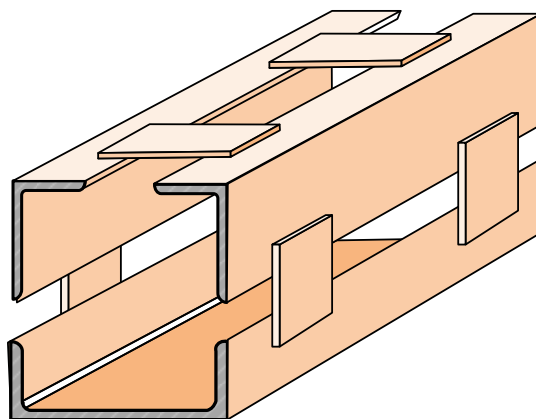
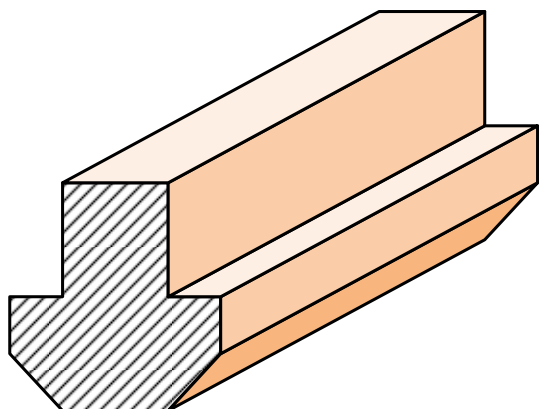


Г. А. Маковкин, М. Ф. Сухов

ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие



Нижний Новгород
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г. А. Маковкин, М. Ф. Сухов

ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижегород
ННГАСУ
2022

ББК 30.12
М 16
С 91
УДК 539.3

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

А.К. Ломунов – д-р физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник НИИ Механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный ун-т им. Н. И. Лобачевского»

А.Ю. Панов – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»

Маковкин Г.А. Поперечные сечения стержневых элементов конструкций [Текст]: учеб. пособие / Г. А. Маковкин, М. Ф. Сухов; Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ, 2022. – 43 с. ISBN 978-5-528-00480-8

Пособие содержит теоретические сведения и основные методы расчета геометрических характеристик поперечных сечений стержневых элементов строительных конструкций: стоек, колонн, балок, валов. Примеры расчета сопровождаются необходимыми пояснениями к решению. В пособии приводятся многочисленные примеры и задачи для самостоятельного решения домашних и классных контрольных работ по дисциплине Техническая механика.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Рис. 45

ББК 30.12

ISBN 978-5-528-00480-8

© Г.А.Маковкин,
М.Ф.Сухов, 2022
© ННГАСУ, 2022

Содержание

<i>Введение</i>	4
<i>1. Площадь</i>	6
<i>2. Статические моменты</i>	8
<i>3. Моменты инерции</i>	10
<i>4. Моменты инерции простейших фигур</i>	13
<i>4.1. Прямоугольник относительно осей симметрии</i>	14
<i>4.2. Треугольник относительно центральной оси, проходящей параллельно основанию</i>	15
<i>4.3. Равнобедренный треугольник относительно оси симметрии</i>	17
<i>4.4. Прямоугольный треугольник</i>	17
<i>4.5. Круг и полукруг</i>	19
<i>5. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей</i>	20
<i>6. Изменение моментов инерции при повороте осей</i>	22
<i>7. Главные оси, главные моменты инерции</i>	23
<i>8. Моменты сопротивления</i>	26
<i>9. Радиусы инерции</i>	28
<i>10. Примеры решения задач</i>	29
<i>11. Литература</i>	43

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных конструктивных элементов строительных конструкций являются стержни.

Стержни можно классифицировать по назначению.

Вертикальные стержни, назначением которых является передача сил от вышележащих элементов конструкции к нижележащим, называются **стойками** или **колоннами**. Они, как правило, подвергаются сжатию или совместному действию сжатия и изгиба (рис. 1, а).

Стержни, которые изгибаются силами, действующими перпендикулярно к оси стержня, называются **балками** (рис. 1, б).

Стержни, которые в процессе эксплуатации машиностроительных конструкций подвергаются скручиванию, называют **валами** (рис. 1, в).

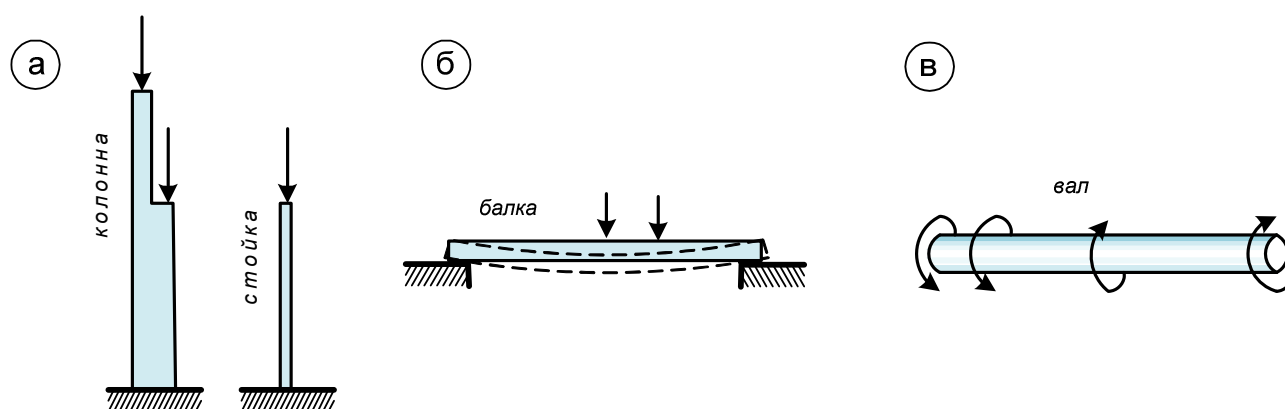


Рис. 1

При описании стержневых элементов используют понятия **ось стержня** и **поперечное сечение стержня**. Обычно они определяются рекурсивно следующим образом:

- **Ось стержня** называется линия, проходящая через центры тяжести всех поперечных сечений (рис. 2).
- **Поперечным сечением стержня** называется плоская фигура, которая получается при рассечении стержня плоскостью, перпендикулярной к его оси (рис. 2).

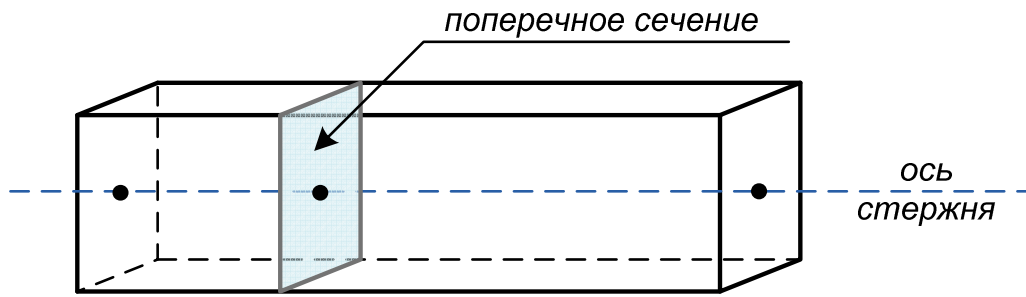
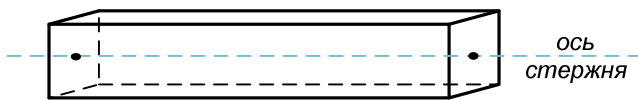
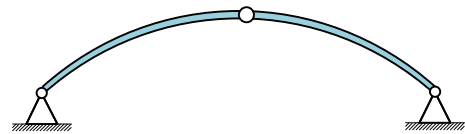


Рис.2

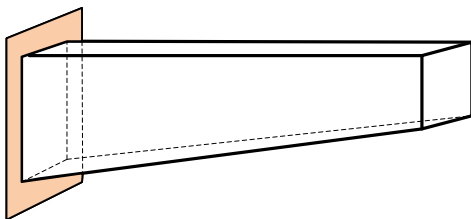
а) Прямолинейная ось



б) Криволинейная ось



в) Переменное сечение



г) Разрыв оси стержня

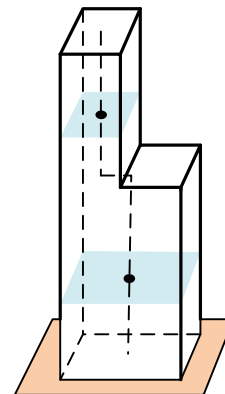


Рис. 3

Ось стержня может быть прямолинейной (рис. 3, а) или криволинейной (рис. 3, б). Поперечное сечение стержня может быть постоянным по длине (рис. 3, а) или переменным (рис. 3, в и 3, г). В том случае, когда поперечное сечение резко меняет размеры (рис. 3, г), ось стержня может иметь разрывы.

Прочность, устойчивость и жесткость стержня зависят от

- **Силовых факторов**, то есть от сил, действующих извне (нагрузок) и сил, возникающих в элементах конструкции (внутренние силы);
- **Геометрических факторов**, то есть от размеров и формы элементов

конструкции;

- **Физических факторов**, которые касаются физических свойств и прочности конструкционных материалов.

Остановимся подробно на второй группе факторов и рассмотрим ряд математических характеристик, которые используются в расчётах для того, чтобы учесть влияние на прочность, жесткость и устойчивость формы и размеров поперечного сечения стержневого элемента.

1. ПЛОЩАДЬ

Рассмотрим произвольное поперечное сечение, показанное на рис. 4. Поместим его в систему декартовых координат Oxy . Выделим бесконечно малое приращение площади $dA = dx dy$, положение которого можно определить декартовыми координатами x, y или полярными координатами ρ, α .

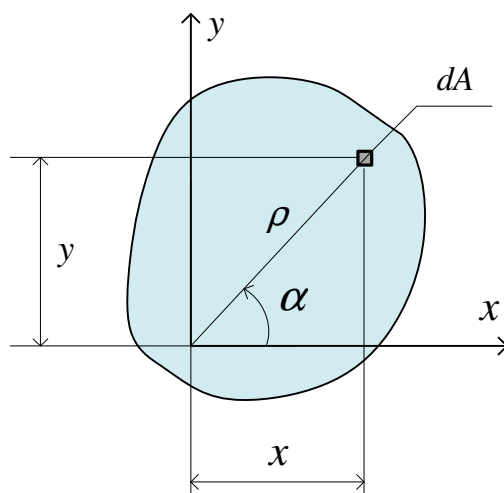


Рис. 4

Самой простой используемой в расчетах геометрической характеристикой является площадь сечения, которую в инженерных дисциплинах обозначают буквой A .

Чтобы определить площадь произвольной плоской фигуры, необходимо просуммировать элементарные площади dA в пределах её контура, то есть вычислить интегральную сумму

$$A = \int_A dA. \quad (1)$$

Перечислим хорошо известные свойства этой характеристики.

- а) Площадь измеряется в см^2 или в м^2 .

- b) Площадь является инвариантной величиной, поскольку она не зависит от выбора системы координат.
- c) Площадь всегда положительна.
- d) Если сечение состоит из нескольких частей, общая площадь может быть получена путём суммирования площадей, то есть

$$A = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Отметим, что существуют задачи, для решения которых нужно использовать другие, более сложные, геометрические характеристики.

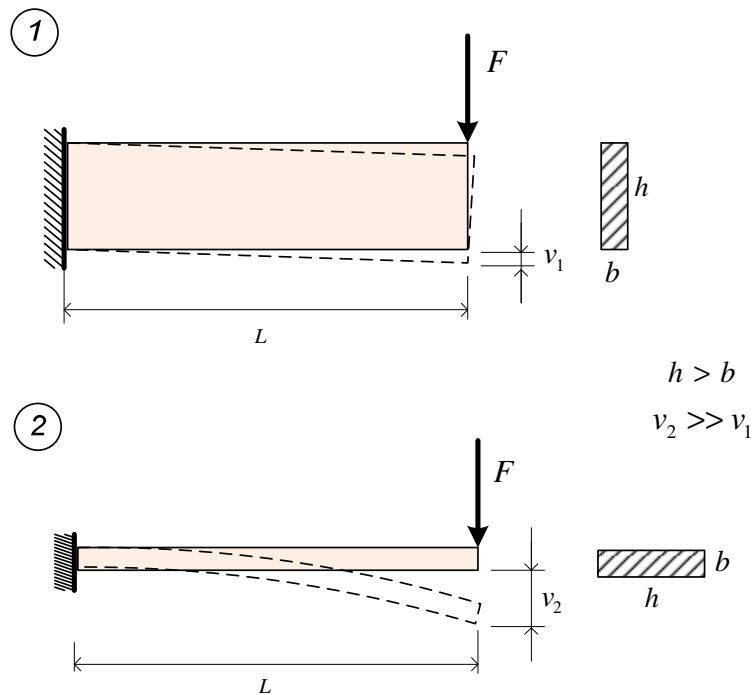


Рис. 5

Предположим, что необходимо расчетным путём определить прогиб (вертикальное перемещение) на конце консольной балки, которая загружена сосредоточенной силой.

Опытным путём можно убедиться в том, что прогиб будет сильно зависеть от того как ориентировано сечение по отношению к линии действия силы.

Пусть сечение балки прямоугольное и имеет размеры $h \times b$, причём $h > b$.

Рассмотрим два варианта: первый, когда вертикальным размером является h , и второй, когда вертикально расположен размер b (рис. 5).

При всех прочих равных условиях (материал, сила, длина балки и площадь сечения) прогиб во втором случае будет в несколько раз больше,

чем в первом. Приведенный пример говорит о том, что для решения этой задачи необходимо использовать геометрические характеристики, которые бы оценивали бы не только величину сечения (его площадь), но и то как сечение ориентировано по отношению к линии действия силы.

Ниже рассмотрим ряд таких характеристик.

2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Для плоской фигуры, расположенной в декартовой системе координат, можно определить две характеристики, выражающиеся следующими интегралами:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA, \quad (2)$$

при вычислении которых каждая элементарная часть площади dA умножается на ту её координату, которая перпендикулярна к оси. Эти характеристики называются статическими моментами.

Перечислим свойства статических моментов:

- a) Статические моменты измеряются в см^3 или в м^3 ;
- b) Статические моменты не являются инвариантными величинами, поскольку зависят от выбора системы координат. Можно заметить, что первый из интегралов (2) зависит только от положения оси x , а второй – только от положения оси y ;
- c) Если площадь и положение центра тяжести фигуры известны (рис. 3.3), то статические моменты можно получить по формулам:

$$S_x = y_c A, \quad S_y = x_c A \quad (3)$$

- d) Статические моменты могут принимать любые значения, они могут быть больше нуля, меньше нуля или равны нулю (рис. 4);

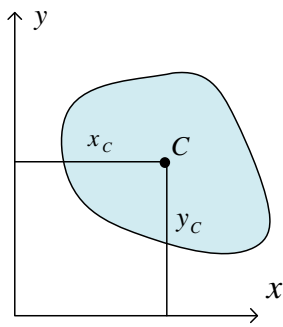


Рис. 3

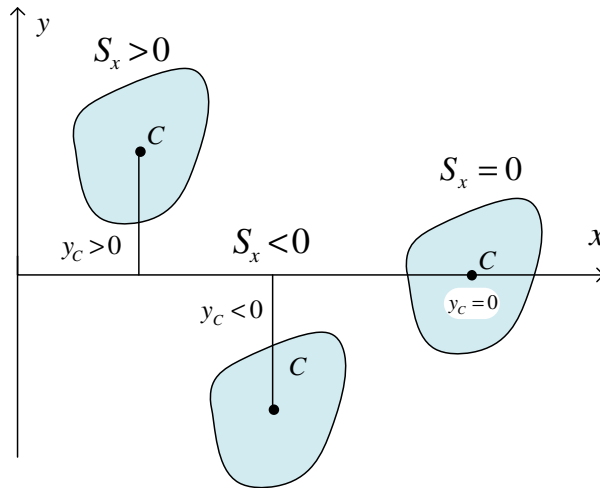


Рис. 4

- е) Ось, проходящая через центр тяжести, называется центральной осью. Из рис. 4 видно, что относительно центральной оси статический момент равен нулю;
- ф) Если сечение состоит из нескольких частей, то статические моменты могут быть получены путем суммирования статических моментов частей сечения:

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)}. \quad (4)$$

- г) Пусть для каждой части поперечного сечения известны её площадь и координаты центра тяжести (Рис5). Используя формулы (3) преобразуем формулы (4) к виду:

$$y_c A = \sum_{i=1}^n y_i A_i, \quad x_c A = \sum_{i=1}^n x_i A_i,$$

где x_i, y_i, A_i – координаты центра тяжести и площадь i -й части сечения а A – общая площадь, определяемая суммированием по (1).

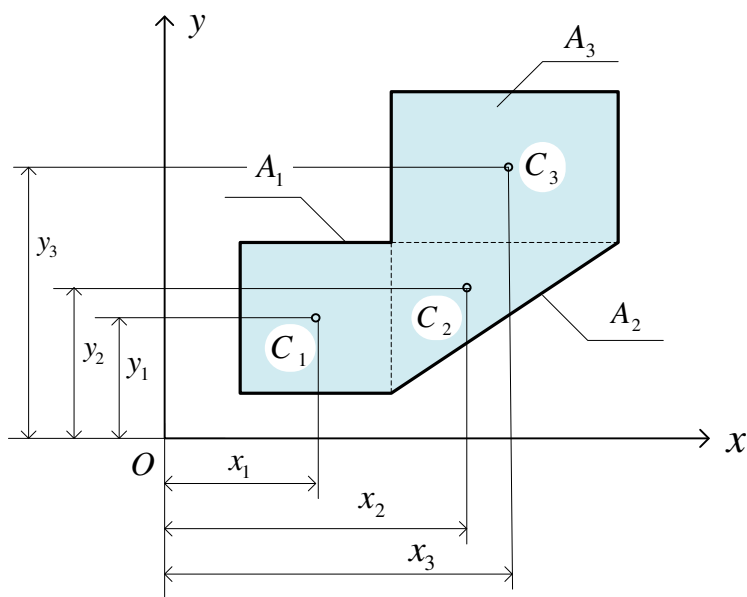


Рис. 5

Отсюда получаем формулы для определения положения центра тяжести составного сечения:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

(5)

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Моменты инерции представляют собой геометрические характеристики следующего уровня сложности. Для плоской фигуры, расположенной в декартовой системе координат (рис. 1), определим следующие четыре интегральные суммы, которые назовём моментами инерции:

$$I_x = \int_A y^2 dA(a)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA(b)$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA(c)$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA(z)$$

(6)

I_x, I_y – осевые моменты инерции, каждый из которых зависит от положения только одной оси,

I_{xy} – центробежный момент инерции, который зависит от расположения обеих осей,

I_p – **полярный момент инерции**, который зависит от положения точки, в которой находится начало системы координат, то есть «полюс».

Перечислим свойства моментов инерции:

- a) Моменты инерции измеряются в см^4 или в м^4 ,
- b) Если сечение состоит из нескольких частей, то любой из четырех моментов инерции можно определять как сумму моментов инерции отдельных частей (рис. 4.6). Конечно, такое суммирование возможно, только в том случае, когда моменты инерции частей сечения вычислены в одной системе координат.

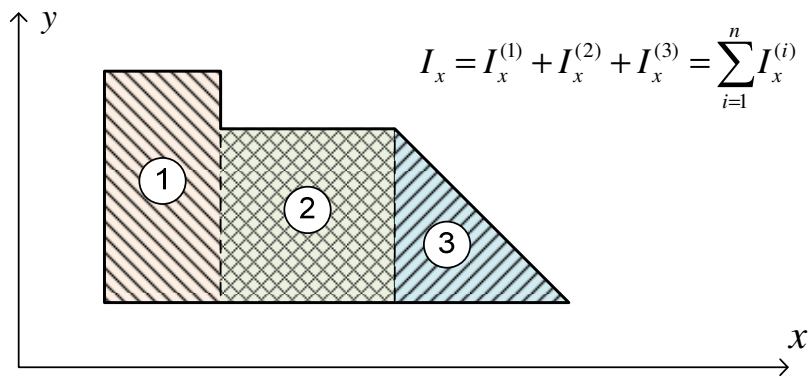


Рис. 6

- c) Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Действительно, из рис. 1 видно, что $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Тогда
$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x.$$

Таким образом доказано, что

$$I_p = I_x + I_y \tag{7}$$

- d) Осевые моменты инерции и полярный момент инерции всегда больше нуля,

$$I_x > 0, \quad I_y > 0, \quad I_p > 0,$$

в то время как центробежный момент инерции может принимать любые значения.

Знак I_{xy} зависит от расположения сечения относительно системы координат.

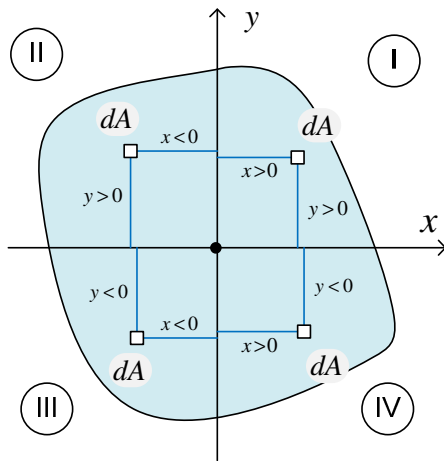


Рис. 7

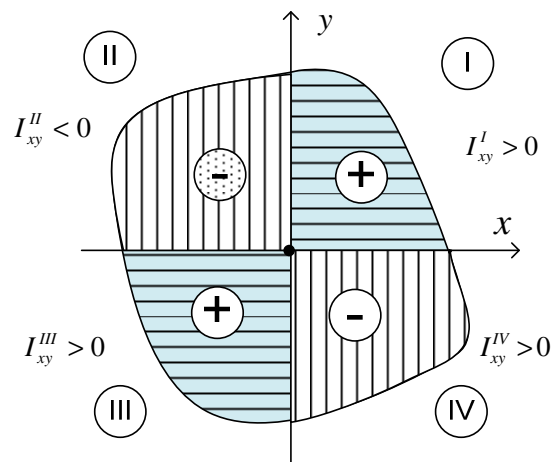


Рис. 8

Рассмотрим произвольное сечение, расположенное в системе координат Oxy . Будем считать, что сечение состоит из четырех частей, каждая из которых расположена в своей четверти системы координат (в своём квадранте) (Рис7). Заметим, что произведение $xy dA$ в первой и третьей четверти имеет положительное, а во второй и четвёртой четверти – отрицательное значение. По этой причине интегралы, взятые по соответствующим четвертям, будут иметь такие же знаки (рис. 8):

$$I_{xy} = I_{xy}^I + I_{xy}^{II} + I_{xy}^{III} + I_{xy}^{IV}$$

+
-
+
-

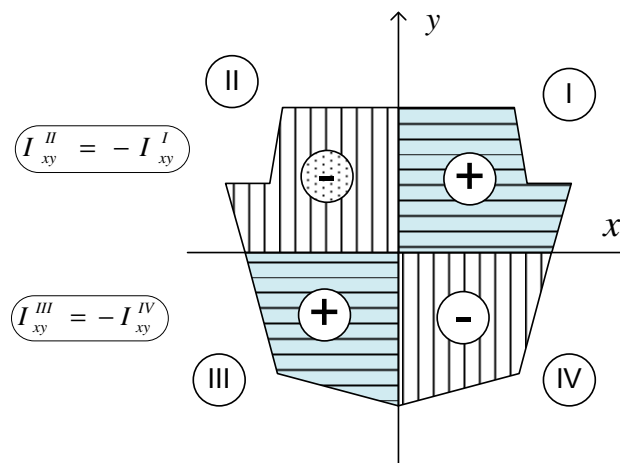


Рис. 9

Очевидно, что при повороте системы координат на 90^0 знаки всех четырёх интегралов, так же, как и самого момента инерции, изменятся на противоположный.

При наличии хотя бы одной оси симметрии (рис. 9) интегралы, взятые по четырём квадрантам, попарно уничтожают друг друга, в результате чего центробежный момент инерции всего сечения оказывается равным нулю.

При решении задач полезно бывает оценить знак I_{xy} в зависимости от того, как сечение расположено в системе координат. В ряде случаев знак становится очевиден, в зависимости от того какие части сечения доминируют (рис. 10).

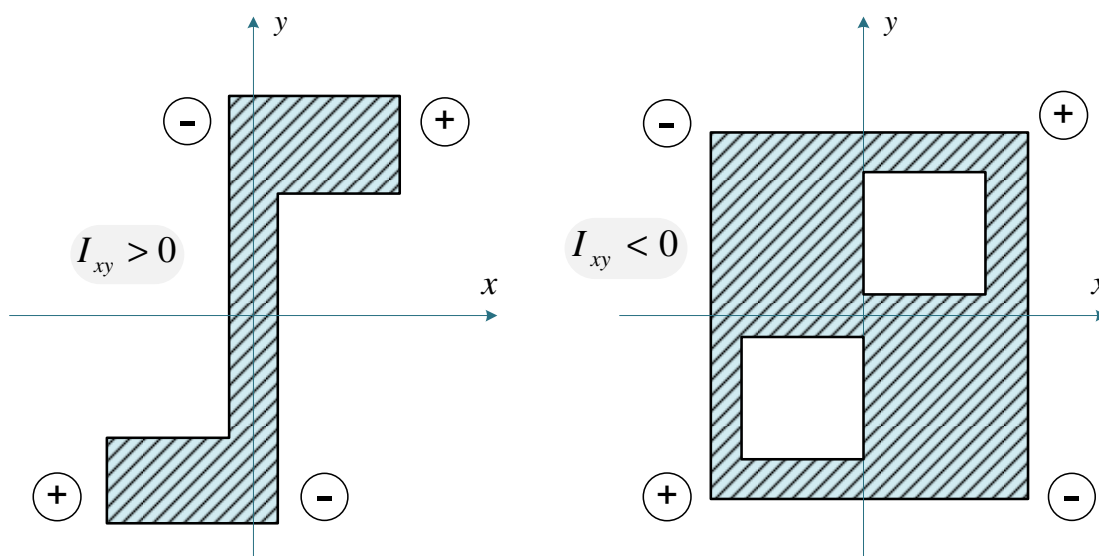


Рис. 10

4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

Сечения элементов строительных конструкций могут представлять собой геометрические фигуры, которые являются комбинацией более простых фигур, таких как прямоугольник, круг, треугольник и т. п. (рис. 11, а).

