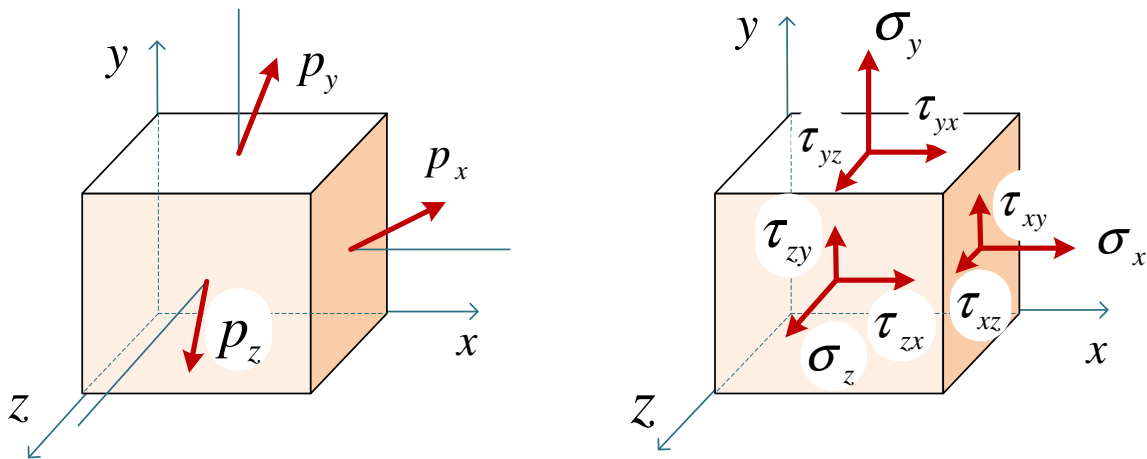


Г.А. Маковкин, В.Б. Штенберг, Д.А. Кожанов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие



Нижний Новгород
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г. А. Маковкин, В. Б. Штенберг, Д.А. Кожанов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
И ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2024
1

ББК 22.251
Н 27
УДК 539.3

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

А.К. Ломунов – д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник НИИ Механики ФГАОУ ВО «Национального исследовательского «Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского»

А.Ю. Панов – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»

Маковкин, Г.А. Напряженно-деформированное состояние и теории прочности деформируемого твердого тела : учебное пособие / Г.А. Маковкин, В. Б. Штенберг, Д.А. Кожанов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2024. – 78 с. – ISBN 978-5-528-00567-6. – Текст : непосредственный.

Пособие содержит теоретические сведения о деформации элементарного объёма тела и возникающих при этом напряжениях. Даётся понятие о тензоре деформаций и тензоре напряжений. Приводится классификация видов деформированного и напряжённого состояний. Рассматриваются внутренние силы и напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержневых элементов конструкций. Обосновывается необходимость использования в расчётах теорий прочности. На основе концепции эквивалентной прочности изложены способы получения эквивалентных по прочности напряжений для четырёх классических теорий прочности: теории наибольших линейных деформаций, теории наибольших нормальных напряжений, теории наибольших касательных напряжений и теории наибольшей удельной энергии изменения формы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 Строительство. Профили Промышленное и гражданское строительство, Гидротехническое, геотехническое и энергетическое строительство, Производство и применение строительных материалов, изделий и конструкций. Дисциплина Сопротивление материалов.

Направление подготовки: 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника. Дисциплина Сопротивление материалов. Профиль Промышленная теплоэнергетика.

Направление подготовки: 20.03.01 Техносферная безопасность. Дисциплина Сопротивление материалов. Профиль Безопасность технологических процессов и производств.

Специальность: 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Дисциплина Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности.

Специализация Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений.

Специализация Строительство гидротехнических сооружений повышенной ответственности.

ISBN 978-5-528-00567-6

© Г.А. Маковкин, В.Б. Штенберг,
Д.А. Кожанов, 2024
© ННГАСУ, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

| | | |
|-----|--|----|
| 1. | Деформации элементарного объёма, тензор деформаций..... | 4 |
| 2. | Напряжения в элементарном объёме, тензор напряжений..... | 9 |
| 3. | Обобщённый закон Гука | 11 |
| 4. | Разложение тензора деформаций на шаровую и девиаторную составляющие..... | 14 |
| 5. | Разложение тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие | 16 |
| 6. | Другая формулировка закона Гука, объёмный закон Гука | 17 |
| 7. | Главные деформации, главные напряжения | 18 |
| 8. | Виды напряжённо-деформированного состояния | 20 |
| 9. | Плоское напряжённое состояние | 24 |
| 10. | Напряжения в поперечных сечениях стержня | 29 |
| 11. | Внутренние силы в поперечных сечениях стержня | 32 |
| 12. | Определение напряжений при известных внутренних силах | 44 |
| 13. | Причины возникновения теорий прочности | 52 |
| 14. | Концепция эквивалентной прочности | 58 |
| 15. | Гипотеза наибольших нормальных напряжений | 60 |
| 16. | Гипотеза наибольших продольных деформаций | 62 |
| 17. | Гипотеза наибольших касательных напряжений | 63 |
| 18. | Гипотеза наибольшей энергии изменения формы | 65 |
| 19. | Примеры расчетов на прочность с использованием теорий прочности..... | 68 |
| 20. | Литература | 75 |

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

1. ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОБЪЁМА, ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ

При деформировании тела всякий бесконечно малый объем тела dV также испытывает деформации (рис. 1).

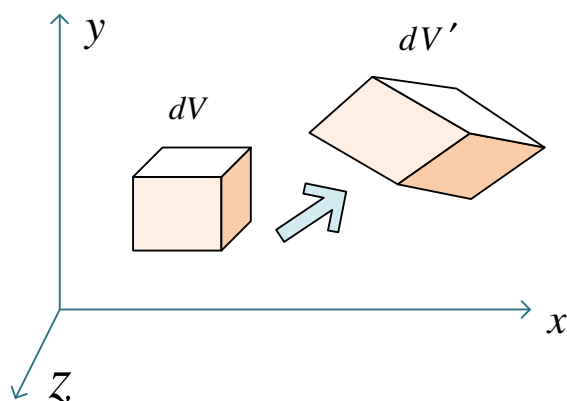


Рис. 1

Трансформации, которые при этом с ним происходят, условно можно разделить на четыре группы:

- а) Элементарный объём смещается по трем координатным осям. Этот процесс в теории упругости описывается с помощью трёх функций u , v , w , которые зависят от расположения объема dV и называются **перемещениями** или **смещениями**:

$$\begin{aligned} &u(x, y, z), \\ &v(x, y, z), \\ &w(x, y, z). \end{aligned} \tag{1}$$

b) Элементарный объём поворачивается относительно координатных осей, что также описывается тремя функциями координат, которые называют **поворотами** или **угловыми смещениями**:

$$\begin{aligned} &\phi_x(x, y, z), \\ &\phi_y(x, y, z), \\ &\phi_z(x, y, z). \end{aligned} \tag{2}$$

с) Элементарный объём изменяет свои линейные размеры. Так, на рис. 2 показано изменение линейного размера элементарного объёма. Его можно описать либо величиной Δdx , которая называется **абсолютной линейной деформацией**, либо величиной $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$, которую называют **относительной линейной деформацией**.

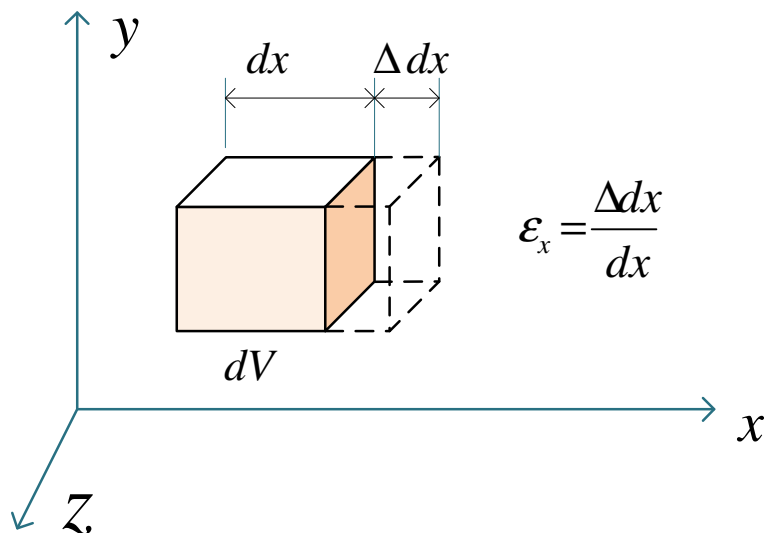


Рис. 2

Три следующие функции описывают относительные линейные деформации по каждой из координатных осей:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x(x, y, z), \\ &\varepsilon_y(x, y, z), \\ &\varepsilon_z(x, y, z). \end{aligned} \tag{3}$$

d) Также могут изменяться прямые углы между гранями объёма. На рис. 3 показано скашивание элементарного объёма в плоскости xu . Из рисунка понятно, что одна и та же деформация может быть описана либо углом γ_{xy} , либо равным ему углом γ_{yx} .

Деформации такого рода называются **угловыми деформациями**, или попросту **сдвигами**. Для их описания в пространственном случае используются шесть попарно равных функций:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x, y, z) &= \gamma_{yx}(x, y, z), \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &= \gamma_{zy}(x, y, z), \\ \gamma_{zx}(x, y, z) &= \gamma_{xz}(x, y, z). \end{aligned} \tag{4}$$

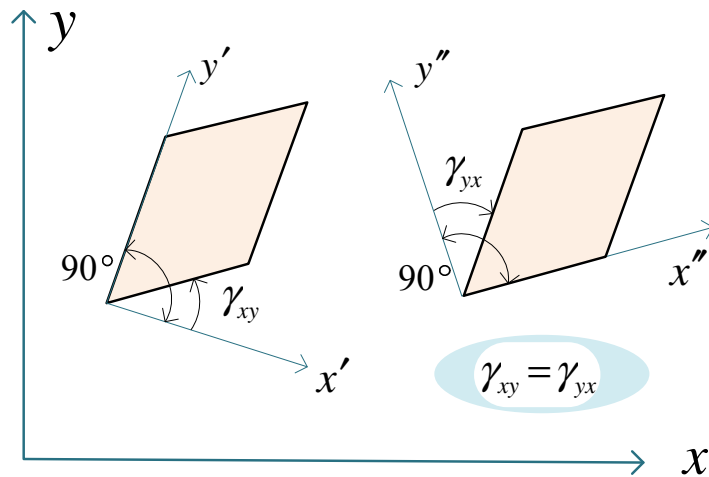


Рис. 3

Если известны смещения точек, то есть функции u, v, w , то, как известно из теории упругости, линейные и угловые деформации можно получить, используя следующие зависимости, известные как соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$



Огюстен Луи Коши
1789-1857

Французский математик. Впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа. В области комплексного анализа создал теорию интегральных вычетов. В математической физике глубоко изучил краевую задачу с начальными условиями, которая с тех пор называется задачей Коши. Заложил основы математической теории упругости.

Рис. 4

Перемещения и повороты описывают движение элементарного объёма dv как твёрдого тела, и не приводят к появлению в нём внутренних сил (напряжений). Напряжения появляются как следствие изменения размеров и формы элементарного объёма, которые описываются переменными

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. По этой причине, когда говорят о деформациях, имеют в виду в первую очередь сдвиговые и относительные линейные деформации.

Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ образуют единый физический объект – **тензор деформаций**, который в заданной системе координат описывается матрицей вида

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (6)$$

На главной диагонали матрицы расположены линейные деформации, а вне главной диагонали – угловые. Можно убедиться в том, что тензор деформаций симметричен относительно главной диагонали, поскольку $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, где $i = x, y, z$, $j = x, y, z$ и $i \neq j$.

Примечание

*Изучение тензорного анализа не предусмотрено программами технических вузов, поэтому можно лишь кратко объяснить смысл такого понятия как **тензор**.*

Тензоры служат для описания объектов, которые не зависят от выбора системы отсчёта. При изменении системы координат компоненты тензора изменяются по определённым законам, но сам объект при этом остаётся неизменным.

Чем сложнее объект, тем выше ранг тензора, который его описывает.

Тензор нулевого ранга содержит одну скалярную компоненту. С его помощью может быть описана, например, такая скалярная величина как масса.

Тензор первого ранга можно представить как вектор, каждая компонента которого является тензором нулевого ранга, то есть скаляром. Служит для описания векторных величин, таких как скорость, ускорение, сила и т.п.

Тензор второго ранга можно представить как вектор, каждая компонента которого является тензором первого ранга, то есть вектором.

Продолжая этот ряд, можно вводить тензоры и более высоких рангов.

Следует сказать, что в механике деформируемого твердого тела находят применение тензоры и третьего и даже четвертого ранга.

2. НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ОБЪЁМЕ, **ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ**

Рассмотрим тело, напряжённое состояние которого является однородным. Как следствие имеющих место деформаций, на гранях каждого бесконечно малого элемента объёма возникают распределённые по граням внутренние силы - напряжения.

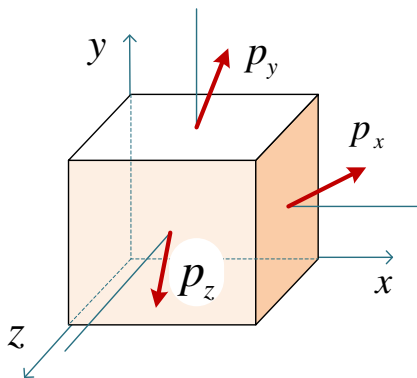


Рис. 5

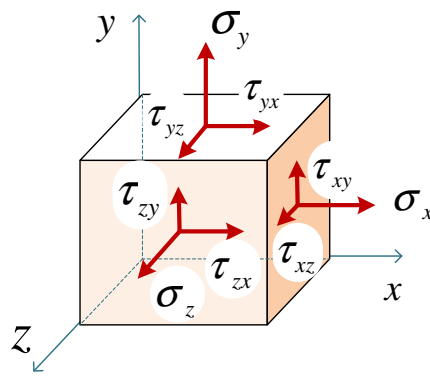


Рис. 6

Полные напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках и нормали к этим площадкам показаны на рис. 5. Каждое из этих напряжений может быть разложено на три компоненты.

На рис. 6 представлены нормальные и касательные напряжения, причём для всех напряжений, показанных на рис. 6 выбраны положительные направления.

Чтобы не загромождать чертёж, на рис. 5 и 6 показаны напряжения только на видимых гранях параллелепипеда. На противоположных гранях в случае однородного напряжённого состояния напряжения будут такими же по величине, но направленными противоположно, и будут иметь те же самые знаки.

Компоненты напряжений в заданной системе координат определяют физический объект, который называется **тензором напряжений**. Так же, как и тензор деформаций, тензор напряжений имеет второй ранг, и описывается матрицей следующего вида:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (7)$$

На главной диагонали матрицы располагаются нормальные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. За пределами главной диагонали – касательные напряжения

$$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}.$$

Кроме того видно, что так же как и тензор деформаций, тензор напряжений является симметричным относительно главной диагонали, поскольку имеет место **закон парности касательных напряжений**:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Тензор напряжений σ_{ij} совместно с тензором деформаций ε_{ij} полностью описывают **напряжённо-деформированное состояние** (НДС) в точке тела.

3. ОБОБЩЁННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Закон Гука (рис.8), который устанавливает линейную зависимость между напряжениями и деформациями, для случаев одноосного растяжения-сжатия и сдвига формулируется просто, поскольку связывает только одну компоненту деформаций с одной компонентой напряжений (рис. 7).

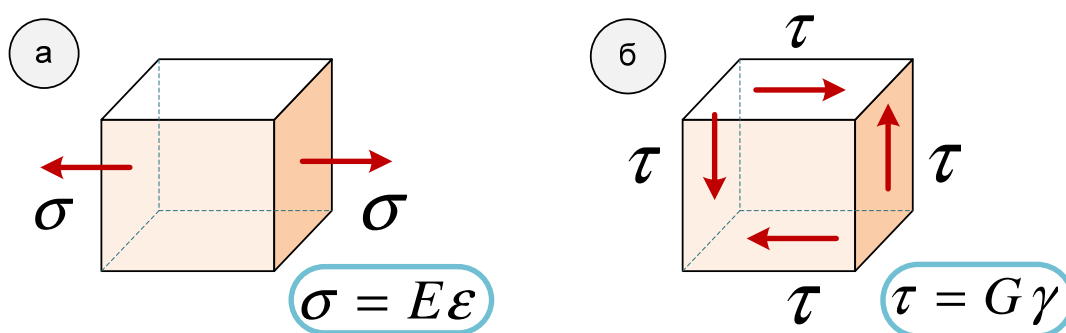


Рис. 7



Роберт Гук (Robert Hooke)
1635-1703

Роберт Гук - автор исследований по механике, оптике, тепловым явлениям, астрономии, биологии. Он открыл закон упругости (закон Гука), был близок к открытию закона всемирного тяготения. Совместно с Гюйгенсом Гук положил начало физической оптике. Им был изобретён ряд новых физических и астрономических приборов.

Рис. 8

В общем случае напряжённо-деформированного состояния, как мы видели, может присутствовать шесть независимых компонент деформаций и шесть независимых напряжений. Закон пропорциональности между напряжениями и деформациями для этого общего случая **называется обобщённым законом Гука.**

Опыты показывают, что линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ связаны с нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, а угловые деформации $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – с касательными напряжениями $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

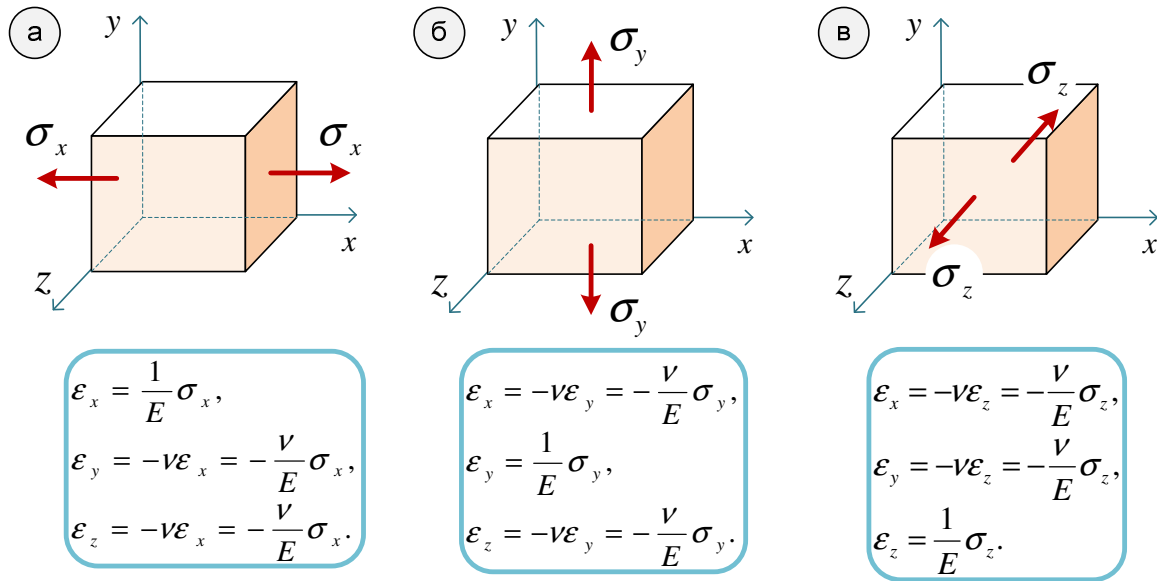


Рис. 9

Рассматривая каждое нормальное напряжение по-отдельности, получим соответствующие им деформации (рис. 9), используя закон Гука для ЦРС (центральное растяжение-сжатие) и закон Пуассона. Теперь суммируем деформации в соответствии с принципом независимости действия сил, и получаем их выражения для случая совместного действия всех трех нормальных напряжений (рис. 10,а).

Ещё три соотношения получим для сдвигов, происходящих в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 10,б). В результате получаем шесть зависимостей, которые называются **обобщённым законом Гука**:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль упругости при сдвиге.

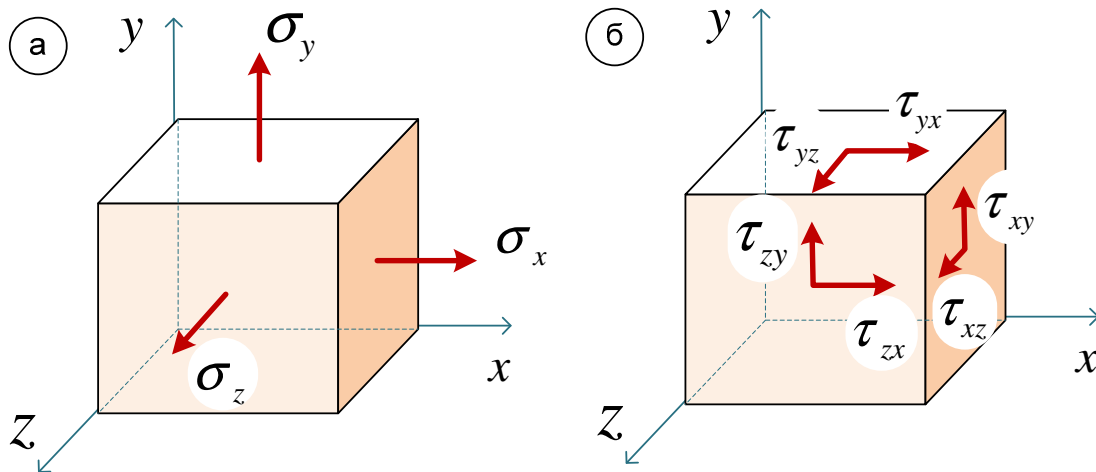


Рис. 10

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ НА ШАРОВУЮ И ДЕВИАТОРНУЮ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Определим, как меняется в процессе деформирования элементарный объём dV , который в начальном состоянии равен

$$dV = dx dy dz. \quad (9)$$

После того, как размеры рёбер элементарного объёма в процессе деформации изменятся, элементарный объём станет равен

$$dV^* = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) \quad (10)$$

Тогда относительное изменение объёма можно будет найти следующим образом:

$$\varepsilon_V = \frac{dV^* - dV}{dV} \quad (11)$$

Если не учитывать величины второго и третьего порядка малости, то при подстановке (9) и (10) в (11) мы получим, что

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (12)$$

Выделим из тензора деформаций часть, описывающую изменение объёма. Для этого введём понятие средней деформации:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (13)$$

Представим тензор деформаций в виде суммы:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij}, \quad (14)$$

где первое слагаемое, **шаровая составляющая тензора деформаций**, определяет объёмную деформацию элементарного объёма:

$$\varepsilon_0 \delta_{ij} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ — так называемая «дельта Кронекера», вы-}$$

полняющая в тензорном анализе роль единицы, а второе слагаемое, девиаторная составляющая тензора деформаций (**девиатор деформаций**), описывает изменение формы элементарного объёма dV :

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_0) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_0) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_0) \end{vmatrix} \quad (16)$$

Легко убедиться, что сумма диагональных элементов девиатора деформаций равна нулю, и, следовательно, объёмная деформация элементарного объёма, вычисленная по формуле (12), также равна нулю.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ НА ШАРОВУЮ И ДЕВИАТОРНУЮ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Выделим из тензора напряжений ту часть, под действием которой напряжения на гранях элементарного объёма будут одинаковыми. Эти напряжения часто называют гидростатическими.

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (17)$$

Представим тензор напряжений в виде суммы (рис. 11):

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}, \quad (18)$$

где первое слагаемое, **шаровая составляющая тензора напряжений**, даёт равномерное всестороннее растяжение или сжатие:

$$\sigma_0 \delta_{ij} = \sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

а второе слагаемое, девиаторная составляющая тензора напряжений (**девиатор напряжений**), описывает отклонение (deviation) напряжённого состояния от равномерного растяжения или сжатия:

$$s = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_0) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_0) \end{vmatrix} \quad (20)$$

Легко убедиться, что сумма диагональных элементов девиатора напряжений также равна нулю.

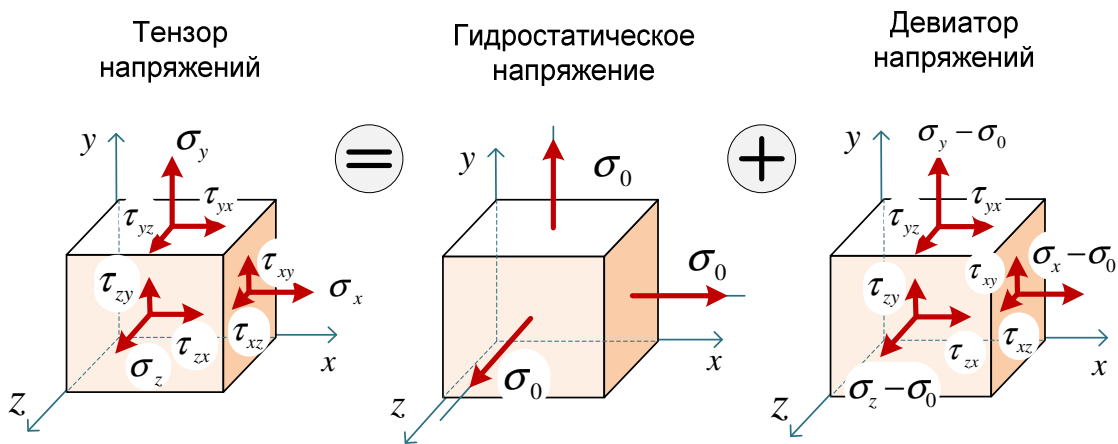


Рис. 11

6. ДРУГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАКОНА ГУКА, ОБЪЁМНЫЙ ЗАКОН ГУКА

Опыты показывают, что изменение объёма связано с гидростатической частью тензора напряжений, и эта связь до некоторых пределов является линейной. Сформулируем эту связь следующим образом:

$$\sigma_0 = K \varepsilon_V \quad \text{или} \quad \sigma_0 = 3K \varepsilon_0 \quad (21)$$

где K – объёмный модуль упругости.

Линейный закон изменения объёма под действием всестороннего равномерного (гидростатического) напряжения называют **объёмным законом Гука**.

Изменение формы (девиатор деформаций) также линейно зависит от девиатора напряжений:

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad (22)$$

где G - модуль упругости при сдвиге (модуль сдвига),

s_{ij} - девиатор напряжений,

e_{ij} - девиатор деформаций.

Заметим, что модуль сдвига G и объёмный модуль упругости K могут быть выражены через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Эта связь имеет следующий вид:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что в обеих формулировках закона Гука механические свойства упругой среды описываются с использованием только двух констант.

7. ГЛАВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ, ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Поворачивая элементарный объём dV , можно найти такое его положение, при котором все касательные напряжения на гранях бесконечно малого параллелепипеда обратятся в ноль.

Три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются **главными площадками**. Нормальные напряжения в главных площадках называются **главными напряжениями** (рис. 12).

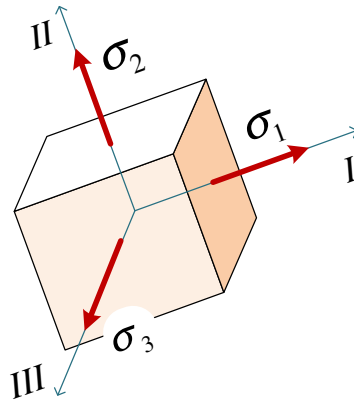


Рис. 12

Главные напряжения обозначаются

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad \text{или} \quad \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \quad \text{причём} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Тензор напряжений при этом принимает диагональный вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (24)$$

Три направления, по которым отсутствуют сдвиговые деформации, образуют **главные оси деформаций**. При малых деформациях и выполняющемся законе Гука главные оси деформаций I, II, III будут перпендикулярны

к главным площадкам (рис. 12). Линейные деформации по этим направлениям называют главными деформациями, которые будем обозначать

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \quad \text{или} \quad \varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}, \quad \text{причём} \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

Главные деформации образуют диагональный тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \quad (25)$$

8. ВИДЫ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Трёхмерное НДС

Трёхмерное или объёмное напряженно-деформированное состояние, которое определяется шестью независимыми компонентами тензора напряжений

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \quad \text{и} \quad \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

и шестью независимыми компонентами тензора деформаций

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \quad \text{и} \quad \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx},$$

является наиболее общим видом НДС.

Этот вид НДС рассмотрен в предыдущих параграфах.

Плоские виды напряжённно-деформированного состояния

Выделяют два плоских случая НДС.

а) **Плоское напряжённое состояние**, как правило, возникает в тонкостенных элементах металлических конструкций. В условиях плоского напряжённого состояния, например, находятся стенки стальных двутавровых балок.

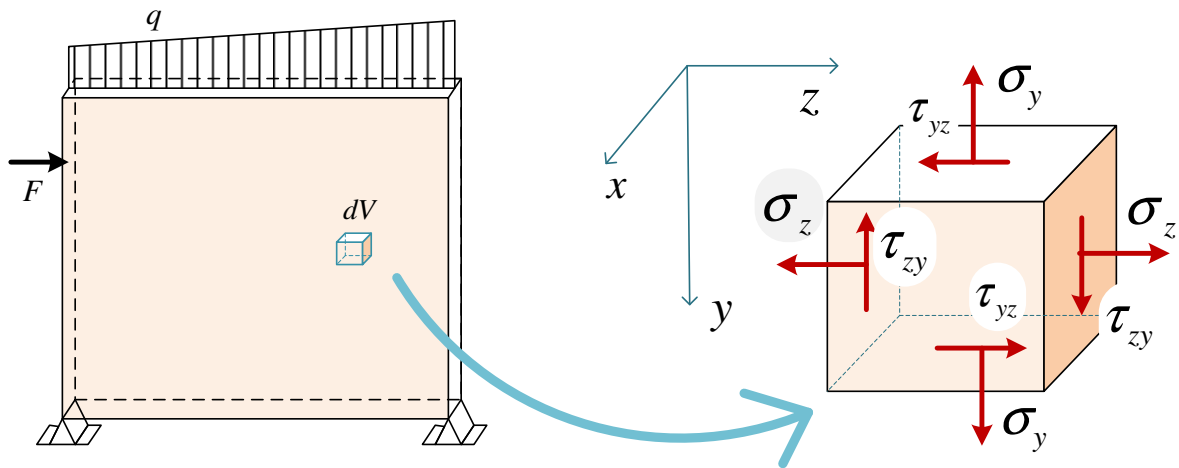


Рис. 13

В этом случае напряжения на двух параллельных гранях объёма обращаются в ноль (рис. 13) и тензор напряжений приобретает следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (26)$$

Сдвиг (рис.14) является частным случаем плоского напряжённого состояния.

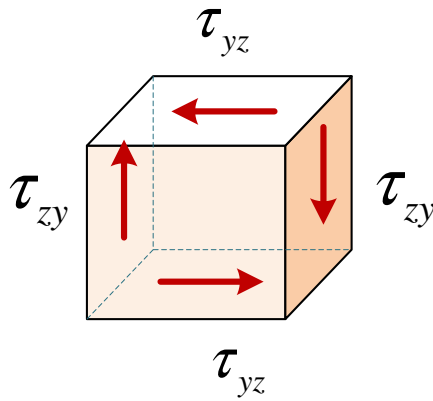


Рис. 14

Тензор напряжений в этом случае приобретает следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

b) **Плоская деформация** возникает, как правило, в протяжённых или имеющих значительную толщину конструкциях, у которых геометрия и способ приложения нагрузки вдоль одной из осей (на рис. 15 это ось x) не меняется.

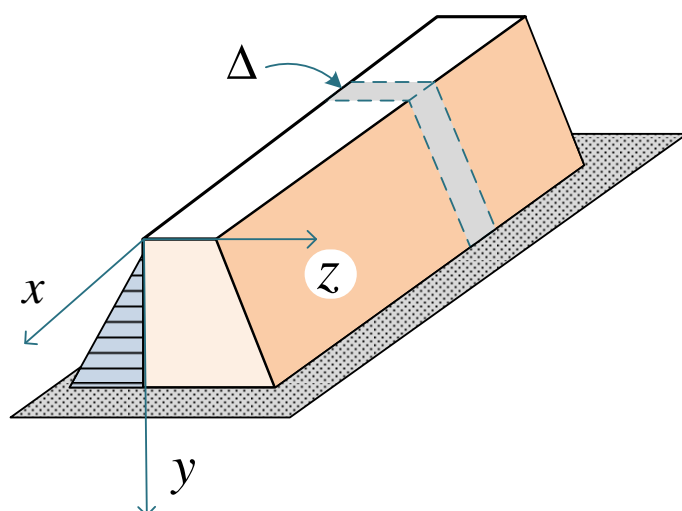


Рис. 15

В качестве примера на рис. 15 изображена плотина, в теле которой любой фрагмент Δ , выделенный двумя перпендикулярными к оси x плоскостями, не изменяет своей толщины. Следовательно, линейная деформация по этому направлению будут равна нулю, и тензор деформаций приобретёт следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (28)$$

Нормальные напряжения, возникающие при этом в направлении оси x , легко находятся из обобщённого закона Гука (8).

Одноосное напряжённо-деформированное состояние

Этот вид НДС возникает при ЦРС (центральное растяжение-сжатие), при чистом изгибе и при внецентренном растяжении-сжатии (рис. 16).

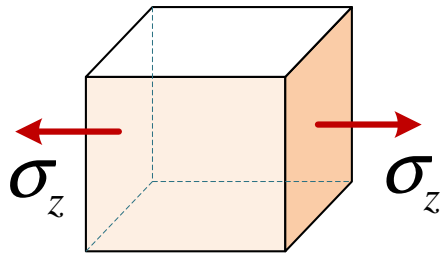


Рис. 16

Тензор напряжений в этом случае вырождается к виду

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (29)$$

9. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ

Плоское напряжённое состояние встречается очень часто, поскольку реализуется в тонкостенных элементах металлических конструкций. Этот важный вид НДС заслуживает отдельного и более внимательного рассмотрения.

Напряжения в наклонных площадках

Рассмотрим бесконечно малый объем, находящийся в условиях плоского напряжённого состояния (рис. 16,а). Поскольку плоское напряжённое состояние имеет место в стенках стальных балок, выберем систему координат так, как это делаем при рассмотрении балок, то есть направив ось z – вдоль оси стержня, а ось y – вниз.

Будем считать, что компоненты тензора напряжений известны. Рассе- чём объём плоскостью, наклонённой к вертикали под углом α . Напряжения

на наклонной грани отсечённой треугольной призмы $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ неизвестны. Неизвестные напряжения можно найти из уравнений равновесия призмы.

Если площадь наклонной грани призмы обозначить dA , то площади других граней будут равны $dA \cos \alpha$ и $dA \sin \alpha$. Умножив напряжения на соответствующие площади, получим силы, действующие на гранях призмы.

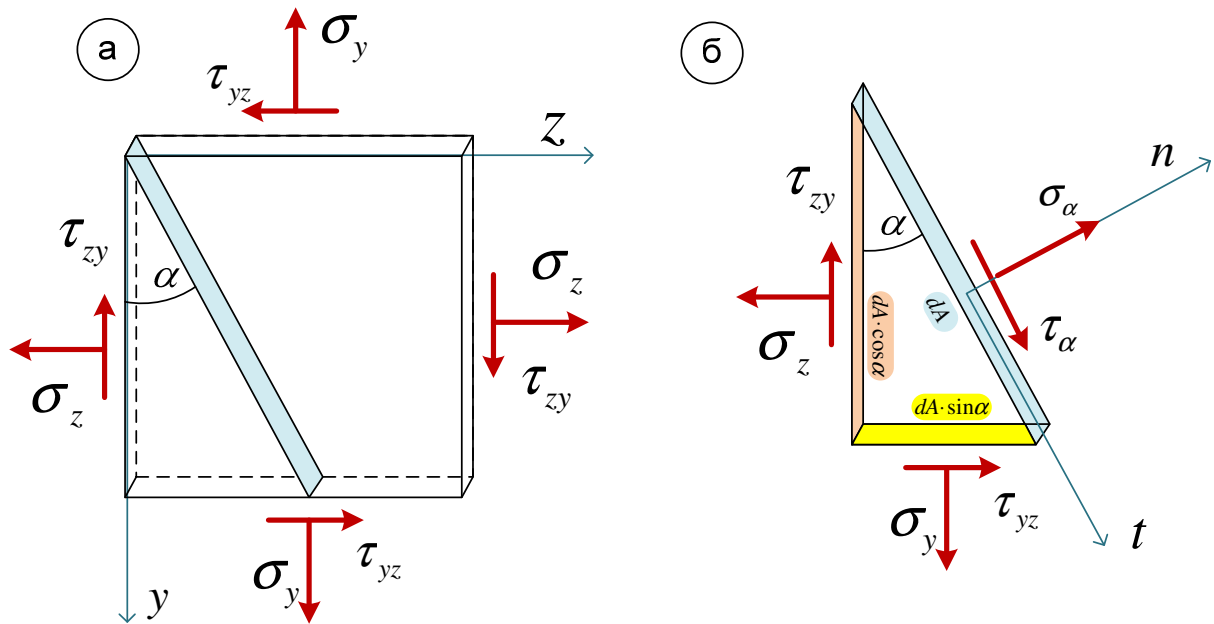


Рис. 17

Чтобы получить уравнения равновесия можно спроецировать силы, действующие на гранях призмы, на направления нормалей n, t и суммы полученных проекций приравнять к нулю. Рекомендуем проделать эти операции самостоятельно.

Из уравнений равновесия получим следующие выражения для напряжений, действующих в наклонной площадке:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yz} \sin 2\alpha, \quad (a)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yz} \cos 2\alpha. \quad (b) \quad (30)$$

Главные напряжения и главные площадки

Площадки, в которых касательные напряжения равны нулю, называются главными. Чтобы найти, на какой угол α_0 надо повернуть исходную систему координат, чтобы получить главные площадки, приравняем к нулю выражение, стоящее в правой части (30, b) при $\alpha = \alpha_0$. Получим уравнение

$$\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0, \quad (31)$$

откуда найдём, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}. \quad (32)$$

Решение (32) определяет положение двух взаимно перпендикулярных нормалей к главным площадкам. Можно убедиться в том, что если исследовать на экстремум функцию $\sigma_{\alpha}(\alpha)$ (30, а), приравняв к нулю её первую производную, то мы получим такой же результат. Это говорит о том, нормальные напряжения в главных площадках достигают экстремальных значений. В одной площадке нормальное напряжение оказывается наибольшим (по сравнению со всеми другими площадками, проходящими через данную точку). В другой площадке при этом нормальное напряжение будет наименьшим. Соответственно будем обозначать их σ_{MAX} , σ_{MIN} (рис. 18).

Найти их можно по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{MAX} \\ \sigma_{MIN} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \quad (33)$$

Аналогичным образом можно исследовать на экстремум функцию $\tau_\alpha(\alpha)$ (30, b). Выяснится, что касательные напряжения экстремальны в площадках, положение которых α_τ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (34)$$

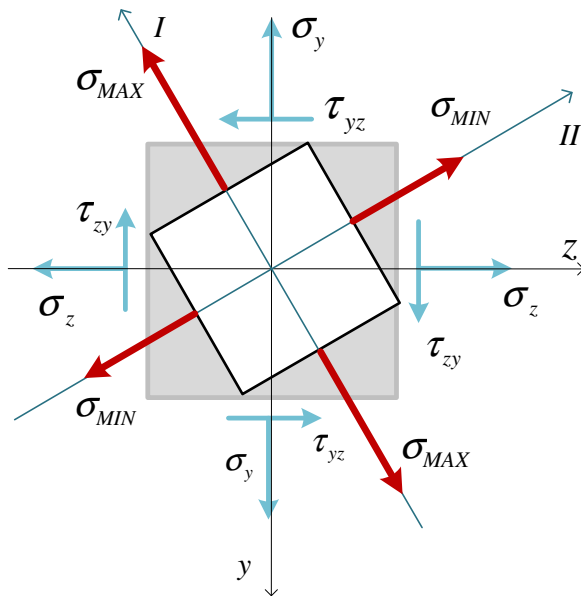


Рис. 18

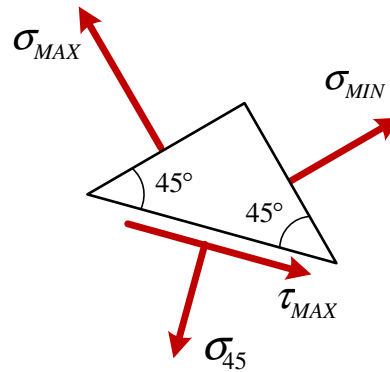


Рис. 19

Легко заметить, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_\tau = -1.$$

Это говорит о взаимной перпендикулярности направлений, то есть:

$$|2\alpha_0 - 2\alpha_\tau| = 90^\circ, \quad |\alpha_0 - \alpha_\tau| = 45^\circ.$$

Сделаем следующий вывод: площадки, в которых касательные напряжения достигают экстремальных значений (рис.19), наклонены к главным площадкам под углом 45° .

Касательные напряжения в этих площадках находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{MAX} &= \\ \tau_{MIN} &= \end{aligned} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \quad (35)$$

Очевидно, что $\tau_{MAX} = -\tau_{MIN}$.

В тех случаях, когда надо сформировать тензор напряжений, следует помнить, что существуют еще две грани, в которых все напряжения равны нулю. То есть, есть еще третье главное напряжение, которое равно нулю.

Поскольку три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ упорядочены, то есть $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то возможны следующие варианты компоновки тензора напряжений:

| | |
|---|---|
| <p>a) $\sigma_{MAX} > 0, \sigma_{MIN} > 0$.</p> <p>Тогда</p> <p>$\sigma_1 = \sigma_{MAX}, \sigma_2 = \sigma_{MIN}, \sigma_3 = 0$</p> | $\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{MAX} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{MIN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ |
| <p>б) $\sigma_{MAX} > 0, \sigma_{MIN} < 0$.</p> <p>Тогда</p> <p>$\sigma_1 = \sigma_{MAX}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{MIN}$</p> | $\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{MAX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{MIN} \end{vmatrix}$ |
| <p>в) $\sigma_{MAX} < 0, \sigma_{MIN} < 0$.</p> <p>Тогда</p> <p>$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_{MAX}, \sigma_3 = \sigma_{MIN}$</p> | $\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{MAX} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{MIN} \end{vmatrix}$ |

10. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим стержень, нагруженный произвольной совокупностью внешних сил (рис. 20). Для определения сил, возникающих при этом внутри стержня, используем следующий приём: мысленно разделим стержень на две части, которые условно назовем ЛЕВОЙ и ПРАВОЙ (рис.21).

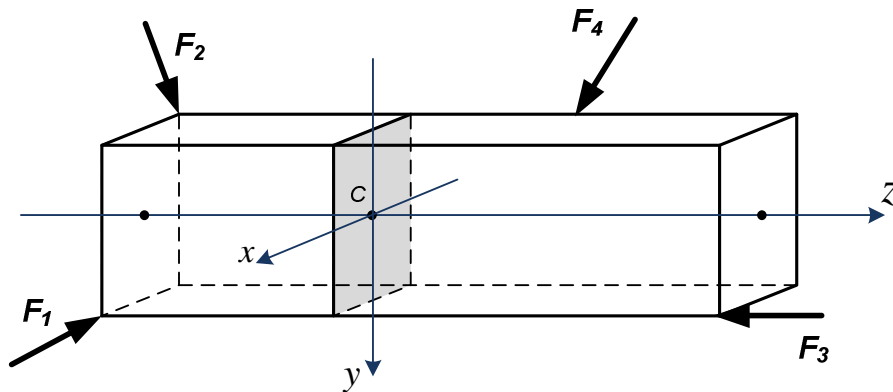


Рис. 20

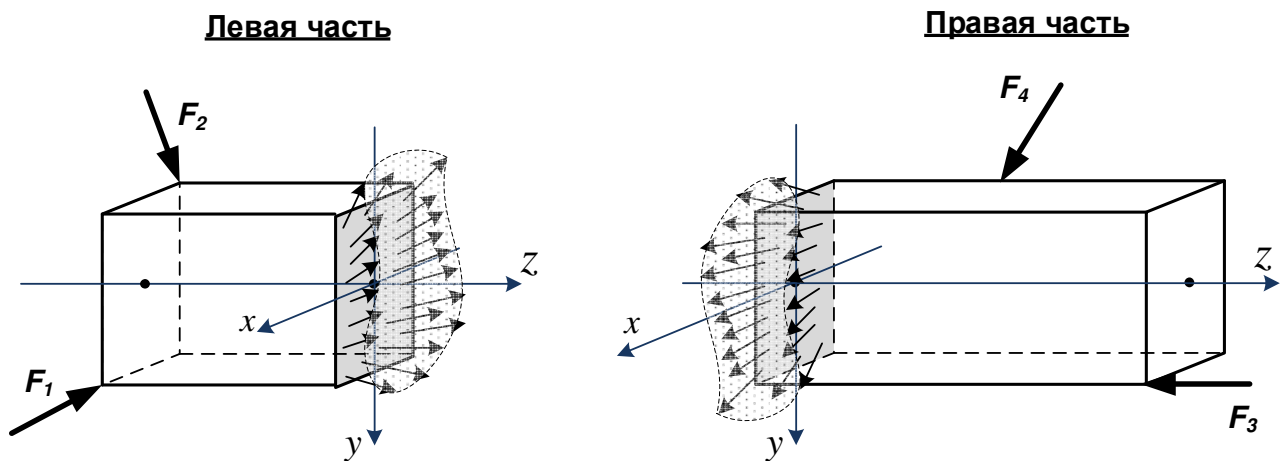


Рис. 21

Распределённые по всему поперечному сечению силы взаимодействия частей стержня, как известно, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 21). Закон распределения этих сил в общем случае неизвестен.

Выберем в поперечном сечении бесконечно малую площадку dA с координатами x и y (рис. 22). Нормаль к площадке будет параллельна оси z , и, следовательно, полное напряжение на площадке будет иметь обозначение p_z . Спроецируем полное напряжение на нормаль, а затем на плоскость поперечного сечения. Получим нормальное напряжение σ_z и касательное напряжение τ_z . Далее касательное напряжение τ_z разложим по координатным осям x и y . Получим две компоненты касательного напряжения τ_{zx} и τ_{zy} .

В результате в каждой точке поперечного сечения будем иметь одно нормальное напряжение σ_z и два касательных напряжения τ_{zx} и τ_{zy} .

Очевидно, что

$$\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_z^2 \quad (35)$$

$$\sigma_z^2 + \tau_z^2 = \sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = p_z^2 \quad (36)$$

Обратим внимание на индексы. Индекс нормального напряжения σ_z показывает как направление нормали к площадке, так и направление самого напряжения. Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} имеют по два индекса. Первый индекс показывает направление нормали к площадке, а второй индекс – направление самого напряжения.

Напряжения в точке поперечного сечения стержня

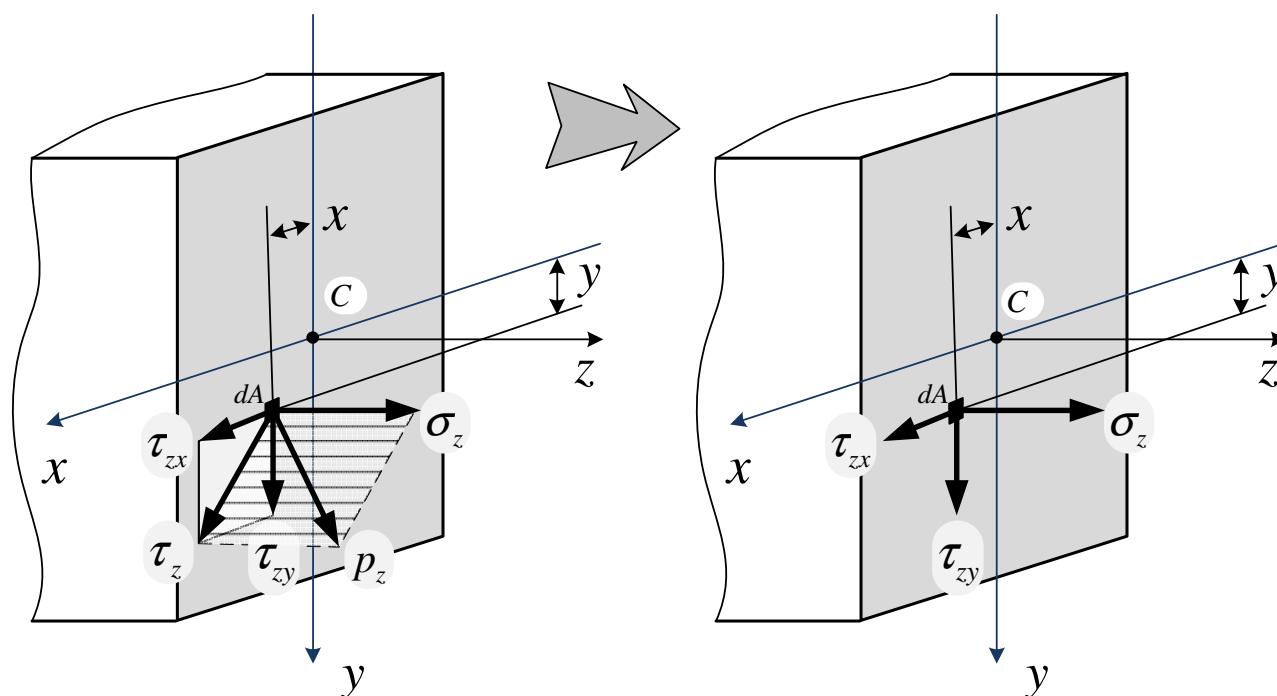


Рис. 22

Знаки напряжений выбираются в соответствии со следующим правилом:

ПРАВИЛО ЗНАКОВ для напряжений

Напряжение считается положительным, если направление напряжения и направление нормали к площадке **одновременно совпадают**, или **одновременно не совпадают** с положительными направлениями соответствующих осей. Если один из векторов направлен в положительном направлении оси, а другой в отрицательном направлении оси, то в этом случае напряжение будет отрицательным.

11. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ

Напряжения, распределённые по поперечному сечению, как и любую другую систему сил, можно с помощью основной теоремы статики привести к заданному центру, заменив её одной силой и одной парой. Приведём напряжения к центру тяжести поперечного сечения.

Спроецировав напряжения на координатные оси и просуммировав проекции, получим три компоненты главного вектора (рис. 23 и 24).

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA, & (a) \\ Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA, & (b) \\ Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA. & (c) \end{aligned} \tag{37}$$

Суммируя моменты напряжений относительно осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения, получим три компоненты главного момента (рис. 23 и 24).

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA, & (a) \\ M_y &= \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA, & (b) \\ M_z &= \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) \cdot dA. & (c) \end{aligned} \tag{38}$$

Интегралы N, Q_x, Q_y называют **внутренними силами**, а интегралы M_x, M_y, M_z – **внутренними моментами**. Все шесть величин принято (не совсем корректно) называть внутренними силами. Используется также термин **усилие**.

| | | Обозначение | Название | Единица измерения |
|--------|--------------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| Усилия | Внутренние силы | N | Продольная сила | $кН$ |
| | | Q_x | Поперечная сила | $кН$ |
| | | Q_y | Поперечная сила | $кН$ |
| | Внутренние моменты | M_x | Изгибающий момент | $кН·м$ |
| | | M_y | Изгибающий момент | $кН·м$ |
| | | M_z или T_z | Крутящий момент | $кН·м$ |

ПРАВИЛО ЗНАКОВ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ СИЛ

| ПРАВИЛО ЗНАКОВ для внутренних сил N, Q_x, Q_y | ПРАВИЛО ЗНАКОВ для внутренних моментов M_x, M_y, M_z |
|--|--|
| <p>Правило полностью совпадает с правилом знаков для напряжений. Продольная сила и поперечные силы считаются положительными, если направление силы и направление нормали к площадке одновременно совпадают, или одновременно не совпадают с положительными направлениями соответствующих осей.</p> | <p>Изгибающие моменты считаются положительными, если вызывают растяжение в первой четверти поперечного сечения. Крутящий момент считается положительным, если действует против часовой стрелки при взгляде на сечение со стороны внешней нормали, что соответствует «правилу правого винта».</p> |

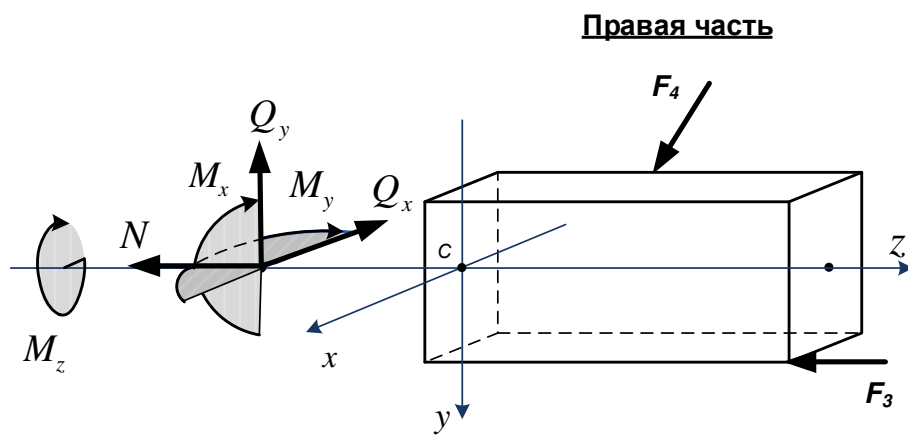
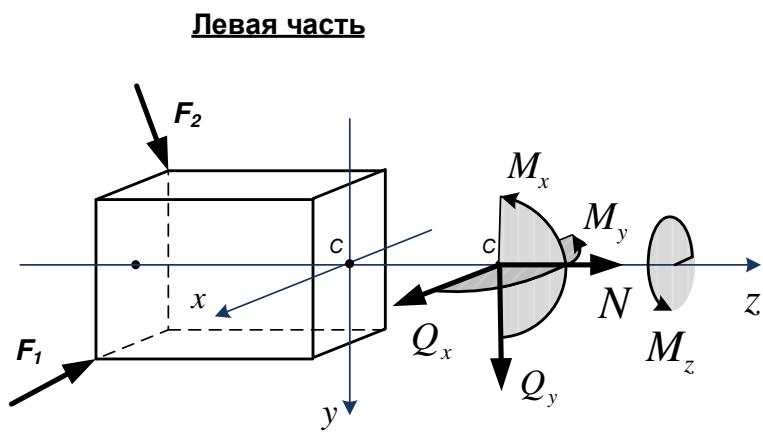


Рис. 23

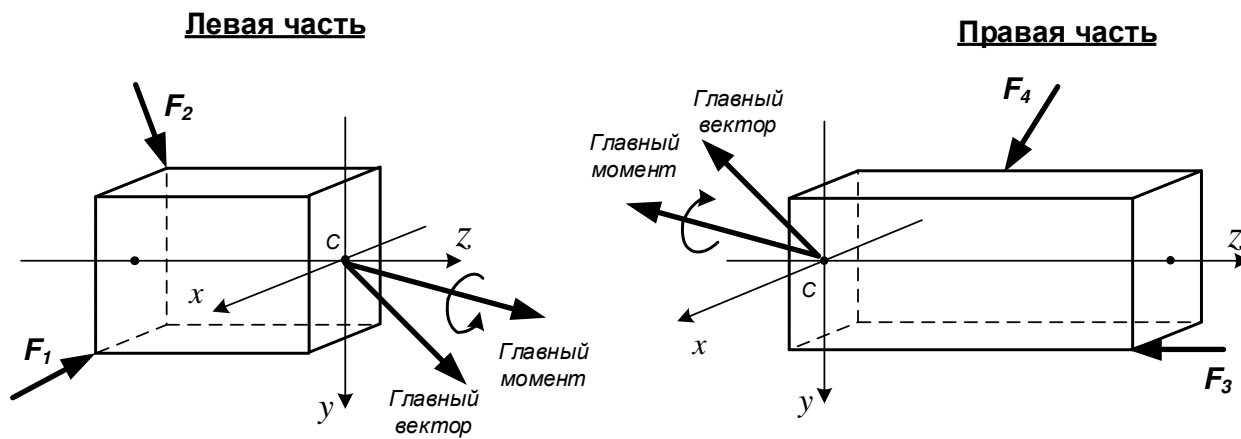


Рис. 24

Виды сопротивления (виды деформаций стержня)

В общем случае в поперечном сечении стержня может возникать шесть внутренних силовых факторов (внутренних сил). Одновременное их появление в поперечном сечении наблюдается достаточно редко. Гораздо чаще в поперечных сечениях присутствует одно или два усилия, в то время как остальные внутренние силы равны нулю.

Деформации стержня под действием того или иного набора внутренних сил называются **видом сопротивления**. Виды сопротивления разделяют на две группы. В первую группу входят виды сопротивления, при которых в сечениях присутствует только одно усилие. Такие виды сопротивления называются **простыми**. Виды сопротивления, при которых в сечении присутствуют два или более двух усилий называются **сложными**.

Простых видов сопротивления четыре:

| № | Простые виды сопротивления | Внутренняя сила (усилие) |
|---|--|--------------------------|
| 1 | Центральное растяжение-сжатие (ЦРС) | N |
| 2 | Сдвиг | Q_x или Q_y |
| 3 | Чистый изгиб | M_x или M_y |
| 4 | Кручение | M_z |

Все остальные следует отнести к сложным видам сопротивления:

| № | Сложные виды сопротивления | Внутренние силы (усилия) |
|-----|---|--|
| 5 | Прямой поперечный изгиб | Q_y, M_x или Q_x, M_y |
| 6 | Внецентренное растяжение-сжатие (ВЦРС) | N, M_x, M_y или N, M_x или N, M_y |
| 7 | Косой или сложный изгиб | Q_y, M_x, Q_x, M_y |
| 8 | ЦРС с кручением | N, M_z |
| ... | Другие сочетания | ... |
| | Общий вид сложного сопротивления | $N, M_x, M_y, Q_x, Q_y, M_z$ |

Усилия при нагружении стержня в одной плоскости

Расчётные схемы для большинства строительных конструкций могут быть представлены на плоскости.

Когда все действующие на стержень силы лежат в одной плоскости, ряд усилий тождественно обращается в ноль. При действии сил в вертикальной плоскости не равны нулю только три усилия: N, Q_y, M_x . Положительные направления этих усилий для левой и правой частей стержня показаны на рис. 25.

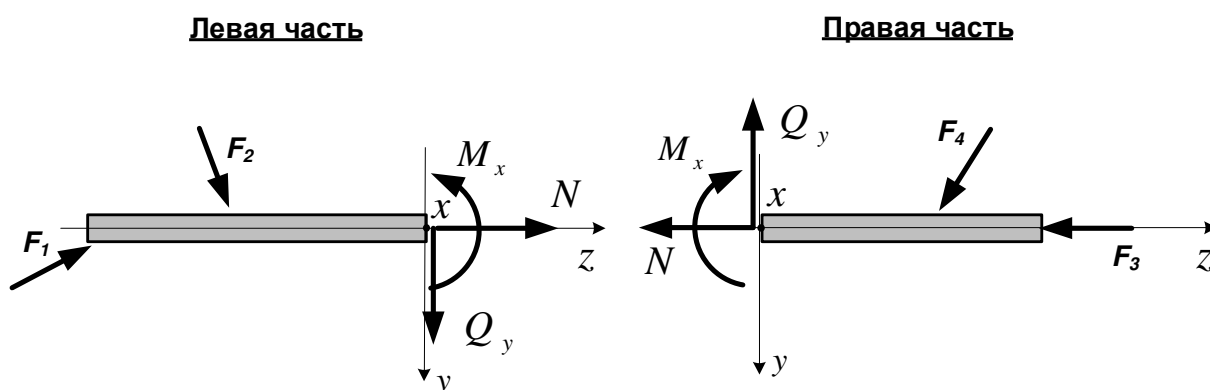


Рис. 25

Правило знаков здесь можно сформулировать менее строго, но более понятно.

Усилие $N > 0$, если вызывает растяжение в поперечном сечении стержня (направлено «от сечения»).

Усилие $Q_y > 0$, если (совместно с внешней нагрузкой) стремится повернуть отсеченную часть стержня по ходу часовой стрелки.

Усилие $M_x > 0$, если вызывает растяжение в нижних волокнах стержня, изгибая стержень выпуклостью вниз.

Определение внутренних сил методом сечений

Для определения усилий применяют **МЕТОД СЕЧЕНИЙ**, суть которого заключается в последовательном выполнении четырёх операций:

1. Надо мысленно рассечь стержень на две части (правую и левую).
2. Отбросить либо левую, либо правую часть.
3. Заменить действие отброшенной части стержня на оставшуюся часть неизвестными внутренними силами.
4. Составить для оставшейся части стержня необходимые уравнения равновесия и, решив их, найти неизвестные внутренние силы.

Уравнения равновесия позволяют выразить внутренние силы через расположенные по одну сторону от рассматриваемого сечения внешние силы.

Из уравнения $\sum Z = 0$, записанного для одной из частей стержня, следует, что продольная сила N равна взятой с обратным знаком сумме проекций на ось z всех сил, приложенных к левой части стержня, или сумме проекций на ось z всех сил, приложенных к правой части стержня.

Обозначая проекции внешних сил как P_z , запишем

$$N = -\sum_{\text{лев.}} P_z = +\sum_{\text{прав.}} P_z \quad (39)$$

Из уравнения $\sum y = 0$, записанного для одной из частей стержня, следует, что продольная сила Q_y равна взятой с обратным знаком сумме проекций на ось y всех сил, приложенных к левой части стержня, или сумме проекций на ось z всех сил, приложенных к правой части стержня.

Обозначая проекции внешних сил как P_y , запишем

$$Q_y = -\sum_{\text{лев.}} P_y = +\sum_{\text{прав.}} P_y \quad (40)$$

Из уравнения $\sum m_x = 0$, записанного для одной из частей стержня, следует, что изгибающий момент равен, взятой с обратным знаком, сумме моментов относительно оси x (проходящей через центр тяжести рассматриваемого сечения) всех сил, приложенных к левой части стержня или сумме моментов относительно оси x всех сил, приложенных к правой части стержня.

Обозначая моменты нагрузок как $mom_x(P)$, запишем

$$M_x = -\sum_{\text{лев.}} mom_x(P) = +\sum_{\text{прав.}} mom_x(P). \quad (41)$$

Пример применения метода сечений.

Брус, закреплённый на шарнирных опорах, загружен внешними силами, изображенными на рис. 26. Определить усилия в сечении, расположенном в середине пролета.

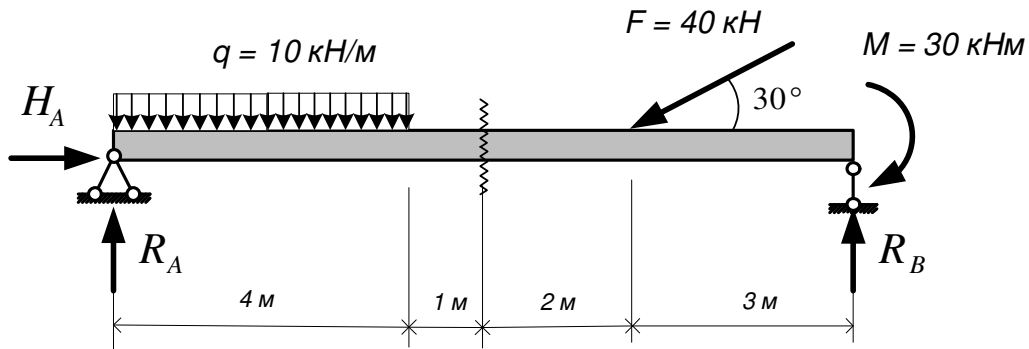


Рис. 26

Решение.

Определяем опорные реакции

$$\sum Z = 0; \quad H_A - F \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad H_A = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 34,6 \text{ кН}$$

$$\sum m_A = 0; \quad -(q \cdot 4) \cdot 2 - (F \cdot \sin 30^\circ) \cdot 7 - M + R_B \cdot 10 = 0$$
$$R_B = \frac{1}{10} (10 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 0,5 \cdot 7 + 30) = 25 \text{ кН}$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot 10 + (q \cdot 4) \cdot 8 + (F \cdot \sin 30^\circ) \cdot 3 - M = 0$$
$$R_A = \frac{1}{10} (10 \cdot 4 \cdot 8 + 40 \cdot 0,5 \cdot 3 - 30) = 35 \text{ кН}$$

Проверяем правильность определения реакций R_A и R_B :

$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F \cdot \sin 30^\circ = 35 + 25 - 10 \cdot 4 - 40 \cdot 0,5 = 60 - 60 = 0$$

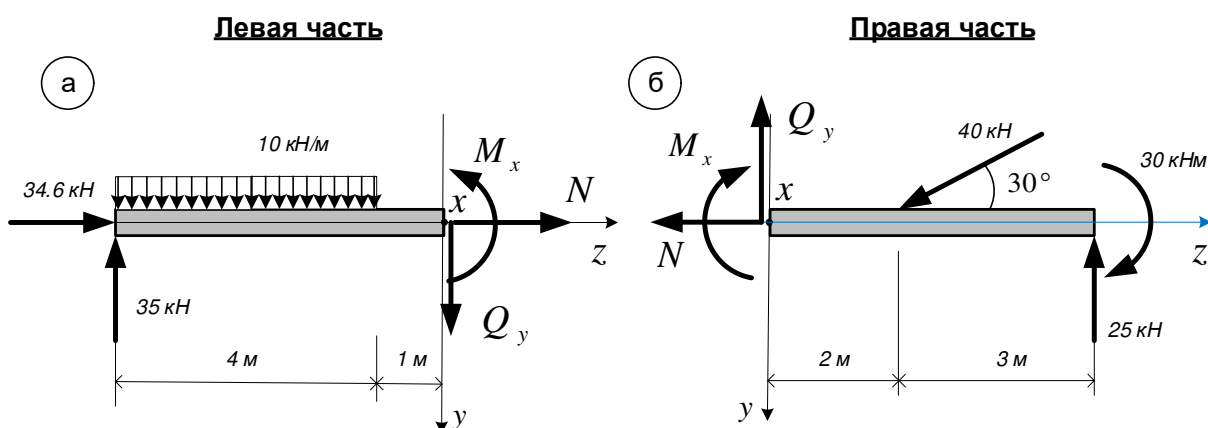


Рис. 27

Определим внутренние силы N , Q_y , M_x , используя для этого метод сечений.

- Рассечем стержень в середине пролета.
- Отбросим правую часть стержня (рис. 27, а).
- Действие правой части стержня на левую заменим неизвестными внутренними силами, считая их положительными.
- Для левой части стержня составим три уравнения равновесия, из которых найдем три неизвестных усилия.

$$\sum Z = 0; \quad N + 34,6 = 0; \quad N = -34,6 \text{ кН (сжатие).}$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_y + 10 \cdot 4 - 35 = 0; \quad Q_y = -5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_x = 0; \quad (10 \cdot 4) \cdot 3 - 35 \cdot 5 + M_x = 0;$$

$$M_x = -120 + 175 = 55 \text{ кНм (растяжение в нижних волокнах).}$$

Покажем, что результат не зависит от того, для какой части стержня составляются уравнения равновесия. Для этого рассмотрим равновесие правой части (рис. 27, б),

$$\sum Z = 0; \quad -N - 40 \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad N = -40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong -34,6 \text{ кН (сжатие)}.$$

$$\sum Y = 0; \quad -Q_y - 25 + 40 \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad Q_y = -25 + 20 = -5 \text{ кН}.$$

$$\sum m_x = 0; \quad -M_x - 40 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 - 30 + 25 \cdot 5 = 0$$

$$M_x = -40 - 30 + 125 = 55 \text{ кНм (растяжение в нижних волокнах)}.$$

Получен тот же результат.

Эпюры (графики) внутренних сил

Если взять для рассмотрения несколько поперечных сечений стержня и в каждом из них найти внутренние силы, то будет видно, что они изменяются в зависимости от расположения сечения. Если расположение поперечного сечения определить с помощью некоторой переменной z (рис. 28), то внутренние силы можно будет рассматривать как функции этой переменной. Найдя аналитические выражения этих функций, можно представить их в виде графиков.

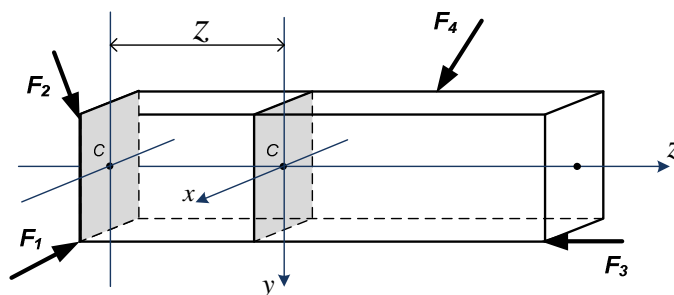


Рис. 28

Графики функции $N(z), Q_y(z), Q_x(z), M_x(z), M_y(z), M_z(z)$ называются **эпюрами внутренних сил**. При рассмотрении стержня на плоскости Ouz может быть построено только три таких графика: $N(z), Q_y(z), M_x(z)$. В про-

странственном случае сложного сопротивления можно построить самое большее шесть эпюр.

Для выполнения расчета на прочность необходимо знать наибольшее значение каждого из усилий и расположение сечений, в которых они этих значений достигают.

Сечения, в которых то или иное усилие достигает наибольшего значения, называют **опасными сечениями**. Основной целью построения эпюр внутренних сил является определение расположения опасных сечений и вычисление значений внутренних сил, которые в этих сечениях возникают.

Нелишним будет напомнить, что внутренние силы, как и напряжения, определяются только в системе главных центральных осей [2].

Аналитический способ построения эпюр

Эпюры внутренних сил строятся в следующей последовательности:

1. Определяются опорные реакции, если это необходимо.
2. Стержень разбивается на участки. Границами участков являются:
 - а) края стержня,
 - б) точки приложения сосредоточенных сил и моментов (включая реакции),
 - в) границы распределенных нагрузок.

Участки нумеруются последовательно слева направо, а в консольных стержнях - по направлению к заделке.

3. На каждом из участков произвольно выбирается сечение. Его положение указывается с помощью переменной z_i (где i - номер участка).

Переменная z_i отсчитывается обычно от левого или от правого края стержня.

4. На каждом i -м участке записываются аналитические выражения для усилий, показывающие, как усилия зависят от расстояния z_i .

Усилия выражаются через нагрузку, приложенную к левой или к правой части стержня в зависимости от начала отсчета z_i .

5. Полученные функции изображаются графически, для чего сначала подсчитываются их значения в ряде сечений. Линейные функции строятся по двум значениям, подсчитанным на краях участка. Для построения нелинейных функций обычно подсчитывают ещё и значение в середине участка. Экстремальные значения функций также вычисляются. Графики усилий (эпюры) строятся на осях, параллельных оси стержня, которые называются **базой эпюры**.

6. На всех эпюрах кроме эпюр изгибающих моментов положительные значения откладываются вверх. **Положительные значения изгибающих моментов** при проведении расчётов строительных конструкций традиционно **откладываются вниз**.

Существуют способы построения эпюр, при использовании которых нет необходимости решать уравнения равновесия и вообще записывать какие-либо аналитические выражения. Подробное изложение всех существующих способов построения эпюр внутренних сил можно найти в пособии [1].

12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛАХ

В §10 было сказано, что в каждой точке поперечного сечения стержня может возникать три компоненты напряжений (рис. 22).

Если бы напряжения были известны, то внутренние силы можно было бы найти путём интегрирования соотношений (37) и (38).

Однако, как раз напряжения, которые необходимо знать для записи условий прочности, являются неизвестными. Как это видно из указанных соотношений, эти неизвестные напряжения находятся под знаком интеграла. Обычно такая ситуация приводит к значительным математическим затруднениям.

Нормальные напряжения $\sigma_z(N)$ от действия продольной силы равномерно распределены по сечению, и по этой причине находятся легко по формуле

$$\sigma_z(N) = \frac{N}{A}, \quad (42)$$

где A – площадь поперечного сечения.

Напряжения от других усилий, а именно $Q_y(z), Q_x(z), M_x(z), M_y(z), M_z(z)$, не могут быть найдены таким же простым способом.

Задача определения нормальных напряжений при изгибе, то есть напряжений $\sigma_z(M_x)$ и $\sigma_z(M_y)$ была решена французским инженером Навье (*Navier*) (рис. 29). Полученные формулы носят его имя и имеют следующий вид:

$$\sigma_z(M_x) = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \quad (43)$$

$$\sigma_z(M_y) = \frac{M_y}{I_y} \cdot x, \quad (44)$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты относительно главных центральных осей, I_x, I_y – главные центральные моменты инерции относительно тех же осей, x и y – координаты точки в которой определяется напряжение.



Клод Луи Мари Анри Навье
(Claude Louis Marie Henri Navier)

Французский инженер и учёный.

Автор трудов в области строительной механики, сопротивления материалов, теории упругости, гидравлики и гидромеханики.

1785 - 1836

Рис. 29

Заметим, что когда ось y направлена вниз, положительные (растягивающие) напряжения $\sigma_z(M_x)$ по формуле (43) при положительном изгибающем моменте будут получаться в нижних точках сечения.

Наибольшие напряжения будут возникать в точках наиболее удалённых от соответствующих осей, и определяться по формулам:

$$\max \sigma_z(M_x) = \frac{M_x}{W_x}, \quad (45)$$

$$\max \sigma_z(M_y) = \frac{M_y}{W_y}, \quad (46)$$

где $M_x(z), M_y(z)$ – изгибающие моменты относительно главных центральных осей x и y , W_x, W_y – моменты сопротивления относительно тех же осей.

Пространственный вид эпюр $\sigma_z(N)$, $\sigma_z(M_x)$ и $\sigma_z(M_y)$ схематично показан на рис. 30. Отметим, что эти три напряжения все направлены по нормали к сечению, и по этой причине могут суммироваться, если определены для одной и той же точки.

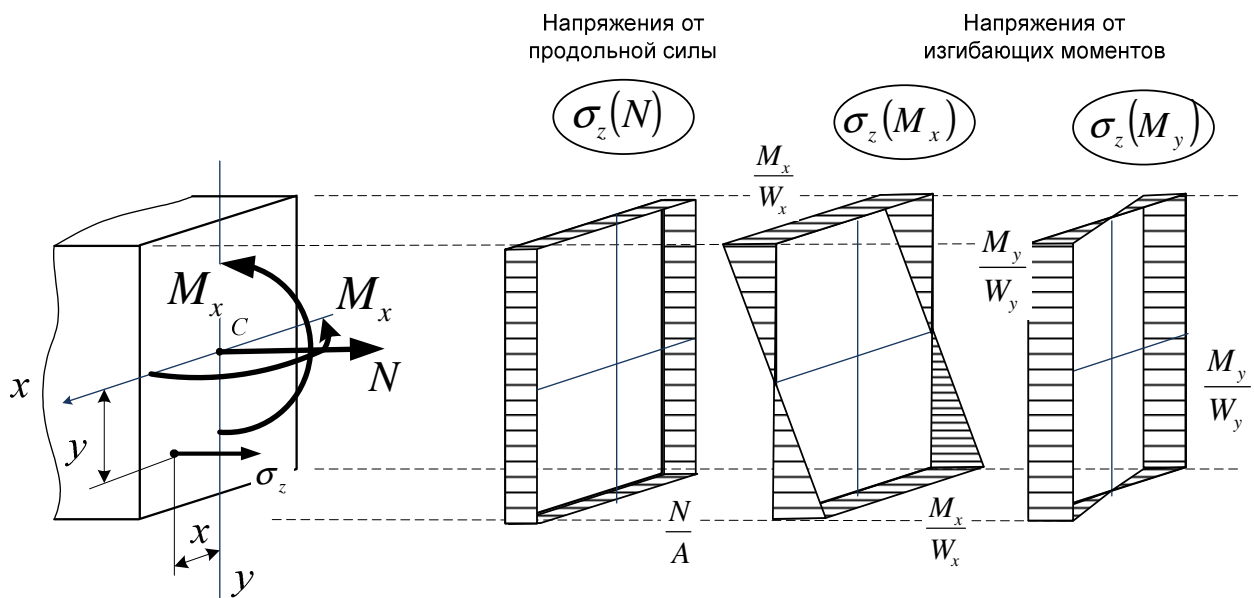


Рис. 30

Правила вычисления геометрических характеристик поперечных сечений подробно изложены в пособии [2].

Формулы для определения касательных напряжений от действия поперечных сил были получены инженером путей сообщения Дмитрием Ивановичем Журавским, известным мостостроителем (рис.31).


| | |
|--|---|
|  | <p><i>Русский учёный-механик и инженер, специалист в области мостостроения и строительной механики.</i></p> |
| <p>Журавский Дмитрий Иванович</p> | <p><i>В 1883–1889 годах член Совета Министров путей сообщения. Автор многих научных трудов по мостостроению и сопротивлению материалов.</i></p> |
| | <p><i>В 1855 году удостоен Демидовской премии Академии наук за научную деятельность.</i></p> |
| | <p>1821 – 1891</p> |

Рис. 31

Полученные им формулы имеют следующий вид и иллюстрируются на рис 32:

$$\tau_{zy}(Q_y) = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}, \quad (47)$$

$$\tau_{zx}(Q_x) = \frac{Q_x S_y^{\text{отс}}}{I_y d}, \quad (48)$$

где Q_y, Q_x – поперечные силы, действующие соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях,

I_x, I_y – главные центральные моменты инерции,

b и d – длины горизонтального и вертикального слоёв, проходящих через точку, в которой определяется напряжение,

$S_x^{\text{отс}}, S_y^{\text{отс}}$ – статические моменты частей сечения, отсекаемых указанными выше слоями относительно главных центральных осей.

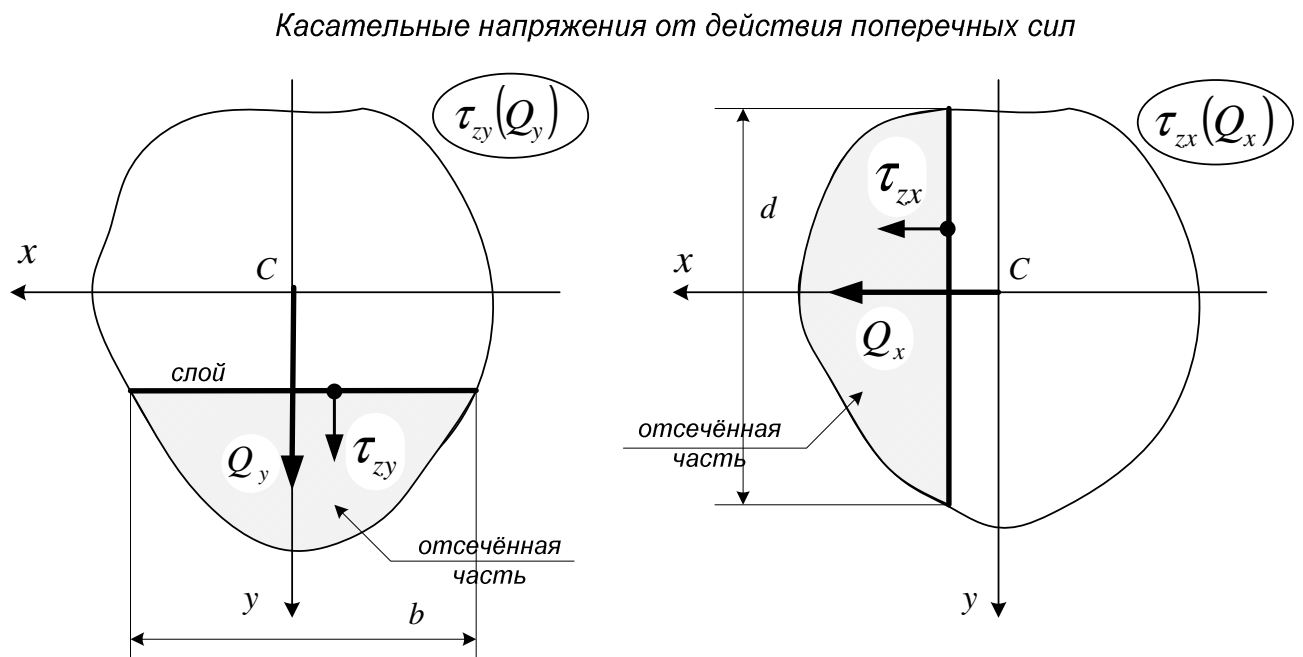


Рис. 32

Наиболее распространёнными сечениями в области железобетонного и деревянного строительства являются прямоугольник и круг.

Если геометрические характеристики прямоугольника подставить в формулы (47) и (48), то выяснится, что касательные напряжения изменяются по квадратичному закону, и достигают наибольших значений в точках, лежащих на центральных осях, перпендикулярных линии действия поперечной силы.

Эти значения равны:

$$\max \tau_{zy} = \frac{3 Q_y}{2 A}, \quad (49)$$

$$\max \tau_{zx} = \frac{3 Q_x}{2 A}, \quad (50)$$

где Q_y, Q_x – поперечные силы, действующие соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, A – площадь поперечного сечения.

Схематичное изображение касательных напряжений в прямоугольном сечении приведено на рис. 33.

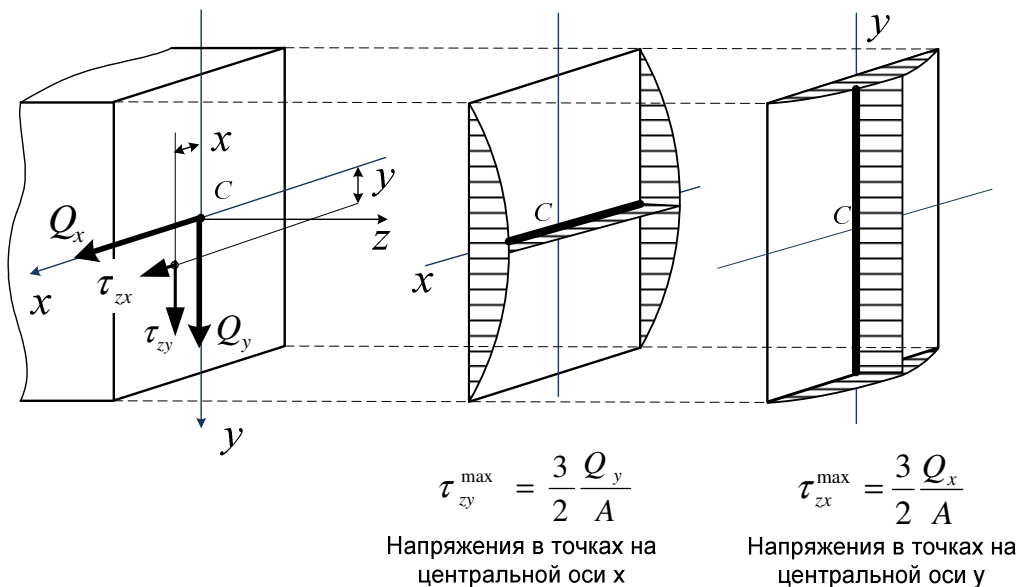


Рис. 33

Распределение касательных напряжений в круглом сечении происходит по более сложному закону, но максимальные напряжения также возникают в точках, расположенных на центральных осях. Значения наибольших напряжений в этом случае равны:

$$\max \tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{A}, \quad (51)$$

$$\max \tau_{zx} = \frac{4}{3} \frac{Q_x}{A}, \quad (52)$$

Схема распределения касательных напряжений в круглом сечении под действием вертикальной поперечной силы приведена на рис. 34.

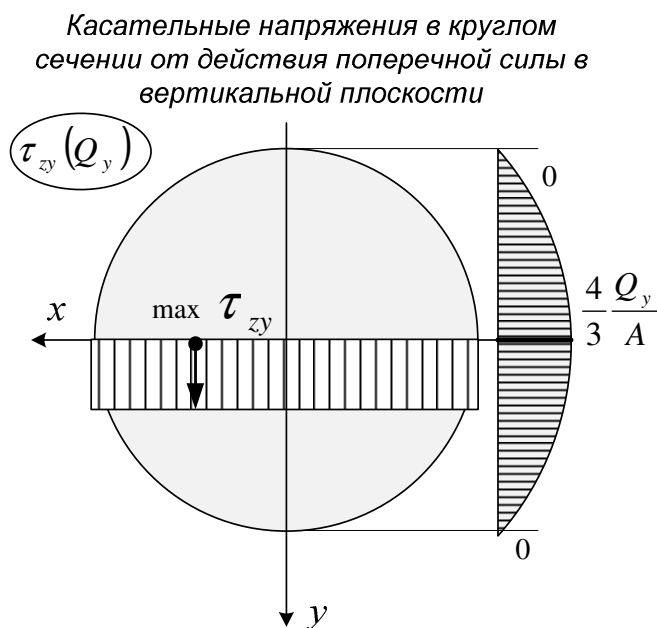


Рис. 34

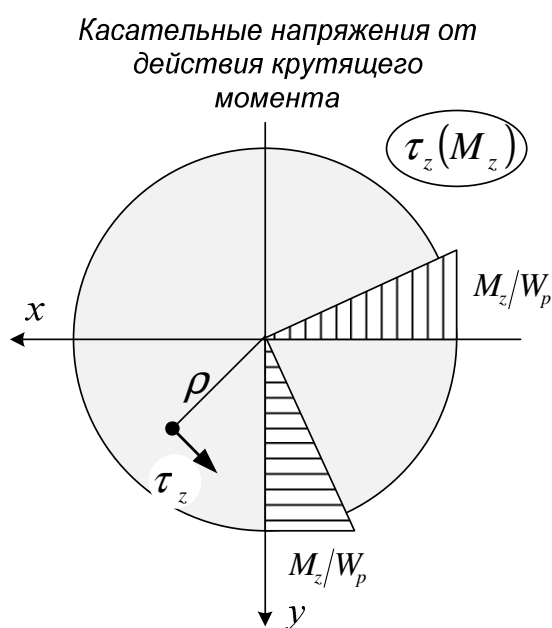


Рис. 35

При выводе формулы для определения касательных напряжений в стержнях с круглым и кольцевым сечением была дополнительно принята гипотеза **прямых радиусов**, по которой радиальные отрезки в процессе деформирования не искривляются.

Получено следующее выражение для напряжений:

$$\tau_z = \frac{M_z}{I_p} \rho, \quad (53)$$

где M_z – величина крутящего момента, I_p – полярный момент инерции, ρ – расстояние от рассматриваемой точки до центра тяжести сечения.

Напряжения при этом перпендикулярны к радиусу и направлены в сторону действия крутящего момента (рис. 35).

Из формулы (35) ясно, что наибольшие напряжения в этом случае возникают в точках контура сечения и равны

$$\max \tau_z = \frac{M_z}{W_p}, \quad (54)$$

где W_p – полярный момент сопротивления.

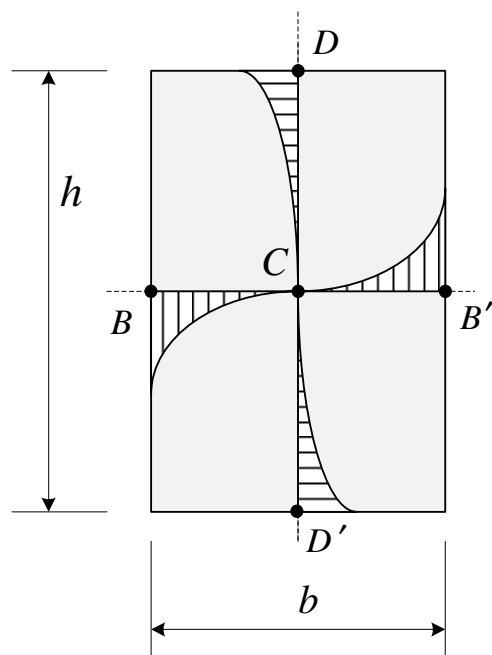
Аналогичные формулы для прямоугольного сечения методами сопротивления материалов получить невозможно, поскольку при кручении таких стержней нарушается гипотеза плоских сечений.

Аналитическое решение может быть получено методами теории упругости, которая не использует гипотезу плоских сечений. Чтобы иметь возможность выполнять практические расчеты, решения теории упругости, выполненные для различных соотношений высоты сечения к его ширине h/b , были приведены к табличной форме.

При таком подходе значения напряжений в серединах сторон прямоугольника вычисляются в зависимости от коэффициентов α и γ , которые в свою очередь принимаются по значению соотношения h/b .

Схема решения и характер распределения напряжений для этого случая приведены на рис. 36.

Заметим, что наибольшие напряжения возникают в точках, расположенных посередине длинной стороны.



На середине длинной стороны
 $\tau_B = \alpha hb^2$ (Максимальное напряжение)

На середине короткой стороны
 $\tau_B = \gamma \tau_D$

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| h/b | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 10.0 |
| α | 0.208 | 0.231 | 0.246 | 0.258 | 0.267 | 0.313 |
| γ | 1.0 | 0.859 | 0.795 | 0.766 | 0.753 | 0.742 |

Рис. 36

13. ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

При простых видах сопротивления в каждой точке тела возникает только одна компонента тензора напряжений. Так, например, при ЦРС или чистом изгибе возникает только нормальное напряжение (рис. 37, а), а при кручении или сдвиге только касательное напряжение (рис. 37,б).

Напряжения, возникающие в элементарном объёме и соответствующий вид тензора напряжений для этих случаев, показаны на рис.38.

В этом случае, как мы видели ранее, условие прочности можно записать просто, ограничив напряжение допустимой величиной.

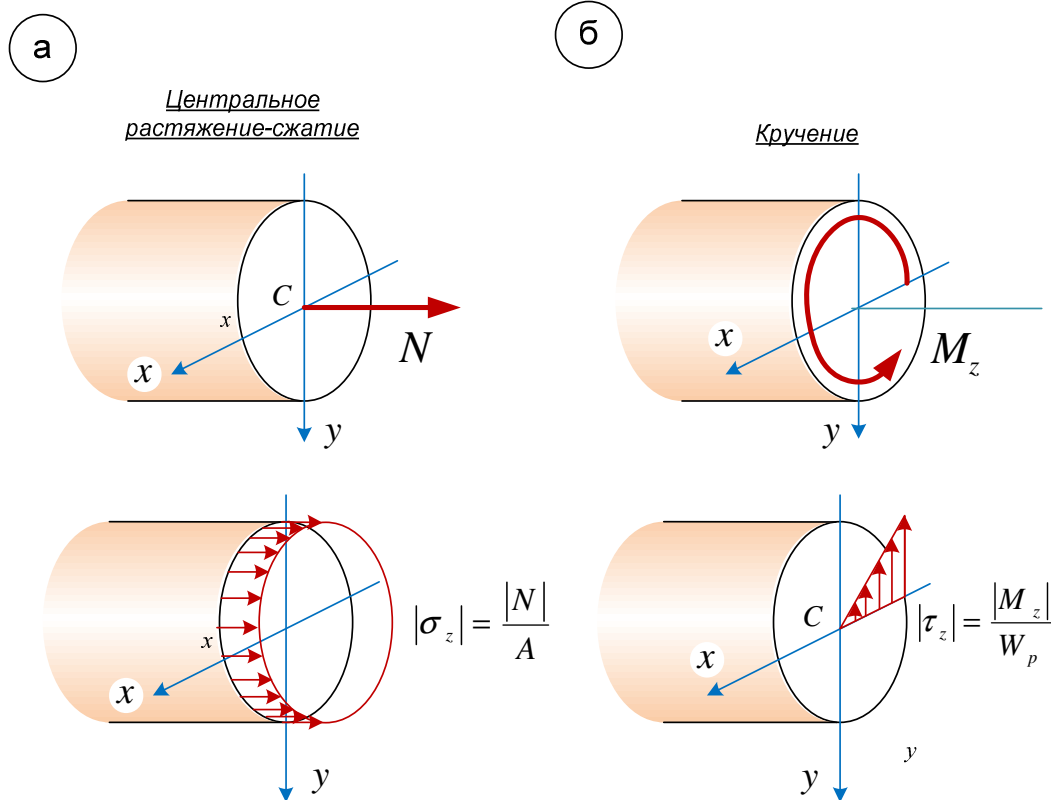


Рис.37

При прямом поперечном изгибе в сечениях возникает два усилия: изгибающий момент и поперечная сила. По этой причине прямой поперечный изгиб следует отнести к сложным видам сопротивления.

Но даже в этом случае, условие прочности по нормальным напряжениям записывают, не учитывая при этом напряжений касательных.

$$\max |\sigma_z| = \frac{\max |M_x|}{W_x} \leq [\sigma] \quad (55)$$

И наоборот, проверку по касательным напряжениям выполняют по формуле Журавского, не учитывая при этом величину нормальных напряжений.

$$\max |\tau_{zy}| = \frac{\max |Q_y| \cdot S_x^{\text{ПС}}}{I_x \cdot b_{\text{НС}}} \leq [\tau] \quad (56)$$

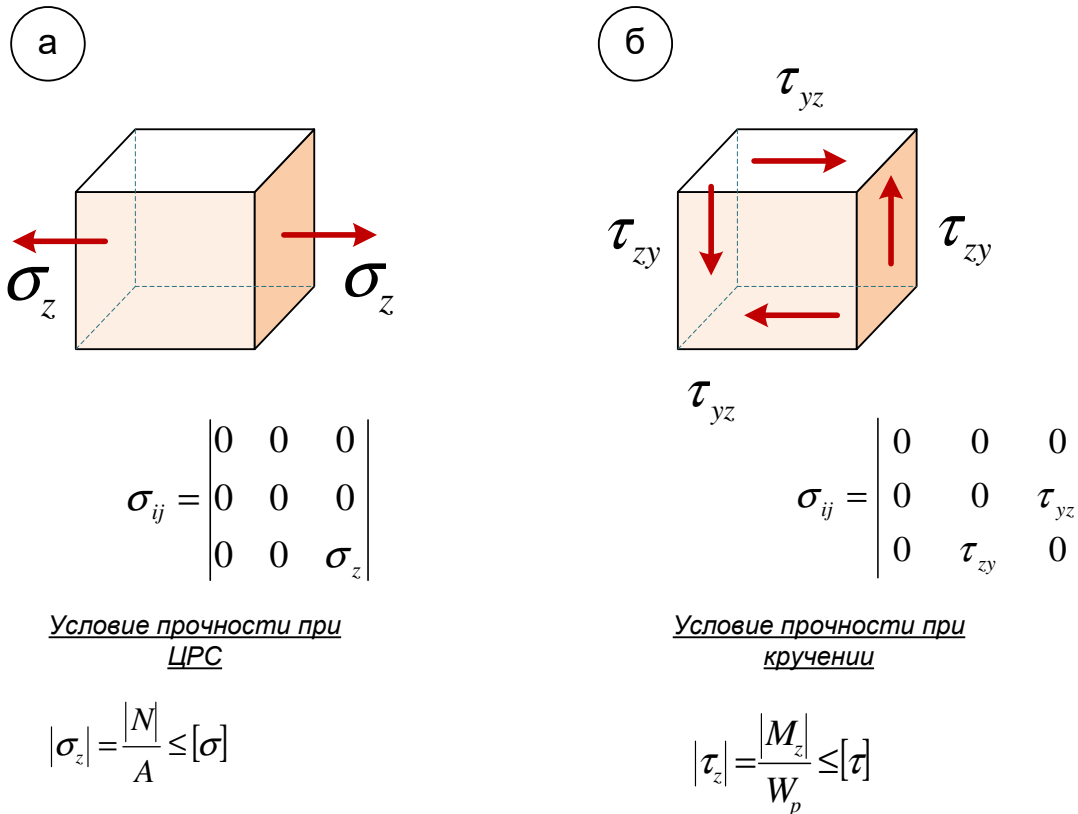


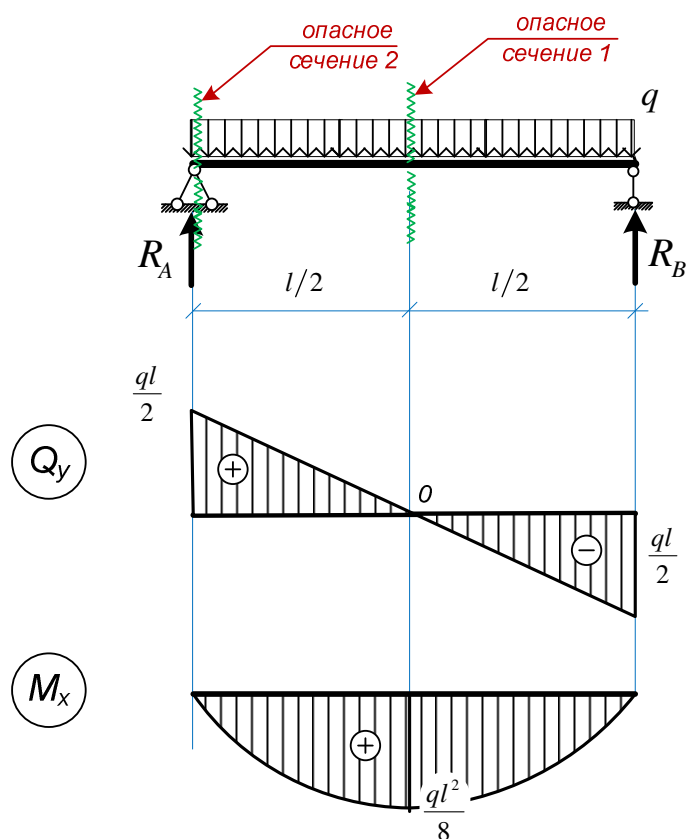
Рис.38

Причину такого выполнения расчёта поясним на двух примерах.

На рис. 39 показана балка, для которой расчёт по нормальным напряжениям выполняется для сечения 1, в котором отсутствует поперечная сила. Проверка прочности этой балки по касательным напряжениям выполняется для сечения 2, в котором отсутствует изгибающий момент.

Но даже в тех случаях, когда наибольший изгибающий момент и наибольшая поперечная сила возникают в одном и том же сечении (рис. 40), расчёт, тем не менее, во многих случаях выполняется по той же схеме.

Причина этого заключается в том, что в точках, где возникают наибольшие нормальные напряжения, касательные напряжения обращаются в ноль (точка А в опасном сечении на рис.41).



Опасное сечение 1

$$\max |\sigma_z| = \frac{\max |M_x|}{W_x} \leq [\sigma]$$

Касательные напряжения отсутствуют, так как отсутствует поперечная сила

Опасное сечение 2

$$\max |\tau_{zy}| = \frac{\max |Q_y| \cdot S_x^{\text{ПС}}}{I_x \cdot b_{\text{НС}}} < [\tau]$$

Нормальные напряжения отсутствуют, так как отсутствует изгибающий момент

Рис.39

И наоборот, в точках, где возникают наибольшие касательные напряжения, нормальные напряжения обращаются в ноль (точка С в опасном сечении на рис. 41).

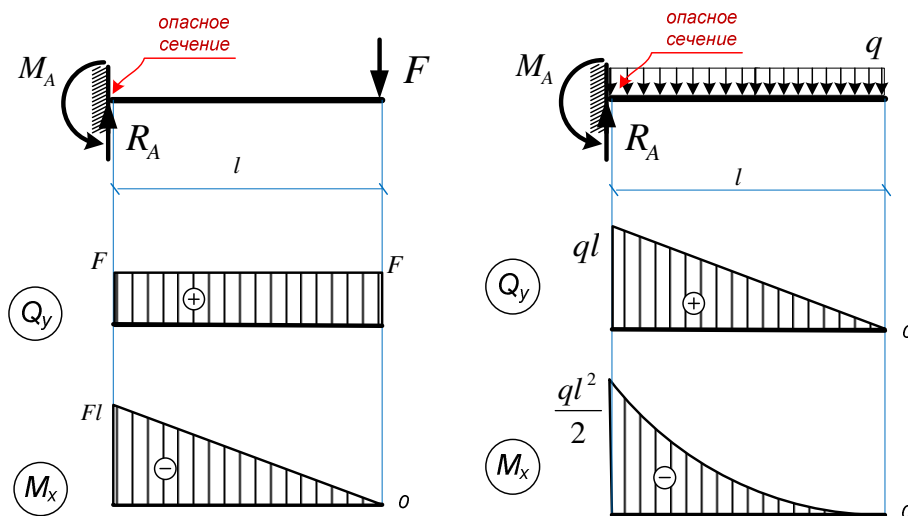


Рис.40

Осмотр находящихся в эксплуатации балок, показывает, что разрушение часто локализуется в месте сопряжения стенки двутавра и его пояса (точка B на рис. 41). По этой причине нормы расчёта стальных конструкций требуют для этой точки также выполнять проверку прочности.

В этой точке, как видно по эпюрам напряжений присутствуют как нормальные, так и касательные напряжения, каждое из которых оказывает своё влияние на прочность. Возникает вопрос, каким образом сформировать условие прочности, чтобы в нем учитывалось влияние обоих напряжений.

Аналогичная ситуация возникает и при других видах сложного сопротивления, например, при совместном действии растяжения-сжатия, при котором возникают в сечении нормальные напряжения, и кручения, при котором появляются касательные напряжения.

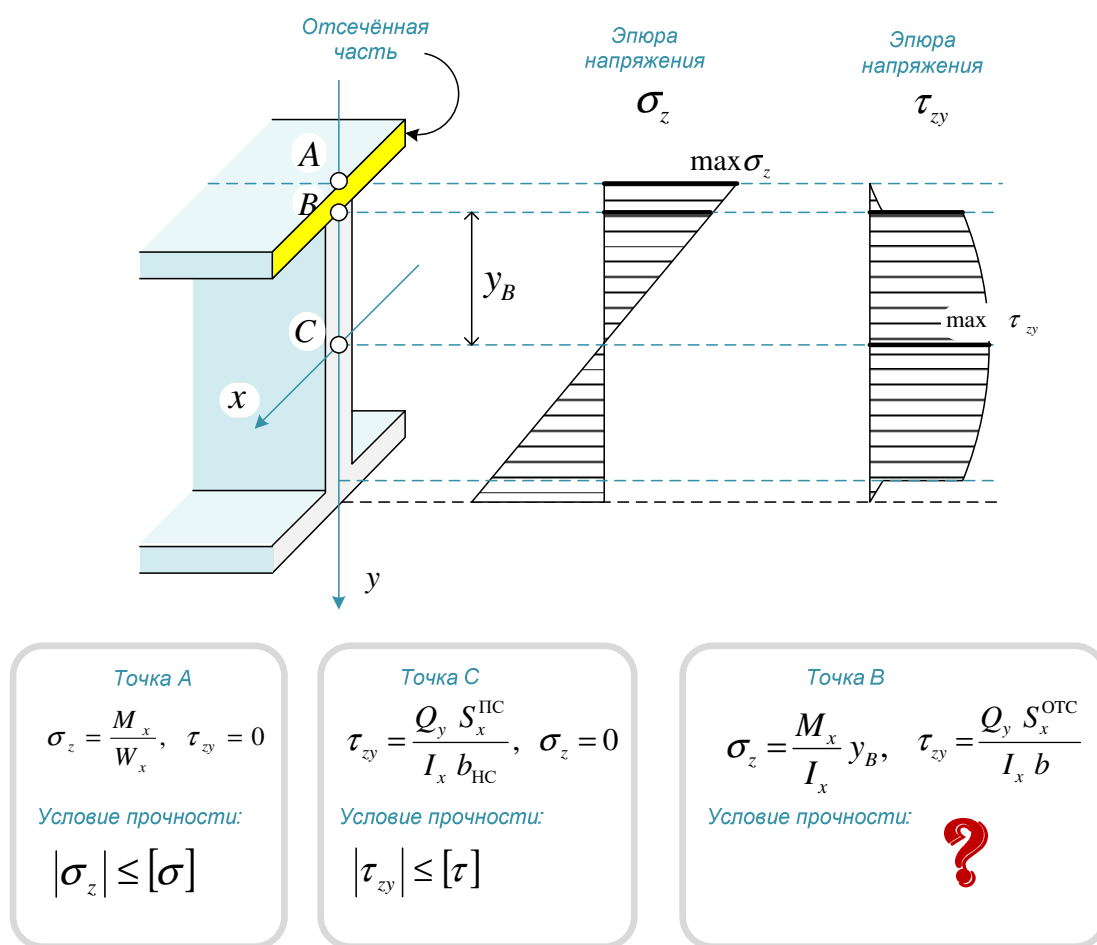


Рис.41

В самом общем случае в точке тела может действовать шесть независимых компонент тензора напряжений.

Проблема заключается в следующем:

каким образом сформировать условие прочности, которое учитывало бы влияние на прочность всех компонент напряжений.

Попытки разрешения данной проблемы привели к появлению нескольких теорий (гипотез) прочности. Рассмотрим, что между ними общего, и в чём они отличаются друг от друга.

14. КОНЦЕПЦИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Основную информацию о прочности материала получают из опытов на растяжение-сжатие. Из испытаний материалов на ЦРС получают, в частности, величину опасного напряжения. В дальнейшем, поделив опасное напряжение на коэффициент запаса, получают допускаемое напряжение.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{опас.}}}{n}, \quad n > 1 \quad (n - \text{коэффициент запаса}). \quad (57)$$

Общая идея, положенная в основу всех теорий прочности, заключается в том, чтобы установить при каких условиях материал, находящийся в условиях сложного напряжённого состояния, будет иметь равную прочность с материалом, находящимся в условиях ЦРС.

Другими словами, цель теорий прочности в том, чтобы (рис. 42) для некоторого сложного напряжённого состояния найти эквивалентное ему по прочности одноосное напряжённое состояние.

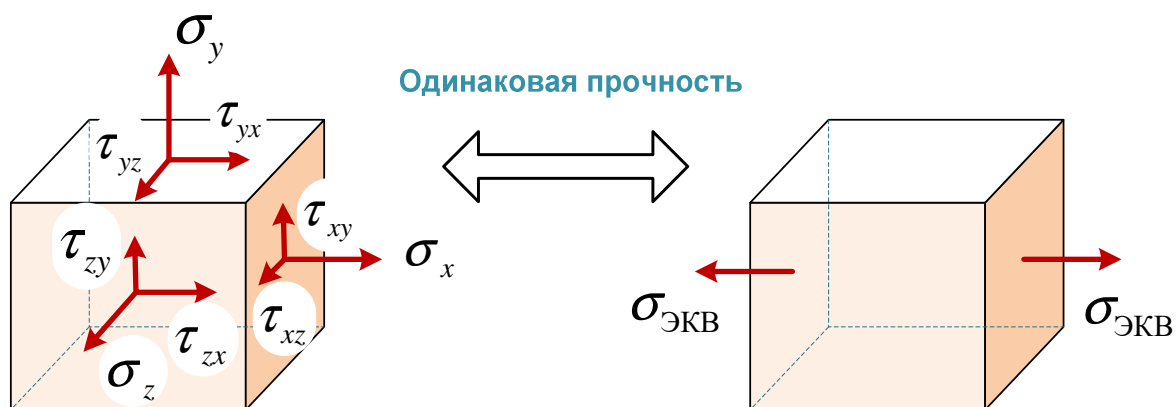


Рис.42

Ход рассуждений, принятый при установлении эквивалентности, для всех теорий прочности одинаков. Он заключается в выполнении следующих действий:

- Выбирается физическая величина, которая определяющим образом влияет на прочность. Обозначим эту величину буквой Φ .
- Предполагаем, что прочность при сложном напряжённом состоянии и прочность в условиях ЦРС будет одинакова, при равных значениях этой величины:

$$\Phi = \Phi_{\text{ЭКВ}} \quad (58)$$

То есть мы ожидаем, что разрушение при сложном напряжённом состоянии произойдёт, когда величина Φ достигнет того же значения, которая она имеет при разрушении в условиях ЦРС.

- Предположим, что величина Φ может быть выражена через напряжения.

Тогда значение Φ при сложном напряжённом состоянии будет зависеть от всех компонент тензора напряжений, число которых в общем случае равно шести:

$$\Phi = \Phi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zy}). \quad (59)$$

Значение $\Phi_{\text{ЭКВ}}$ в условиях ЦРС будет зависеть только от $\sigma_{\text{ЭКВ}}$:

$$\Phi_{\text{ЭКВ}} = \Phi_{\text{ЭКВ}}(\sigma_{\text{ЭКВ}}). \quad (60)$$

- Приравнивая полученные выражения, получим уравнение вида

$$\Phi_{\text{ЭКВ}}(\sigma_{\text{ЭКВ}}) = \Phi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zy}), \quad (61)$$

решая которое, можно получить выражение для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zy}) \quad (62)$$

- Получив это выражение, мы можем сформировать условие прочности так, как это делается при ЦРС, но при этом влияние на прочность всех компонент напряжений будет учтено:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma] \quad (63)$$

Мнения различных исследователей на то, какая физическая величина наибольшим образом влияет на прочность материала, разошлись, и в дальнейшем было предложено несколько теорий прочности.

Рассмотрим четыре классические теории прочности.

15. ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

(Первая)

Разрушение произойдёт, когда наибольшее нормальное напряжение при сложном напряжённом состоянии достигнет того же значения, при котором происходит разрушение материала в условиях ЦРС.

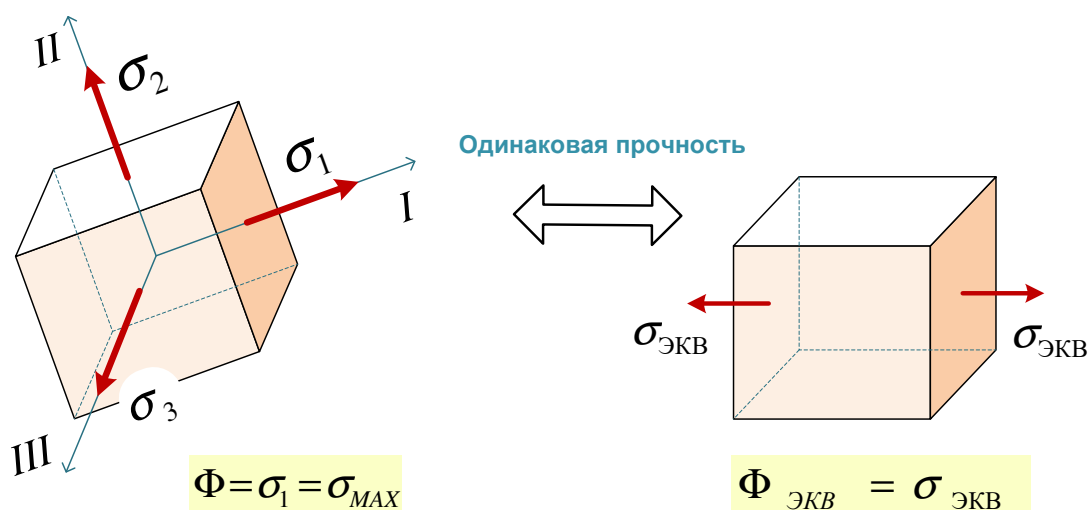


Рис.43

Приравнявая выражения Φ и $\Phi_{\text{ЭКВ}}$, которые приведены на рис. 43, получаем:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_{\text{MAX}}. \quad (64)$$

Условие прочности будет сформулировано в виде:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_{\text{MAX}} \leq [\sigma]. \quad (65)$$

Наибольшее нормальное напряжение (главное напряжение) записать аналитически для общего случая довольно трудно.

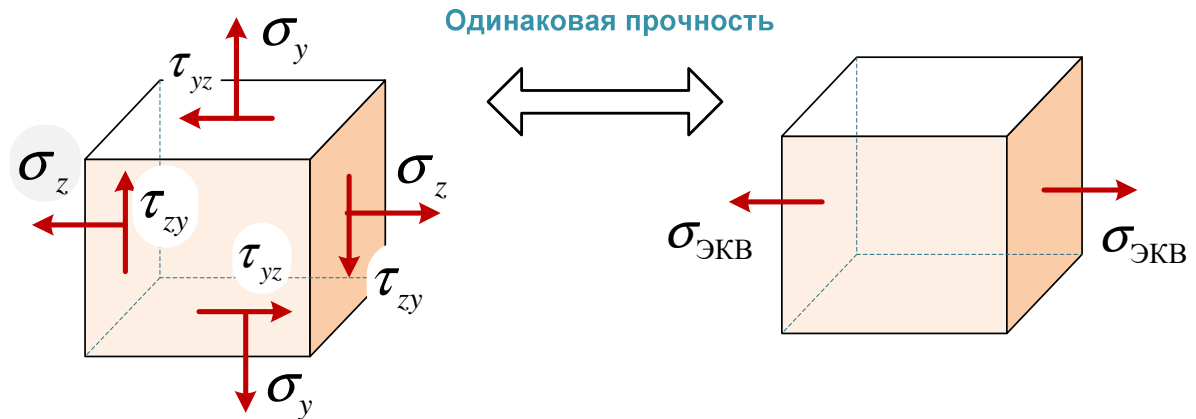


Рис. 44

Если ограничиться рассмотрением случая плоского напряжённого состояния (рис. 44), то для его определения нужно воспользоваться формулой (33):

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_{\text{MAX}} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \quad (66)$$

Опыты показывают, что данная гипотеза является наилучшей при описании прочности хрупких материалов.

16. ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ ПРОДОЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

(Вторая)

Разрушение произойдёт, когда наибольшая продольная деформация при сложном напряжённом состоянии достигнет того же значения, при котором происходит разрушение материала в условиях ЦРС.

Опыты показывают, что данная гипотеза плохо описывает прочность большинства традиционных материалов. Однако, в последнее время было обнаружено, что её можно использовать при расчёте прочности некоторых композитных материалов.

Пусть напряжённое состояние описывается тремя главными напряжениями (рис. 45) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Величину наибольшей продольной деформации можно получить из обобщённого закона Гука (8):

$$\Phi = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (67)$$

В случае ЦРС (рис. 45) $\sigma_1 = \sigma_{\text{ЭКВ}}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$, и тогда

$$\Phi_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E}. \quad (68)$$

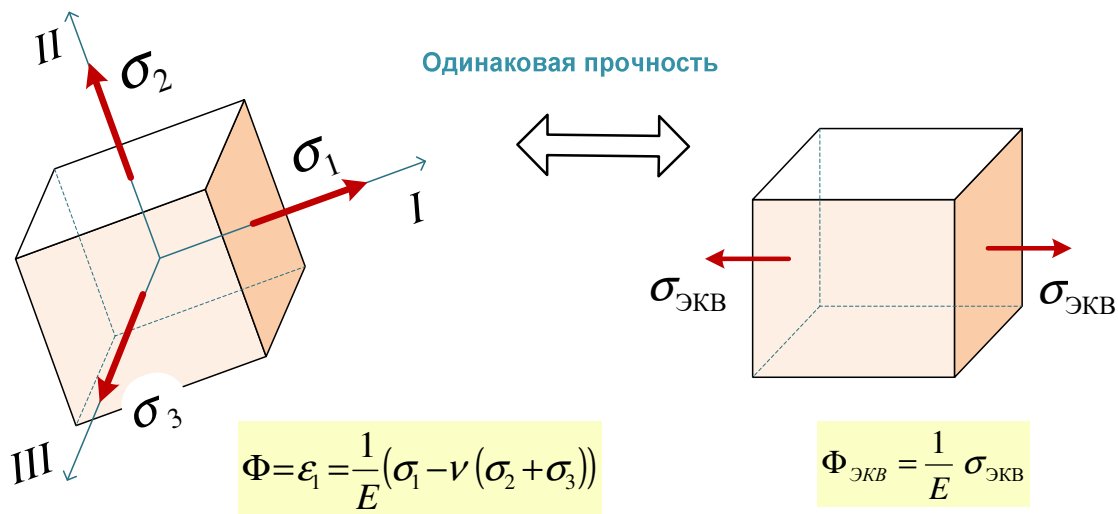


Рис.45

Приравнявая выражения Φ и $\Phi_{\text{ЭКВ}}$, получаем, что по второй гипотезе

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3). \quad (69)$$

Условие прочности будет сформулировано в виде:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (70)$$

17. ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ **(Третья)**

Разрушение произойдёт, когда наибольшее касательное напряжение при сложном напряжённом состоянии достигнет того же значения, при котором происходит разрушение материала в условиях ЦРС.

Известно, что наибольшие касательные напряжения равны половине разности наибольшего и наименьшего главных напряжений, то есть величину наибольшего касательного напряжения можно получить по формуле

$$\Phi = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2} \quad (71)$$

В случае ЦРС $\sigma_1 = \sigma_{ЭКВ}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, и тогда

$$\Phi_{ЭКВ} = \frac{\sigma_{ЭКВ}}{2}. \quad (72)$$

Приравнявая выражения Φ и $\Phi_{ЭКВ}$, получаем, что по третьей гипотезе

$$\sigma_{ЭКВ}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (73)$$

Условие прочности будет сформулировано в виде:

$$\sigma_{ЭКВ}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (40)$$

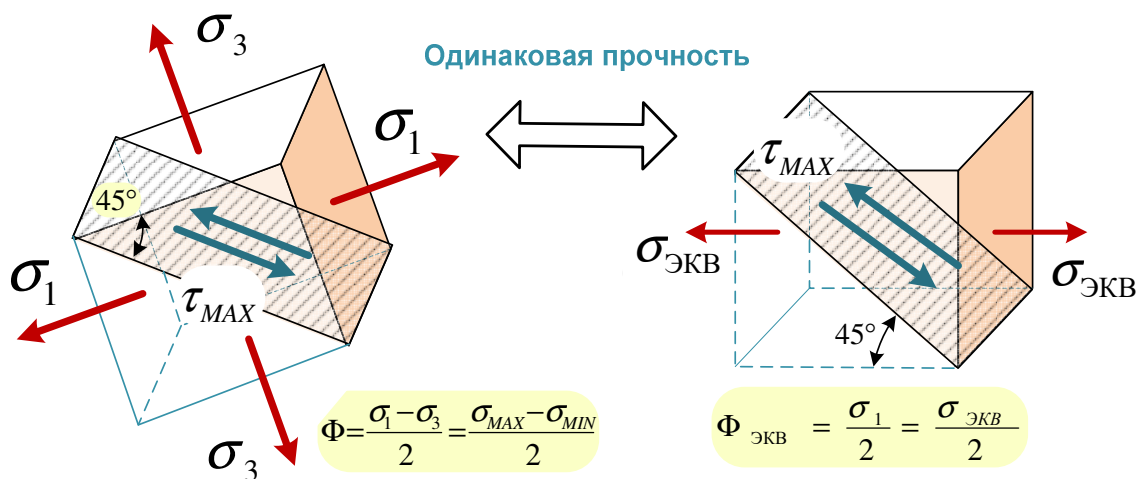


Рис.46

Если ограничиться случаем плоского напряжённого состояния, наибольшие касательные напряжения можно получить по формуле (20):

$$\Phi = \tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (74)$$

В этом случае, приравнявая Φ и $\Phi_{ЭКВ}$ получим, что условие прочности примет вид

$$\sigma_{ЭКВ}^{III} = \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (75)$$

В случае, когда присутствует только одно нормальное напряжение, как, например, в стенке двутавровой балки, условие прочности ещё упростится:

$$\sigma_{ЭКВ}^{III} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (76)$$

В научной и учебной литературе теория наибольших касательных напряжений часто связывается с именами Треска и Генки.

Теория наибольших касательных напряжений очень хорошо описывает прочность материалов, обладающих выраженными пластическими свойствами, (например, таких как малоуглеродистая сталь).

18. ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШЕЙ ЭНЕРГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ **(Четвёртая)**

Разрушение произойдёт, когда удельная энергия изменения формы при сложном напряжённом состоянии достигнет того же значения, при котором происходит разрушение материала в условиях ЦРС.

Приходящаяся на единицу объёма энергия деформации (удельная энергия деформации) разделяется на две части:

$$E = E_v + E_f, \quad (77)$$

где E_v - часть энергии, расходуемая на изменение объёма,

а E_f - часть энергии, расходуемая на изменение формы.

Опыты американского учёного Бриджмена, по результатам которых он получил в 1946 году Нобелевскую премию, показали, что изменение объёма практически не влияет на прочность пластичных материалов.

Если считать, что удельная энергия формоизменения является основным разрушающим фактором, и выразить её через главные напряжения, то мы получим, что

$$\Phi = E_f = \frac{(1+\nu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (78)$$

Поскольку при ЦРС $\sigma_1 = \sigma_{\text{ЭКВ}}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, то

$$\Phi_{\text{ЭКВ}} = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_{\text{ЭКВ}}^2 \quad (79)$$

Приравнивая выражения Φ и $\Phi_{\text{ЭКВ}}$, получаем, что по четвёртой (энергетической) гипотезе

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (80)$$

В условиях плоского напряжённого состояния (рис. 13) эквивалентное напряжение может быть выражено через компоненты напряжений, и условие прочности будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z \sigma_y + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (81)$$

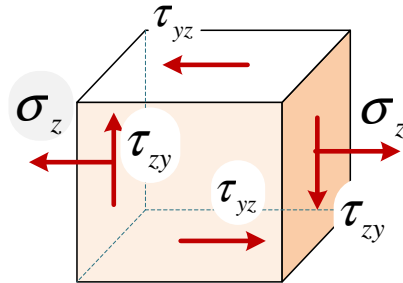


Рис.47

При наличии только двух компонент напряжений σ_z и τ_{zy} (рис. 47), что очень часто имеет место при проведении практических расчётов, получим следующее выражение:

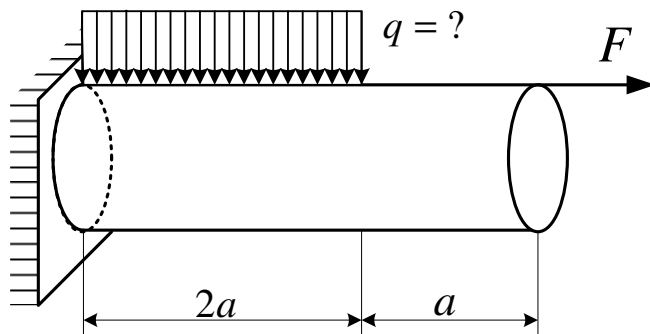
$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (82)$$

В научной и учебной литературе энергетическая теория часто связывается с именем Мизеса. Даже в программах по расчёту конструкций приходится встречать выражение «эквивалентное напряжение по Мизесу».

Считается, что теория Мизеса наилучшим образом подходит для металлических, в первую очередь стальных, конструкций.

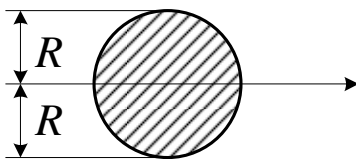
19. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ НА ПРОЧНОСТЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

ПРИМЕР 1



Определить допустимую величину распределённой нагрузки q .
Расчёт выполнить с использованием 4-й (энергетической) теории прочности.

Поперечное сечение



Дано:

$$F = 200 \text{ кН}$$

$$a = 1 \text{ м}$$

$$R = 8 \text{ см}$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Рис.48

РЕШЕНИЕ

- Определяем геометрические характеристики сечения

$$A = \pi R^2 = 201 \text{ см}^2,$$

$$W_x = \frac{\pi R^3}{4} = 402 \text{ см}^3.$$

- Строим эпюры внутренних сил и находим положение опасного сечения. Опасное сечение находится в заделке, где действуют наибольший изгибающий момент и наибольшая поперечная сила (рис. 49).

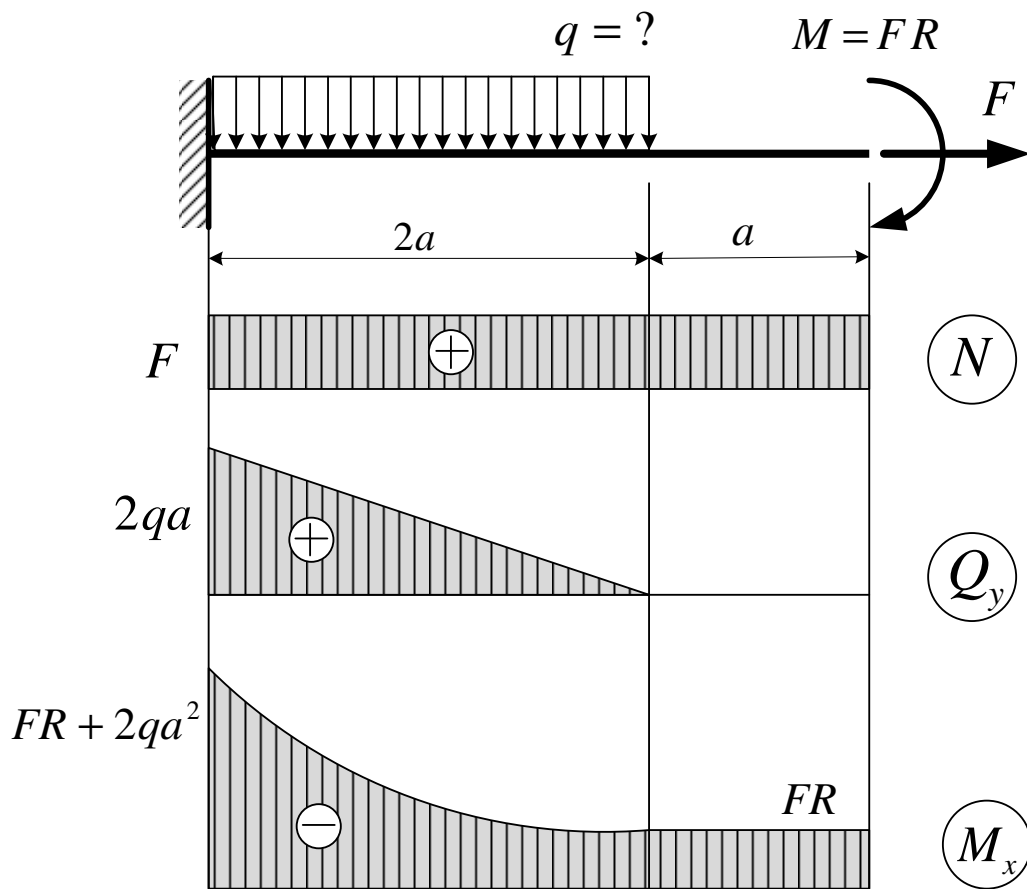


Рис.49

- Определяем внутренние силы в опасном сечении (рис. 49):

$$N = F = 200 \text{ кН},$$

$$M_x = FR + 2qa^2 = 200 \cdot 8 + 2q \cdot 100^2 = 1600 + 20000q,$$

$$Q_y = 2qa = 200q.$$

- Вычисляем наибольшие напряжения от каждого из усилий:

$$\sigma_z(N) = \frac{N}{A} = \frac{200}{201} \cong 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

$$\sigma_z(M_x) = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1600 + 20000q}{400} = 4 + 50q,$$

$$\tau_{zy} = \frac{4 Q_y}{3 A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{200q}{200} = 1.33q.$$

- Строим эпюры напряжений по высоте сечения (рис.50)

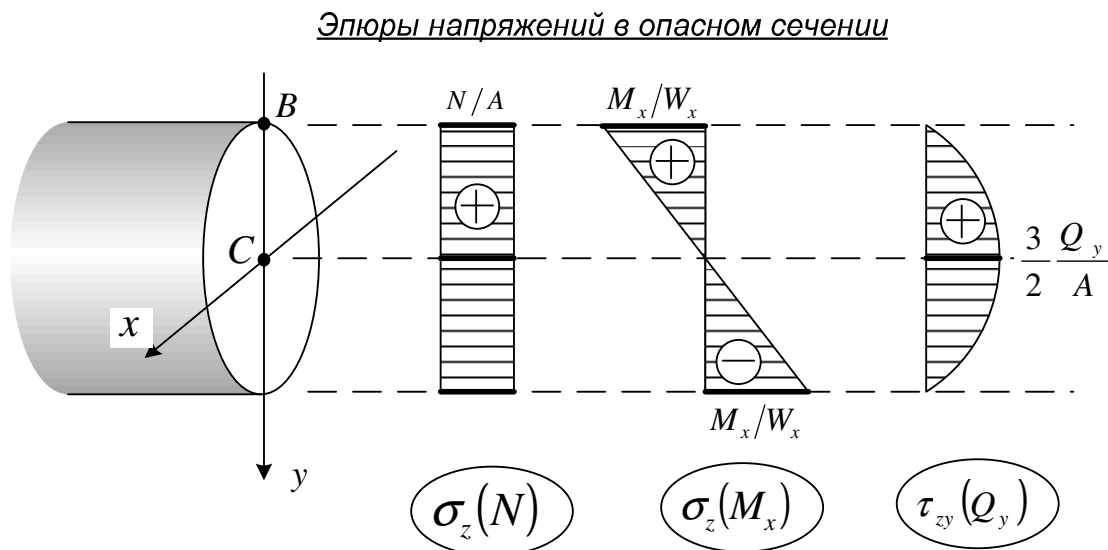


Рис.50

- Вычисляем напряжения и находим решения, исходя из условий прочности, записанных для опасных точек:

Точка *B* (набольшие нормальные напряжения)

$$\sigma_z = \sigma_z(N) + \sigma_z(M_x) = 1 + 4 + 50q = 5 + 50q,$$

$$\tau_{zy} = 0.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_z \leq [\sigma], \quad \text{или} \quad 5 + 50q \leq 16,$$

Откуда из условия прочности в точке *B* получаем:

$$q \leq \frac{11}{50} = 0.22 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 22 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Точка С (наибольшие касательные напряжения):

$$\sigma_z = \sigma_z(N) = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

$$\tau_{zy} = 1.33q.$$

Вычисляем эквивалентное напряжение по IV теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{(\sigma_z)^2 + 3(\tau_{zy})^2} = \sqrt{1^2 + 3(1.33q)^2} = \sqrt{1^2 + 5.33q^2}.$$

Записываем условие прочности для точки С:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma], \quad \text{или} \quad \sqrt{1^2 + 5.33q^2} \leq 16,$$

откуда получаем:

$$1^2 + 5.33q^2 \leq 256,$$

$$q \leq \sqrt{\frac{256-1}{5.3}} = 6.9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 690 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

- Решая систему уравнений, полученную из условий прочности, записанных для точек В и С, получаем значение допускаемой нагрузки:

$$\begin{cases} q \leq 22 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \\ q \leq 690 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \end{cases}$$

$$[q] = 22 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Задача решена

Примечание

Как видим, в рассмотренной задаче решающим оказалось условие прочности, записанное для точки в которой не действуют касательные напряжения, возникающие от поперечной силы.

Такая ситуация является характерной для длинных стержней, у которых длина стержня превышает размеры сечения более, чем в 7÷8 раз. Для таких стержней обычно выполняют упрощенный расчёт на прочность, не учитывая влияние поперечных сил.

ПРИМЕР 2

Определить геометрический параметр «а», определяющий размер поперечного сечения стержня, изображённого на рис 51. При необходимости использовать IV (энергетическую) теорию прочности.

Дано: сила $F = 80$ кН, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

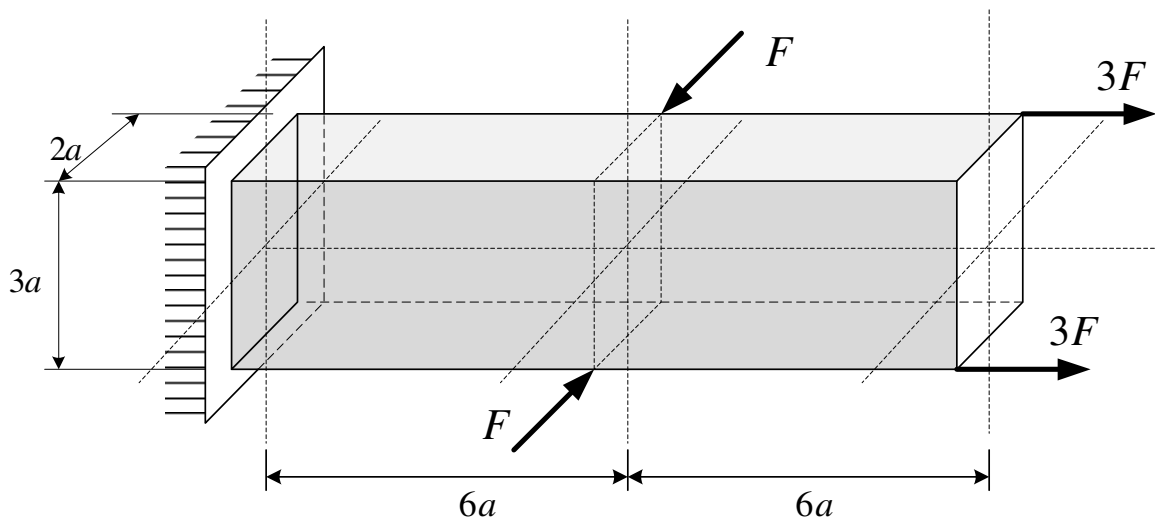


Рис.51

РЕШЕНИЕ

- Переносим приложенные силы к точкам расположенным на оси стержня и получаем расчётную схему стержня, показанную на рис. 52.
- Строим эпюры внутренних сил и замечаем, что опасными являются сечения расположенные на первом (левом) участке, на котором действует продольная сила и крутящий момент.

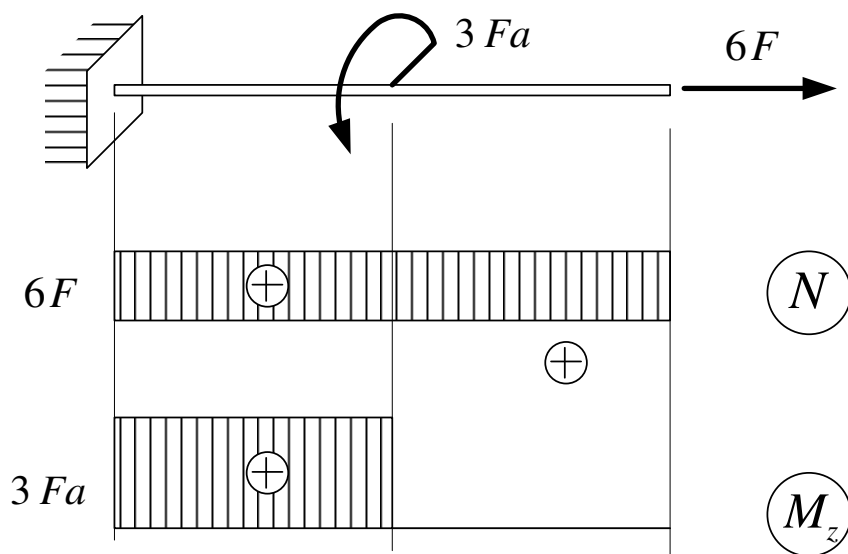
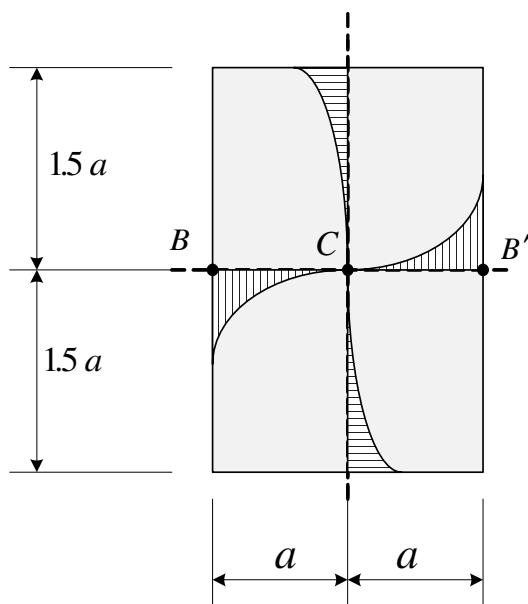


Рис.52

- Определяем геометрические характеристики прямоугольного сечения (рис. 29).
- Определяем напряжения от продольной силы (равномерно распределены по сечению), и от крутящего момента (достигают наибольших значений в точках B и B'). Очевидно, что именно эти точки являются опасными.



Геометрические
характеристики сечения

$$A = 6a^2$$

$$\frac{h}{b} = 1.5$$

$$\alpha = 0.231$$

$$W_k = 0.231 \cdot 3a(2a)^2 = 2.77a^3$$

Рис.53

- Определяем эквивалентное напряжение в опасных точках:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{6F}{6a^2} = \frac{F}{a^2}$$

$$\tau_z = \frac{M_z}{W_k} = \frac{3Fa}{2.77a^3} = 1.09 \frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} = \frac{F}{a^2} \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1.09^2} = 2.13 \frac{F}{a^2}$$

- Записываем условие прочности по IV теории прочности:

$$2.13 \frac{F}{a^2} \leq [\sigma]$$

- Из условия прочности находим значение геометрического параметра «a»:

$$a \geq \sqrt{2.13 \frac{F}{[\sigma]}} = \sqrt{2.13 \cdot \frac{80}{16}} = 3.26 \text{ см.}$$

Задача решена

ЛИТЕРАТУРА

1. Маковкин Г.А. Внутренние силы и способы их определения. Учебное пособие. Н. Новгород, Нижегород. гос. архитектур-строит. ун-т, 2022. ISBN 978-5-528-00476-1
2. Маковкин Г.А. Поперечные сечения стержневых элементов конструкций. Учебное пособие. Н. Новгород, Нижегород. гос. архитектур-строит. ун-т, 2022. ISBN 978-5-528-00480-8
3. Гарипов В.С.. Сопротивление материалов в примерах и задачах. Расчетно-графические работы. Часть 2 : учебное пособие. / Гарипов В.С., Горелов С.Н., Колотвин А.В. ; А.В. Колотвин; С.Н. Горелов; В.С. Гарипов. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016. – 139 с. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/69948.html>. – ISBN ISBN 978-5-7410-1550-6.
4. Гарипов В.С.. Сопротивление материалов в примерах и задачах. Расчетно-графические работы. Часть 1 : учебное пособие. / Гарипов В.С., Горелов С.Н., Колотвин А.В. ; А.В. Колотвин; С.Н. Горелов; В.С. Гарипов. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016. – 196 с. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/69947.html>. – ISBN ISBN 978-5-7410-1549-0.
5. Гильман А. А.. Сопротивление материалов : Учебное пособие. / Гильман А. А. ; А. А. Гильман. – Саратов : Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, ЭБС АСВ, 2012. – 95 с. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/76513.html>. – ISBN ISBN 978-5-7433-2513-9.

6. Горшков А. Г.. Сопротивление материалов : Учебное пособие. / Горшков А. Г., Трошин В. Н., Шалашилин В. И. ; Горшков А. Г.. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 542 с. – URL: URL: <http://www.iprbookshop.ru/17445.html>. – ISBN ISBN 5-9221-0181-1.
7. Дарков Анатолий Владимирович. Сопротивление материалов : учеб. для студентов втузов. / Дарков Анатолий Владимирович, Шпиро Гейман Симонович ; Москва : Высш. шк., 1989. – 624 с. – ISBN ISBN 5-06-000491-0.
8. Дарков Анатолий Владимирович. Сопротивление материалов : учеб. для втузов. / Дарков Анатолий Владимирович, Шпиро Гейман Симонович ; Москва : Высш. шк., 1975. – 654 с.
9. Кирсанова Э. Г.. Сопротивление материалов : Учебное пособие. / Кирсанова Э. Г. ; Э. Г. Кирсанова. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2019. – 111 с. – URL: URL: <http://www.iprbookshop.ru/79814.html>. – ISBN ISBN 978-5-4486-0440-9.
10. Кирсанова Э. Г.. Сопротивление материалов : Учебное пособие. / Кирсанова Э. Г. ; Кирсанова Э. Г.. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2012. – 110 с. – URL: URL: <http://www.iprbookshop.ru/733.html>. – ISBN ISBN 978-5-904000-57-8.
11. Подскребко М. Д.. Сопротивление материалов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести и механики разрушения : Учебное пособие. / Подскребко М. Д. ; Подскребко М. Д.. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 669 с. – URL: URL: <http://www.iprbookshop.ru/20141.html>. – ISBN ISBN 978-985-06-1373-8.

12. Подскребко М. Д.. Сопротивление материалов : Учебник. / Подскребко М. Д. ; Подскребко М. Д.. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 798 с. – URL: URL: <http://www.iprbookshop.ru/20140.html>. – ISBN ISBN 978-985-06-1293-9.
12. Подскребко М. Д.. Сопротивление материалов : Практикум по решению задач. Учебное пособие. / Подскребко М. Д. ; Подскребко М. Д.. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 688 с. – URL: URL: <http://www.iprbookshop.ru/20139.html>. – ISBN ISBN 978-985-06-1458-2.
14. Феодосьев Всеволод Иванович. Сопротивление материалов : учеб. для втузов. / Феодосьев Всеволод Иванович ; М. : Наука, 1974. – 559 с.
15. Феодосьев Всеволод Иванович. Сопротивление материалов : учеб. для втузов. / Феодосьев Всеволод Иванович ; М. : Наука, 1986. – 512 с.

Маковкин Георгий Анатольевич
Штенберг Валерия Борисовна
Кожанов Дмитрий Александрович

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
И ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60x90 1/8 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 9,1. Усл. печ. л. 9,3 Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru