en interaction, c'est-à-dire de la condition de l'égalité des vitesses de deux corps au point de contact.

La proportion est juste

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2},$$

Cela est dérivé de la condition que le point de contact $v_1 = v_2$ (la vitesse du point du premier corps est égale à la vitesse du point du second corps).

Problème 3.1. Transformation des mouvements du corps solide

La manivelle *A* tourne selon la loi $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}$. La manivelle *A* est rigidement reliée au disque *1*, c'est-à-dire $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi}$.

$\boldsymbol{R_4 = 48}$ (cm), $\boldsymbol{R_5 = 16}$ (cm), $\boldsymbol{z_1 = 6,\ z_2 = 24,\ z_3 = 8,\ z_4 = 32.}$

Il faut déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du lien 1, 2, 3, 4, 5.

Il faut déterminer la vitesse et l'accélération du lien *B* et du point *M* à *t*=1s.

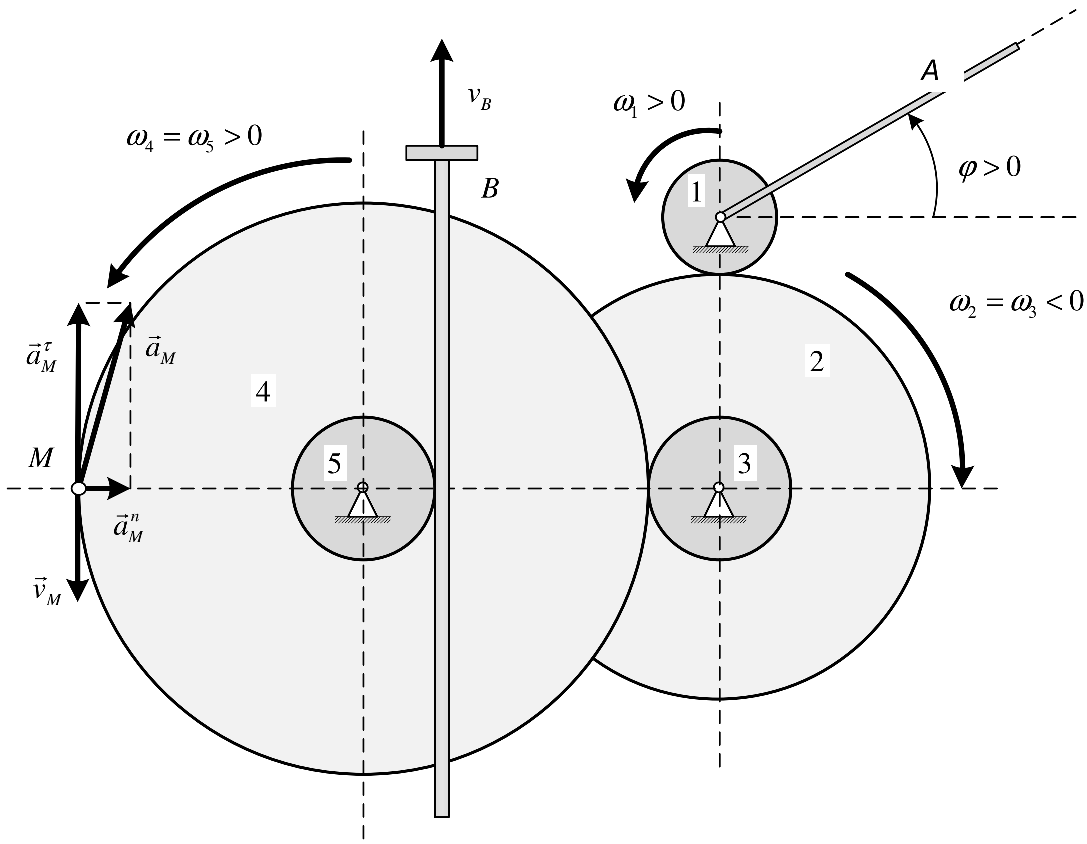

Fig.3.2

Solution:

1. Le sens de rotation positif est dans le sens antihoraire.

2. La poignée *A* est reliée au pignon 1, donc:

$$\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi = \frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)},$$

$$\boldsymbol{\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{\pi^2}{18} cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi}_1 = -\frac{\pi^3}{54} sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

3. De la condition $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{24}{6} = \mathbf{4}$ on trouve:

$$\boldsymbol{\omega_2 = -\frac{1}{4}\omega_1},$$

d'où vient:

$$\boldsymbol{\omega_2 = -\frac{1}{4}\omega_1 = -\frac{\pi^2}{72} cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = +\frac{\pi^3}{216} sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

4. Des pignons 2 et 3 sont relies:

$$\boldsymbol{\omega_3 = \omega_2 = -\frac{\pi^2}{72} cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = +\frac{\pi^3}{216} sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

5. De la condition $\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{z_4}{z_3} = \frac{32}{8} = \mathbf{4}$ on trouve:

$$\boldsymbol{\omega_4 = -\frac{1}{4}\omega_3},$$

d'où vient:

$$\boldsymbol{\omega_4 = -\frac{1}{4}\omega_3 = +\frac{\pi^2}{288}cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = -\frac{\pi^3}{864}sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

6. Des pignons 4 et 5 sont relies:

$$\boldsymbol{\omega_5 = \omega_4 = +\frac{\pi^2}{288}cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_5 = \varepsilon_4 = -\frac{\pi^3}{864}sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

7. La vitesse du rail *B* à $\boldsymbol{\omega_5 < 0}$ est nulle (il n'y a pas de mouvement vers le bas) et à $\boldsymbol{\omega_5 > 0}$ est hors de la condition:

$$\boldsymbol{v_B = \omega_5 R_5 = \frac{\pi^2}{288}cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\cdot 16 = \frac{\pi^2}{18}cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

8. L'accélération du rail *B* égale:

$$\boldsymbol{a_B = \dot{v}_B = -\frac{\pi^3}{54}sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}.$$

9. On trove la vitesse et l'accélération du rail *B* à *t*=1s:

$$\boldsymbol{v_B|_{t=1} = \frac{\pi^2}{18}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = +\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{1}{2} = 0,274} \text{ (cm/s)},$$

$$a_B\big|_{t=1} = -\frac{\pi^3}{54}sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^3}{54}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathbf{0,497} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

10. On trove la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du pignon 4 à t=1s:

$$\omega_4\big|_{t=1} = +\frac{\pi^2}{288}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = +\frac{\pi^2}{288}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{0,017} \text{ (rad/s)},$$

$$\varepsilon_4\big|_{t=1} = -\frac{\pi^3}{864}sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^3}{864}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathbf{0,031} \text{ (rad/s}^2\text{)}.$$

11. On trove la vitesse et les accélérations point M à t=1s:

$$v_{\mathrm{M}}^{\tau} = \omega_4 R_4 = \mathbf{0.017\cdot 48 = 0,816} \text{ (cm/s)},$$

$$a_{\mathrm{M}}^{\tau} = \varepsilon_4 R_4 = \mathbf{-0.031\cdot 48 = -1,488} \text{ (cm/s}^2\text{)},$$

$$a_{\mathrm{M}}^{n} = \omega_4^2 R_4 = \mathbf{0.017^2\cdot 48 = 0,0139} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

12. Le module de l'accélération du point M:

$$a_M = \sqrt{(a_{\mathrm{M}}^{\tau})^2 + (a_{\mathrm{M}}^{n})^2} = R_4\sqrt{\varepsilon_4^2 + \omega_4^4} = 48\sqrt{0,031^2 + 0,017^4} =$$

$$= \mathbf{1,488} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

<u>Réponse</u>**:** $\boldsymbol{v_B = 0,274}$(cm/s), $\boldsymbol{a_B = -0,497}$(cm/s²),$\boldsymbol{v_M = 0,816}$ (cm/s), $\boldsymbol{a_M = 1,488}$ (cm/s²).

Problème 3.2. <u>Transformation des mouvements du corps solide</u>

Les deux disques sont reliés par une transmission par courroie. Le point A de l'un des disques a la vitesse $v_A = 20$ (cm/s).

Il faut déterminer la vitesse du point *B* d'un autre disque.

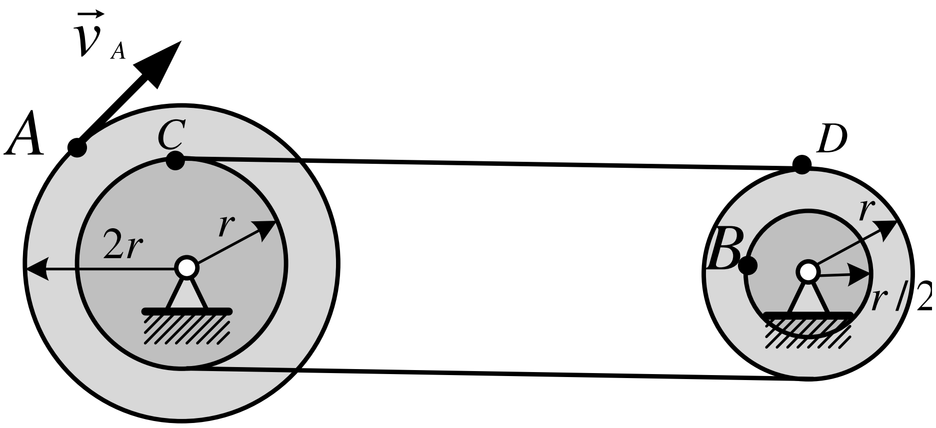

Fig.3.3

<u>Solution:</u>

1. On peut trouver la vitesse angulaire du disque gauche connaissant la vitesse du point *A*:

$$\omega_g = v_A/2r.$$

2. On détermine la vitesse du point *C* en multipliant la vitesse angulaire du disque gauche par la distance jusqu'au point *C*:

$$v_C = \omega_g \cdot r = v_A \cdot r/2r = v_A/2.$$

3. La vitesse du point *D* du droit disque est égale à la vitesse du point *C* du disque gauche:

$$v_C = v_A/2 = v_D.$$

4. On trouve la vitesse angulaire du droit disque en divisant la vitesse du point *D* par la distance à l'axe de rotation:

$$\omega_{dr} = v_D/r = v_A/2r.$$

5. On trouve la vitesse du point *B* en multipliant la vitesse angulaire du droit disque par la distance jusqu'au point *B*:

$$v_B = \omega_{dr} \cdot (r/2) = v_A \cdot (r/2)/2r = v_A/4 = 20/4 = 5 \text{ (cm/s)}.$$

Réponse: $v_B = 5$ (cm/s).

4. Mouvement plan du corps solide

On entend par **mouvement plan du corps solide** pendant lequel tous ses points se déplacent parallèlement à un plan fixe.

La vitesse d'un point du corps est la somme vectorielle de la vitesse du pôle et de la vitesse du point lors de sa rotation relative autour du pôle:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}.$$

Si on prend le centre instantané des vitesse pour pôle, la vitesse d'un point sera égale:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}.$$

Par centre instantané des vitesses on entend le point du corps, dont la vitesse à l'instant donné est égale à zéro: $v_P = 0$. Un tel point existe toujours.

La vitesse de tout point du corps est égale à sa vitesse de rotation autour du centre instantané des vitesse.

L'accélération d'un point du corps est la somme vectorielle de l'accélération du pôle et de l'accélération du point lors de sa rotation relative autour du pôle:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC} = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}^{\tau} + \vec{a}_{MC}^{n}.$$

Problème 4.1. Mouvement plan du corps solide

Il faut déterminer les vitesses et les accélérations des points *A*, *B*, *C*, *P* de la jante d'une roue de rayon *R*=1m qui roule sans glisser sur un plan horizontal.

La vitesse du centre de la roue $\boldsymbol{v_0 = 1}$ (m/s) (fig. 4.1, a). L'accélération du centre de la roue dans la direction coïncide avec la vitesse $\boldsymbol{a_0 = 1}$ (m/s^2).

Solution:

1. Détermination des vitesses

Le point de contact *P* est le centre instantané des vitesses. Par rapport au point *P*, la roue tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. On connecte le point *P* avec les points *A, B*, *C* et montre les directions des vitesses dans le sens de la rotation perpendiculaire aux segments *AP, BP, CP*. (fig. 4.1, b)

La vitesse angulaire de la roue est obtenue à partir d'une formule qui relie la vitesse angulaire à la vitesse du centre de la roue: $\boldsymbol{v_0 = \omega \cdot R}$,

d'où le résultat $\boldsymbol{\omega = \frac{v_0}{R} = 1}$ (s^{-1}).

Les modules de vitesse sont obtenus par la formule d'Euler $\boldsymbol{v_{MC} = \omega\, r_{MC}}$:

$$\boldsymbol{v_A = \omega \cdot R\sqrt{2} = \sqrt{2}} \text{ (m/s)},$$

$$\boldsymbol{v_B = \omega \cdot 2R = 2} \text{ (m/s)},$$

$$\boldsymbol{v_C = \omega \cdot R\sqrt{2} = \sqrt{2}} \text{ (m/s)}.$$

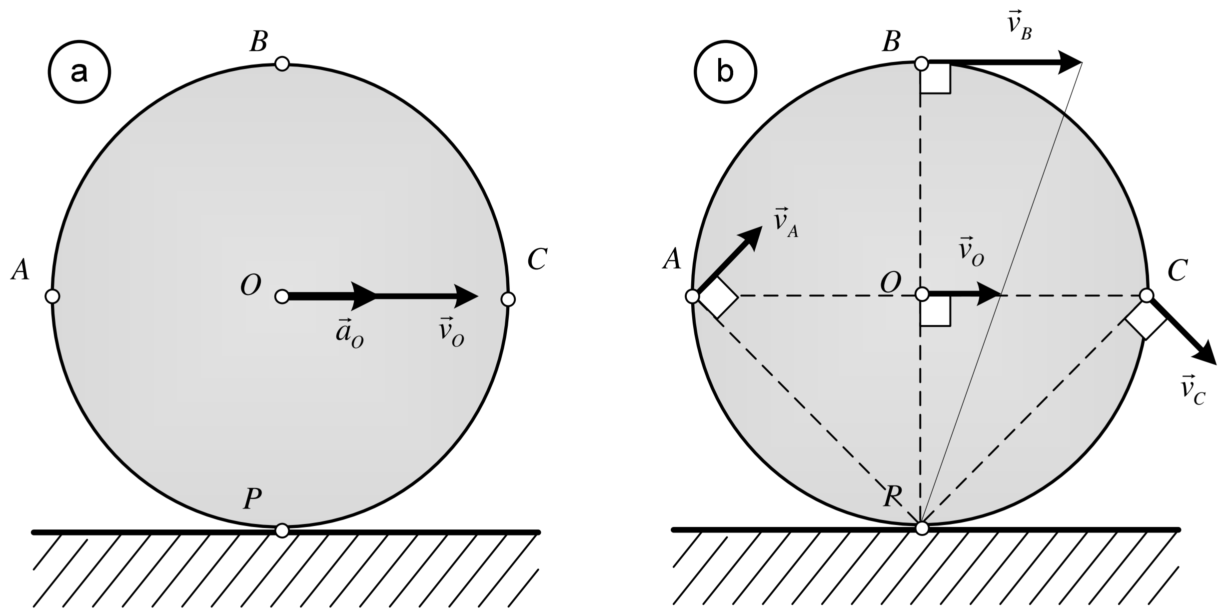

Fig.4.1

2. Détermination des accélérations

La distance de point *O* à centre instantané des vitesse (le point *P*) reste constant pour toute position de la roue. Aussi le movement du point *O* est rectiligne. Dans ce cas, l'accélération angulaire on peut trouver comme ça:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\boldsymbol{v_O}}{\boldsymbol{OP}}\right) = \frac{\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{a_O}}{\boldsymbol{R}}.$$

Àu moment donné:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{a_O}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{1}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}}{\boldsymbol{1m}} = \boldsymbol{1}\ (\mathrm{s}^{-2}).$$

Il est important de retenir que la grandeur $\boldsymbol{\varepsilon}$ n’est déterminée par cette égalité que dans le cas où la distance *OP* dans formule est constante.

On choisi le centre de la roue comme pôle (le point *O*):

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{O}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{MO}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{O}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{MO}}^{\boldsymbol{\tau}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{MO}}^{\boldsymbol{n}}.$$

Les accélérations tangentielles des points *A, B, C, P* dans la rotation de la roue par rapport au pôle *O* seront les mêmes module et dirigées perpendiculairement au rayon correspondant vers l'accélération angulaire:

$$\boldsymbol{a_{PO}^{\tau}} = \boldsymbol{a_{AO}^{\tau}} = \boldsymbol{a_{BO}^{\tau}} = \boldsymbol{a_{CO}^{\tau}} = \boldsymbol{\varepsilon \cdot R} = \mathbf{1}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2}} \cdot \mathbf{1}\boldsymbol{m} = \mathbf{1}\ \text{(m/s}^2\text{)}.$$

Les accélérations normales des points *A, B, C, P* dans la rotation de la roue par rapport au pôle *O* seront les mêmes module et dirigées vers le centre de la roue:

$$\boldsymbol{a_{PO}^{n}} = \boldsymbol{a_{AO}^{n}} = \boldsymbol{a_{BO}^{n}} = \boldsymbol{a_{CO}^{n}} = \boldsymbol{\omega^2 \cdot R} = \mathbf{1^2}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2}} \cdot \mathbf{1}\boldsymbol{m} = \mathbf{1}\ \text{(m/s}^2\text{)}.$$

En additionnant à chaque point trois vecteurs d'accélération selon la formule:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{O}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{MO}}^{\boldsymbol{\tau}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{MO}}^{\boldsymbol{n}},$$

on obtenue (fig. 4.2):

$$\boldsymbol{a_P} = \boldsymbol{a_C} = \mathbf{1}\ \text{(m/s}^2\text{)},$$

et

$$\boldsymbol{a}_{\text{A}} = \boldsymbol{a}_{\text{B}} = \sqrt{\mathbf{1^2 + 2^2}} = \sqrt{\mathbf{5}}\ \text{(m/s}^2\text{)}.$$

<u>Réponse</u>**:** $\boldsymbol{v_A} = \boldsymbol{v_C} = \sqrt{\mathbf{2}}$ (m/s), $\boldsymbol{v_B} = \mathbf{2}$ (m/s), $\boldsymbol{v_P} = \mathbf{0}$,

$\boldsymbol{a}_{\text{A}} = \boldsymbol{a}_{\text{B}} = \sqrt{\mathbf{5}}$ (m/s²), $\boldsymbol{a_C} = \boldsymbol{a_P} = \mathbf{1}$ (m/s²).

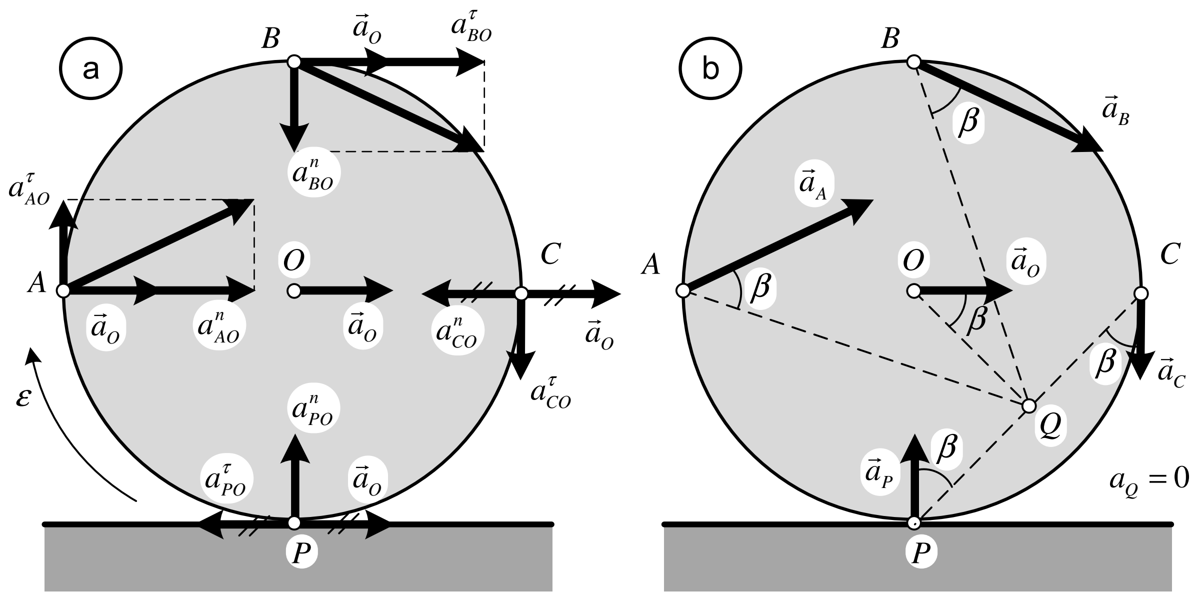

Fig.4.2

Problème 4.2. Mouvement plan du corps solide

À un moment donné, le mécanisme plan en mouvement est dans la position indiquée sur la figure. La manivelle *OA* tourne à une vitesse angulaire ω=2 (rad/s). Longueur du lien *OA*=50 (cm) (fig. 4.3).

Il faut déterminer la vitesse angulaire du lien *AD* et la vitesse des points *A* et *D*.

Solution:

1. Le mécanisme est composé de trois corps: la manivelle *OA*, la bielle *AD* et le coulisseau D.

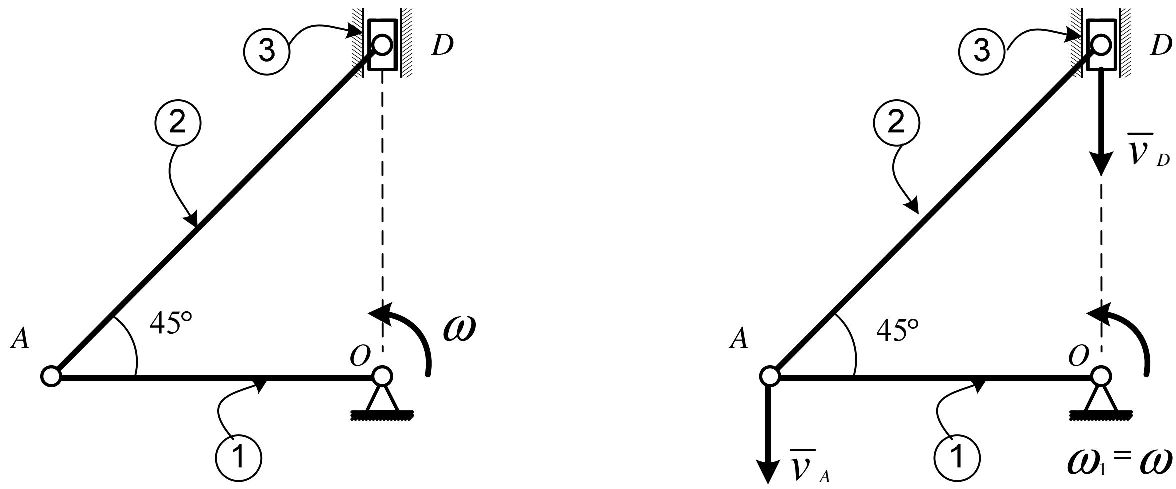

Fig.4.3

2. La manivelle *OA* (élément 1) tourne autour du point *O*.

Le centre instantané des vitesses est à un point fixe *O* de là $P_1 = O$.

La vitesse angulaire spécifiée

$$\boldsymbol{\omega_1 = \omega = 2} \text{ (rad/s).}$$

On détermine la vitesse du point *A*.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ est dirigée dans le sens de rotation perpendiculaire au segment *OA*.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v_A = \omega \cdot |OA| = 2 \cdot 50 = 100} \text{ (cm/s).}$$

3. La bielle *AD* (élément 2).

La direction de la vitesse du point *D* est déterminée par les guides du coulisseau.

Les vitesses $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}}$ sont dirigées parallèlement et perpendiculaires à ces vitesses se rejoignent à l'infiniti (le centre instantané des vitesses P_2 est à l'infini).

Par conséquent, à cet instant tous les points de la bielle *AD* possèdent la même vitesse

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} = \mathbf{1} \text{ (m/s)}.$$

Le mouvement de la bielle *AD* est instantanément.

La vitesse angulaire de la bielle est zéro:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0}.$$

<u>Réponse</u> : $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} = \mathbf{1}$ (m/s), $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$.

Problème 4.3. Mouvement plan du corps solide

À un moment donné, le mécanisme plan en mouvement est dans la position indiquée sur la figure. La manivelle *OA* tourne à une vitesse angulaire ω=2 (rad/s). Longueur du lien *OA*=50 (cm), *AB*=80 (cm), *R*=40 (cm), *r*=20 (cm). (fig. 4.4).

Il faut déterminer la vitesse angulaire du lien *AB* et la vitesse des points *A*, *B* et *C*.

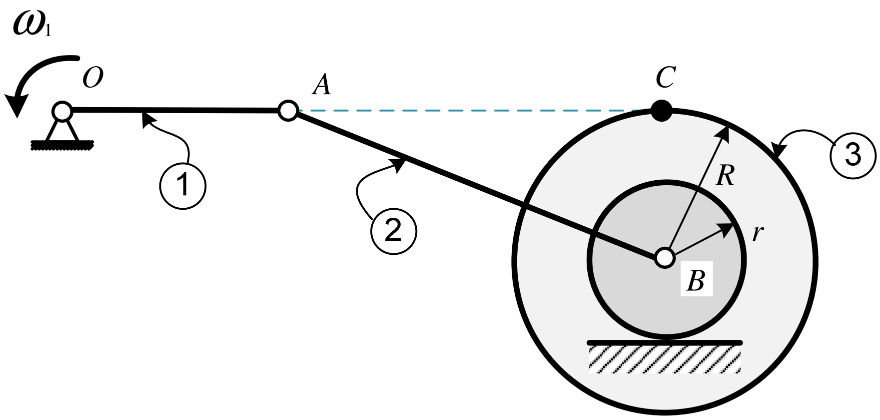

Fig.4.4

Solution:

1. Le mécanisme est composé de trois corps: la manivelle *OA*, la bielle *AB* et la roue *B*.

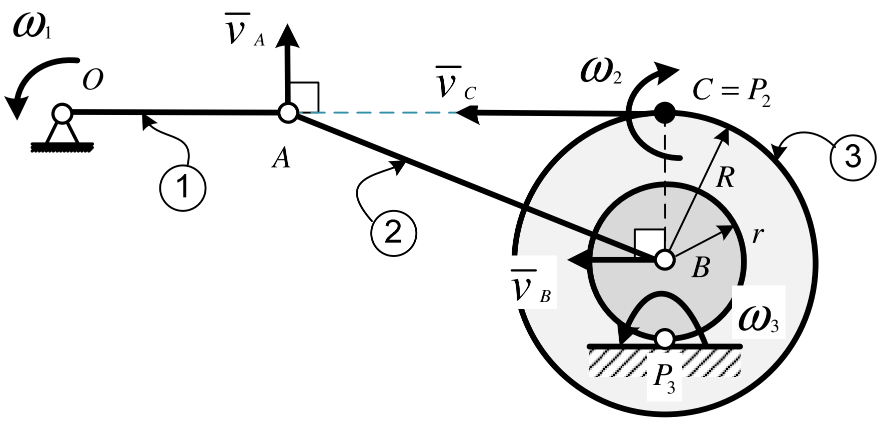

Fig.4.5

2. La manivelle *OA* (élément 1) tourne autour du point *O*.

Le centre instantané des vitesses est à un point fixe *O* de là $P_1 = O$.

La vitesse angulaire spécifiée $\boldsymbol{\omega_1 = \omega = 2}$ (rad/s).

On détermine la vitesse du point *A*.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ dirigée perpendiculairement à *OA* dans le sens de rotation.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v_A = \omega \cdot |OA| = 2 \cdot 50 = 100} \text{ (cm/s)}.$$

3. La bielle *AB* (élément 2). Mouvement plan.

De la géométrie du triangle $\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{AB}} = \frac{\boldsymbol{40}}{\boldsymbol{80}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow\ \boldsymbol{\alpha = 30^0}$.

La ligne d'action de la vitesse du point *B* est dirigée horizontalement (parallèlement au plan sur lequel la roue *B* roule). Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points *A* et *B*, on determine le centre instantané des vitesses P_2 pour la bielle *AB*. La direction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ montre que la rotation de la bielle *AB* par rapport au point P_2 est dirigée dans le sens antihoraire, par conséquent, la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$ est dirigée vers la gauche.

On trouve la vitesse angulaire de la bielle *AB*:

$$\boldsymbol{v_A = \omega_2 \cdot |AP_2|},$$

où $$\boldsymbol{AP_2 = \sqrt{AB^2 - {BP_2}^2} = \sqrt{80^2 + 40^2} = 69,3} \text{ (cm)},$$

$$\boldsymbol{\omega_2 = \frac{v_A}{|AP_2|} = \frac{100}{69{,}3} = 1,44} \text{ (rad/s)}.$$

On trouve la vitesse du point *B*:

$$\boldsymbol{v_B = \omega_2 \cdot |BP_2| = 1.44 \cdot 40 = 57,72} \text{ (cm/s)}.$$

4. La roue B (élément 3). Mouvement plan.

Le point de contact P_3 est le centre instantané des vitesses. La direction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$ montre que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega_2}$ est dirigée dans le sens antihoraire.

On détermine la vitesse angulaire:

$$\boldsymbol{v_B = \omega_3 \cdot |BP_3|},$$

$$\boldsymbol{\omega_3 = \frac{v_B}{|BP_3|} = \frac{v_B}{r} = \frac{57.72}{20} = 2,88} \text{ (rad/s).}$$

On détermine la vitesse du point C:

$$\boldsymbol{v_C = \omega_3 \cdot |\ P_3C| = \omega_3 \cdot (R + r) = 2,88 \cdot 60 = 172,80} \text{ (cm/s).}$$

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{C}}$ dirigée perpendiculairement à $\boldsymbol{P_3C}$ dans le sens de rotation.

<u>Réponse</u>: $\boldsymbol{\omega_2 = 1,44}$ (s^{-1}), $\boldsymbol{\omega_3 = 2,88}$ (s^{-1}), $\boldsymbol{v_A = 100}$(cm/s), $\boldsymbol{v_B = 57,72}$ (cm/s), $\boldsymbol{v_C = 172,80}$ (cm/s).

Problème 4.4. Mouvement plan du corps solide

À un moment donné, le mécanisme plan en mouvement est dans la position indiquée sur la figure. La manivelle OA tourne à une vitesse angulaire ω=2 (rad/s). Longueur du lien OA=AC=CB=CD=50 (cm) (fig. 4.6).

Il faut déterminer la vitesse angulaire du lien AB et CD, et la vitesse des points A, B, C et D.

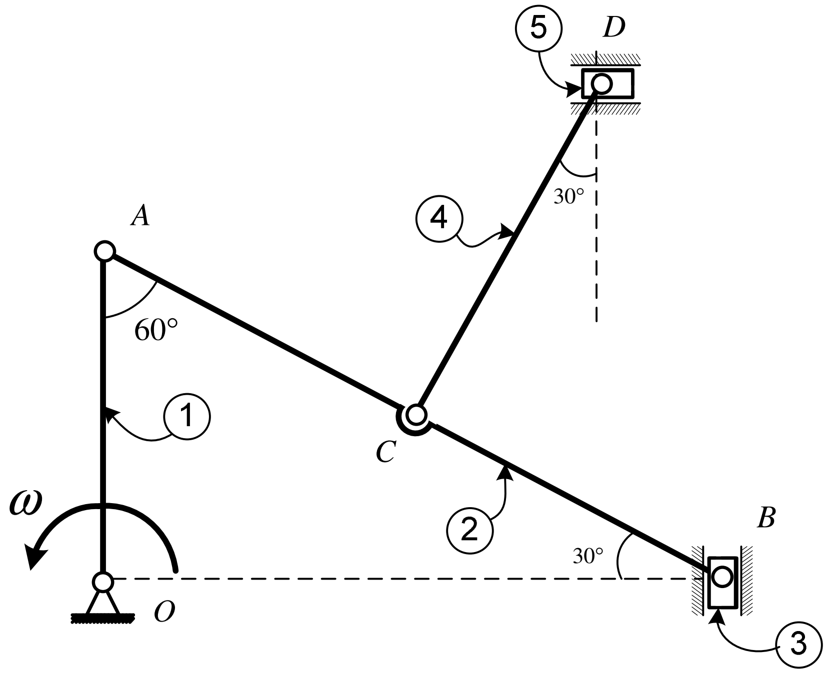

Fig.4.6

<u>Solution:</u>

1. Le mécanisme est composé de cinq corps: la manivelle *OA*, les bielles *AB, CD* et les coulisseaux *B, D*.

2. La manivelle *OA* (élément 1) tourne autour du point *O*.

Le centre instantané des vitesses est à un point fixe *O* de là $P_1=O$.

La vitesse angulaire spécifiée $\boldsymbol{\omega_1 = \omega = 2}$ (s^{-1}).

On détermine la vitesse du point *A*.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ dirigée perpendiculairement à *OA* dans le sens de rotation.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v_A = \omega \cdot |OA| = 2 \cdot 50 = 100} \text{ (cm/s)}.$$

3. La bielle *AB* (élément 2). Mouvement plan.

La direction de la vitesse du point *B* est déterminée par les guides du coulisseau.

La vitesse $\vec{v}_B$ est dirigée verticalement.

Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points *A* et *B*, on determine le centre instantané des vitesses P_2 (le point O) pour la bielle *AB*. La direction de la vitesse $\vec{v}_A$ montre que la rotation de la bielle *AB* par rapport au point P_2 est dirigée dans le sens antihoraire, par conséquent, la vitesse $\vec{v}_B$ est dirigée vers le haut.

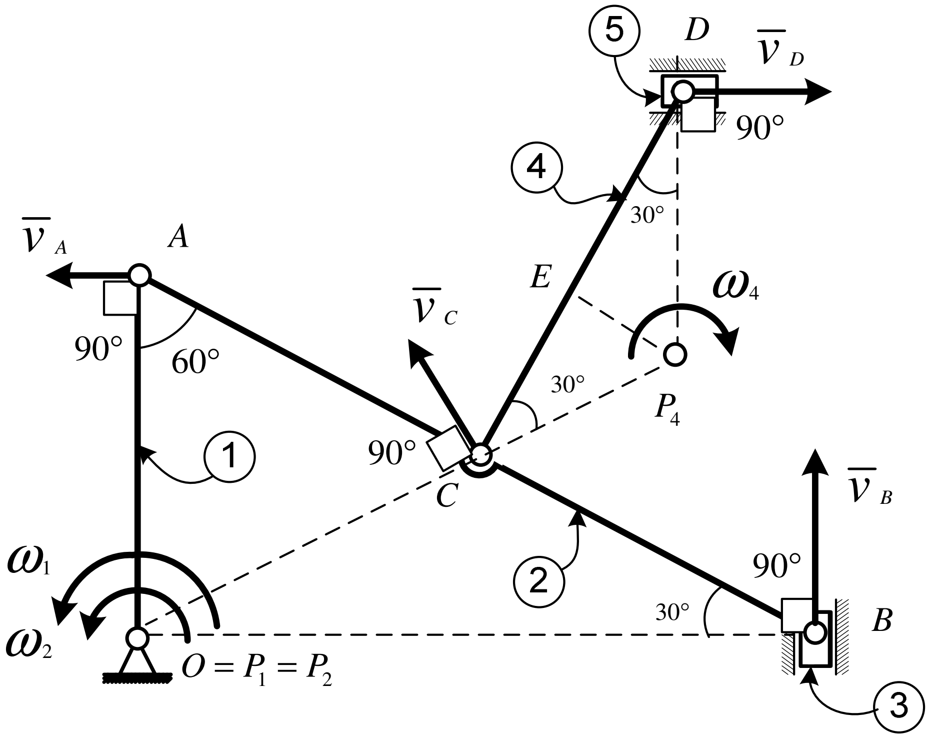

Fig.4.7

On détermine la vitesse angulaire:

$$\boldsymbol{v_A = \omega_2 \cdot |AP_2|},$$

$$\boldsymbol{\omega_2} = \frac{v_A}{|AP_2|} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{50}} = \mathbf{2}\ (\mathrm{s}^{-1}).$$

On détermine la vitesse du point *B*:

$$\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{\omega_2} \cdot |\boldsymbol{BP_2}| = \boldsymbol{\omega_2} \cdot |\boldsymbol{AB}| \cdot \boldsymbol{cos30^0} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{100} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{173}\ (\mathrm{cm/s}).$$

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{C}}$ dirigée perpendiculairement à CP_2 dans le sens de rotation de la bielle 2 par rapport au point P_2 (fig. 4.7).

De la géométrie: le triangle *ACO* est équilatéral → CP2=OA=50 (cm).

Alors

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{\omega_2} \cdot |\mathrm{C}\boldsymbol{P_2}| = \mathbf{2} \cdot \mathbf{50} = \mathbf{100}\ (\mathrm{cm/s}).$$

4. La bielle *CD* (élément 4). Mouvement plan.

La direction de la vitesse du point *D* est déterminée par les guides du coulisseau.

Le mouvement du coulisseau *D* est de translation. La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$ est dirigée horizontalement.

Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points *C* et *D*, on determine le centre instantané des vitesses P_4 pour la bielle *CD*.

Le triangle CDP_4 est isocèle: $CP_4 = DP_4$.

Il s'ensuit que les module des vitesses des points *C* et *D* sont égales:

$$\boldsymbol{v_D} = \boldsymbol{v_C} = \mathbf{100}\ (\mathrm{cm/s}).$$

La direction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{C}}$ montre que la rotation de la bielle *CD* par rapport au point P_4 est dirigée dans le sens horaire, par conséquent, la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}}$ est dirigée vers la droit.

On détermine la vitesse angulaire de la bielle 4:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{4}} \cdot |\mathrm{C}\boldsymbol{P}_{\mathbf{4}}|,$$

où $\boldsymbol{CP}_{\mathbf{4}} = \frac{\boldsymbol{CE}}{\boldsymbol{cos}\,\mathbf{30^0}} = \frac{\mathbf{25}}{\sqrt{\mathbf{3}}/\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{1{,}73}} = \mathbf{28{,}9}$ (cm),

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{4}} = \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}}{|\mathrm{C}\boldsymbol{P}_{\mathbf{4}}|} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{28{,}9}} = \mathbf{3{,}46}\ (\mathrm{s}^{-1}).$$

Réponse**:** $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$(s^{-1}), $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{4}} = \mathbf{3{,}46}$(s^{-1}), $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} = \mathbf{100}$ (cm/s), $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} = \mathbf{173}$ (cm/s).

Problème 4.5. Mouvement plan du corps solide

À un moment donné, le mécanisme plan en mouvement est dans la position indiquée sur la figure. La manivelle *OA* tourne à une vitesse angulaire ω=2 (rad/s). Longueur du lien *OA*=*AC*=*CB*=50 (cm) (fig. 4.8).

Il faut déterminer la vitesse angulaire du lien *AB* et *CD*, et la vitesse des points *A*, *B*, *C* et *D*.

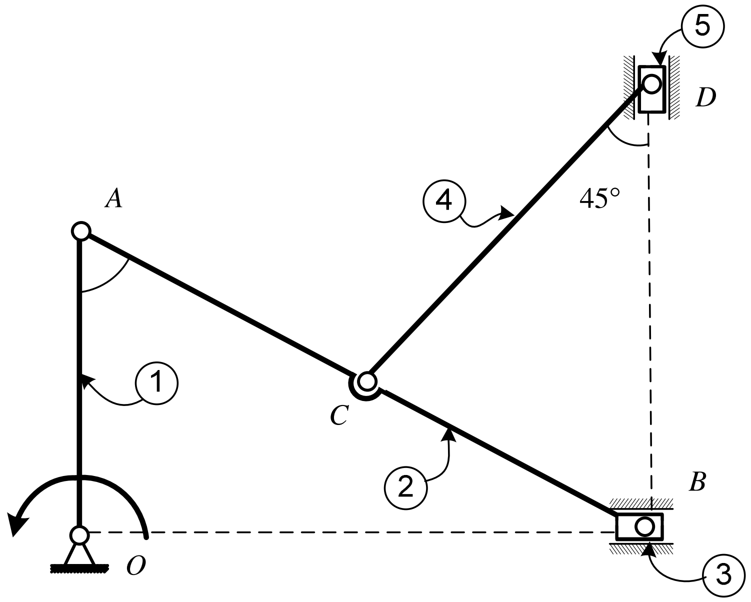

Fig.4.8

Solution:

1. Le mécanisme est composé de cinq corps: la manivelle *OA*, les bielles *AB*, *CD* et les coulisseaux *B, D* (fig. 4.9).

2. La manivelle *OA* (élément 1) tourne autour du point *O*.

Le centre instantané des vitesses est à un point fixe *O* de là $P_1=O$.

La vitesse angulaire spécifiée $\boldsymbol{\omega_1 = \omega = 2}$ (s^{-1}).

On détermine la vitesse du point *A*.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ dirigée perpendiculairement à *OA* dans le sens de rotation.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v_A = \omega \cdot |OA| = 2 \cdot 50 = 100} \text{ (cm/s).}$$

3. La bielle *AB* (élément 2). Mouvement plan.

La direction de la vitesse du point *B* est déterminée par les guides du coulisseau.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$ est dirigée horizontalement. Les vitesses $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$ sont dirigées parallèlement et les perpendiculaires à ces vitesses se rejoignent à l'infini. Par conséquent, à cet instant tous les points de la bielle *AB* possèdent la même vitesse, égale à $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{C}}$$

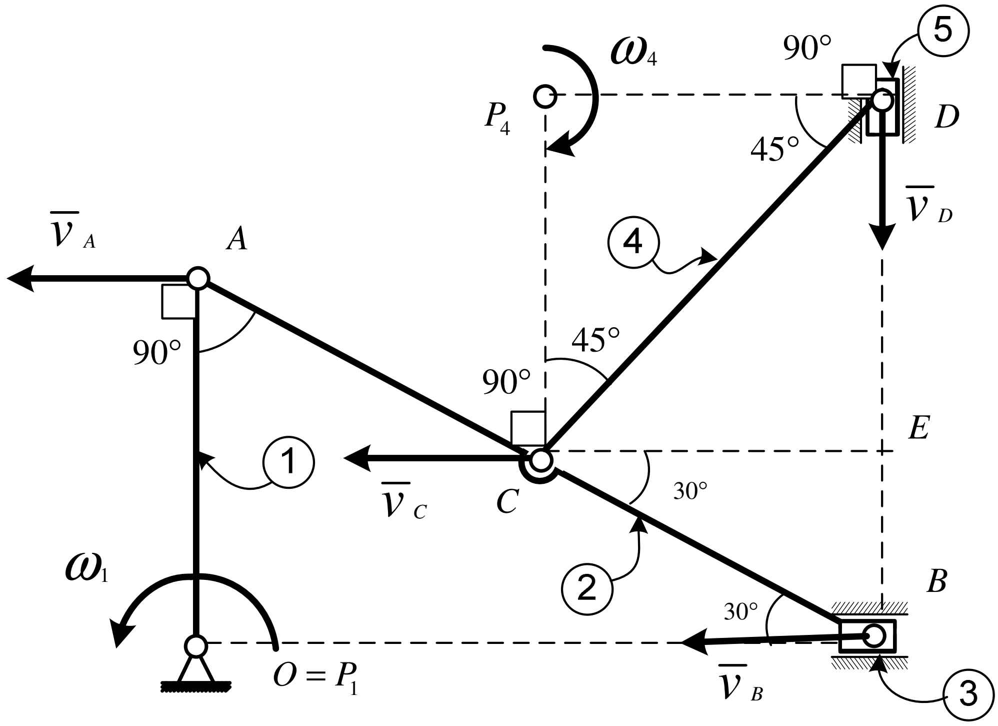

Fig.4.9

4. La bielle *CD* (élément 4). Mouvement plan.

La direction de la vitesse du point *D* est déterminée par les guides du coulisseau.

Le mouvement du coulisseau *D* est de translation. La vitesse $\vec{v}_D$ est dirigée verticalement.

Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points *C* et *D*, on determine le centre instantané des vitesses P_4 pour la bielle *CD*.

De la géométrie: la figure $CEDP_4$ est un carré avec un côté.

$$\boldsymbol{CE = CB \cdot cos30^0 = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} = 43,3} \text{ (cm).}$$

Alors,

$$CP_4 = DP_4 = 43,3 \text{ (cm).}$$

La direction de la vitesse $\vec{v}_C$ montre que la rotation de la bielle *CD* par rapport au point P_4 est dirigée dans le sens horaire, par conséquent, la vitesse $\vec{v}_D$ est dirigée vers le bas.

On détermine la vitesse angulaire de la bielle 4:

$$v_C = \omega_4 \cdot |CP_4|,$$

$$\omega_4 = \frac{v_C}{|CP_4|} = \frac{100}{43{,}3} = 2{,}31 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

On détermine la vitesse du point *B*:

Comme $CP_4 = DP_4$, il s'ensuit que les module des vitesses des points *C* et *D* sont égales:

$$v_D = v_C = \omega_4 \cdot |CP_4| = \omega_4 \cdot |DP_4| = 100 \text{ (cm/s)}.$$

<u>Réponse</u>**:** $\omega_2 = 0$ (s^{-1}), $\omega_4 = 2{,}31$ (s^{-1}), $v_A = v_B = v_C = v_D = 100$(cm/s).

Problème 4.6. Mouvement plan du corps solide

À un moment donné, le mécanisme plan en mouvement est dans la position indiquée sur la figure. La manivelle *OA* tourne à une vitesse angulaire ω=2 (rad/s). Longueur du lien *OA*=*AD*=50 (cm), *a*=25 (cm), *R*=20 (cm). (fig. 4.10).

Il faut déterminer la vitesse angulaire du lien *AB*, *BC*, de la roue *D*, la vitesse du coulisseau *C* et la vitesse des points *A*, *D*, *E* et *F*.

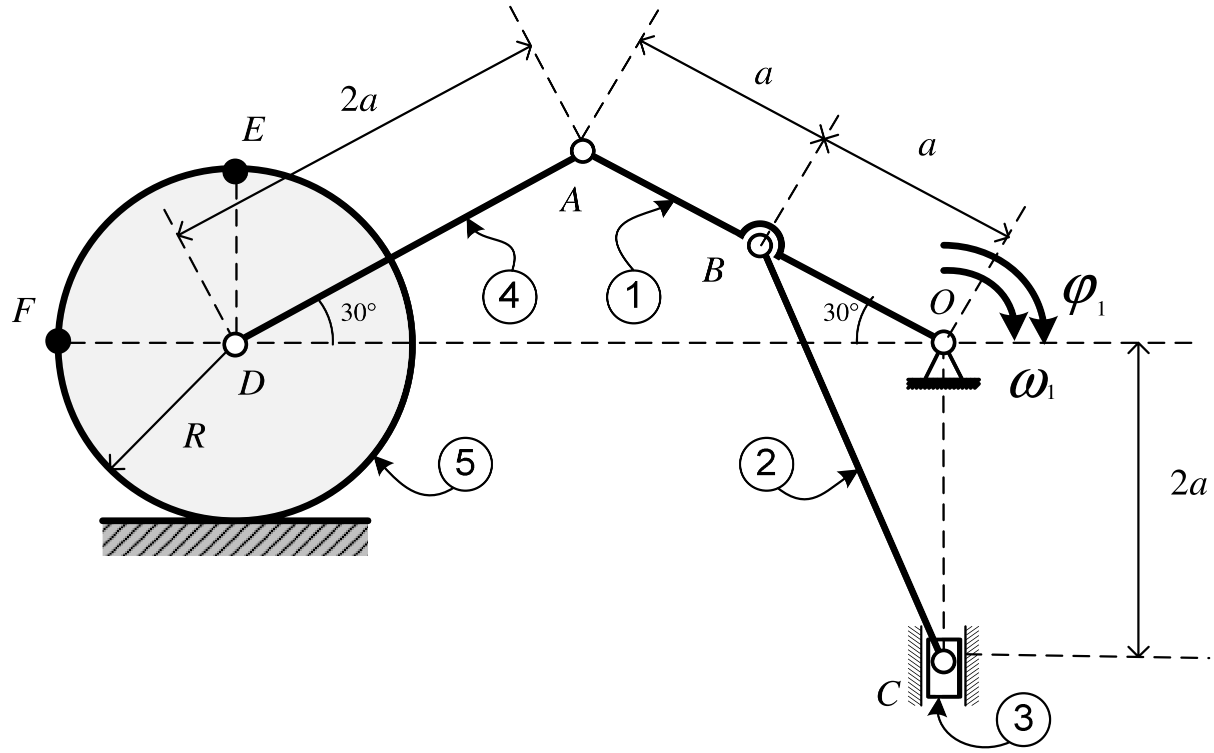

Fig.4.10

Solution:

1. Le mécanisme est composé de cinq corps: la manivelle *OA*, les bielles *AD* et *BC*, le coulisseau *C* et la roue *D* (fig. 4.11).

2. La manivelle *OA* (élément 1) tourne autour du point *O*.

Le centre instantané des vitesses est à un point fixe *O* de là $P_1=O$.

La vitesse angulaire spécifiée $\boldsymbol{\omega_1 = \omega = 2}$ (s^{-1}).

On détermine la vitesse du point *A*.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ dirigée perpendiculairement à *OA* dans le sens de rotation.

Le module de la vitesse:

$$v_A = \omega \cdot |OA| = 2 \cdot 50 = 100 \text{ (cm/s)}.$$

La vitesse $\vec{v}_A$ aussi dirigée perpendiculairement à *OA* dans le sens de rotation.

Le module de la vitesse du point *B*:

$$v_B = \omega \cdot |OB| = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (cm/s)}.$$

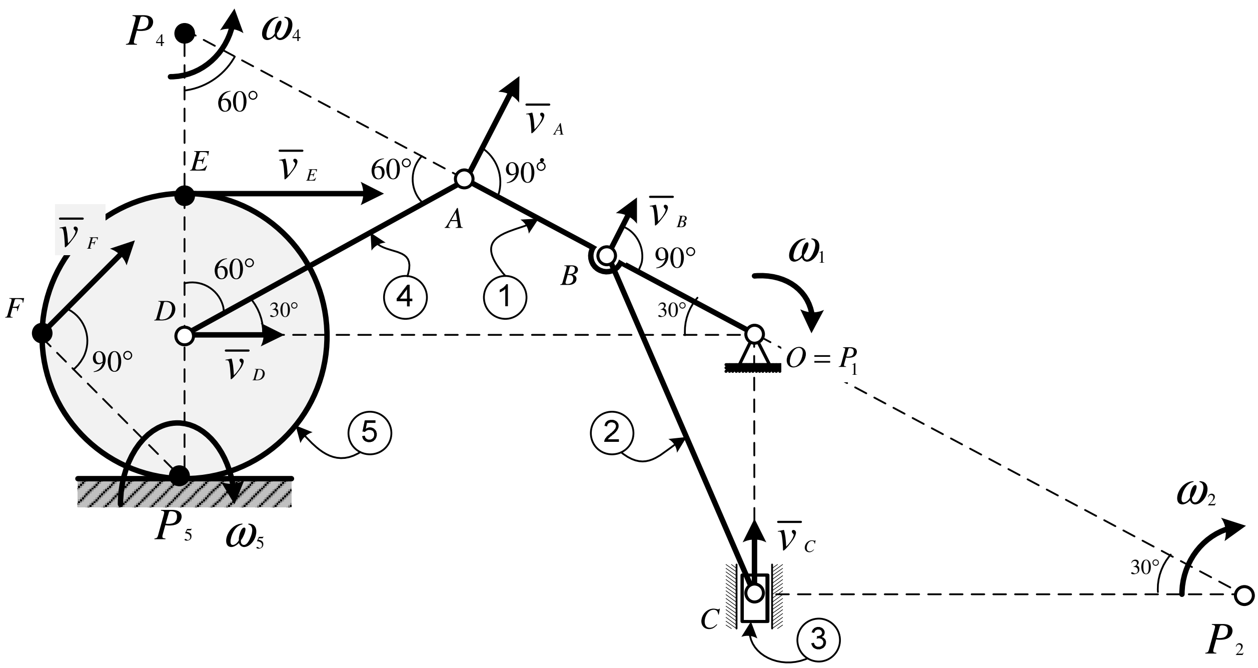

Fig.4.11

3. La bielle *BC* (élément 2). Mouvement plan.

La direction de la vitesse du point *C* est déterminée par les guides du coulisseau.

Le mouvement du coulisseau *C* est de translation. La vitesse $\vec{v}_C$ est dirigée verticalement.

Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points B et C, on determine le centre instantané des vitesses P_2 pour la bielle BC.

La direction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$ montre que la rotation de la bielle BC par rapport au point P_2 est dirigée dans le sens horaire, par conséquent, la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{C}}$ est dirigée vers le haut.

On détermine la vitesse angulaire de la bielle 2:

$$\boldsymbol{v_B = \omega_2 \cdot |BP_2|}.$$

On trouve la longueur du segment BP_2.

$$\boldsymbol{\frac{CO}{OP_2} = sin\,30^0 = \frac{1}{2}},$$

$$\boldsymbol{OP_2 = 2 \cdot CO = 4a = 100} \text{ (cm)},$$

$$\boldsymbol{BP_2 = BO + OP_2 = a + 4a = 125} \text{ (cm)}.$$

Alors

$$\boldsymbol{\omega_2 = \frac{v_B}{|BP_2|} = \frac{50}{125} = 0,4} \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

On détermine la vitesse du point C:

$$\boldsymbol{v_C = \omega_2 \cdot |CP_2| = 0,4 \cdot 86.6 = 34,64} \text{ (cm/s)},$$

où $\boldsymbol{\frac{CP_2}{OP_2} = cos\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$$\boldsymbol{CP_2 = OP_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50 \cdot \sqrt{3} = 86,6} \text{ (cm)}.$$

4. La bielle AD (élément 4). Mouvement plan.

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}}$ est dirigée horizontalement (déterminée par le mouvement du centre de la roue).

Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points *A* et *D*, on determine le centre instantané des vitesses P_4 pour la bielle *AD*.

De la géométrie: le triangle ADP_4 est équilatéral → $AP_4 = DP_4$.

Il s'ensuit que les module des vitesses des points *A* et *D* sont égales:

$$\boldsymbol{v_D = v_A = 100} \text{ (cm/s).}$$

La direction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ montre que la rotation de la bielle *AD* par rapport au point P_4 est dirigée dans le sens antihoraire, par conséquent, la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}}$ est dirigée vers la droit.

On détermine la vitesse angulaire de la bielle 4:

$$\boldsymbol{v_A = \omega_4 \cdot |AP_4|},$$

$$\boldsymbol{\omega_4 = \frac{v_A}{|AP_4|} = \frac{100}{50} = 2,0} \text{ (s}^{-1}\text{).}$$

5. La roue *D* (élément 5). Mouvement plan.

Le point de contact P_5 est le centre instantané des vitesses.

La direction de la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}}$ montre que la rotation de la roue *D* par rapport au point P_5 est dirigée dans le sens horaire.

On détermine la vitesse angulaire:

$$\boldsymbol{\omega_5 = \frac{v_D}{|DP_5|} = \frac{v_D}{R} = \frac{100}{20} = 5,0} \text{ (s}^{-1}\text{).}$$

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{E}}$ dirigée perpendiculairement à P_5E dans le sens de rotation de la roue.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v_E = \omega_5 \cdot |EP_5| = \omega_5 \cdot 2R = 5 \cdot 40 = 200} \text{ (cm/s).}$$

La vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{F}}$ dirigée perpendiculairement à P_5F dans le sens de rotation de la roue.

Le module de la vitesse:

$$\boldsymbol{v_F = \omega_5 \cdot |FP_5| = \omega_5 \cdot \sqrt{R^2 + R^2} = \omega_5 \cdot R\sqrt{2} = 5 \cdot 20 \cdot \sqrt{2} =}$$

$$\boldsymbol{= 141,42} \text{ (cm/s).}$$

<u>Réponse</u>: $\boldsymbol{\omega_2 = 0,4}$ (s^{-1}), $\boldsymbol{\omega_4 = 2}$ (s^{-1}), $\boldsymbol{\omega_5 = 5}$ (s^{-1})

$\boldsymbol{v_A = v_D = 100}$ (cm/s), $\boldsymbol{v_C = 34,64}$(cm/s) $\boldsymbol{v_B = 50}$, (cm/s),

$\boldsymbol{v_E = 200}$ (cm/s), $\boldsymbol{v_F = 141,42}$ (cm/s).

5. Mouvement composé du point

Un mouvement composé du point est appelé un tel mouvement de point, qui est considéré simultanément dans deux systèmes de référence.

On examine le mouvement du point simultanément par raport à deux systèmes de référence, dont l'un est considéré conventionnellement comme fixe (système de référence fixe), tandis que l'autre se déplace de façon déterminée par rapport au premier (système de référence mobile).

Dans de tels cas, on peut distinguer trois types de mouvement: relatif, d'entraînement et absolu.

Le mouvement du point par rapport au système de référence fixe est appelé **le mouvement absolu ou composé**. Les caractéristiques du mouvement absolu sont la vitesse absolue $\vec{v}_a$ et l'accélération absolue $\vec{a}_a$, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un système de coordonnées fixe. Ils sont indiqués par l'indice «a».

Le mouvement du point par rapport aux axes de coordonnées mobiles est appelé **le mouvement relatif**. Les caractéristiques du mouvement absolu sont la vitesse relative $\vec{v}_r$ et l'accélération relative $\vec{a}_r$, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un système de coordonnées. Ils sont indiqués par l'indice «r».

Le mouvement du système de coordonnées mobile par rapport au système fixe est **le mouvement d'entraînement** pour le point. Dans un système de coordonnées mobile, la position du point M change tout le temps. La vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ et l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ sont la vitesse et l'accélération du point du système de coordonnées mobile avec lequel le point mobile coïncide actuellement. Ils sont indiqués par l'indice «e».

La tâche principale est de trouver les caractéristiques cinématiques du mouvement absolu à partir des caractéristiques connues des mouvements relatifs et d'entraînement.

La vitesse absolue du point:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

La vitesse absolue du point est égale à la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

L'accélération absolue du point:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor},$$

où $\vec{a}_{cor}$ – l'accélération Coriolis.

L'accélération absolue du point est égale à la somme de trois accélérations: l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération Coriolis.

L'accélération de Coriolis:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

L'accélération Coriolis du point est égale au double produit vectoriel de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement par la vitesse relative du point.

Le module d'accélération Coriolis est égal à:

$$a_{cor} = 2\,\omega_e\,v_r\,sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r).$$

La direction de l'accélération Coriolis est déterminée par <u>la règle de Joukovski</u>:

Pour obtenir la direction de l'accélération Coriolis, il faut:

projeter le vecteur de vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d'entraînement;

tourner la projection résultante de 90^0 dans le sens de la rotation.

Problème 5.1. Mouvement composé du point

Une balle A se déplace selon la loi $OA=5t^2$ (m) dans un tube tournant selon la loi $\varphi=4t$ (rad) autour de l'axe Oz (fig. 5.1).

Il faut déterminer la coordonnée x_A (m) de la balle à l'Instant $t=0,25$ (s).

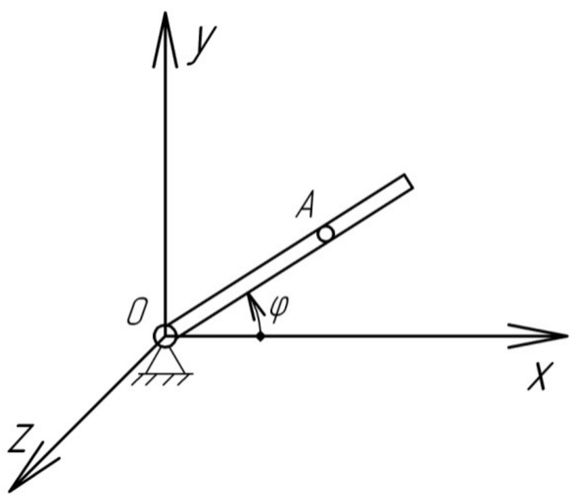

Fig. 5.1

Solution:

La balle participe à un mouvement composé: le mouvement de la balle dans le tube est un mouvement relatif; la rotation de la balle avec le tube est un mouvement d'entraînement.

Pour $t = 5$s:

$$\varphi = 4t|_{t=0,25} = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ (rad)},$$

$$OA = 5t^2|_{t=0,25} = 5 \cdot 0,25^2 = 0,3125 \text{ (m)}.$$

$\varphi = 1$ (rad) – l'angle auquel le tube a tourné en 0,25 seconde de sa position initiale (l'axe *Ox*) – le mouvement d'entraînement.

$OA = 0,3125$ (m) – la distance qui a surmonté la balle dans le tube pendant le même temps, se déplaçant du point O – le mouvement relatif.

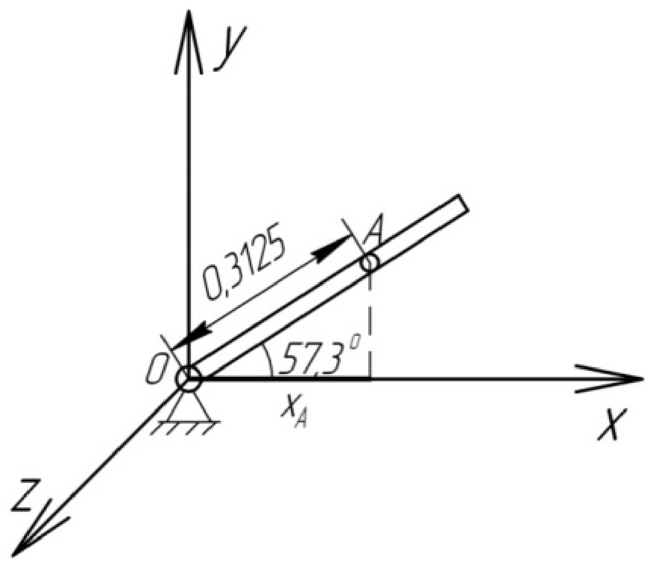

Fig. 5.2

La figure 5.2 montre que la projection OA sur l'axe Ox est la coordonnée x_A:

$$x_A = OA \cdot cos57{,}3^0 = 0{,}3125 \cdot cos57{,}3^0 = 0{,}17 \text{ (m)},$$

où l'angle $57{,}3^0$ – angle φ converti du radian en degrés:

$$180^o \cdot 1/\pi = 57{,}3^o.$$

Réponse: $x_A = 0{,}17$ (m).

Problème 5.2. Mouvement composé du point

Une plaque horizontale ronde de rayon R tourne autour d'un axe vertical passant par son centre selon la loi $\varphi_e = \frac{\pi}{4} t$ (rad). Un point M se déplace le long de la jante de la plaque selon la loi $OM = 3t$ (m).

Il faut déterminer l'accélération Coriolis.

Solution:

Le mouvement relatif est le mouvement du point M sur la jante de la plaque par la loi $OM = 3t$ (m).

La vitesse relative du point est tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement (fig. 5.3), et sa module égale à:

$$v_r = \dot{OM} = (3t)' = 3 \text{ (m/s)}.$$

Le mouvement d'entraînement est la rotation d'une plaque horizontale ronde autour d'un axe vertical selon la loi $\varphi_e = \frac{\pi}{4}t$ (rad). La vitesse angulaire est égale à la dérivée temporelle de l'angle de rotation (fig. 5.3):

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = (\frac{\pi}{4}t)' = \frac{\pi}{4} \text{ (rad/s)}.$$

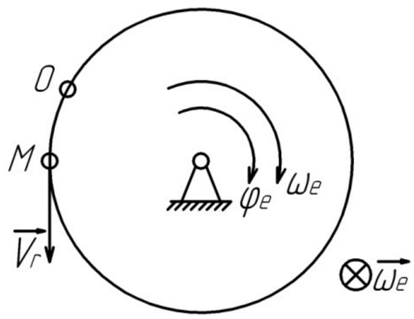

Fig. 5.3

Le vecteur de vitesse angulaire situé sur l'axe de rotation est dirigé dans la direction d'où la rotation du corps est visible dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 5.4).

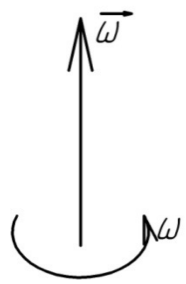

Fig. 5.4

Le vecteur $\bar{v}_r$ se trouve dans le plan du disque et $\bar{\omega}_e$ est perpendiculaire à ce plan, donc l'angle entre le vecteur de vitesse relative du point et le vecteur de vitesse angulaire d'entraînement est 90^0.

Le module d'accélération Coriolis est égal à:

$$a_{cor} = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 3 \cdot \sin 90^0 = \frac{3\pi}{2} \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

<u>Réponse</u>: $a_{cor} = \frac{3\pi}{2}$ (m/s²).

Problème 5.3. Mouvement composé du point

Une plaque rectangulaire tourne autour d'un axe vertical selon la loi $\varphi_e = \frac{\pi}{3}t$ (rad). Un point se déplace sur l'un des côtés de la plaque, selon la loi $OM = 2t$ (m).

Il faut déterminer l'accélération Coriolis.

<u>Solution:</u>

Le mouvement relatif est le mouvement du point *M* sur le côté de la plaque rectangulaire selon la loi $OM = 2t$ (m). La vitesse relative du point est tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement (fig. 5.5), et sa module égale à:

$$v_r = \dot{OM} = 2 \text{ (m/s)}.$$

Le mouvement d'entraînement est la rotation d'une plaque rectangulaire autour d'un axe vertical selon la loi $\varphi_e = \frac{\pi}{3}t$ (rad). La vitesse angulaire est égale à la dérivée temporelle de l'angle de rotation (fig. 5.5):

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = \frac{\pi}{3} \text{ (rad/s)}.$$

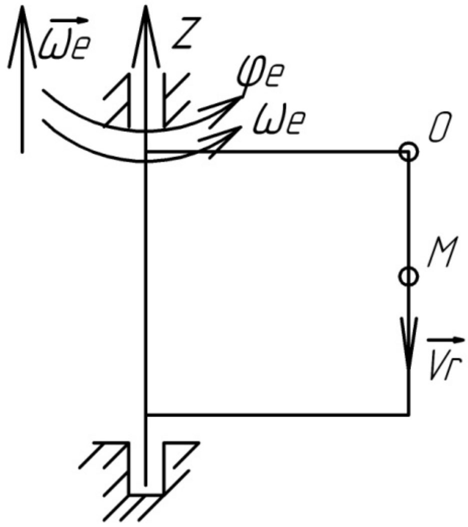

Fig. 5.5

Le vecteur de vitesse angulaire situé sur l'axe de rotation est dirigé dans la direction d'où la rotation du corps est visible dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 5.4).

Les vecteurs $\vec{v}_r$ et $\vec{\omega}_e$ se trouvent dans le même plan, parallèles et orientés dans des directions différentes, donc l'angle entre le vecteur de vitesse relative du point et le vecteur de vitesse angulaire d'entraînement est 180^0.

Le module d'accélération Coriolis est égal à:

$$a_{cor} = 2\omega_e v_r \, sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot sin180^0 = 0 \ \text{(m/s}^2\text{)}.$$

<u>Réponse</u>: $a_{cor} = 0$ (m/s^2).

Problème 5.4. Mouvement composé du point

Une plaque rectangulaire tourne autour d'un axe vertical selon la loi $\varphi_e = 5t$ (rad). Un point se déplace le long de la diagonale de la plaque selon la loi $OM = 4t + 3$ (m).

Il faut déterminer l'accélération Coriolis.

Solution:

Le mouvement relatif est le mouvement du point M sur le long de la diagonale de la plaque rectangulaire selon la loi $OM = 4t + 3$ (m). La vitesse relative du point est tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement (fig. 5.6), et sa module égale à:

$$v_r = \dot{OM} = 4 \text{ (m/s)}.$$

Le mouvement d'entraînement est la rotation de la plaque rectangulaire autour de l'axe vertical selon la loi $\varphi_e = \frac{\pi}{3}t$ (rad). La vitesse angulaire est égale à la dérivée temporelle de l'angle de rotation (fig. 5.6):

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 5 \text{ (rad/s)}.$$

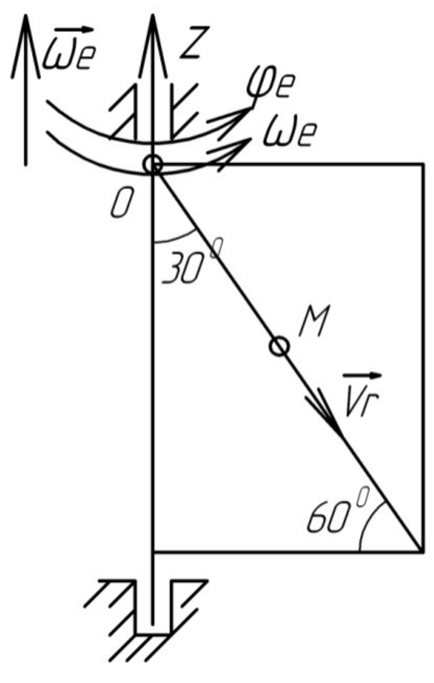

Fig. 5.6

Le vecteur de vitesse angulaire situé sur l'axe de rotation est dirigé dans la direction d'où la rotation du corps est visible dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 5.4).

Les vecteurs $\vec{v}_r$ et $\vec{\omega}_e$ se trouvent dans le même plan et l'angle entre les vecteurs de vitesse relative du point et le vecteur de vitesse angulaire d'entraînement est 150^0 (fig. 5.6).

$$a_{cor} = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 150^0 = 20 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Réponse: $a_{cor} = 20$ (m/s^2).

Problème 5.5. Mouvement composé du point

Une plate-forme ronde tourne autour d'un point O selon la loi $\varphi = 0{,}1t^2$ (rad). Un point M se déplace le long du rayon de la plate-forme selon la loi $s = |OM| = 0{,}2t^2$ (m) (fig. 5.7).

Il faut déterminer la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M à l'instant $t = 5$ (s).

Solution:

La rotation de la plate-forme par rapport au Sol est un mouvement d'entraînement et le déplacement du point M par rapport à la plate-forme est un mouvement relatif. Le mouvement absolu est le mouvement du point M par rapport au Sol.

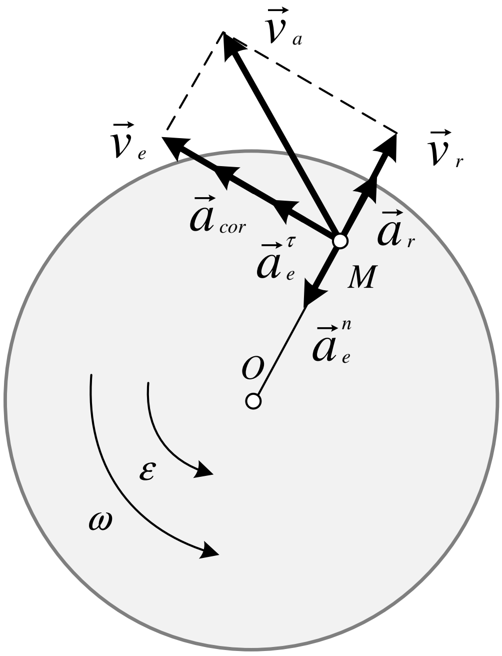

Fig. 5.7

1. On détermine la position du point M au moment considéré en calculant la distance de celui-ci à l'axe de rotation:

Pour $t = 5$s:

$$|OM| = s|_{t=5s} = 0{,}2 \cdot 5^2 = 5 \text{ (m).}$$

2. On détermine la vitesse du point:

La vitesse relative du point est égale à:

$$v_r = \dot{s}|_{t=5s} = 0{,}4t|_{t=5s} = 2 \text{ (m/s).}$$

La vitesse angulaire de rotation de la plate-forme est la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement:

$$\omega_e = \dot{\varphi}|_{t=5s} = 0{,}2t|_{t=5s} = 1 \text{ (rad/s).}$$

La vitesse d’entraînement du point est la vitesse du point auquel celui se trouve à un moment donné . La vitesse est dirigée perpendiculairement au rayon de la plate-forme et module égale à:

$$v_e = \omega_e |OM| = 1 \cdot 5 = 5 \text{ (m/s)}.$$

La vitesse absolue du point est égale à la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d’entraînement:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Le module de la vitesse:

$$v_a = \sqrt{{v_r}^2 + {v_e}^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5{,}4 \text{ (m/s)}.$$

3. On determine l'accélération du point:

Le mouvement relatif du point est rectiligne, donc son accélération relative est l'accélération tangente:

$$a_r = \dot{v}_r = 0{,}4 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

L'accélération d’entraînement du point est l'accélération du point de la plate-forme où il se trouve à un moment donné. L'accélération est composée d'accélérations tangetielle et normale:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}.$$

L’accélération tangetielle:

$$a_e^{\tau} = \varepsilon \cdot |\mathrm{OM}| = 0{,}2 \cdot 5 = 1 \text{ (m/s}^2\text{)},$$

où $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d(0.2t)}{dt} = 0{,}2 \text{ (rad/s}^2\text{)}.$

L'accélération normale:

$$a_e^n = \omega^2 \cdot |OM| = 1^2 \cdot 5 = 5 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Le module d'accélération Coriolis est égal à:

$$a_{cor} = 2\ \omega_e\ v_r\ sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2\ \omega_e\ v_r\ sin\,90^0 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

La direction de l'accélération Coriolis est déterminée par la règle de Joukovski, en tournant le vecteur de vitesse relative de 90^0 au cours de la rotation.

On additionne vectoriellement toutes les accélérations et on trouve l'accélération absolue du point:

$$a_a = \sqrt{(a_{cor} + a_e^\tau)^2 + (a_e^n - a_r)^2} = \sqrt{(4+1)^2 + (5-0{,}4)^2} =$$

$$= 6{,}8 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

<u>Réponse</u>: $v_a = 5{,}4$ (m/s), $a_a = 6{,}8$ (m/s^2).

Problème 5.6. Mouvement composé du point

La plaque carrée ($\boldsymbol{2a} \times \boldsymbol{2a}$, a = 10 cm) tourne autour de l'axe vertical selon la loi $\varphi = -4t^2$ (rad). Le point M se déplace sur la diagonale de la plaque, selon la loi $s = a\sqrt{2}\,sin\frac{\pi t}{3}$ (cm). Position initiale du point *M* dans le point *O* (fig. 5.8).

Il faut déterminer la position du point *M* à l'instant $t_1 = 0{,}5$ (s). Il faut trouver la vitesse absolue et l'accélération absolue du point *M*.

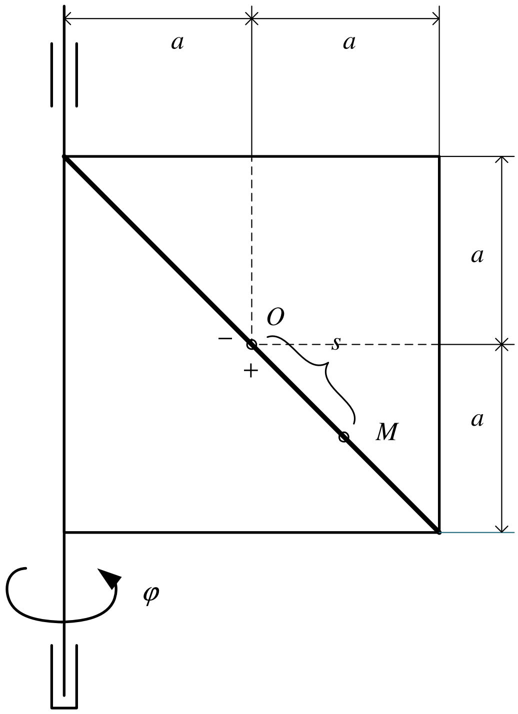

Fig. 5.8

<u>Solution:</u>

La rotation de la plaque par rapport au Sol est un mouvement d'entraînement et le déplacement du point *M* par rapport à la plaque est un mouvement relatif. Le mouvement absolu est le mouvement du point *M* par rapport au Sol.

1. Mouvement relatif

On considère le mouvement relatif en arrêtant mentalement la rotation de la plaque (fig. 5.9).

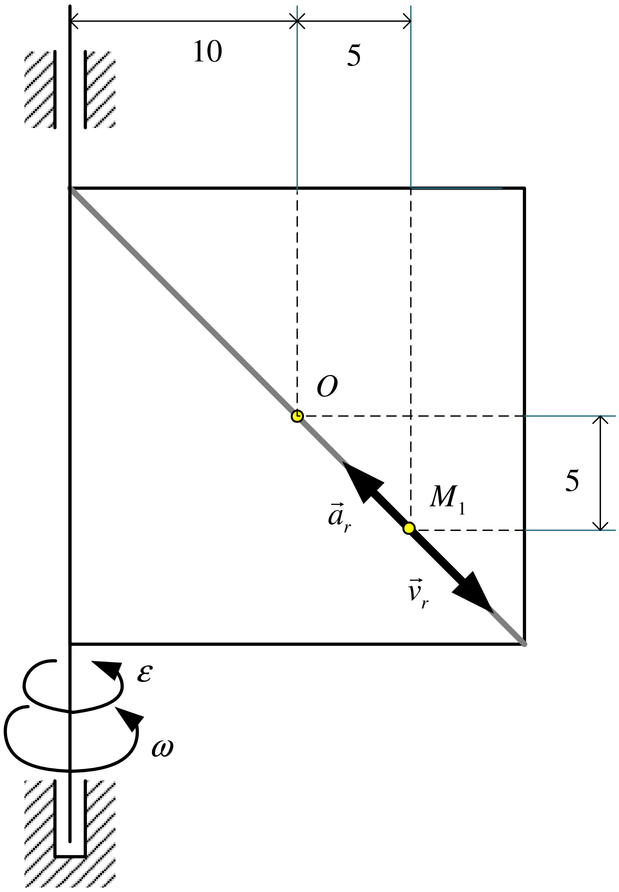

Fig. 5.9

On détermine la position du point M au moment considéré:

Pour $t = 0{,}5$s:

$$s|_{t=0,5s} = 10\sqrt{2}\, sin\frac{\pi}{6} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

La position du point *M₁* sur la figure 5.9.

La vitesse relative du point est égale à:

$$v_r^\tau = \dot{s} = \frac{a\pi\sqrt{2}}{3}\, cos\frac{\pi t}{3},$$

pour $t = 0{,}5$s:

$$v_r^\tau = \frac{a\pi\sqrt{2}}{3} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{a\pi}{\sqrt{6}} = 12{,}82 \text{ (cm/s)}.$$

Le mouvement relatif du point est rectiligne, donc son accélération relative est l'accélération tangente:

$$a_r^\tau = \dot{v}_r^\tau = \ddot{s} = -\frac{a\pi^2\sqrt{2}}{9} \sin\frac{\pi t}{3},$$

pour $t = 0{,}5$s:

$$a_r^\tau = -\frac{a\pi^2\sqrt{2}}{9} \sin\frac{\pi}{6} = -7{,}75 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Le mouvement du point *M* est retardé, car $v_r^\tau \cdot a_r^\tau < 0$.

2. Mouvement d'entraînement

On arrête mentalement le mouvement relatif dans la position résultante et on trouve la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la rotation de la plaque selon les formules du mouvement de rotation.

La vitesse angulaire:

$$\omega = \dot{\varphi} = -8t,$$

pour $t = 0{,}5$s:

$$\omega = -8 \cdot 0{,}5 = -4 \text{ (rad/s)}.$$

Le vecteur de vitesse angulaire situé sur l'axe de rotation est dirigé dans la direction d'où la rotation du corps est visible dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 5.4).

L'accélération angulaire:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = -8 \text{ (rad/s}^2\text{)},$$

l'accélération angulaire est constante.

On trouve la distance entre l'axe de rotation et la position actuelle du point (fig. 5.9):

$$R = a + s \cdot cos(45^0) = 10 + 5\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\text{(cm)}.$$

On calcule la vitesse d'entraînement et les composants de l'accélération d'entraînement pour $t = 0{,}5$s:

$$v_e = |\omega|R = 4 \cdot 15 = 60 \text{ (cm/s)};$$

$$a_e^\tau = |\varepsilon|R = 8 \cdot 15 = 120\text{(cm/s}^2\text{)};$$

$$a_e^n = \omega^2 R = (-4)^2 \cdot 15 = 240\text{(cm/s}^2\text{)}.$$

On montre les vitesses et les accélérations obtenues dans la figure 5.10.

Le module d'accélération Coriolis est égal à:

$$a_{cor} = 2\,|\omega_e|\,v_r\ sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2\,|\omega_e|\,v_r\ sin\,45^0 = 2 \cdot 4 \cdot 12{,}82 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 36{,}26 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

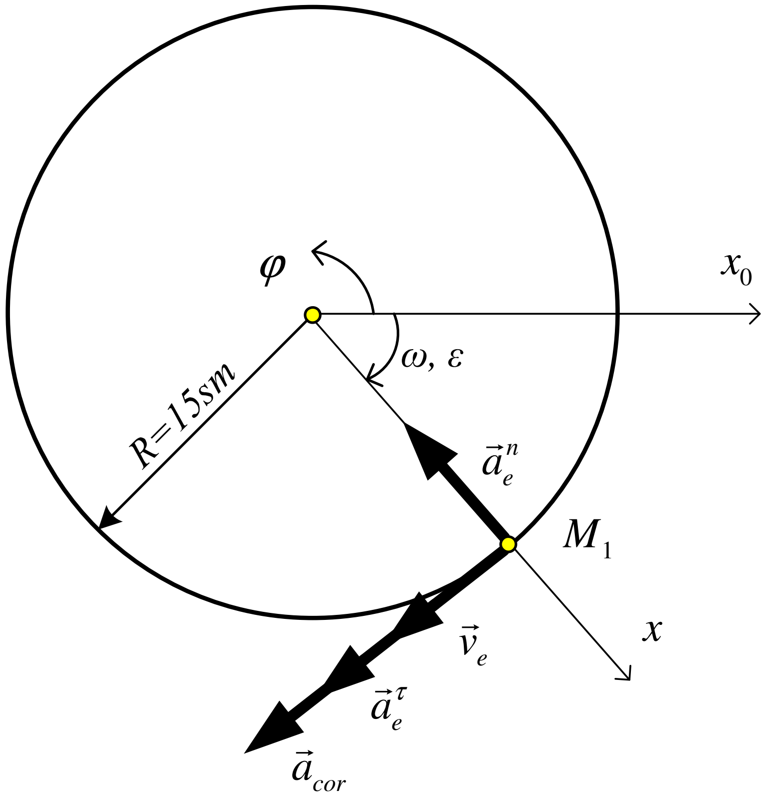

Fig. 5.10

Pour obtenir la direction de l'accélération Coriolis, il faut projeter le vecteur de vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d'entraînement et tourner la projection résultante de 90^0 dans le sens de la rotation (fig. 5.10).

3. Mouvement absolu

Définir le module de vitesse absolue.

Les vecteurs $\overrightarrow{v_r}$ et $\overrightarrow{v_e}$ sont perpendiculaires (fig. 5.11). Par conséquent, le module de vitesse absolue est égal à:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{12{,}82^2 + 60^2} = 61{,}35 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

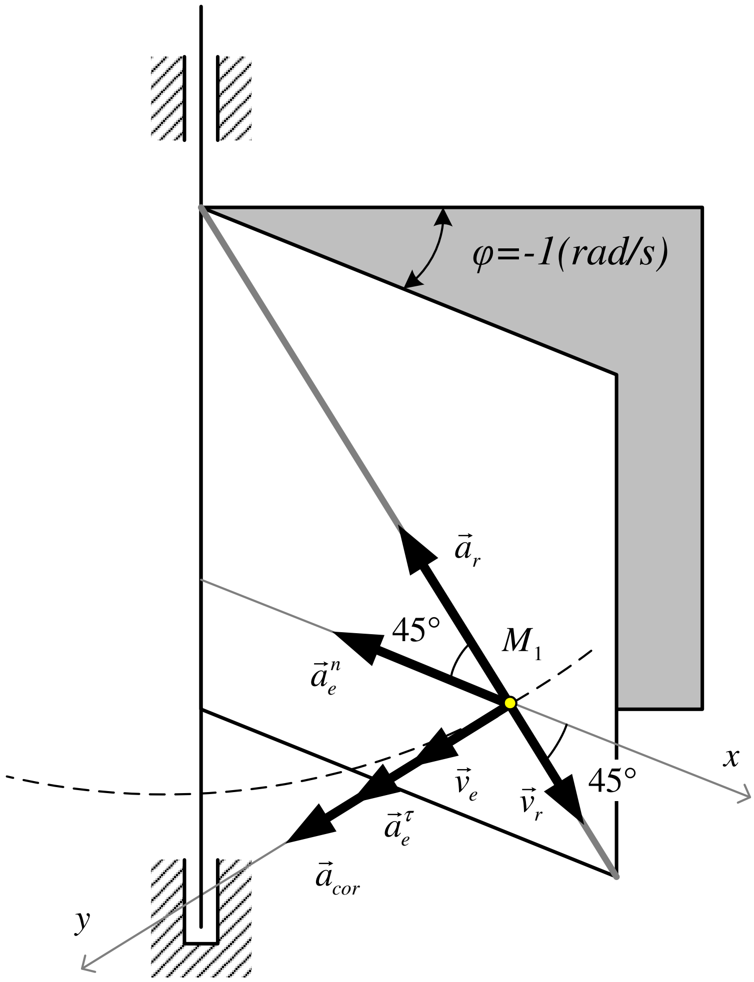

Fig. 5.11

Définir le module d'accélération absolue.

Pour ce faire, on introduise le système de coordonnées local OXY et on définit les projections des accélérations (fig. 5.11).

$$a_{ax} = -a_r^\tau \cos(45^0) - a_e^n = -7{,}75 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 240 = -245{,}48 \text{ (cm/s}^2\text{)};$$

$$a_{ay} = a_e^\tau + a_{cor} = 120 + 36{,}26 = 156{,}26 \text{ (cm/s}^2\text{)};$$

$$a_{az} = a_r^\tau \sin(45^0) = 7{,}75 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}48 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Le module d'accélération absolue est déterminé par la formule:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-245{,}48)^2 + 156{,}26^2 + 5{,}48^2} =$$

$$= 291{,}1 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

<u>Réponse</u>: $v_a = 61{,}35$ (cm/s), $a_a = 291{,}1$ (cm/s^2).

Liste de références

1. Маковкин Г.А., Ведяйкина О.И. Решение задач по кинематике: учебное пособия. – Н.Новгород, Нижегород.гос.архитекрут.-строит.ун-т, 2016. – 69с.
2. Targ S. Éléments de mécanique rationnelle/ S.Targ. – Moscou: Mir, 1966. – 479 с.
3. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие / В.А. Диевский. — 2--е изд., испр. - СПб.: «Лань», 2008. - 320 с.
4. Лойцанский Л.Г., А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том первый. Статика и кинематика. 2006г.
5. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. О.Э. Кепе. – Спб.: Изд. «Лань», 2008.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
7. Тарг. С.М. Краткий курс теоретической механики. Уч.-изд / С.М.Тарг. – М.: Наука, 1968. – 480 с.

Table des matières

Ведяйкина Ольга Ивановна

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ФРАНКОГОВОРЯЩИХ СТУДЕНТОВ. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Подписано в печать формат 60х90 1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 4,2. Усл. печ. л. 4,5 Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65
http://www. nngasu.ru, srec@nngasu.ru