В этом случае полезно знать формулы, по которым моменты инерции этих фигур можно вычислить. Для этого необходимо заранее взять интегралы (6) и в дальнейшем эти формулы использовать.

Элементы стальных конструкций (рис. 11, б) могут конструироваться из прокатных профилей (рис. 12), наиболее распространенными из которых являются **двутавр**, **швеллер**, **уголок равнополочный** и **уголок неравнополочный**. Зная размер профиля, его геометрические характеристики, такие как площадь, координаты центра тяжести, значения моментов инерции и ряд других характеристик можно найти в соответствующих ГОСТах, которые называют **сортаменами**.

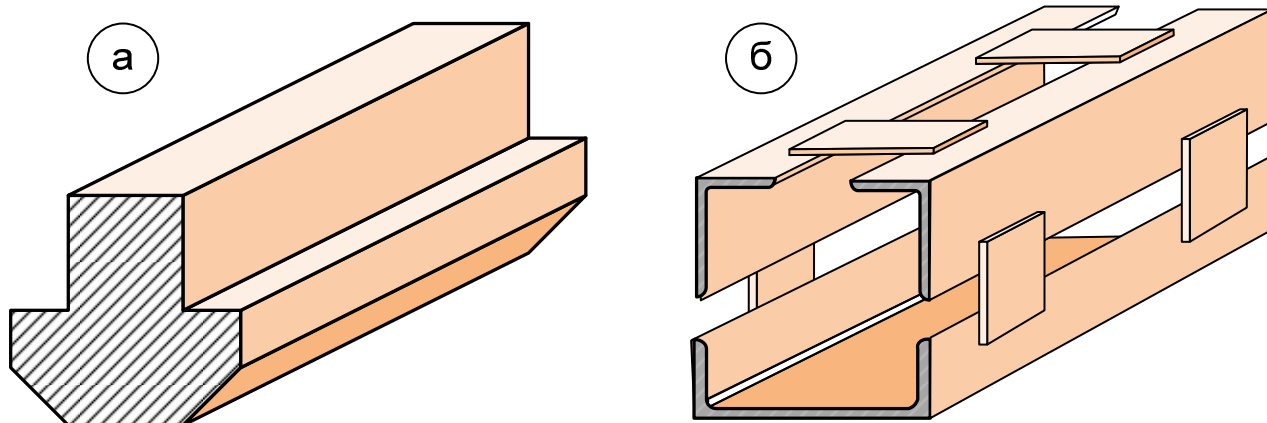


Рис. 11

Рассмотрим, каким образом могут быть вычислены осевые моменты инерции таких геометрических фигур как прямоугольник и треугольник. Моменты инерции ряда других фигур выводятся аналогично и будут даны без вывода.

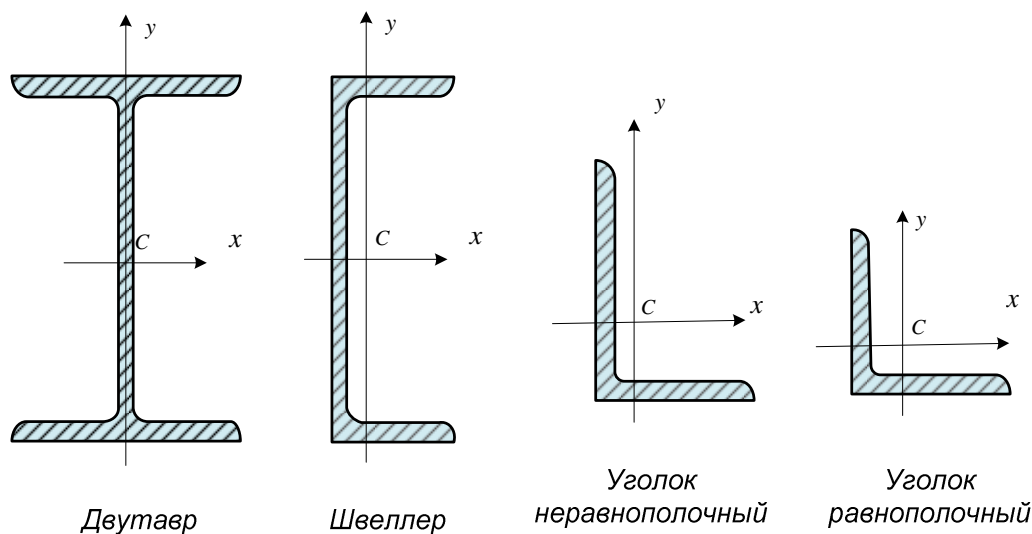


Рис. 12

4.1. Прямоугольник относительно осей симметрии

Вычислим осевой момент инерции прямоугольника (рис. 13), имеющего размеры $b \times h$ относительно одной из осей симметрии.

Чтобы перейти к интегрированию по одной координате, выберем бесконечно малое приращение площади dA в виде горизонтального слоя

толщиной dy с координатой y .

Тогда $dA = b \cdot dy$.

Подставляя это выражение в (6, а) и указывая пределы интегрирования по координате y , получим:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \cdot dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичный результат будет получен относительно второй оси симметрии:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad (8, а)$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}. \quad (8, б)$$

Очевидно, что центробежный момент инерции равен нулю:

$$I_{xy} = 0.$$

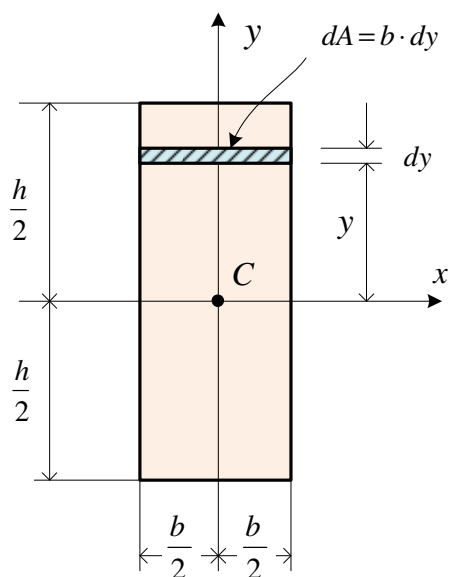


Рис. 13

4.2. Треугольник относительно центральной оси, проходящей параллельно основанию

Вычислим осевой момент инерции треугольника (рис. 14) относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно одной из сторон, размер которой обозначим b . Будем считать её основанием треугольника. Высоту треугольника обозначим h .

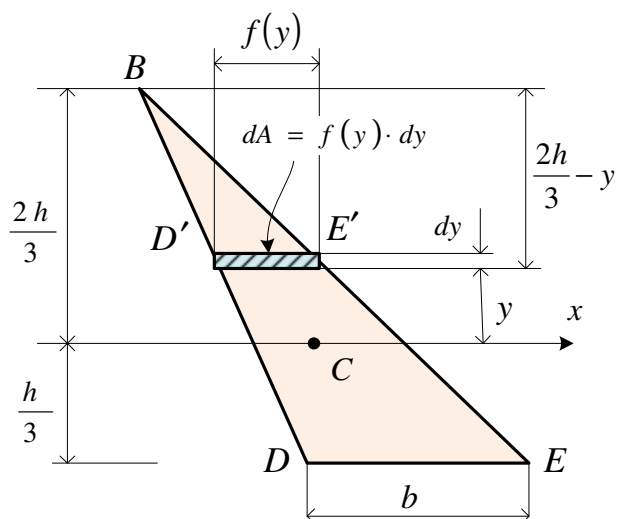


Рис. 14

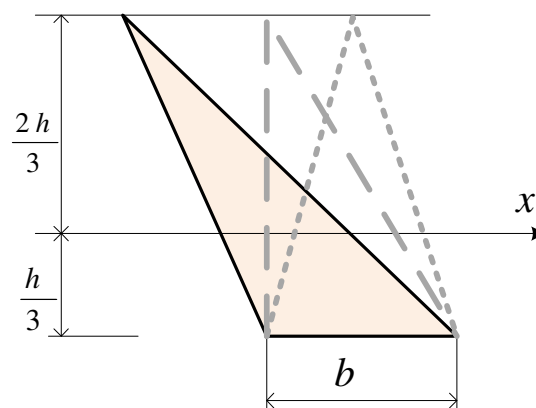


Рис. 15

Выберем бесконечно малое приращение площади в виде бесконечно тонкого слоя толщиной dy с координатой y .

Тогда $dA = f(y) \cdot dy$, поскольку длина слоя зависит от того, какое значение координаты y ему соответствует. Не учитывая величины второго порядка малости, этот слой можно рассматривать как прямоугольник

Зависимость $f(y)$ найдём из подобия треугольников BDE и $BD'E'$.

$$\frac{D'E'}{DE} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{h}, \quad \frac{f(y)}{b} = \frac{2}{3} - \frac{y}{h},$$

Откуда $f(y) = b \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right)$.

Найдем значение интеграла (6, а), подставив в него выражение приращения площади $dA = b \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) dy$ и установив пределы интегрирования по координате y :

$$\begin{aligned} I_x &= b \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) dy = \\ &= \frac{2b}{3} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 dy - \frac{b}{h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^3 dy = \frac{2b}{3} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} - \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^3}{36} \end{aligned}$$

Окончательно получили следующую формулу:

$$I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad (9)$$

которая справедлива для треугольников любой формы (рис. 15) при условии, что центральная ось проходит параллельно основанию.

4.3. Равнобедренный треугольник относительно оси симметрии

Рассмотрим равнобедренный треугольник (рис. 16) с осью симметрии y .

Осевой момент инерции относительно центральной оси, проходящей параллельно основанию треугольника, определяется по формуле (9). Однако для оси симметрии существует другая формула, которую мы приведём без вывода:

$$I_x = \frac{bh^3}{36}, \text{ но } I_y = \frac{b^3h}{48} \quad (10)$$

Естественно, что если осью симметрии является горизонтальная ось x , то формулы (10) меняются местами. Центробежный момент инерции такого треугольника равен нулю.

4.4. Прямоугольный треугольник

Осевые моменты инерции прямоугольного треугольника (рис. 17) определяются по формуле (9). В отличие от треугольника произвольной формы, для прямоугольного треугольника можно вычислить ещё и центробежный момент инерции. Для этого существует следующая формула:

$$I_{xy} = \pm \frac{b^2h^2}{72}. \quad (11)$$

Для определения знака центробежного момента инерции можно пользоваться простой схемой, представленной на рис. 18.

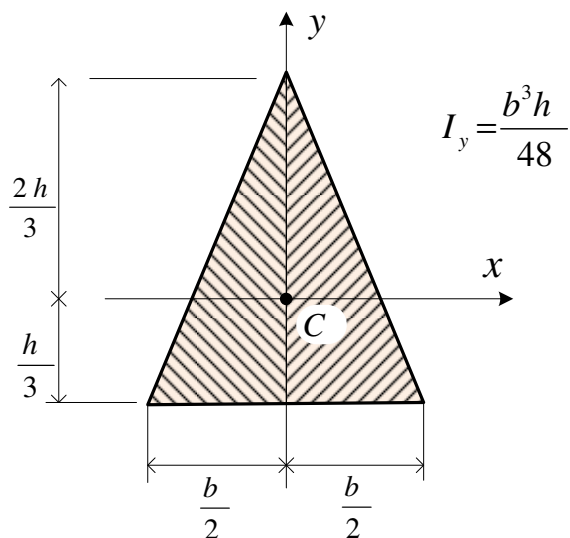


Рис. 16

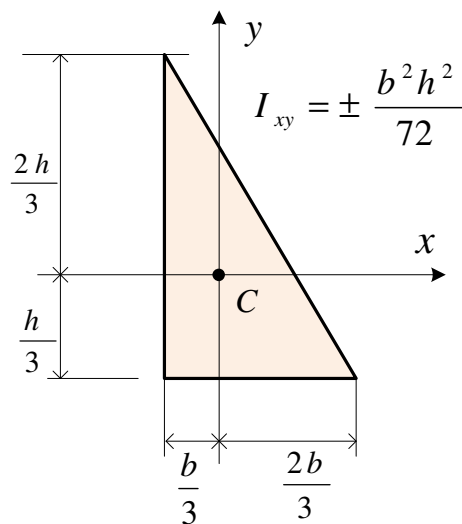


Рис. 17

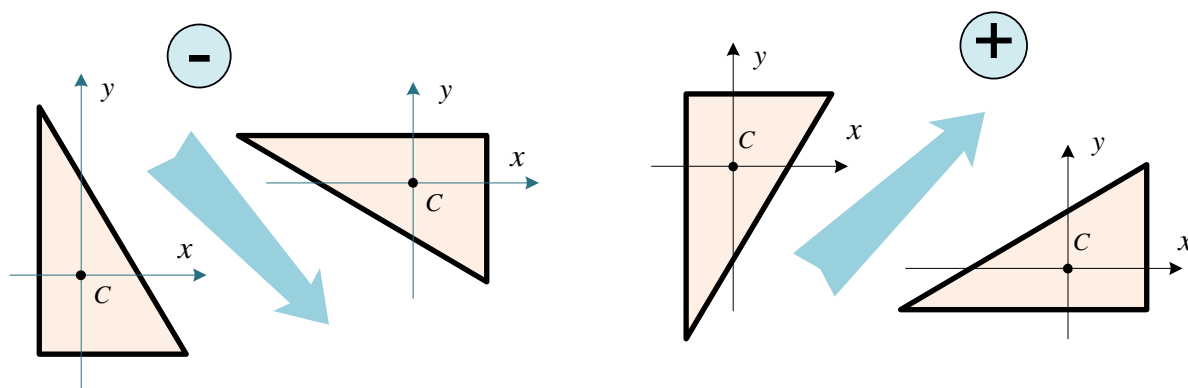


Рис. 18

Для определения знака центробежного момента инерции как равнополочного, так и неравнополочного уголков может быть использована та же схема (рис. 19).

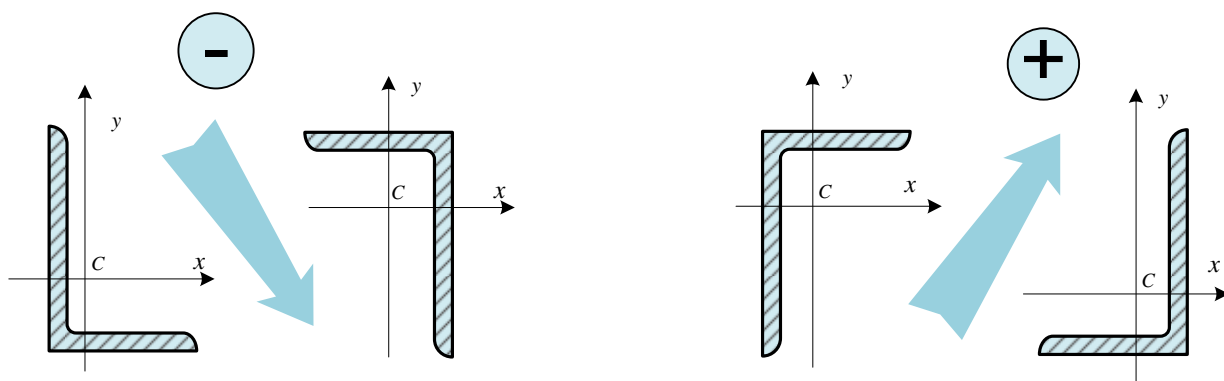


Рис. 19

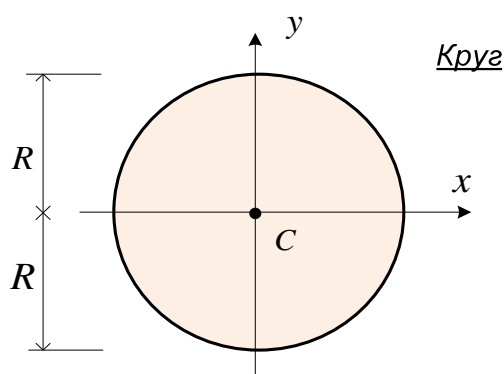
4.5. Круг и полукруг

Для круга (рис. 20) осевые моменты инерции относительно всех центральных осей одинаковы:

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (12)$$

По причине симметрии фигуры центробежный момент инерции равен нулю, а полярный момент инерции, как известно, равен сумме осевых моментов:

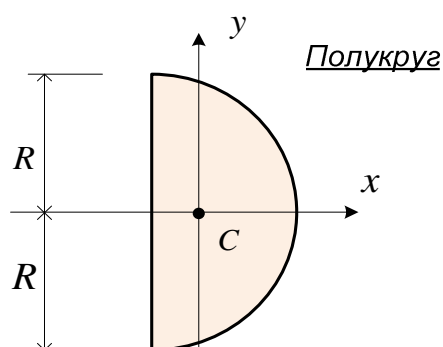
$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (13)$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{2}$$

Рис. 20



$$I_x = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_y \cong 0.11 \cdot R^4$$

Рис. 21

Изредка для расчётов могут понадобиться характеристики такой фигуры как полукруг (рис. 21). Неизвестная координата центра тяжести полукруга (на рисунке это координата x_C) равна

$$x_C = \frac{4R}{3\pi} \quad (14)$$

Осевой момент инерции относительно оси симметрии составляет половину момента инерции круга:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{8}, \quad (15)$$

а момент инерции относительно центральной оси, которая перпендикулярна к оси симметрии, обычно определяют по приближённой формуле

$$I \cong 0.11R^4, \quad (16)$$

которую используют по той причине, что точная формула имеет достаточно громоздкий вид.

5. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

В предыдущем параграфе были приведены формулы, с помощью которых можно вычислить моменты инерции простейших фигур относительно осей, проходящих через центр тяжести.

Как указывалось выше, моменты инерции не являются инвариантными величинами. При любых преобразованиях системы координат они меняют свои значения. Чтобы иметь возможность выполнять расчеты относительно любых осей, необходимо выяснить закономерности, по которым эти изменения происходят.

Любое преобразование системы координат на плоскости можно выполнить в два этапа:

1. Параллельный перенос осей,
2. Поворот осей на некоторый угол относительно начала системы координат.

Рассмотрим сначала первый этап преобразования и выясним, как изменяются моменты инерции, если перемещать оси в новое положение таким образом, чтобы они всё время оставались параллельными своему первоначальному положению. За исходное положение примем систему центральных осей $x_c y_c$ (рис. 22).

Пусть в исходной системе координат известны площадь A , осевые моменты инерции I_{x_c}, I_{y_c} , а также центробежный момент инерции $I_{x_c y_c}$.

Перенесём исходные оси параллельно в положение $x' y'$ таким образом, чтобы в новой системе координаты центра тяжести x_c и y_c имели положительные значения.

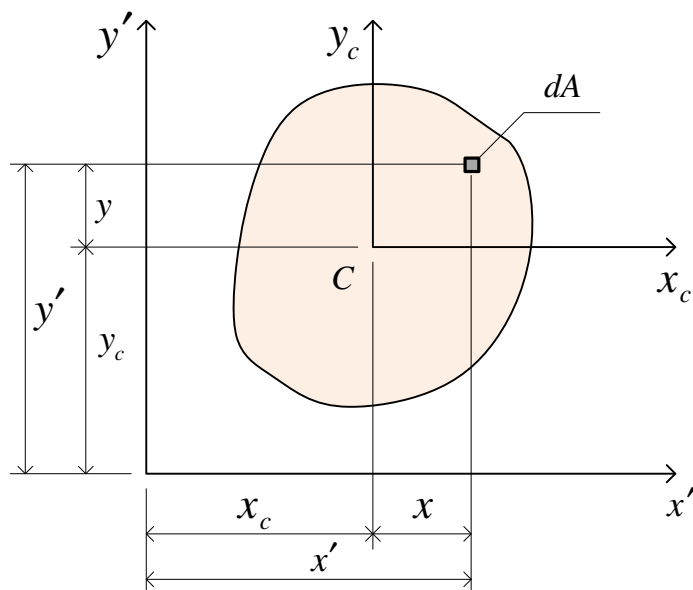


Рис. 22

Определим моменты инерции $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$ в новой системе координат. Изменение полярного момента инерции рассматривать не станем, поскольку его всегда можно определить как сумму осевых моментов инерции.

Рассмотрим бесконечно малую часть площади dA . Её координаты в старой системе обозначим x, y . При переходе в новую систему координат они изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= x + x_c \\ y' &= y + y_c \end{aligned}$$

Определим осевой момент инерции относительно оси x (б,а) в новой системе координат:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A (y')^2 dA = \int_A (y + y_c)^2 dA = \int_A (y^2 + 2y \cdot y_c + y_c^2) dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2y_c \int_A y \cdot dA + \int_A y_c^2 dA = I_{x_c} + 2y_c S_{x_c} + y_c^2 \cdot A = I_{x_c} + y_c^2 \cdot A. \end{aligned}$$

При выводе формулы учтено, что статический момент S_{x_c} равен нулю, поскольку ось x_c проходит через центр тяжести.

Аналогично из (б, б) и (б, в) получим и две другие формулы.

Окончательно запишем:

$$\begin{aligned}
 I_{X'} &= I_{X_C} + y_C^2 \cdot A, & (a) \\
 I_{Y'} &= I_{Y_C} + x_C^2 \cdot A, & (б) \\
 I_{X'Y'} &= I_{X_C Y_C} + x_C y_C \cdot A. & (в)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

При вычислении осевых моментов инерции по формулам (а) и (б) можно не учитывать знаки координат центра тяжести, поскольку их квадраты всё равно положительны, и просто возводить в квадрат расстояние между двумя параллельными осями. В формуле (в) для центробежного момента инерции добавка $x_C y_C A$ имеет знак, который определяется знаками координат x_C и y_C , которые в этом случае учитывать необходимо.

Поскольку добавка к осевым моментам инерции в формулах (а) и (б) всегда положительна, то можно заметить, что среди множества параллельных осей осевые моменты инерции относительно центральных осей являются наименьшими.

6. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Положительным направлением поворота осей будем считать поворот от положительного направления оси x к положительному направлению оси y , то есть против хода часовой стрелки.

Выясним, как изменяются координаты элементарной площади dA при повороте системы осей x, y на некоторый угол α . Для этого выполним геометрические построения, показанные на рис. 23.

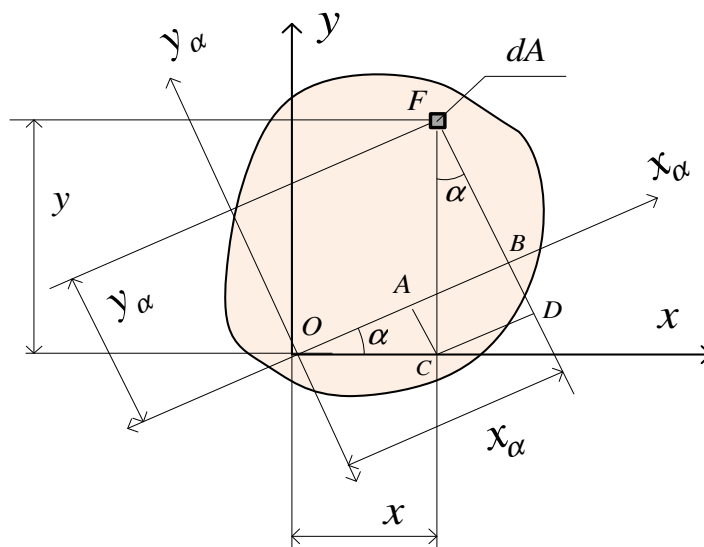


Рис. 23

Координаты площади dA в старой системе координат обозначим x, y , а в новой системе координат – x_α, y_α .

$$\begin{aligned}x_\alpha &= OB = OA + AB = OA + CB = OC \cdot \cos \alpha + FC \cdot \sin \alpha = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\y_\alpha &= FB = FD - BD = FD - AC = FC \cdot \cos \alpha - OC \cdot \sin \alpha = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha\end{aligned}$$

Чтобы получить законы изменения моментов инерции при повороте осей надо подставить полученные выражения новых координат

$$\begin{aligned}x_\alpha &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\y_\alpha &= y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha\end{aligned}$$

в интегралы (6).

Проделав это самостоятельно, Вы получите следующие зависимости:

$$\begin{aligned}I_{X\alpha} &= I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha, & (a) \\I_{Y\alpha} &= I_Y \cos^2 \alpha + I_X \sin^2 \alpha + I_{XY} \sin 2\alpha, & (б) \\I_{X\alpha Y\alpha} &= \frac{I_X - I_Y}{2} \sin 2\alpha + I_{XY} \cos 2\alpha. & (в)\end{aligned} \quad (18)$$

Складывая сначала левые, а затем правые части равенств (а) и (б), можно убедиться, что при повороте осей сумма осевых моментов инерции не изменяется. Этому следовало ожидать, поскольку при повороте осей не меняет своего положения точка, в которой находится начало системы координат, то есть «полюс», и следовательно, не изменяется полярный момент инерции. А полярный момент инерции, как было отмечено выше, равен сумме осевых моментов инерции. Таким образом, вполне закономерно, что

$$I_{X\alpha} + I_{Y\alpha} = I_X + I_Y = I_P \quad (19)$$

7. ГЛАВНЫЕ ОСИ, ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

В § 3 было отмечено, что при повороте системы координат на 90° знак центробежного момента инерции изменяется на противоположный. Значит, существует угол, при котором I_{XY} должен обратиться в ноль.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции обращается в ноль, называются **главными осями**.

Найдём угол $\alpha_{гл}$, на который надо повернуть исходную систему координат, чтобы центробежный момент инерции обратился в ноль (рис. 24). Подставив $\alpha_{гл}$ в правую часть уравнения (18,в) и приравняв её к нулю, получим нужное уравнение:

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_{ГЛ} + I_{xy} \cos 2\alpha_{ГЛ} = 0.$$

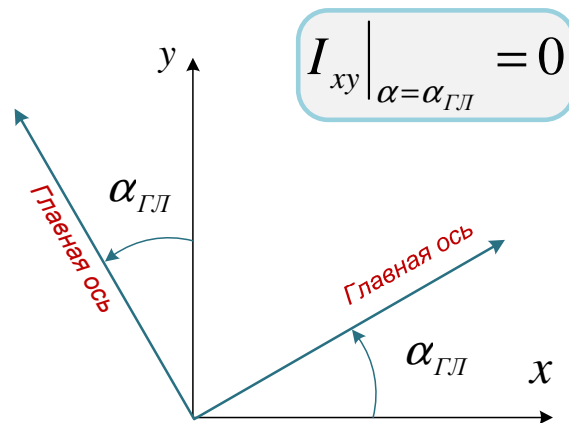


Рис. 24

Преобразуем уравнение:

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha_{ГЛ} = 2I_{xy} \cos 2\alpha_{ГЛ},$$

и далее получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{ГЛ} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (20)$$

Решение (20) имеет период 90° и определяет положение двух взаимно перпендикулярных осей (рис. 25, а), относительно которых центробежный момент инерции обратится в ноль.

При повороте осей осевые моменты инерции изменяются в соответствии с (18, а, б), но их сумма при этом остаётся неизменной. То есть, если один момент инерции на некоторую величину увеличивается, то другой на такую же величину уменьшается. При некотором значении угла α один из моментов инерции достигнет своего наибольшего значения, а другой – наименьшего.

Можно доказать, что осевые моменты инерции достигают экстремальных значений I_{MAX} и I_{MIN} при $\alpha = \alpha_{ГЛ}$, то есть относительно главных осей. Чтобы убедиться в этом, нужно исследовать на экстремум функции (18, а) и (18, б).

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**. Если главные оси проходят через центр тяжести, они называются **главными центральными осями**, а соответствующие осевые моменты инерции – **главными центральными**

моментами инерции.

Главные оси можно обозначать символами **MAX** и **MIN**, а соответствующие им экстремальные моменты инерции – I_{MAX} и I_{MIN} . Используются также другие обозначения, когда главные оси и главные моменты инерции нумеруются: главные оси обозначаются номерами **I** и **II**, а соответствующие им главные моменты инерции – I_I и I_{II} , причем ось **MAX** считают первой. Таким образом, обозначения $I_I = I_{MAX}$ и $I_{II} = I_{MIN}$ являются эквивалентными.

Значения главных моментов инерции можно найти по формуле, которую приведём без вывода:

$$\left. \begin{aligned} I_{max} = I_I \\ I_{min} = I_{II} \end{aligned} \right\} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (21)$$

Формула (20) позволяет найти положение двух взаимно перпендикулярных главных осей, но при этом не позволяет определить, относительно которой из них момент инерции максимален, а относительно которой минимален.

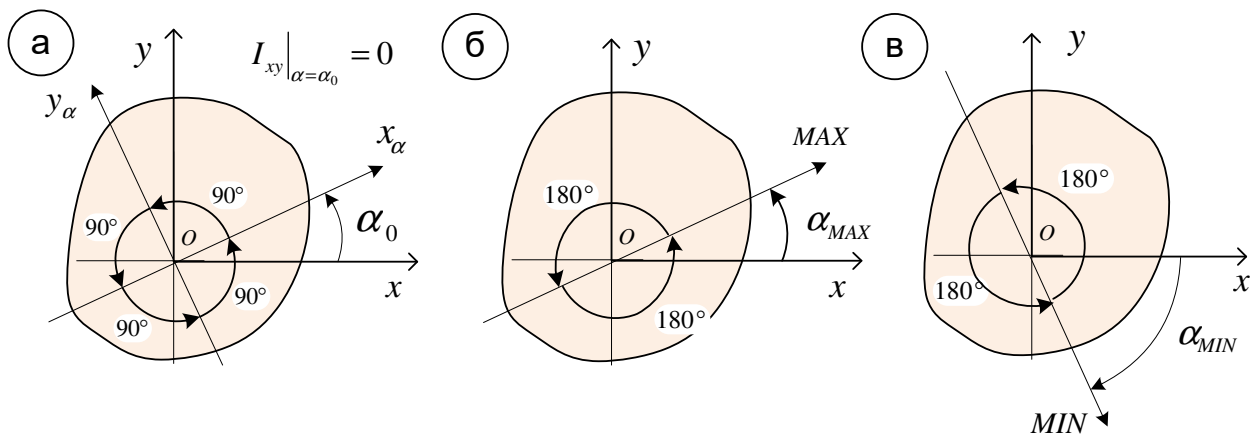


Рис. 25

В расчётной практике используются формулы, которые позволяют это сделать:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{max} = \operatorname{tg} \alpha_I &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_{MAX}}, \quad (a) \\ \operatorname{tg} \alpha_{min} = \operatorname{tg} \alpha_{II} &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_{MIN}}. \quad (б) \end{aligned} \quad (22)$$

Решения, получаемые по формулам (22), имеют период 180° . Таким

образом, каждая из формул (22) определяет положение одной из главных осей (рис. 25, б, в), которые должны быть перпендикулярны друг другу. Поэтому для проверки правильности вычислений надо убедиться в том, что

$$|\alpha_{max}| + |\alpha_{min}| = 90^\circ, \quad (23)$$

либо использовать для проверки признак перпендикулярности двух векторов и убедиться в том, что

$$\operatorname{tg}\alpha_{max} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{min} = -1. \quad (24)$$

Некоторым незначительным недостатком формул (22) является то, что для их использования необходимо предварительно вычислить значения главных моментов инерции по формуле (21).

Примечания

В §3 было отмечено, что центробежный момент инерции обращается в ноль, если хотя бы одна из осей является осью симметрии. Отсюда следует, что ось симметрии всегда является главной центральной осью. В этом случае отпадает необходимость в использовании формул (20) и (22)

8. МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Сразу отметим, что моменты сопротивления определяются только относительно главных центральных осей. Для произвольного сечения в системе главных центральных осей можно определить два осевых момента инерции и один полярный.

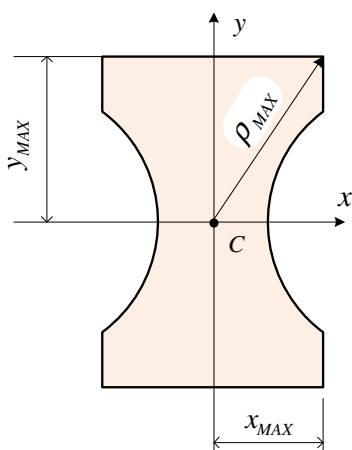


Рис. 26

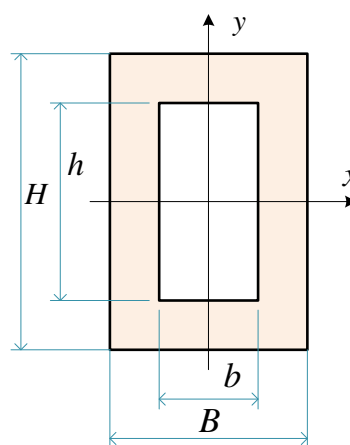


Рис. 27

Чтобы получить осевой момент сопротивления, надо главный центральный момент инерции разделить на расстояние от данной оси до

наиболее удалённой от неё точки сечения.

Чтобы получить полярный момент сопротивления, надо полярный момент инерции разделить на расстояние от центра тяжести сечения до наиболее удалённой от него точки.

Приведём соответствующие формулы:

Осевые моменты сопротивления:

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{max}|} \quad (a) \quad (25)$$

$$W_y = \frac{I_y}{|x_{max}|} \quad (б)$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}. \quad (26)$$

Перечислим свойства моментов сопротивления:

- a) Моменты сопротивления измеряются в см^3 или в м^3 ;
- b) Моменты сопротивления всегда положительны;
- c) Как отмечалось выше, моменты сопротивления определяются только относительно главных центральных осей;
- d) Моменты сопротивления определяются для всего сечения целиком. Получать моменты сопротивления путём суммирования моментов сопротивления частей сечения нельзя.

То есть, если сечение состоит из нескольких частей, как например, на рис. 27, надо сначала определить момент инерции сечения:

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12},$$

и только после этого вычислять момент сопротивления:

$$W_x = \frac{I_x}{H/2}.$$

Для проведения практических расчётов можно вывести формулы, позволяющие вычислять моменты сопротивления простейших сечений, имеющих форму круга или прямоугольника.

Прямоугольник (рис. 28, а)

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{MAX}|} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \quad (a) \quad (27)$$

$$W_y = \frac{I_y}{|x_{MAX}|} = \frac{b^3h/12}{b/2} = \frac{b^2h}{6} \quad (б)$$

Круг (рис. 28, б)

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{|y_{MAX}|} = \frac{\pi R^4/4}{R} = \frac{\pi R^3}{4} \quad (a) \quad (28)$$

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{MAX}} = \frac{\pi R^4/2}{R} = \frac{\pi R^3}{2} \quad (б)$$

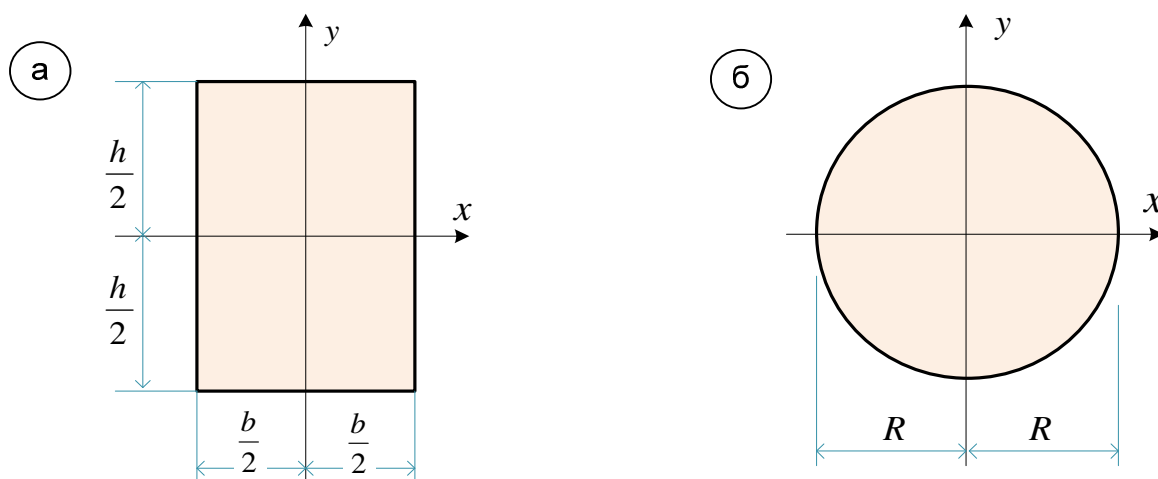


Рис. 28

9. РАДИУСЫ ИНЕРЦИИ

Радиусы инерции можно определить относительно любой центральной оси, хотя в расчётах используются только радиусы инерции вычисленные относительно главных центральных осей:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (a) \quad (29)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (б)$$

Радиусы инерции обладают следующими свойствами:

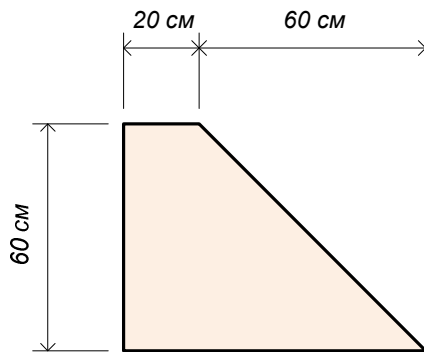
- Они измеряются в см или в м;
- Они всегда положительны;
- Так же, как и моменты сопротивления, радиусы инерции определяются для всего сечения целиком и не могут быть получены

суммированием.

10. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Определить положение центра тяжести трапеции, изображённой на рис. 29.



Найти положение центра тяжести трапеции

Рис. 29

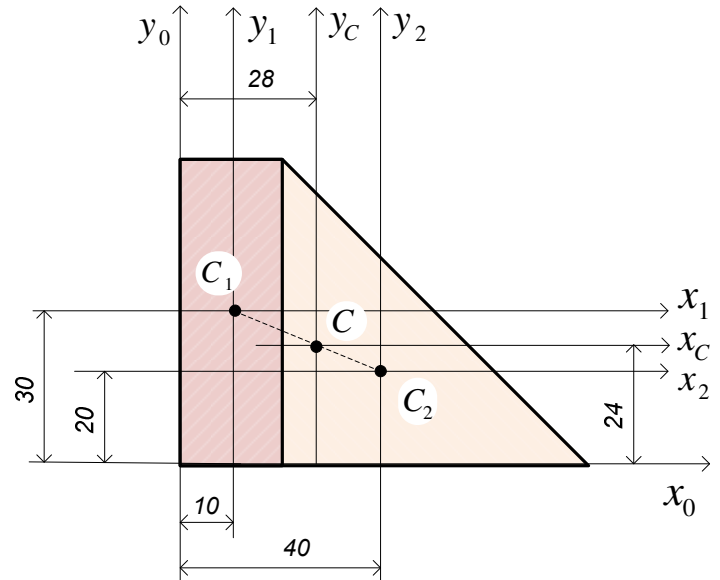


Рис. 30

Решение.

1. Выберем исходную систему координат x_0, y_0 .
2. Разобьем сечение на две части (рис. 30), для каждой из которых известны площадь и координаты центра тяжести в исходной системе координат:

$$\begin{aligned}x_1 &= 10 \text{ см}, & x_2 &= 40 \text{ см}, \\y_1 &= 30 \text{ см}, & y_2 &= 20 \text{ см}, \\A_1 &= 20 \cdot 60 = 1200 \text{ см}^2, & A_2 &= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 60 = 1800 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

3. Определяем координаты центра тяжести:

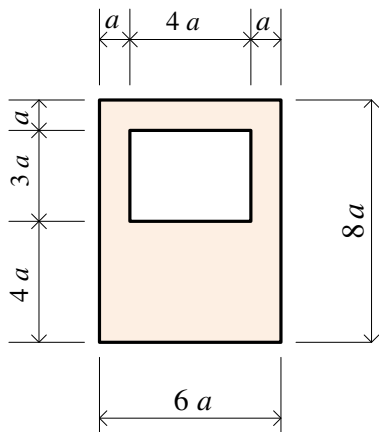
$$\begin{aligned}x_c &= \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 1200 + 40 \cdot 1800}{1200 + 1800} = 28 \text{ см}, \\y_c &= \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{30 \cdot 1200 + 20 \cdot 1800}{1200 + 1800} = 24 \text{ см}.\end{aligned}$$

4. Наносим положение центра тяжести на чертёж и проводим центральные оси.

Задача решена

Задача 2.

Определить положение центра тяжести сечения, изображённого на рис. 31.



Найти положение центра тяжести показанной на чертеже фигуры

Рис. 31

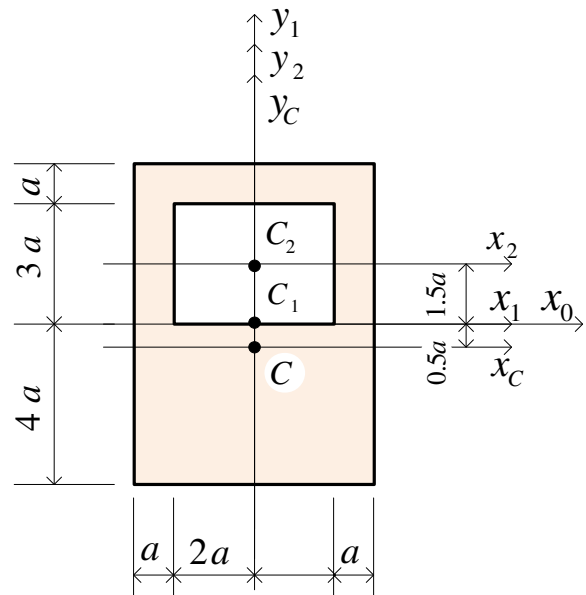


Рис. 32

Решение

1. Выберем исходную систему координат x_0y_0 .
2. Разобьем сечение на две части (рис. 32), для каждой из которых известны площадь и координаты центра тяжести в исходной системе координат.

Сечение имеет ось симметрии, поэтому неизвестной является только одна координата центра тяжести.

При вычислениях площадь второго прямоугольника следует считать отрицательной.

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, & y_2 &= 1.5a, \\ A_1 &= 6a \cdot 8a = 48a^2, & A_2 &= -3a \cdot 4a = -12a^2. \end{aligned}$$

3. Определяем неизвестную координату центра тяжести:

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0a \cdot 48a^2 - 1.5a \cdot 12a^2}{48a^2 - 12a^2} = -0.5a.$$

4. Покажем положение центра тяжести и проведём центральные оси.

Задача решена

Задача 3.

Для фигуры, показанной на рис. 33, определить осевые и центробежный моменты инерции относительно осей x и y .

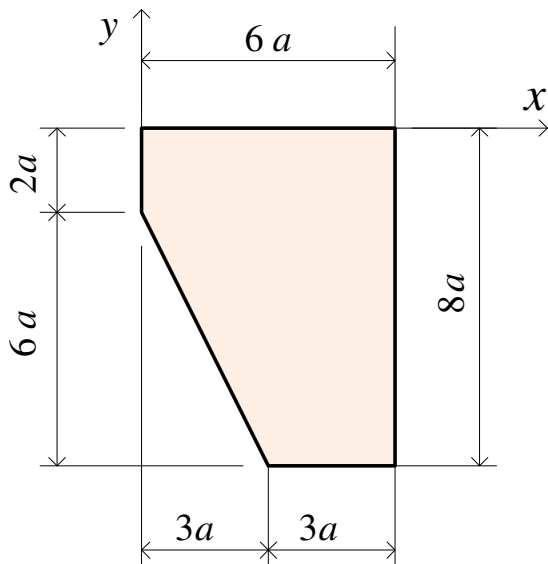


Рис. 33

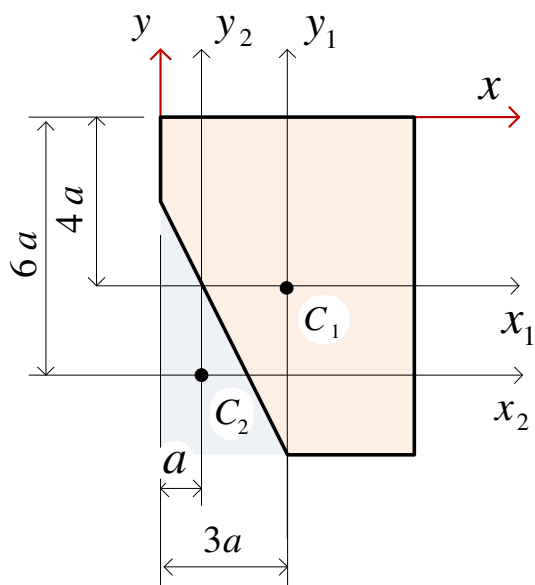


Рис. 34

Решение.

1. Разобьем сечение на две части (рис. 34), для каждой из которых известны площадь и координаты центра тяжести в заданной системе координат.

Будем считать, что фигура получена путём «отрезания» прямоугольного треугольника (фигура 2) от прямоугольника (фигура 1).

По этой причине при вычислениях характеристики «вырезаемого» треугольника следует вычитать из характеристик прямоугольника.

$$\begin{aligned}x_1 &= 3a, & x_2 &= 1a, \\y_1 &= -4a, & y_2 &= -6a.\end{aligned}$$

2. Вычисляем моменты инерции с помощью формул параллельного переноса.

При вычислении центробежного момента инерции в формулах параллельного переноса следует учитывать знаки координат.

$$I_x = \left[\frac{6 \cdot 8^3}{12} + 4^2 \cdot (6 \cdot 8) \right] a^4 - \left[\frac{3 \cdot 6^3}{36} + 6^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot 6}{2} \right) \right] a^4 = 682a^4,$$

$$I_y = \left[\frac{8 \cdot 6^3}{12} + 3^2 \cdot (6 \cdot 8) \right] a^4 - \left[\frac{6 \cdot 3^3}{36} + 1^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot 6}{2} \right) \right] a^4 = 562.5a^4,$$

$$I_{xy} = [0 + 3 \cdot (-6) \cdot (6 \cdot 8)] a^4 - \left[-\frac{6^2 \cdot 3^2}{72} + 1 \cdot (-6) \cdot \left(\frac{3 \cdot 6}{2} \right) \right] a^4 = -805.5a^4.$$

Задача решена

Задача 4.

Для поперечного сечения стального стержня, скомпонованного из двух прокатных профилей (рис. 35), швеллера и неравнополочного уголка, определить:

- положение главных центральных осей,
- величины главных центральных моментов инерции,
- величины радиусов инерции относительно главных центральных осей.

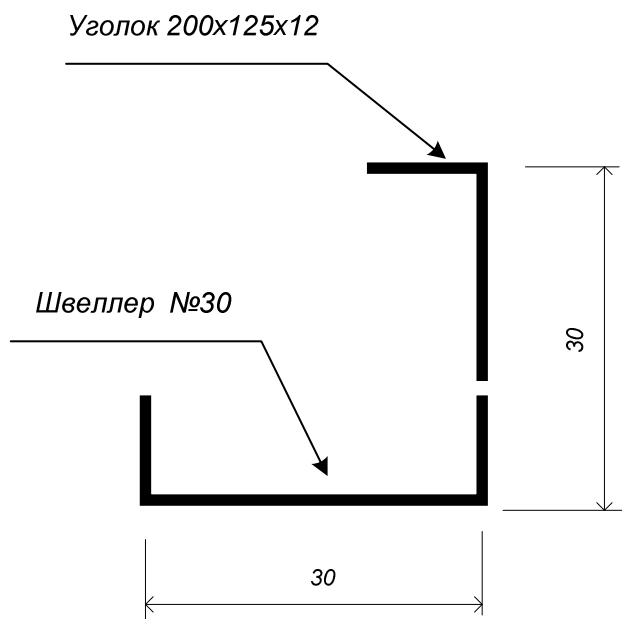


Рис. 35

Для показанного на схеме сечения определить:

1. положение главных центральных осей,
2. величины главных центральных моментов инерции,
3. главные радиусы инерции

Решение.

1. Стержень изготовлен из прокатных профилей, швеллера и

неравнополочного уголка, геометрические характеристики которых следует взять из соответствующих сортаментов. Геометрические характеристики частей сечения приведены на рис. 36.

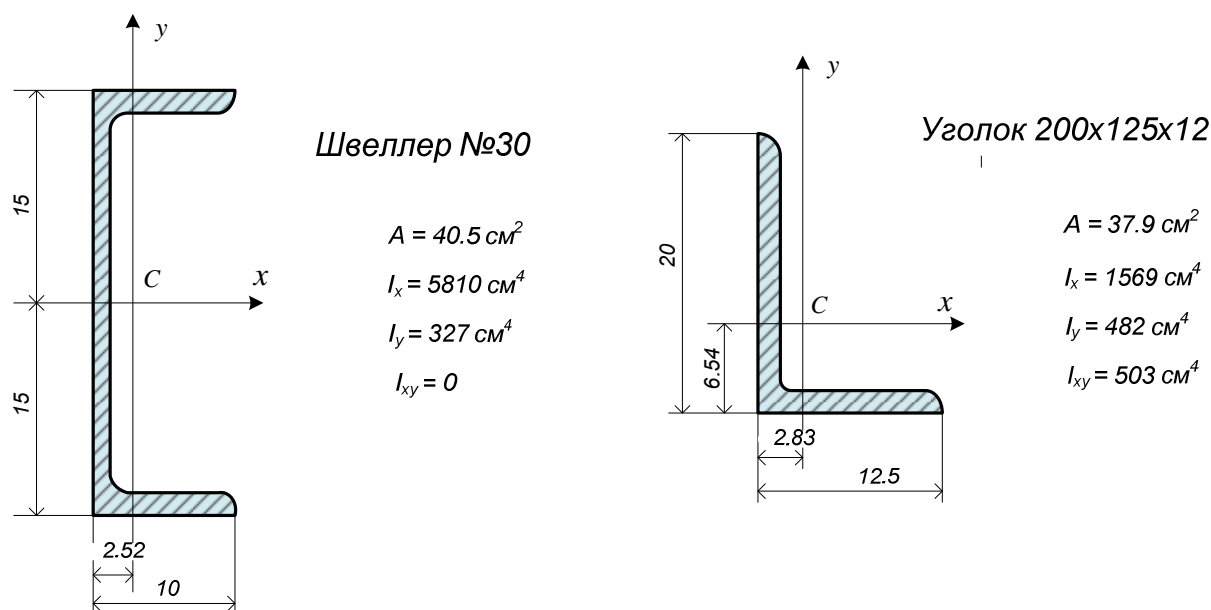


Рис. 36

2. Нумеруем части сечения (рис. 37), показываем на чертеже центральные оси частей сечения, и, совместив исходные оси с центром тяжести швеллера, определяем положение центра тяжести:

$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{12.17 \cdot 37.9 + 0 \cdot 40.5}{37.9 + 40.5} = 5.88 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{20.94 \cdot 37.9 + 0 \cdot 40.5}{37.9 + 40.5} = 10.12 \text{ см}$$

3. Показываем положение центра тяжести на чертеже и привязываем его к центральным осям частей сечения (рис. 37).
4. Вычисляем общую площадь сечения и моменты инерции сечения относительно центральных осей

$$A = 37.9 + 40.5 = 78.4 \text{ см}^2,$$

$$I_{xc} = [1569 + 10.82^2 \cdot 37.9] + [327 + 10.12^2 \cdot 40.5] = 10480.83 \text{ см}^4,$$

$$I_{yc} = [482 + 6.29^2 \cdot 37.9] + [5810 + 5.88^2 \cdot 40.5] = 9191.74 \text{ см}^4,$$

$$I_{xcyc} = [-503 + 6.29 \cdot 10.82 \cdot 37.9] + [0 + 5.88 \cdot 10.12 \cdot 40.5] = 4486.04 \text{ см}^4.$$

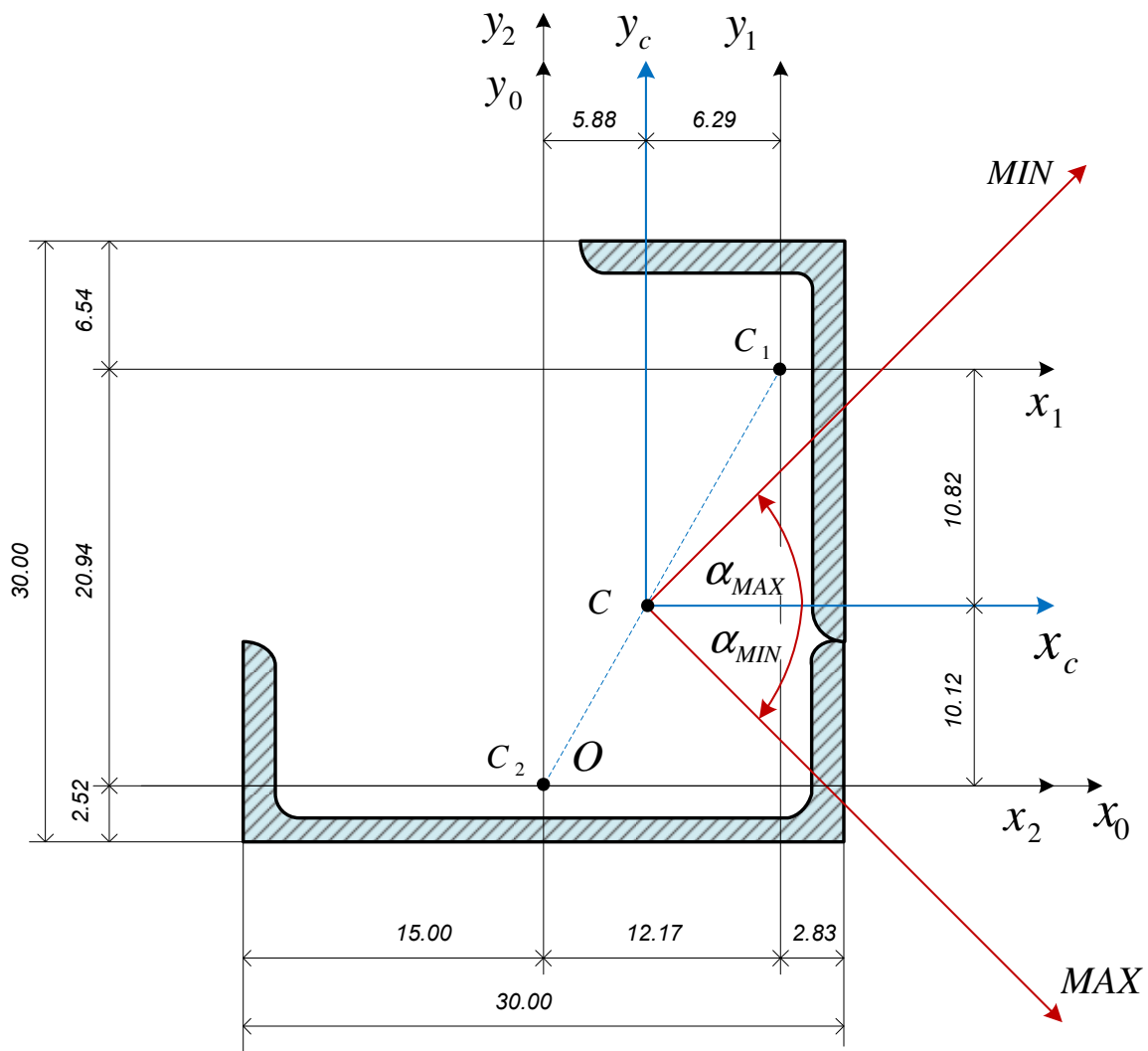


Рис. 37

5. Определяем величины главных центральных моментов инерции:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} I_{\max} \\ I_{\min} \end{aligned} \right\} &= \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} = \\
 &= \frac{10480.83 + 9191.74}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10480.83 - 9191.74}{2}\right)^2 + 4486.04^2} = (9836.28 \pm 4532.11) \text{ см}^4. \\
 I_{\max} &= 14368.39 \text{ см}^4, \\
 I_{\min} &= 5304.17 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Проверяем правильность выполнения вычислений:

$$\begin{aligned}
 I_{\max} + I_{\min} &= 14368.39 + 5304.17 = 19672.56 \text{ см}^4, \\
 I_{x_c} + I_{y_c} &= 10480.83 + 9191.74 = 19672.57 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Вычисления выполнены правильно.

6. Определяем положение главных центральных осей и показываем их на чертеже (рис. 37).

$$\operatorname{tg} \alpha_{MAX} = \frac{I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{max}} = \frac{4486.04}{9191.74 - 14368.39} = -1.061,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{MIN} = \frac{I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{min}} = \frac{4486.04}{9191.74 - 5304.17} = +0.942.$$

Проверяем перпендикулярность главных центральных осей.

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{min} = -1.061 \cdot 0.942 = -0.9995.$$

Перпендикулярность соблюдается.

7. Вычисляем радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$i_{MAX} = \sqrt{\frac{14368.39}{78.4}} = 13.54 \text{ см},$$

$$i_{MIN} = \sqrt{\frac{5304.17}{78.4}} = 8.22 \text{ см}.$$

Задача решена

Задача 5.

Определить радиусы инерции относительно главных центральных осей и моменты сопротивления поперечного сечения, показанного на рис. 38.

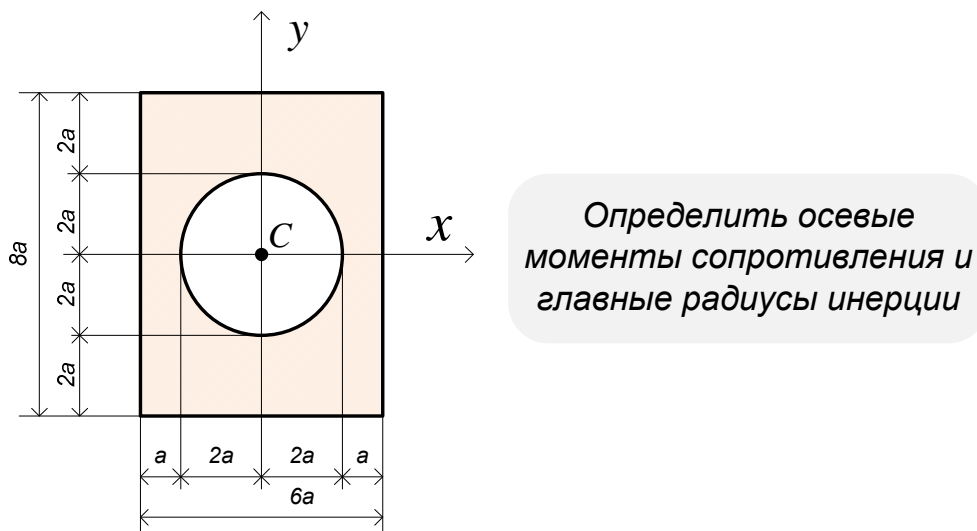


Рис. 38

Решение.

1. Сечение имеет две оси симметрии, которые являются главными центральными осями. Центр тяжести сечения находится в точке их пересечения.
2. Вычисляем общую площадь сечения и главные центральные моменты инерции сечения:

$$A = 6a \cdot 8a - 3.14 \cdot (2a)^2 = 35.44a^2,$$

$$I_x = \frac{6 \cdot 8^3}{12} a^4 - \frac{3.14 \cdot 2^4}{4} a^4 = 243.44a^4,$$

$$I_y = \frac{6^3 \cdot 8}{12} a^4 - \frac{3.14 \cdot 2^4}{4} a^4 = 131.44a^4.$$

$$I_{max} = I_x, \quad I_{min} = I_y.$$

3. Вычисляем моменты сопротивления, разделив значения осевых моментов инерции на расстояния до наиболее удалённых точек сечения:

$$W_x = \frac{243.33a^4}{4a} = 60.86a^3,$$

$$W_y = \frac{131.44a^4}{3a} = 43.81a^3.$$

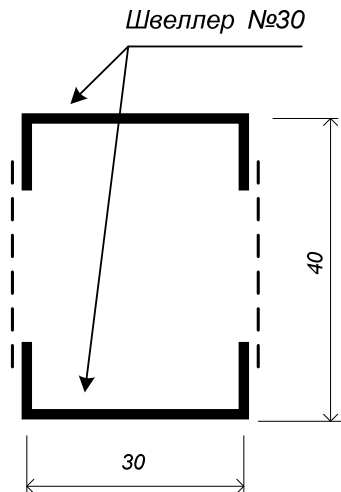
4. Вычисляем радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$i_{max} = i_x = \sqrt{\frac{243.44a^4}{35.44a^2}} = 2.62a,$$
$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{131.44a^4}{35.44a^2}} = 1.93a.$$

Задача решена

Задача 6.

Определить моменты сопротивления и радиусы инерции поперечного сечения стального стержня, показанного на рис. 39.



Определить осевые моменты сопротивления и главные радиусы инерции

Рис. 39

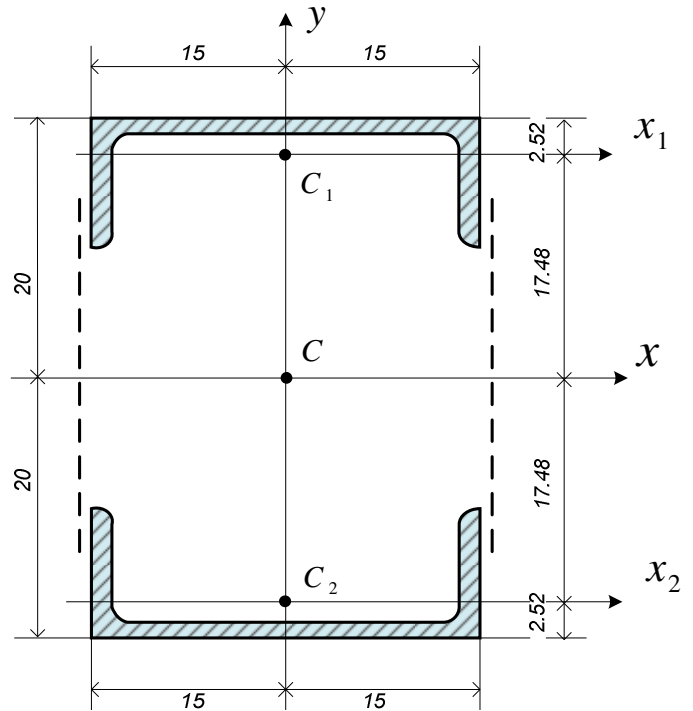


Рис. 40

Решение.

1. Стержень изготовлен из прокатного швеллера №30, геометрические характеристики приведены в задаче №4.
2. Сечение имеет две оси симметрии, которые являются главными центральными осями. Центр тяжести сечения находится в точке их пересечения.
3. Показываем положение центра тяжести на чертеже и привязываем его к центральным осям частей сечения (рис. 40).
4. Вычисляем общую площадь сечения и главные центральные моменты инерции сечения:

$$A = 2 \cdot 40.5 = 81 \text{ см}^2,$$

$$I_x = 2 \cdot [327 + 17.48^2 \cdot 40.5] = 25403 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \cdot 5810 = 11620 \text{ см}^4.$$

$$I_{\max} = I_x, \quad I_{\min} = I_y.$$

5. Вычисляем моменты сопротивления, разделив значения осевых моментов инерции на расстояния до наиболее удалённых точек сечения:

$$W_x = \frac{25403}{20} = 1270 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{11620}{15} = 775 \text{ см}^3.$$

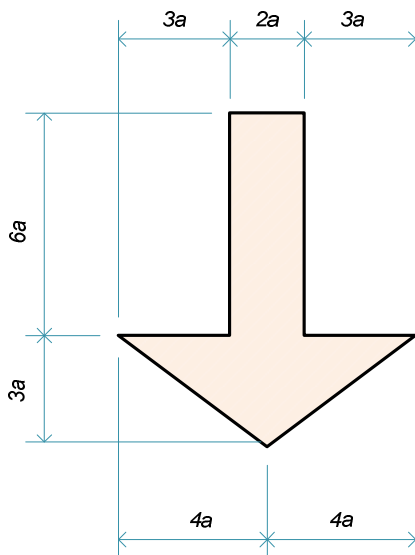
6. Вычисляем радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$i_{\max} = i_x = \sqrt{\frac{25403}{81}} = 17.7 \text{ см},$$

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{11620}{81}} = 11.97 \text{ см}.$$

Задача решена

Задача 7. Определить осевые моменты сопротивления и радиусы инерции сечения, форма которого показана на рис. 41.



Определить осевые моменты сопротивления и главные радиусы инерции

Рис. 41

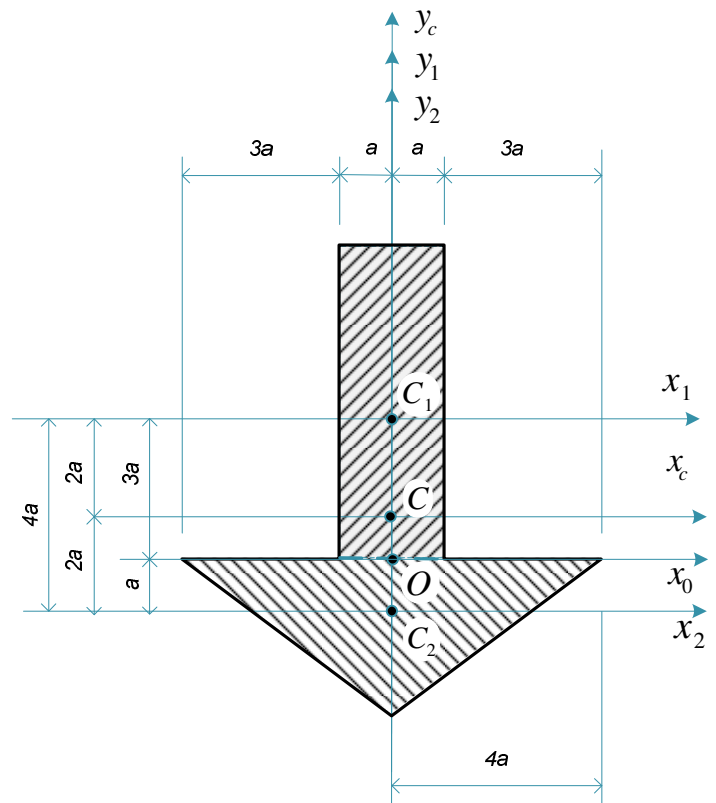


Рис. 42

Решение.

1. Вычисляем общую площадь сечения:

$$A = A_1 + A_2 = (2a \cdot 6a) + \left(\frac{3a \cdot 8a}{2}\right) = 24a^2.$$

2. Нумеруем части сечения (рис. 42), показываем на чертеже центральные оси частей сечения, и, поместив начало исходной системы координат в точку O , определяем положение центра тяжести:

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3a \cdot (2a \cdot 6a) + (-a) \cdot \left(\frac{3a \cdot 8a}{2}\right)}{24a^2} = a.$$

3. Показываем положение центра тяжести на чертеже и привязываем его к центральным осям частей сечения (рис. 42).
4. Вычисляем главные центральные моменты инерции сечения:

$$I_x = \left[\frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2^2 \cdot (2 \cdot 6) \right] a^4 + \left[\frac{8 \cdot 3^3}{36} + 2^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot 8}{2}\right) \right] a^4 = 138a^4,$$

$$I_y = \frac{2^3 \cdot 6}{12} a^4 + \frac{3 \cdot 8^3}{48} a^4 = 36a^4.$$

$$I_{max} = I_x, \quad I_{min} = I_y.$$

5. Вычисляем моменты сопротивления, разделив значения осевых моментов инерции на расстояния до наиболее удалённых точек сечения:

$$W_x = \frac{138a^4}{5a} = 27.6a^3,$$

$$W_y = \frac{36a^4}{4a} = 9a^3.$$

6. Вычисляем радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$i_{max} = i_x = \sqrt{\frac{138a^4}{24a^2}} = 2.4a,$$

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{36a^4}{24a^2}} = 1.22a.$$

Задача решена

Задача 8.

Определить моменты сопротивления и радиусы инерции поперечного сечения стального стержня, показанного на рис. 43.

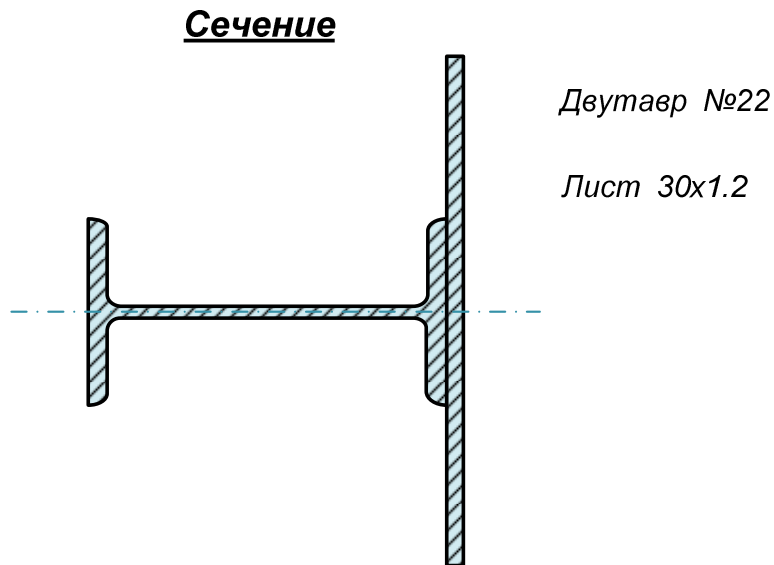


Рис. 43

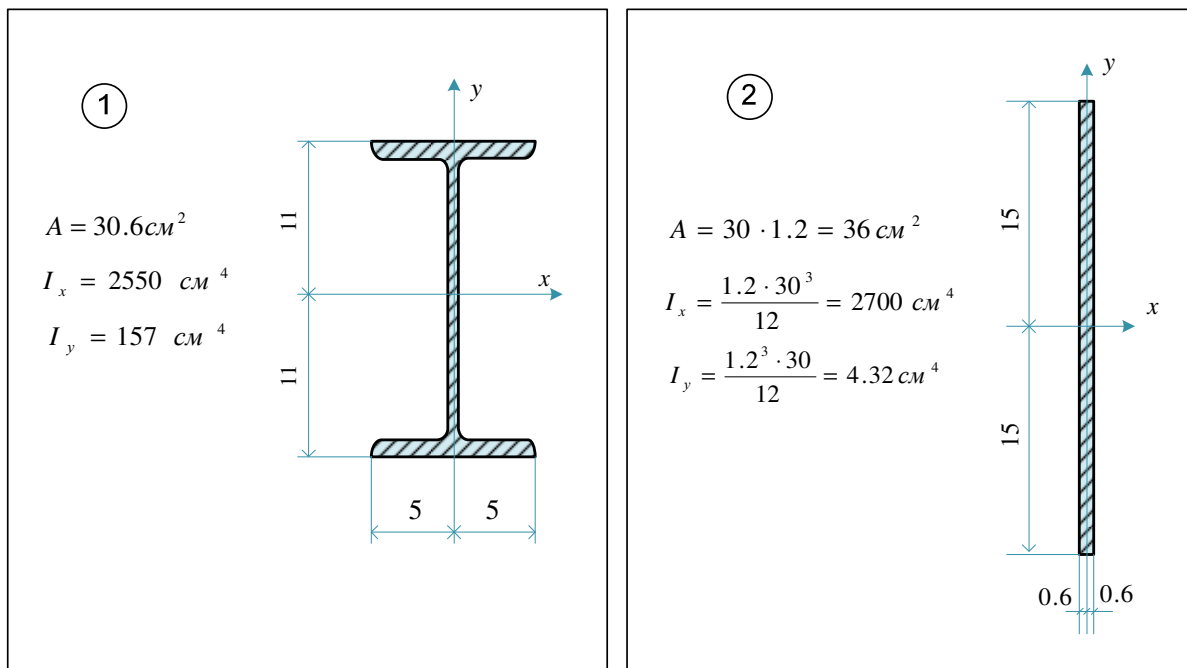


Рис. 44

Решение.

1. Стержень изготовлен из прокатного двутавра №22, геометрические характеристики которого следует взять из сортамента (ГОСТ 8239-89), и стального листа, сечение которого представляет собой

прямоугольник с размерами 30x1.2 см. Геометрические характеристики частей сечения приведены на рис. 44.

2. Нумеруем части сечения (рис. 44), показываем на чертеже центральные оси частей сечения, и, совместив исходные оси с центром тяжести двутавра, определяем положение центра тяжести:

$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 \cdot 30.6 + 11.6 \cdot 36}{30.6 + 36} = 6.27 \text{ см.}$$

3. Показываем положение центра тяжести на чертеже и привязываем его к центральным осям частей сечения (рис. 45).

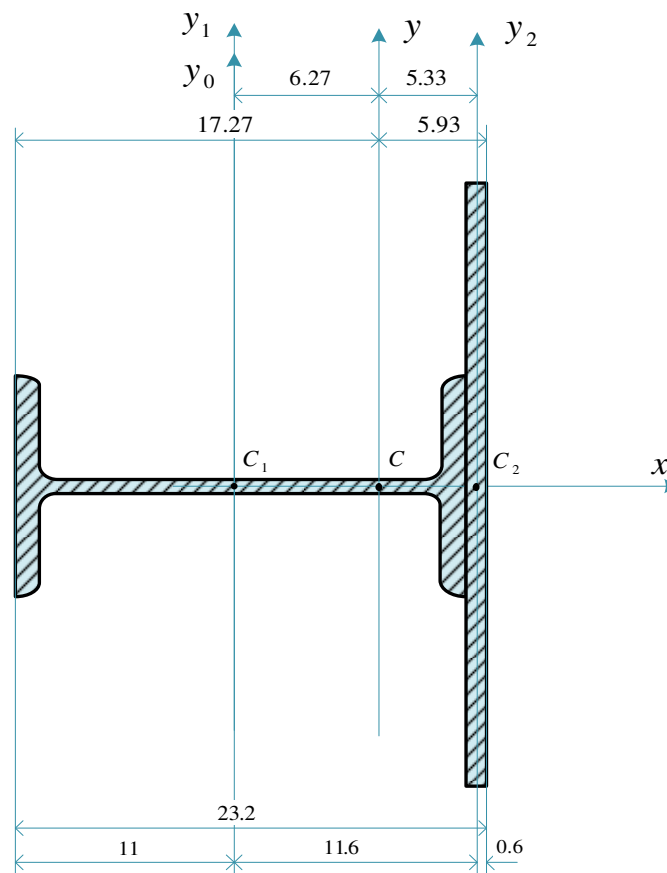


Рис. 45

4. Вычисляем общую площадь сечения и главные центральные моменты инерции сечения:

$$A = 30.6 + 36 = 66.6 \text{ см}^2,$$

$$I_x = 157 + 2700 = 2857 \text{ см}^4,$$

$$I_y = [2550 + 6.27^2 \cdot 30.6] + [4.32 + 5.33^2 \cdot 36] = 4779 \text{ см}^4.$$

$$I_{\max} = I_y, \quad I_{\min} = I_x.$$

5. Вычисляем моменты сопротивления, разделив значения осевых моментов инерции на расстояния до наиболее удалённых точек сечения:

$$W_x = \frac{2857}{15} = 190 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{4779}{17.27} = 277 \text{ см}^3.$$

6. Вычисляем радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$i_{\max} = i_y = \sqrt{\frac{4779}{66.6}} = 8.47 \text{ см},$$

$$i_{\min} = i_x = \sqrt{\frac{2857}{66.6}} = 6.55 \text{ см}.$$

Задача решена

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов: Учеб. Для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд. Испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
2. Костенко, Н.А. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. / Н.А. Костенко, С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская и др.; Под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.
3. Смирнов, А.Ф. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1975. – 390 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учебник для втузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.
5. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для втузов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 592 с. 6. Жуков, В. Г. Механика. Сопротивление материалов : учеб. пособие. — М. : МГУПБ, 2007. - 136 с.
6. Степин, П. А. Сопротивление материалов. — 10е изд., стер. — СПб. : Лань, 2010. — 320 с.
7. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов : Учебник для втузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка — 3е изд., испр. и доп. — Киев : Выща шк., 1973. — 671 с.

Маковкин Георгий Анатольевич

Сухов Михаил Федорович

***ПОПЕРЕЧНЫЕ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ***

Учебное пособие

Подписано в печать

Формат 60x90 1/8 Бумага газетная. Печать трафаретная.

Уч. изд. л. 5,3. Усл. печ.л. 5,6. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603905, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru