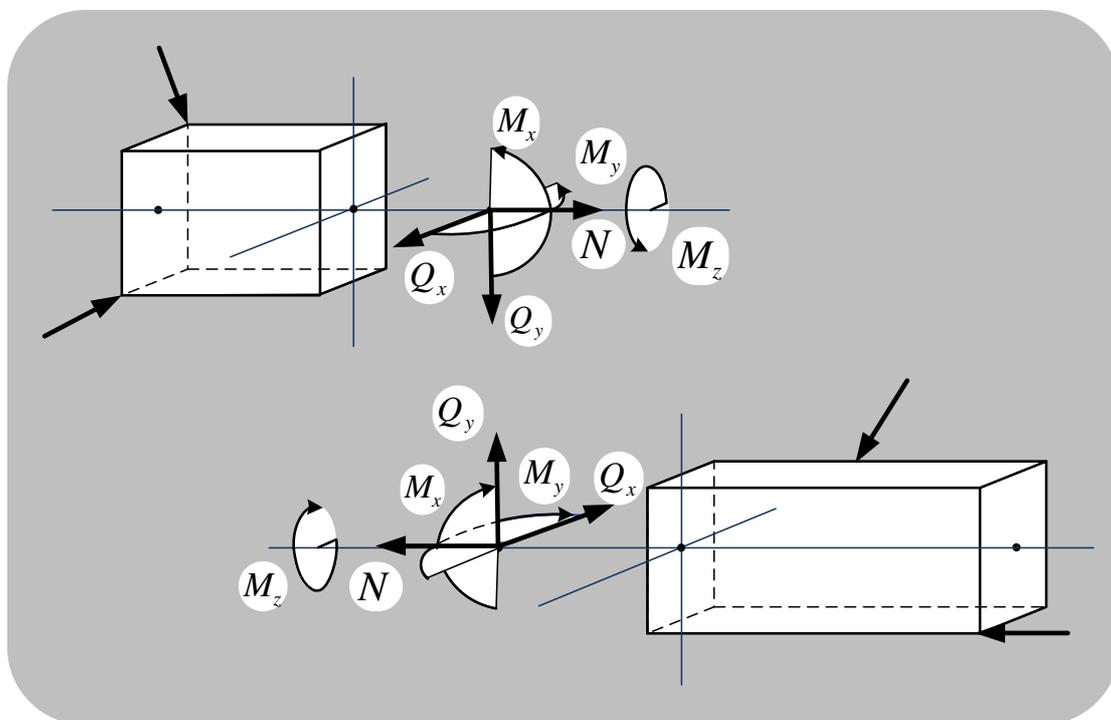


Г. А. Маковкин

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Учебное пособие



Нижний Новгород
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г. А. Маковкин

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2022

ББК 30.12
М 16
УДК 539.3

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

А.К. Ломунов – д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник НИИ Механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный ун-т им. Н. И. Лобачевского»

А. Ю. Панов – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

Маковкин Г.А. Внутренние силы и способы их определения [Текст]: учеб. пособие / Г. А. Маковкин; Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т –Н.Новгород: ННГАСУ, 2022. – 84 с. ISBN 978-5-528-00476-1

Пособие содержит теоретические сведения о внутренних силах, возникающих в поперечных сечениях стержневых элементов конструкций. Приводится подробное описание методов определения внутренних сил и построения соответствующих эпюр. В пособии приводятся многочисленные примеры и задачи. Примеры расчета сопровождаются подробными пояснениями.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

Рис. 66

ББК 30.12

ISBN 978-5-528-00476-1

© Г.А. Маковкин, 2022
© ННГАСУ, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Напряжения в поперечном сечении стержня	4
2.	Внутренние силы и их связь с напряжениями	6
3.	Виды сопротивления (виды деформации стержня)	9
4.	Внутренние силы при нагружении стержня в одной плоскости	11
5.	Определение внутренних сил методом сечений	12
6.	Дифференциальные зависимости Журавского	18
7.	Эпюры внутренних сил	21
8.	Аналитический метод построения эпюр	22
9.	Правила оформления эпюр	23
10.	Построение эпюр продольной силы	23
11.	Построение эпюр крутящего момента	26
12.	Геометрический смысл дифференциальных зависимостей Журавского	28
13.	Влияние сосредоточенных сил и моментов на эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (следствия из уравнений равновесия)	31
14.	Влияние распределённых нагрузок на эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (следствия из дифференциальных зависимостей Журавского)	33
15.	Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента аналитическим способом	38
16.	Численные способы построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (построение по точкам)	49
17.	Использование симметрии при построении эпюр	56
18.	Использование принципа независимости действия сил при построении эпюр	58
19.	Примеры решения задач	61

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим стержень, нагруженный произвольной совокупностью внешних сил (рис. 1). Для определения внутренних сил, возникающих в поперечном сечении стержня, используем следующий приём: мысленно разделим стержень на две части, которые условно назовем ЛЕВОЙ и ПРАВОЙ.

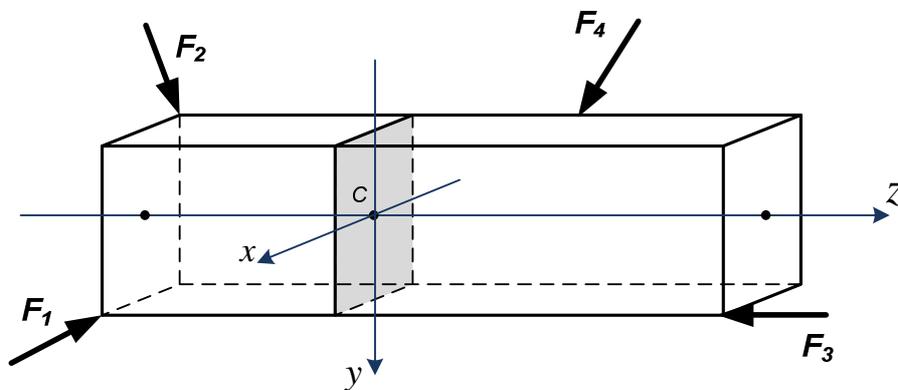


Рис. 1

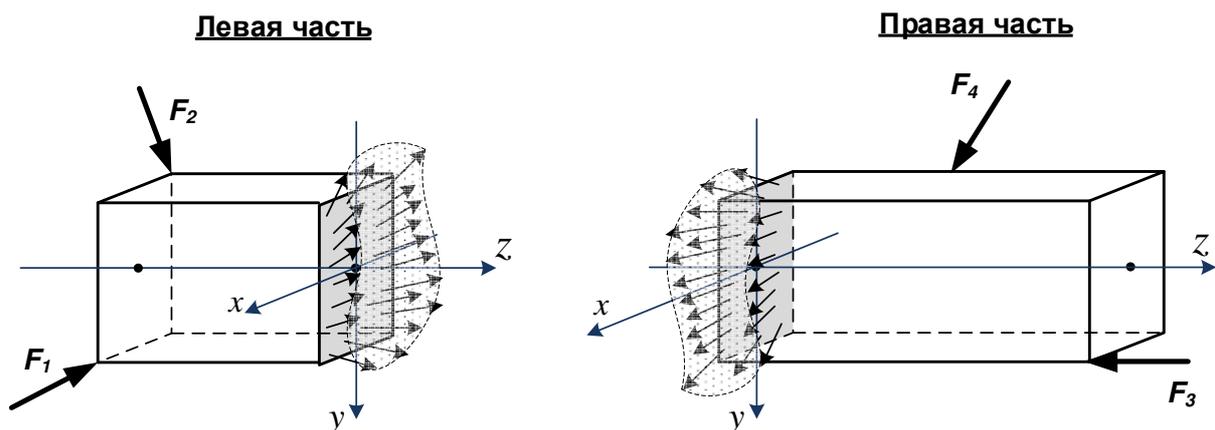


Рис. 2

Распределённые по всему поперечному сечению силы взаимодействия частей стержня, как известно, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 2). Закон распределения этих сил в общем случае неизвестен.

Выберем в поперечном сечении бесконечно малую площадку dA с координатами x и y (рис. 3). Нормаль к площадке будет параллельна оси z , и, следовательно, полное напряжение на площадке будет иметь обозначение p_z . Спроецируем полное напряжение на нормаль, а затем на плоскость поперечного сечения. Получим нормальное напряжение σ_z и касательное напряжение τ_z . Далее касательное напряжение τ_z разложим по координатным осям x и y . Получим две компоненты касательного напряжения τ_{zx} и τ_{zy} .

В результате в каждой точке поперечного сечения будем иметь одно нормальное напряжение σ_z и два касательных напряжения τ_{zx} и τ_{zy} . Очевидно, что

$$\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_z^2 \quad (1)$$

$$\sigma_z^2 + \tau_z^2 = \sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = p_z^2 \quad (2)$$

Напряжения в точке поперечного сечения стержня

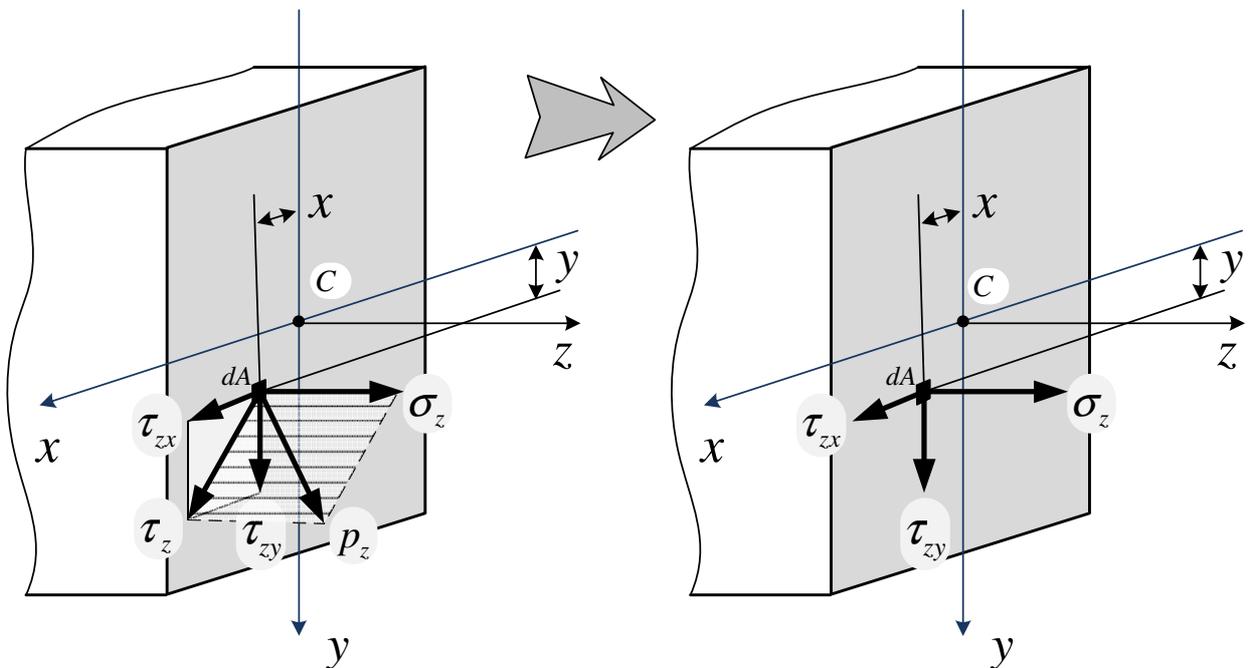


Рис. 3

Обратим внимание на индексы. Индекс нормального напряжения σ_z показывает как направление нормали к площадке, так и направление самого напряжения. Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} имеют по два индекса. Первый индекс показывает направление нормали к площадке, а второй индекс – направление самого напряжения.

Знаки напряжений назначаются в соответствии со следующим правилом:

ПРАВИЛО ЗНАКОВ для напряжений

Напряжение считается положительным, если направление напряжения и направление нормали к площадке **одновременно совпадают**, или **одновременно не совпадают** с положительными направлениями соответствующих осей. Если один из векторов направлен в положительном направлении оси, а другой в отрицательном направлении оси, то в этом случае напряжение будет отрицательным.

2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И ИХ СВЯЗЬ С НАПРЯЖЕНИЯМИ

Напряжения, распределённые по поперечному сечению, как и любую другую систему сил, можно с помощью основной теоремы статики привести к заданному центру, заменив её одной силой и одной парой. Приведём напряжения к центру тяжести поперечного сечения.

Спроецировав напряжения на координатные оси и просуммировав проекции, получим три компоненты главного вектора (рис. 4 и 5).

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA, & (a) \\ Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA, & (b) \\ Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA. & (c) \end{aligned} \quad (3)$$

Суммируя моменты напряжений относительно осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения, получим три компоненты главного момента (рис. 4 и 5).

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA, \quad (a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA, \quad (b) \quad (4)$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) \cdot dA. \quad (c)$$

Интегралы N, Q_x, Q_y называют **внутренними силами**, а интегралы M_x, M_y, M_z – **внутренними моментами**. Все шесть величин принято (не совсем корректно) называть внутренними силами. Используется также термин **усилие**.

		Обозначение	Название	Единица измерения
Усилия	Внутренние силы	N	Продольная сила	κH
		Q_x	Поперечная сила	κH
		Q_e	Поперечная сила	κH
	Внутренние моменты	M_x	Изгибающий момент	$\kappa H \cdot m$
		M_y	Изгибающий момент	$\kappa H \cdot m$
		M_z	Крутящий момент	$\kappa H \cdot m$

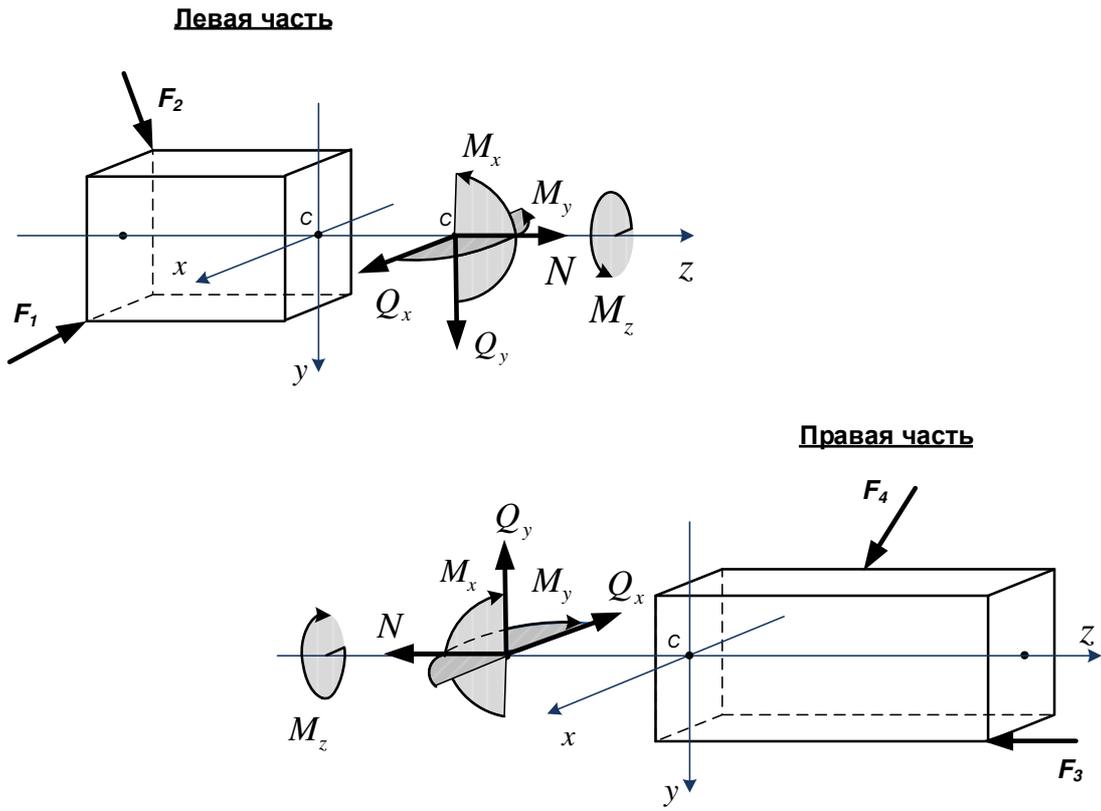


Рис. 4

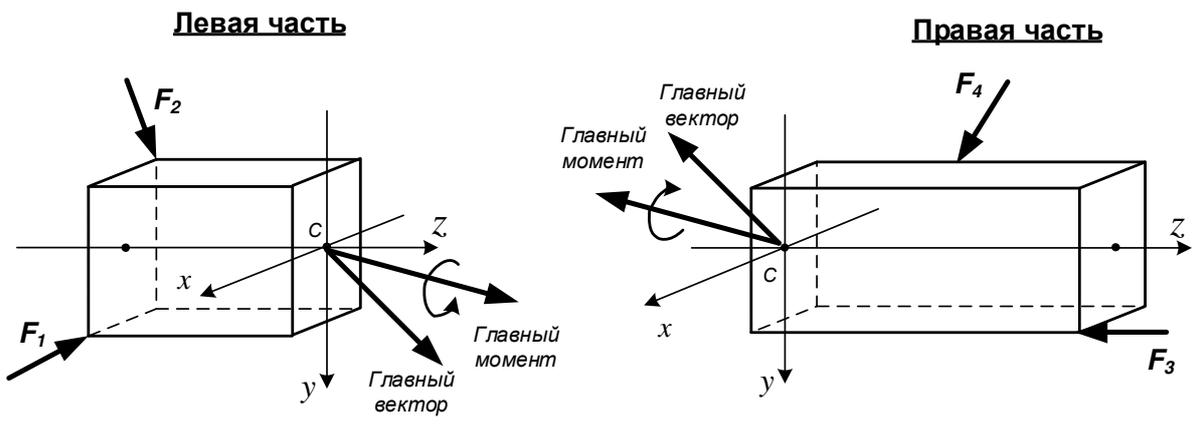


Рис. 5

ПРАВИЛО ЗНАКОВ ДЛЯ УСИЛИЙ	
ПРАВИЛО ЗНАКОВ для внутренних сил N, Q_x, Q_y	ПРАВИЛО ЗНАКОВ для внутренних моментов M_x, M_y, M_z
Правило полностью совпадает с правилом знаков для напряжений. Продольная сила и поперечные силы считаются положительными, если направление силы и направление нормали к площадке одновременно совпадают, или одновременно не совпадают с положительными направлениями соответствующих осей.	Изгибающие моменты считаются положительными, если вызывают растяжение в первой четверти поперечного сечения. Крутящий момент считается положительным, если действует против часовой стрелки при взгляде на сечение со стороны внешней нормали, что соответствует «правилу правого винта».

Примечания

- Очевидно, что правило знаков для внутренних сил не совпадает с правилом знаков для внешних сил, которое принято в теоретической механике;
- Правило знаков дает одинаковый знак для внутренних сил, действующих как на левую, так и на правую части стержня, несмотря на то что они направлены навстречу друг другу;
- Можно заметить, что продольная сила N положительна, если направлена «от сечения», что соответствует случаю растяжения стержня.
- По изображению изгибающего момента (рис. 4) легко определяются сжатые и растянутые части сечения: стрелка, изображающая момент, всегда находится на сжатой половине сечения.

3. ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ (ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ)

В общем случае в поперечном сечении стержня может возникать шесть внутренних силовых факторов (внутренних сил). Одновременное их появление в поперечном сечении наблюдается достаточно редко. Гораздо чаще в

поперечных сечениях присутствует одно или два усилия, в то время как остальные внутренние силы равны нулю.

Деформации стержня под действием того или иного набора внутренних сил называются **видом сопротивления**. Виды сопротивления разделяют на две группы. В первую группу входят виды сопротивления, при которых в сечениях присутствует только одно усилие. Такие виды сопротивления называются **простыми**. Виды сопротивления, при которых в сечении присутствуют два или более двух усилий называются **сложными**.

Простых видов сопротивления четыре:

№	Простые виды сопротивления	Внутренняя сила (усилие)
1	Центральное растяжение-сжатие (ЦРС)	N
2	Сдвиг	Q_x или Q_y
3	Чистый изгиб	M_x или M_y
4	Кручение	M_z

Все остальные следует отнести к сложным видам сопротивления:

№	Сложные виды сопротивления	Внутренние силы (усилия)
5	Прямой поперечный изгиб	Q_y, M_x или Q_x, M_y
6	Внецентренное растяжение-сжатие (ВЦРС)	N, M_x, M_y или N, M_x или N, M_y
7	Косой или сложный изгиб	Q_y, M_x, Q_x, M_y
8	ЦРС с кручением	N, M_z
...	...	
	Общий вид сложного сопротивления	$N, M_x, M_y, Q_x, Q_y, M_z$

4. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ ПРИ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Расчётные схемы для большинства строительных конструкций могут быть представлены на плоскости.

Когда все действующие на стержень силы лежат в одной плоскости, ряд усилий тождественно обращается в ноль. При действии сил в вертикальной плоскости не равны нулю только три усилия: N , Q_y , M_x . Положительные направления этих усилий для левой и правой частей стержня показаны на рис. 6.

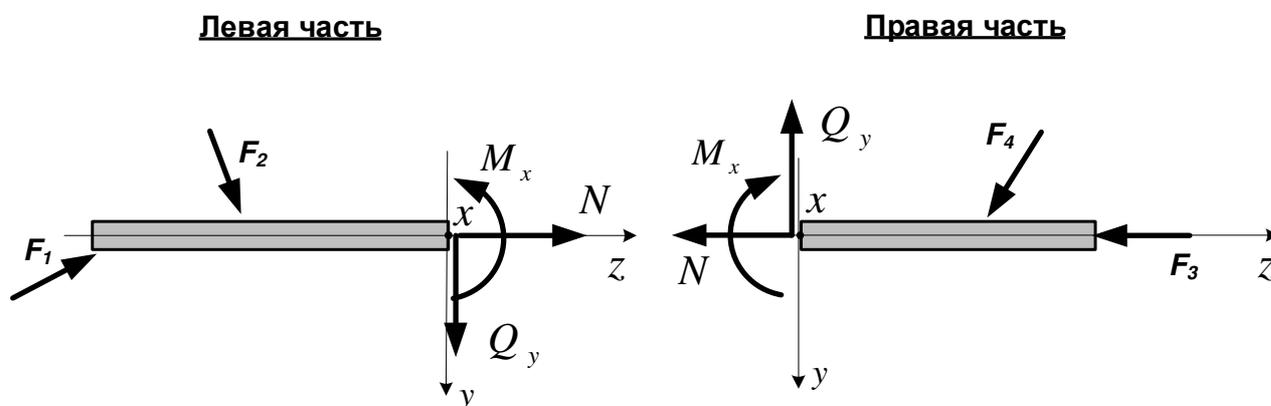


Рис. 6

Правило знаков здесь можно сформулировать менее строго, но более понятно.

Усилие $N > 0$, если вызывает растяжение в поперечном сечении стержня (направлено «от сечения»).

Усилие $Q_y > 0$, если (совместно с внешней нагрузкой) стремится повернуть отсеченную часть стержня по ходу часовой стрелки.

Усилие $M_x > 0$, если вызывает растяжение в нижних волокнах стержня, изгибая стержень выпуклостью вниз.

Примечания

- Ось u будем направлять вниз для того, чтобы согласовать правило знаков для изгибающего момента в пространственном случае (растяжение в первой четверти сечения) и правило знаков для плоского случая (растяжение в нижних волокнах стержня). Когда ось u направлена вниз, первый квадрант оказывается внизу.
- Поскольку при таком правиле знаков неизвестные усилия, приложенные к левой и правой частям стержня, не отличаются ни по величине, ни по знаку, безразлично равновесие какой части стержня (левой или правой) рассматривать для их определения. Результат от этого не изменится.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ

Для определения усилий применяют **МЕТОД СЕЧЕНИЙ**, суть которого заключается в последовательном выполнении четырёх операций:

1. Надо мысленно рассечь стержень на две части (правую и левую).
2. Отбросить либо левую, либо правую часть.
3. Заменить действие отброшенной части стержня на оставленную неизвестными внутренними силами.
4. Составить для оставшейся части стержня необходимые уравнения равновесия и, решив их, найти неизвестные внутренние силы.

Уравнения равновесия позволяют выразить внутренние силы через расположенные по одну сторону от рассматриваемого сечения внешние силы.

Из уравнения $\sum Z = 0$, записанного для одной из частей стержня, следует, что продольная сила N равна взятой с обратным знаком сумме проекций на ось z всех сил, приложенных к левой части стержня, или сумме проекций на ось z всех сил, приложенных к правой части стержня.

Обозначая проекции внешних сил как P_z , запишем

$$N = -\sum_{\text{лев.}} P_z = +\sum_{\text{прав.}} P_z \quad (5)$$

Из уравнения $\sum y = 0$, записанного для одной из частей стержня, следует, что продольная сила Q_y равна взятой с обратным знаком сумме проекций на ось

у всех сил, приложенных к левой части стержня, или сумме проекций на ось z всех сил, приложенных к правой части стержня.

Обозначая проекции внешних сил как P_y , запишем

$$Q_y = -\sum_{\text{лев.}} P_y = +\sum_{\text{прав.}} P_y \quad (6)$$

Из уравнения $\sum m_x = 0$, записанного для одной из частей стержня, следует, что изгибающий момент равен, взятой с обратным знаком, сумме моментов относительно оси x (проходящей через центр тяжести рассматриваемого сечения) всех сил, приложенных к левой части стержня или сумме моментов относительно оси x всех сил, приложенных к правой части стержня.

Обозначая моменты нагрузок как $mom_x(P)$, запишем

$$M_x = -\sum_{\text{лев.}} mom_x(P) = +\sum_{\text{прав.}} mom_x(P). \quad (7)$$

Пример применения метода сечений.

Брус, закреплённый на шарнирных опорах, загружен внешними силами, изображенными на рис. 7. Определить усилия в сечении, расположенном в середине пролета.

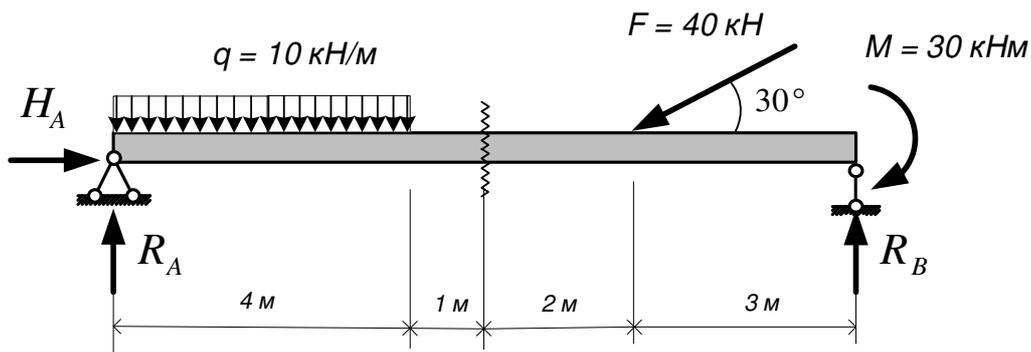


Рис. 7

Решение.

Определяем опорные реакции

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; & \quad H_A - F \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad H_A = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 34,6 \text{ кН} \\ \sum m_A = 0; & \quad -(q \cdot 4) \cdot 2 - (F \cdot \sin 30^\circ) \cdot 7 - M + R_B \cdot 10 = 0 \\ & \quad R_B = \frac{1}{10} (10 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 0,5 \cdot 7 + 30) = 25 \text{ кН} \\ \sum m_B = 0; & \quad -R_A \cdot 10 + (q \cdot 4) \cdot 8 + (F \cdot \sin 30^\circ) \cdot 3 - M = 0 \\ & \quad R_A = \frac{1}{10} (10 \cdot 4 \cdot 8 + 40 \cdot 0,5 \cdot 3 - 30) = 35 \text{ кН} \end{aligned}$$

Проверяем правильность определения реакций R_A и R_B :

$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F \cdot \sin 30^\circ = 35 + 25 - 10 \cdot 4 - 40 \cdot 0,5 = 60 - 60 = 0$$

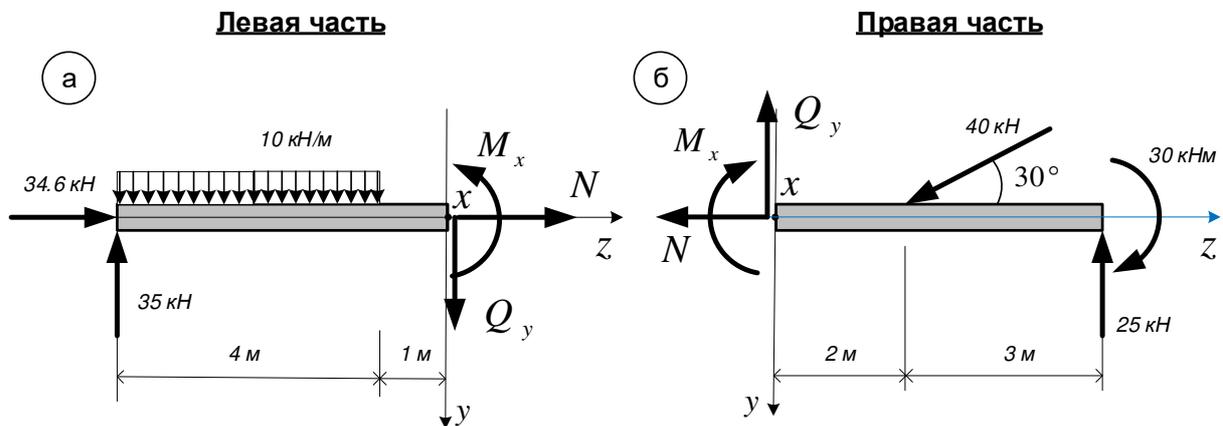


Рис. 8

Определим внутренние силы N , Q_y , M_x , используя для этого метод сечений.

- Рассечем стержень в середине пролета.
- Отбросим правую часть стержня (рис. 8, а).
- Действие правой части стержня на левую заменим неизвестными внутренними силами, считая их положительными.
- Для левой части стержня составим три уравнения равновесия, из которых найдем три неизвестных усилия.

$$\sum Z = 0; \quad N + 34,6 = 0; \quad N = -34,6 \text{ кН (сжатие).}$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_y + 10 \cdot 4 - 35 = 0; \quad Q_y = -5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_x = 0; \quad (10 \cdot 4) \cdot 3 - 35 \cdot 5 + M_x = 0;$$

$$M_x = -120 + 175 = 55 \text{ кНм}$$

(растяжение в нижних волокнах).

Покажем, что результат не зависит от того, для какой части стержня составляются уравнения равновесия. Для этого рассмотрим равновесие правой части (рис. 8, б),

$$\sum Z = 0; \quad -N - 40 \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad N = -40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong -34,6 \text{ кН}$$

(сжатие).

$$\sum Y = 0; \quad -Q_y - 25 + 40 \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad Q_y = -25 + 20 = -5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_x = 0; \quad -M_x - 40 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 - 30 + 25 \cdot 5 = 0$$

$$M_x = -40 - 30 + 125 = 55 \text{ кНм}$$

(растяжение в нижних волокнах).

Получен тот же результат.

На практике, при определении усилий уравнения равновесия для части стержня очень редко записываются в явном виде. Как правило, можно сразу записать, чему равно усилие, если знать, как оно связано с нагрузкой, которая его вызывает.

Рассмотрим, как по внешней нагрузке определить величину и знак внутренней силы.

а) Усилие N (продольная сила)

На рис. 9 показан рассеченный стержень, в сечении которого возникает положительное (растягивающее) усилие N .

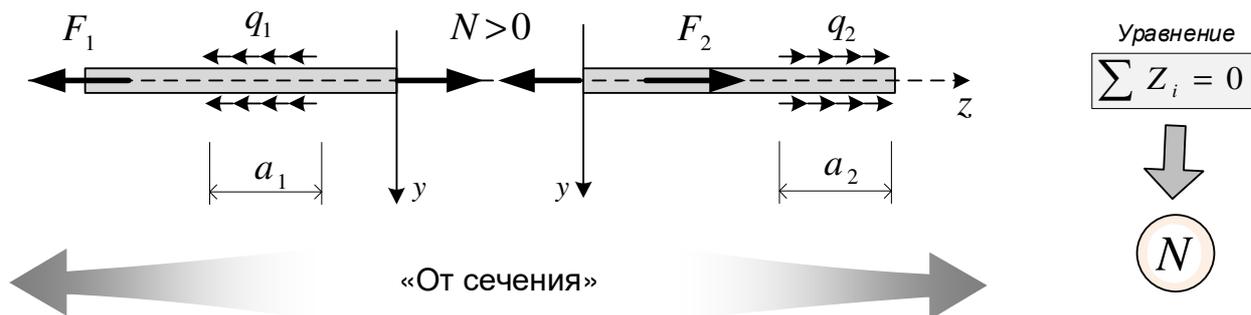


Рис. 9

Неизвестное усилие N должно находиться из уравнения $\sum Z = 0$, которое составляется для одной из частей стержня. Чтобы сила N и нагрузка уравновесили друг друга, они должны быть направлены в противоположные стороны.

Из рис. 9 видно, что внешние силы, вызывающие растягивающее усилие N , направлены «от рассматриваемого сечения». То есть:

$$N = F_1 + q_1 \cdot a_1 \quad (\text{для левой части стержня}),$$

$N = F_2 + q_2 \cdot a_2$ (для правой части стержня). Соответственно, нагрузка, направленная «к сечению», будет вызывать отрицательное усилие N .

б) Усилие Q_y (поперечная сила).

На рис. 10 показан рассеченный стержень с положительно направленным усилием Q_y . Неизвестное усилие Q_y должно находиться из уравнения $\sum Y = 0$, составленного для одной из частей стержня. Чтобы Q_y и нагрузка уравновесили друг друга, они должны быть направлены в противоположные стороны. Из рис. 10 видно, что внешние силы, вызывающие положительную поперечную силу, стремятся повернуть отсеченную часть стержня по ходу часовой стрелки относительно оси x , проходящей через сечение.

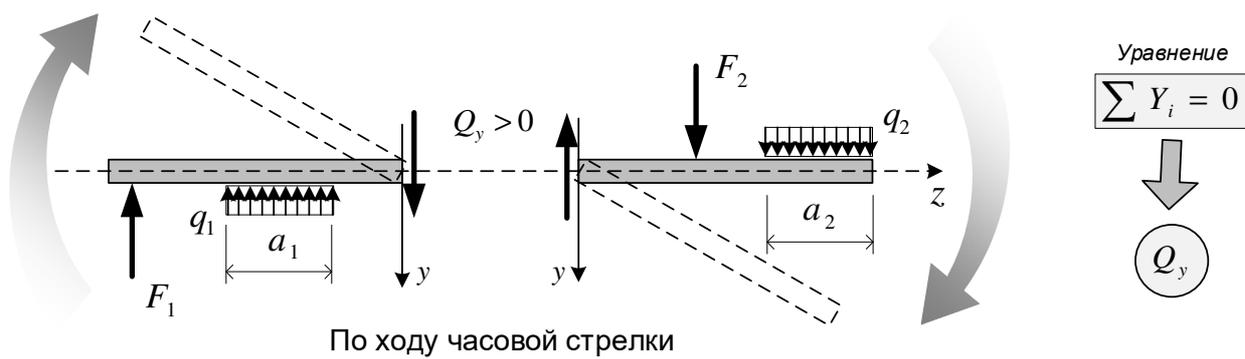


Рис. 10

То есть

$$Q_y = F_1 + q_1 \cdot a_1 \quad (\text{для левой части стержня}),$$

$$Q_y = F_2 + q_2 \cdot a_2 \quad (\text{для правой части стержня}).$$

Соответственно, нагрузка, направленная «против хода часовой стрелки» будет вызывать отрицательное усилие Q_y .

в) **Усилие M_x** (изгибающий момент).

На рис. 11 показан рассеченный стержень с положительным усилием M_x .

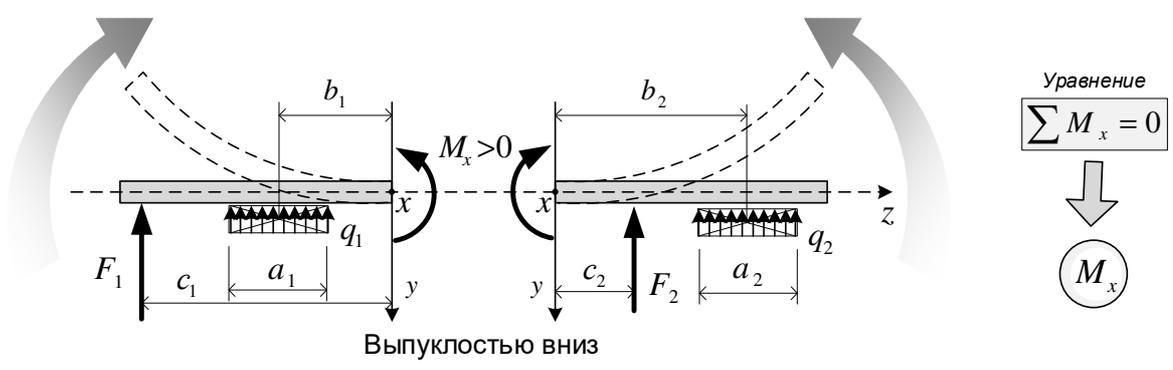


Рис. 11

Неизвестный внутренний момент M_x следует искать из уравнения равновесия $\sum m_x = 0$ (x проходит через центр тяжести сечения), составленного для левой или правой частей стержня. Из рис. 11 видно, что, если усилие M_x направлено против часовой стрелки, то уравновешивающая его нагрузка должна давать относительно x момент по часовой стрелке (и наоборот). То есть,

другими словами, внешние силы вызывают положительный изгибающий момент, если стремятся изогнуть часть стержня выпуклостью вниз (вызвать растяжение в нижних волокнах стержня). Тогда

$$M_x = M_2 + F_1 \cdot c_1 + (q_1 \cdot a_1) \cdot b_1 \quad (\text{для левой части стержня}),$$

$$M_x = M_2 + F_2 \cdot c_2 + (q_2 \cdot a_2) \cdot b_2 \quad (\text{для правой части стержня}).$$

Соответственно, нагрузка, направленная иначе, чем на рис. 11, будет вызывать отрицательное усилие M_x .

Примечание

Нагрузка в виде сосредоточенного момента никогда не входит в выражения для усилий N и Q_y , поскольку не входит в уравнения для их определения $\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$. Это объясняется тем, что проекция пары, которая представляет собой совокупность двух параллельных, равных по модулю и противоположно направленных сил, на любую ось всегда равна нулю.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ЖУРАВСКОГО

Рассмотрим стержень (рис. 12), загруженный произвольной плоской системой сил, которая включает в себя распределенные нагрузки как продольные, так и поперечные. Продольную нагрузку покажем по бокам стержня, чтобы при графическом её изображении она не сливалась с осью стержня. Проведем два поперечных сечения, расположенных бесконечно близко друг к другу.

Рассмотрим равновесие бесконечно тонкой части стержня, расположенной между двумя этими сечениями (рис. 13). Учтём, что внутренние силы в рассматриваемых сечениях будут отличаться друг от друга не некоторые бесконечно малые приращения dN, dQ_y, dM_x .

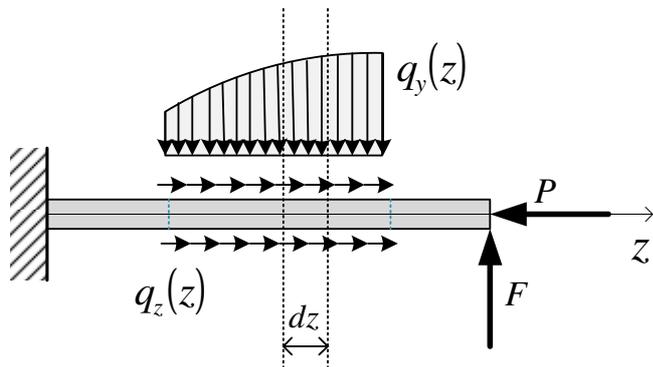


Рис. 12

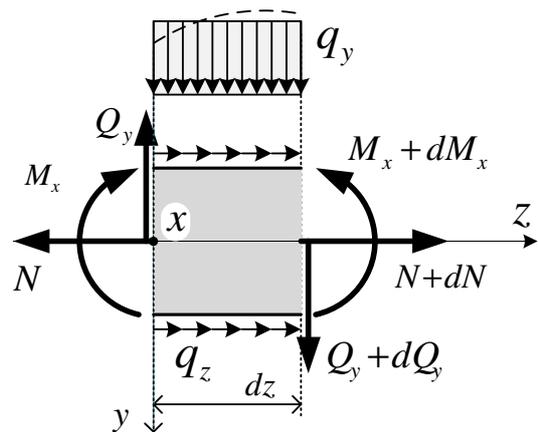


Рис. 13

Составим систему трёх уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

$$\begin{cases} \sum Z = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_x = 0; \end{cases} \begin{cases} -N + (N + dN) + q_z \cdot dz = 0 \\ -Q_y + (Q_y + dQ_y) + q_y \cdot dz = 0 \\ -M_x + (M_x + dM_x) - (Q_y + dQ_y) \cdot dz - (q_y \cdot dz) \cdot \frac{dz}{2} = 0; \end{cases}$$

Упростим уравнения системы, раскрывая скобки и отбрасывая слагаемые второго порядка малости:

$$\begin{cases} dN + q_z \cdot dz = 0 \\ dQ_y + q_y \cdot dz = 0 \\ dM_x - Q_y \cdot dz = 0; \end{cases}$$

В результате получим, что для равновесия рассматриваемого элемента стержня необходимо выполнение следующих дифференциальных зависимостей:

$$\frac{dN}{dz} = -q_z \quad (8)$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y \quad (9)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = \frac{dQ_y}{dz} = -q_y \quad (11)$$

Полученные формулы носят название дифференциальных зависимостей Д.И. Журавского.



**Журавский
Дмитрий Иванович**

Русский учёный-механик и инженер, специалист в области мостостроения и строительной механики. Автор проектов и участник строительства мостов через Веребью, Волгу, Волхов Петербурго – Московской железной дороги.

В 1883–1889 годах член Совета Министров путей сообщения. Автор многих научных трудов по мостостроению и сопротивлению материалов.

В 1855 году удостоен Демидовской премии Академии наук за научную деятельность.

1821 – 1891

Рис. 14



Рис. 15. Мост через р. Веребья

7. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ

Если взять для рассмотрения несколько поперечных сечений стержня и в каждом из них найти внутренние силы, то будет видно, что они изменяются в зависимости от расположения сечения. Если расположение поперечного сечения определить с помощью некоторой переменной z (рис. 16), то внутренние силы можно будет рассматривать как функции этой переменной. Найдя аналитические выражения этих функций, можно представить их в виде графиков.

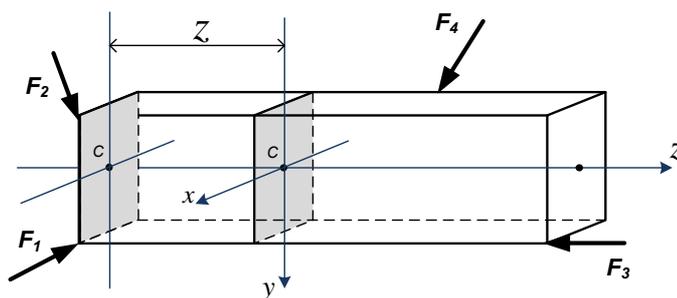


Рис. 16

Графики функции $N(z)$, $Q_y(z)$, $Q_x(z)$, $M_x(z)$, $M_y(z)$ называются **эпюрами внутренних сил**. При рассмотрении стержня на плоскости Oyz может быть построено только три таких графика: $N(z)$, $Q_y(z)$, $M_x(z)$. В пространственном случае сложного сопротивления можно построить самое большее шесть эпюр.

Для выполнения расчета на прочность необходимо знать наибольшее значение каждого из усилий и расположение сечений, в которых они этих значений достигают.

Сечения, в которых то или иное усилие достигает наибольшего значения, называют **опасными сечениями**. Основной целью построения эпюр внутренних сил является определение расположения опасных сечений и вычисление значений внутренних сил, которые в этих сечениях возникают.

8. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР

Эпюры внутренних сил строятся в следующей последовательности:

1. Определяются опорные реакции, если это необходимо.
2. Стержень разбивается на участки. Границами участков являются:
 - а) края стержня,
 - б) точки приложения сосредоточенных сил и моментов (включая реакции),
 - в) границы распределенных нагрузок.

Участки нумеруются последовательно слева направо, а в консольных стержнях - по направлению к заделке.

3. На каждом из участков произвольно выбирается сечение. Его положение указывается с помощью переменной z_i (где i - номер участка).

Переменная z_i отсчитывается обычно от левого или от правого края стержня.

Можно использовать переменную z без индекса, если это не вызывает разночтений.

4. На каждом i -м участке записываются аналитические выражения для усилий, показывающие, как усилия зависят от расстояния z_i .

Усилия выражаются через нагрузку, приложенную к левой или к правой части стержня в зависимости от начала отсчета z_i .

5. Полученные функции изображаются графически, для чего сначала подсчитываются их значения в ряде сечений. Линейные функции строятся по двум значениям, подсчитанным на краях участка. Для построения нелинейных функций обычно подсчитывают ещё и значение в середине участка.

Экстремальные значения функций также вычисляются. Графики усилий (эпюры) строятся на осях, параллельных оси стержня, которые называются **базой эпюры**.

6. На всех эпюрах кроме эпюр изгибающих моментов положительные значения откладываются вверх. **Положительные значения изгибающих моментов при проведении расчётов строительных конструкций традиционно откладываются вниз.**

Другие способы построения эпюр рассмотрим позже.

9. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЭПЮР

1. Графики усилий (эпюры) строятся на линиях, параллельных оси стержня, которые называют базой эпюры.
2. Сбоку от эпюры указывают наименование внутренней силы.
3. Здесь же указывается, в каких единицах измеряются значения функции.
Если эпюра строится в символьном виде, без указания числовых значений функции, то нет необходимости в указании единиц измерения.
4. Эпюры штрихуются частой штриховкой перпендикулярно к базе эпюры.
5. На всех эпюрах внутренних сил положительные значения откладываются вверх. Исключение составляют эпюры изгибающих моментов, которые при проведении расчётов строительных (!) конструкций по традиции строятся плюсом вниз.
6. Символами + и -, помещёнными в окружность отмечаются знаки усилий.
7. Вычисленные значения наносятся на чертёж и выделяются более толстыми линиями.
8. Указывается положение сечений, в которых функция экстремальна.

10. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Чтобы определить величину продольной силы, нужно суммировать все силы, расположенные по одну сторону от рассматриваемого сечения. При этом в соответствии со схемой, приведённой на рис. 9, силы направленные от сечения следует брать со знаком «+», а силы, направленные от сечения – со знаком «-».

Задача 1.

Построить эпюру продольной силы для стержня, изображённого на рисунке 17.

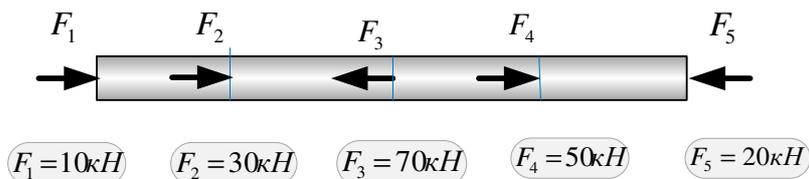


Рис. 17

Решение

Проверим равновесие сил, приложенных к стержню:

$$\sum Z_i = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5 = 10 + 30 - 70 + 50 - 20 = 0.$$

Силы находятся в равновесии.

Пронумеруем участки.

Для каждого участка

- покажем рассматриваемое сечение,
- суммируем силы, расположенные по одну сторону от сечения, взяв силы направленные от сечения со знаком «+», а силы направленные от сечения – со знаком «-»,

1 участок: $N = -F_1 = -10\text{кН},$

2 участок: $N = -F_1 - F_2 = -10 - 30 = -40\text{кН},$

3 участок: $N = F_4 - F_5 = 50 - 20 = +30\text{кН},$

4 участок: $N = -F_5 = -20\text{кН}.$

- нанесём найденные значения на график (рис. 18).

Можно легко убедиться, что результат не зависит от того, по какой части стержня выполняется суммирование. Так, например, для третьего участка можно написать:

3 участок: $N = -F_1 - F_2 + F_3 = -10 - 30 + 70 = +30\text{кН}.$

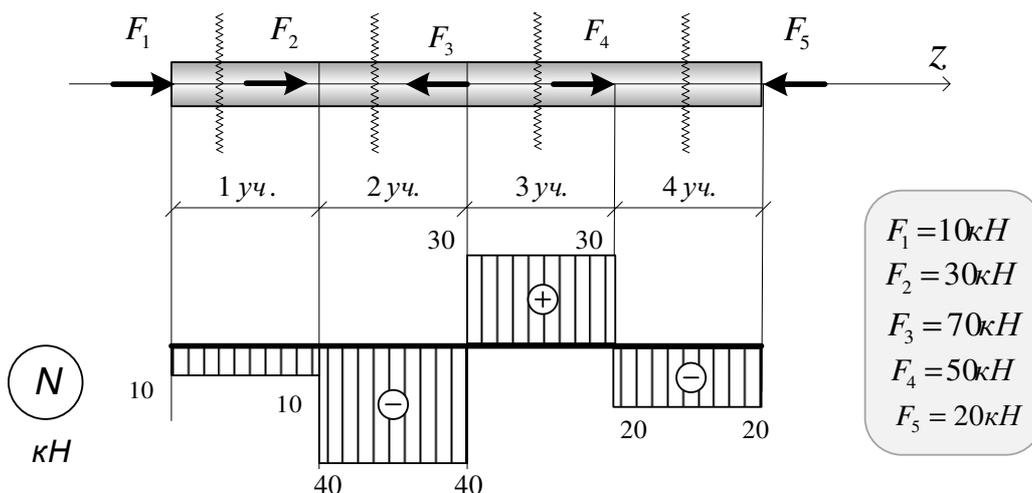


Рис. 18

Задача 2.

Построить эпюру продольной силы для стержня, изображённого на рисунке 19.

Решение

Чтобы не определять реакцию R_B жёсткой заделке, будем для обоих участков определять силу N путём суммирования сил, приложенных к верхней части стержня.

Пронумеруем участки (рис. 20).

$$F = 40 \text{ кН}, \quad q = 30 \text{ кН/м}$$

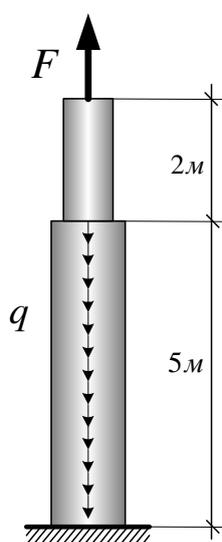


Рис. 19

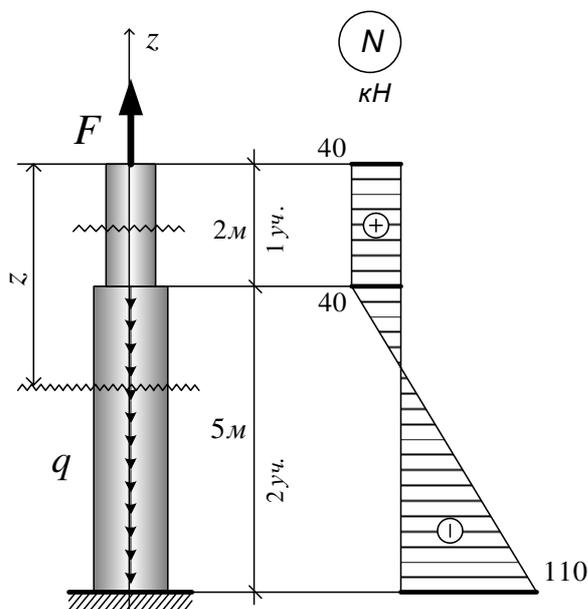


Рис. 20

Для каждого участка

- покажем рассматриваемое сечение,
- суммируем силы, расположенные по одну сторону от сечения, взяв силы, направленные от сечения со знаком «+», а силы, направленные от сечения – со знаком «-»:

1 участок: $N = F = +40 \text{ кН}$.

На втором участке приложена распределённая нагрузка.

При действии распределённой нагрузки продольная сила N зависит от того, где находится рассматриваемое сечение. По этой причине будем указывать расположение сечения с помощью переменной z , которую можно отсчитывать от края участка.

2 участок: $2 \leq z \leq 7\text{ м}$

$$N = F - q(z - 2) = 40 - 30(z - 2).$$

Функция линейная, поэтому строим её график по двум точкам:

$$\text{при } z = 2\text{ м} \quad N = 40 \text{ кН},$$

$$\text{при } z = 7\text{ м} \quad N = -110 \text{ кН}.$$

Примечание:

Построенная эпюра показывает значения максимальной сжимающей силы в стержне ($N = -110 \text{ кН}$), максимальной растягивающей силы ($N = 40 \text{ кН}$). Кроме того, она показывает, что верхняя часть стержня (колонны) является растянутой, а нижняя – сжатой, а также, что реакция опоры равна 110 кН .

Более сложный пример построения эпюры N рассмотрен в задаче 12.

11. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Крутящий момент в поперечных сечениях стержня возникает, когда стержень загружен внешними парами, перпендикулярными к оси стержня. Они могут изображаться одним из показанных на рис. 21 способов.

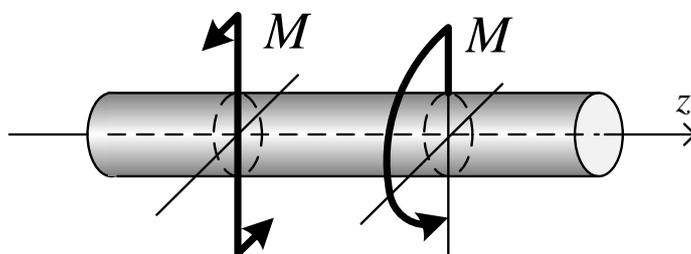


Рис. 21

Чтобы определить крутящий момент в некотором сечении стержня надо, глядя на это сечение с конца стержня, суммировать все моменты, расположенные от конца стержня до сечения. При этом моменты, действующие против хода часовой стрелки, следует брать со знаком «+», а моменты, действующие по ходу часовой стрелки, – со знаком «-».

Задача 3.

Построить эпюру крутящего момента для стержня, изображённого на рис. 22.

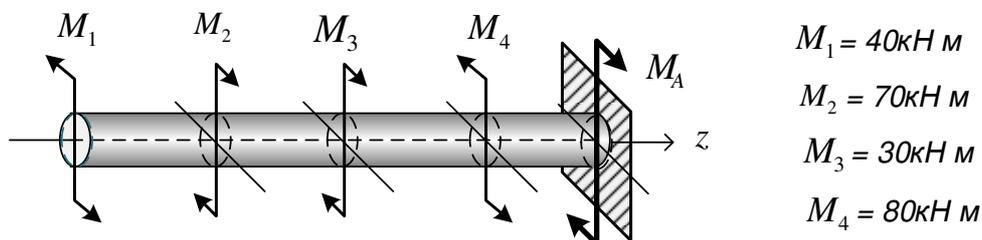


Рис. 22

Решение

Пронумеруем участки. Применяя метод сечений на каждом участке стержня, будем каждый раз отбрасывать правую часть стержня, суммируя моменты, приложенные к левой части. В этом случае нам не понадобится определять реактивный момент M_A в жёсткой заделке.

Для каждого участка

- покажем рассматриваемое сечение,
- суммируем моменты, расположенные по одну сторону от сечения, взяв их со знаком «+» при действии против хода часовой стрелки, и со знаком «-» при действии по ходу часовой стрелки.

1 участок: $M_z = +M_1 = 40 \text{ кНм},$

2 участок: $M_z = +M_1 - M_2 = 40 - 70 = -30 \text{ кНм},$

3 участок: $M_z = +M_1 - M_2 - M_3 = 40 - 70 - 30 = -60 \text{ кНм},$

4 участок: $M_z = +M_1 - M_2 - M_3 + M_4 =$
 $= 40 - 70 - 30 + 80 = 20 \text{ кНм}.$

- нанесём найденные значения на график (рис. 23).

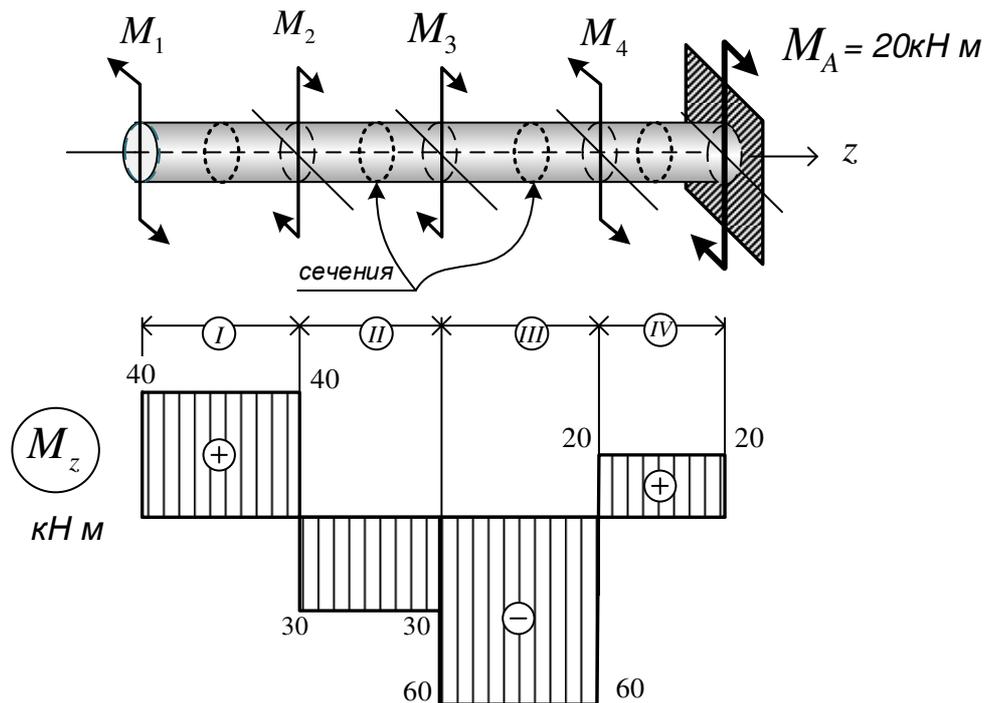


Рис. 23

12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ЖУРАВСКОГО

С точки зрения математики все дифференциальные зависимости Журавского представляют собой равенства вида $\frac{dF}{dz} = f$. Рассмотрим, как это выражается графически.

Пусть имеются графики функций $f(z)$ и $F(z)$, для которых справедливо равенство $\frac{dF}{dz} = f$.

Производная $\frac{dF}{dz}$, как известно, равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $F(z)$.

Таким образом, при некотором значении $z = z_1$ (рис 24) тангенс угла наклона касательной $\text{tg} \alpha_1$ будет равен ординате (отрезку) f_1 на графике функции $f(z)$. Аналогично, при другом значении аргумента $z = z_2$ $\text{tg} \alpha_2$ будет равен отрезку f_2 и так далее.

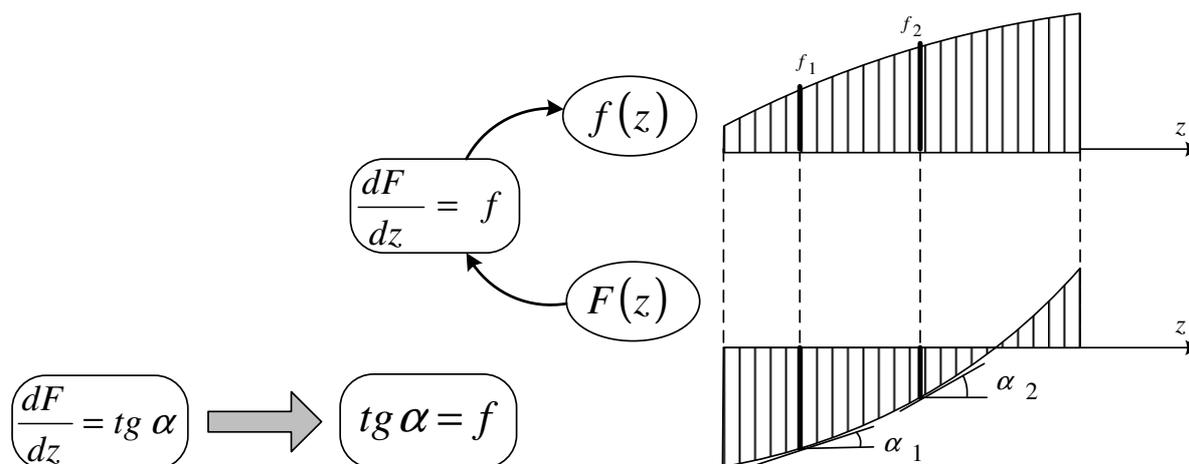


Рис. 24

Из рисунка видно, что если с увеличением z значение функции f возрастает, то растет и соответствующий угол наклона касательной к графику $F(z)$. При уменьшении значений f – наклон касательной к графику $F(z)$ соответственно убывает, и функция $F(z)$ с ростом z становится все более полой.

Легко догадаться, что если на некотором отрезке $f(z) = 0$, то $\frac{dF}{dz} = 0$, что возможно, когда $F(z) = \text{const}$. На графике это изображается горизонтальной линией.

Если при всех значениях аргумента $f(z) = \text{const}$, то $\frac{dF}{dz} = tg \alpha = \text{const}$, что возможно только в том случае, когда $F(z)$ является линейной функцией z и на графике изображается наклонной прямой линией.

ЭКСТРЕМУМЫ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция $f(z)$ является производной от $F(z)$. В тех точках, где $f(z) = 0$ (пересечение графика $f(z)$ с осью), на графике $F(z)$ будет иметь место экстремум, то есть точка, в которой касательная к графику $F(z)$ горизонтальна ($tg \alpha = 0$).

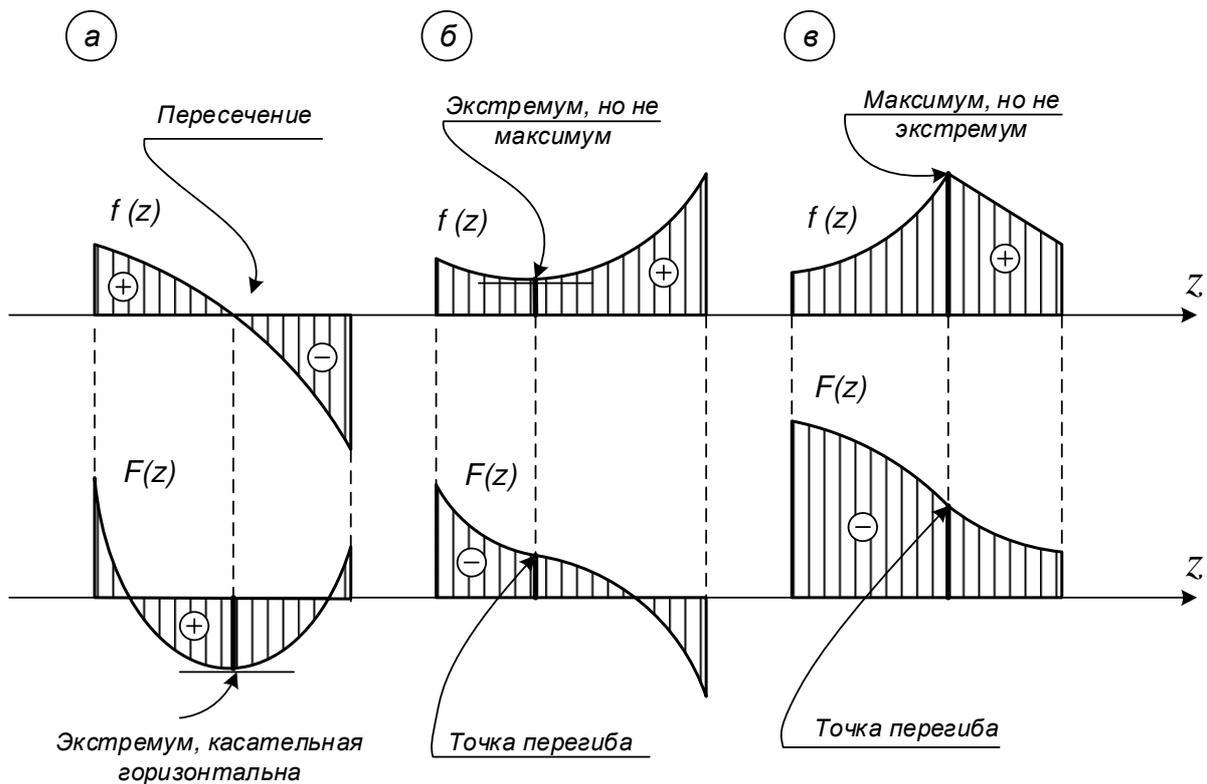


Рис. 25

Углы наклона касательной к графику $F(z)$ слева и справа от экстремума имеют разные знаки. На графике $f(z)$ разные знаки имеют значения функции (рис. 25, а).

Иногда утверждают, что экстремум соответствует максимальному (минимальному) значению функции. Это не всегда верно. Экстремум на графике функции соответствует точке, в которой касательная горизонтальна (первая производная равна нулю). Максимальное (минимальное) значение функции может достигаться совсем в другом месте, как это показано на рис. 25, б, в.

Если функция $f(z)$ на некотором участке графика растет, а затем начинает убывать (участки AB и BC на рис. 25, в), или сначала убывает, а затем растет (участки AB и BC на рис. 25, б), то таким же образом на графике $F(z)$ ведет себя угол наклона касательной. В результате выпуклость графика $F(z)$ слева и справа от границы участков AB и BC направлена в разные стороны и на графике $F(z)$ наблюдается **точка перегиба**.

Приведённые выше рассуждения помогают при построении эпюр. В особенности это касается построения графиков (эпюр) поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x .

13. ВЛИЯНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ НА ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

(следствия из уравнений равновесия)

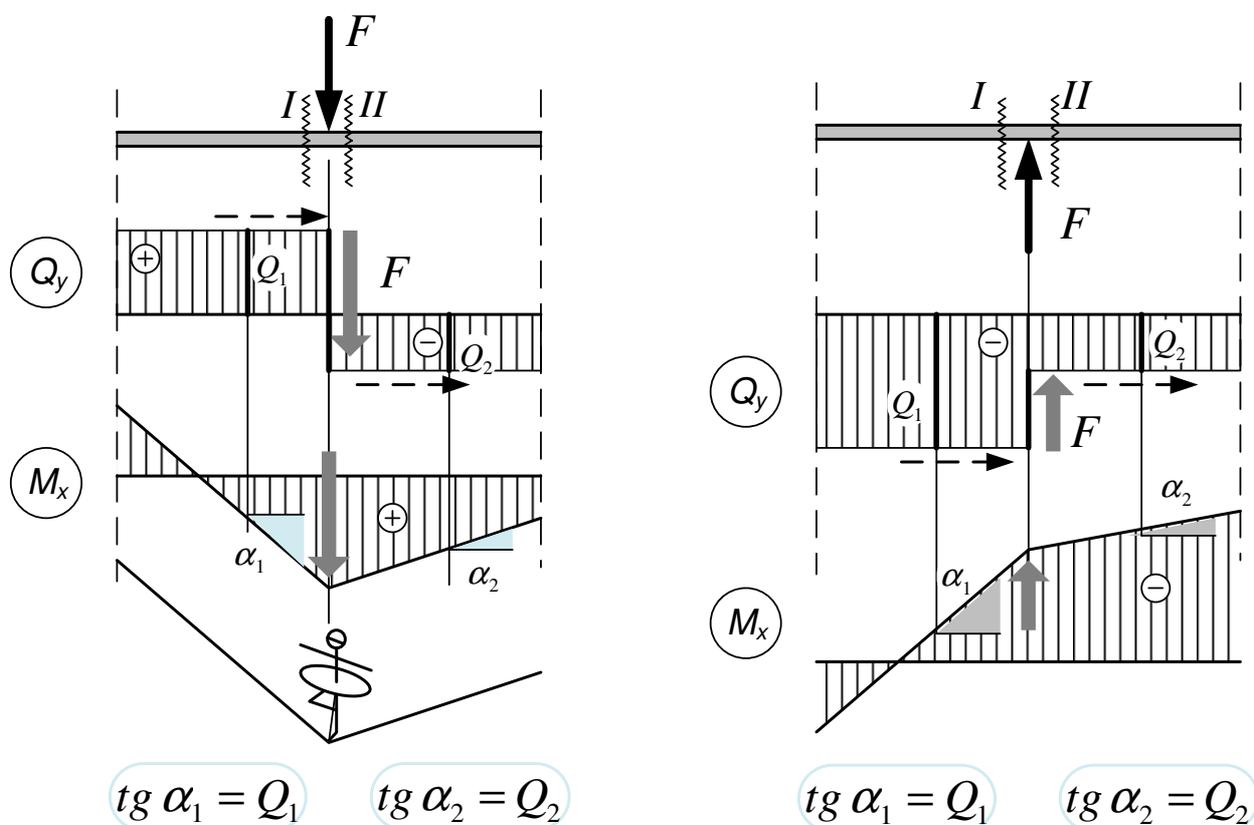


Рис. 26

Выше упоминалось, что поперечная сила Q_y в сечении получается суммированием (с учётом знака) вертикальных сил, расположенных по одну сторону от сечения. Отсюда легко сделать два вывода:

- Если на краю балки не приложена вертикальная сила (или реакция), то поперечная сила в крайнем сечении будет равна нулю.

- Поперечные силы, полученные для сечений I и II , которые расположены в непосредственной близости от силы слева и справа (рис. 26) будут отличаться на величину силы. Функция в этом месте будут иметь разрыв на величину силы. Если мысленно двигаться по балке слева-направо, то вертикальный участок на графике $Q_y(z)$ будет направлен в сторону действия силы, как это показано на рис. 26.

Кроме того, можно заметить, что поскольку значение поперечной силы Q_y слева и справа от приложенной силы разное, то и угол наклона касательной к эпюре M_x также будет разным. Как следствие, на эпюре изгибающего момента появится излом (рис. 26). Направление возникающего излома можно пояснить с помощью простой аналогии: в месте приложения сосредоточенной силы эпюра $M_x(z)$ ведёт себя подобно тому, как ведёт себя натянутый трос под действием сосредоточенной силы (рис. 26).

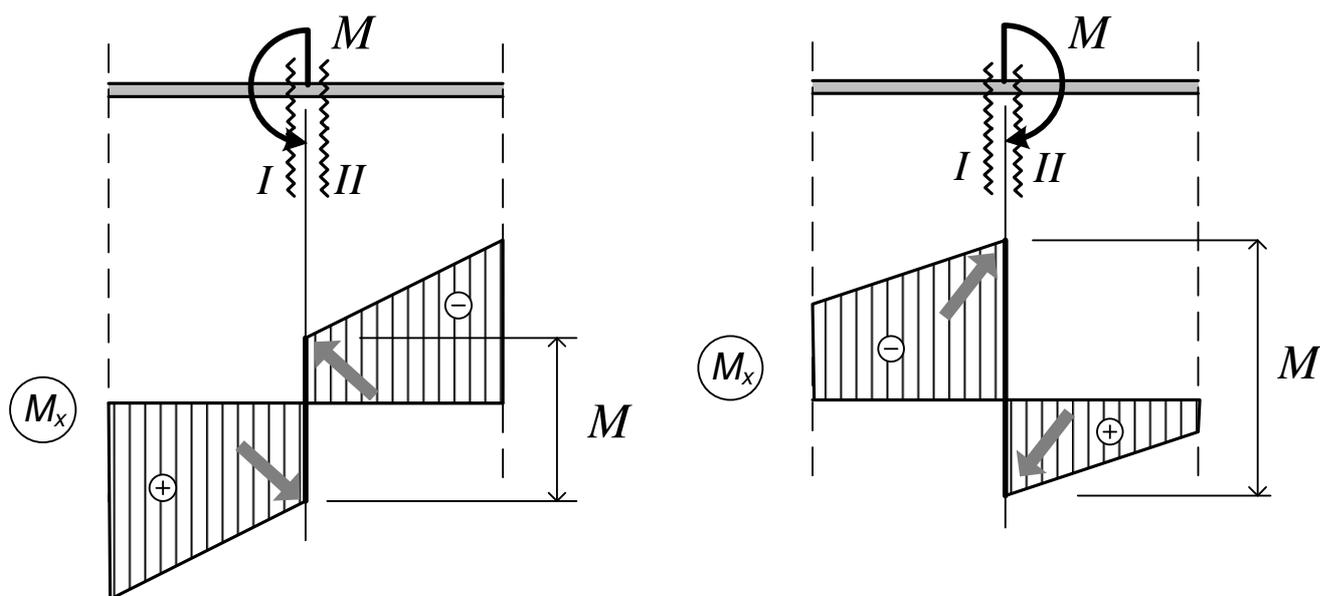


Рис. 27

Выше упоминалось, что изгибающий момент M_x в сечении получается суммированием (с учётом знака) моментов сил, расположенных по одну сторону от сечения. Отсюда также можно сделать два вывода:

- Если на краю балки не применен сосредоточенный момент, то изгибающий момент в крайнем сечении будет равен нулю.

- Изгибающие моменты, полученные для сечений *I* и *II*, расположенных в непосредственной близости от точки приложения внешнего момента *M* слева и справа (рис. 27) будут отличаться на величину этого момента. График функции $M_x(z)$ в этом месте также будет иметь вертикальный участок, высота которого равна *M*. Направление этого вертикального участка на правильно построенной эпюре будет соответствовать схемам, приведённым на рис. 27.

14. ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ НАГРУЗОК НА ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

(следствия из дифференциальных зависимостей Журавского)

При изгибе стержня практически всегда изгибающий момент возникает вместе с поперечной силой. По этой причине строятся обе эпюры. Сначала строится эпюра поперечной силы Q_y , а затем эпюра изгибающего момента M_x .

Напомним, что дифференциальные зависимости Журавского, которые связывают поперечную нагрузку, поперечную силу и изгибающий момент, выглядят следующим образом:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Таким образом, расположение эпюр по вертикали соответствует дифференциальным зависимостям Журавского: $q_y \rightarrow Q_y \rightarrow M_x$.

Очевидно, что на участках балки, на которых нагрузка отсутствует, поперечная сила должна быть постоянна, что на эпюре выражается горизонтальной прямой, а изгибающий момент описывается линейной функцией, чему на эпюре соответствует наклонная прямая (рис. 28, а).

Возможны и частные случаи. Так, если и нагрузка, и поперечная сила равны нулю, то изгибающий момент постоянен (рис. 28, б). Наконец, возможен вырожденный случай, когда все три эпюры будут нулевыми (рис. 28, в).

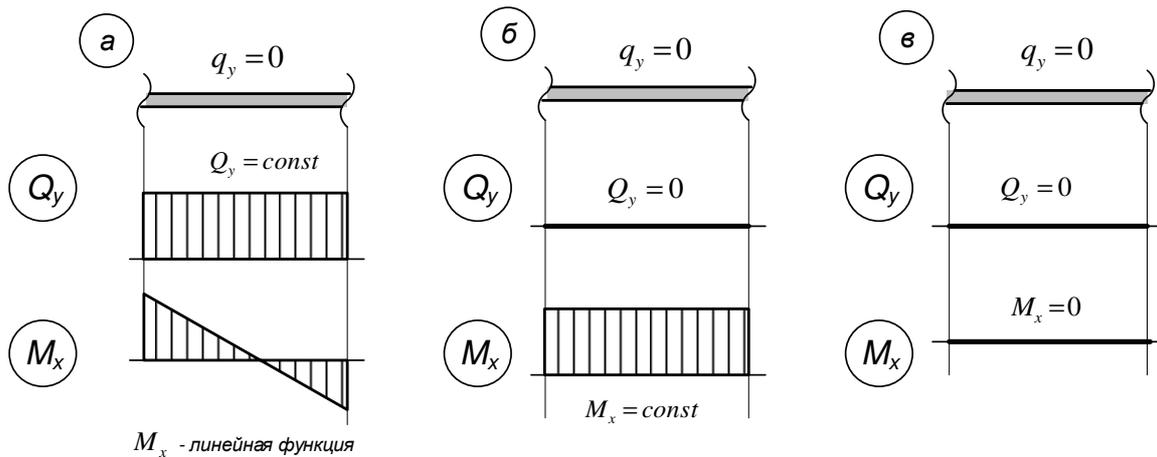


Рис. 28

Рассмотрим теперь, как дифференциальные зависимости Журавского проявляют себя в случае, когда на участке балки приложена распределённая нагрузка.

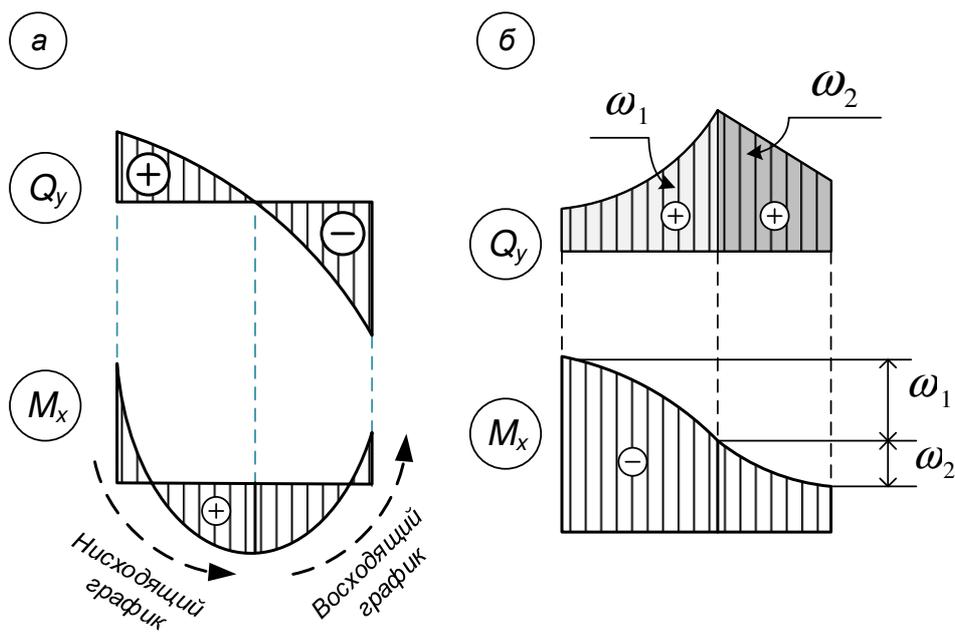


Рис. 29

Независимо от того, как распределена на участке нагрузка, имеют место следующие закономерности (рис. 29):

- Эпюра моментов является нисходящей на тех участках, где поперечная сила

положительна. И наоборот, эпюра моментов становится восходящей при отрицательных значениях поперечной силы (рис. 29, а).

- Разница между конечным и начальным значениями изгибающего момента на некотором участке балки равняется площади эпюры поперечных сил, поскольку очевидно, что

$$\Delta M_x = \int Q_y dz.$$

- Разница между конечным и начальным значениями поперечной силы на некотором участке равняется равнодействующей распределённой нагрузки. Причём, при рассмотрении эпюры слева-направо изменение поперечной силы происходит в направлении нагрузки (рис. 30).

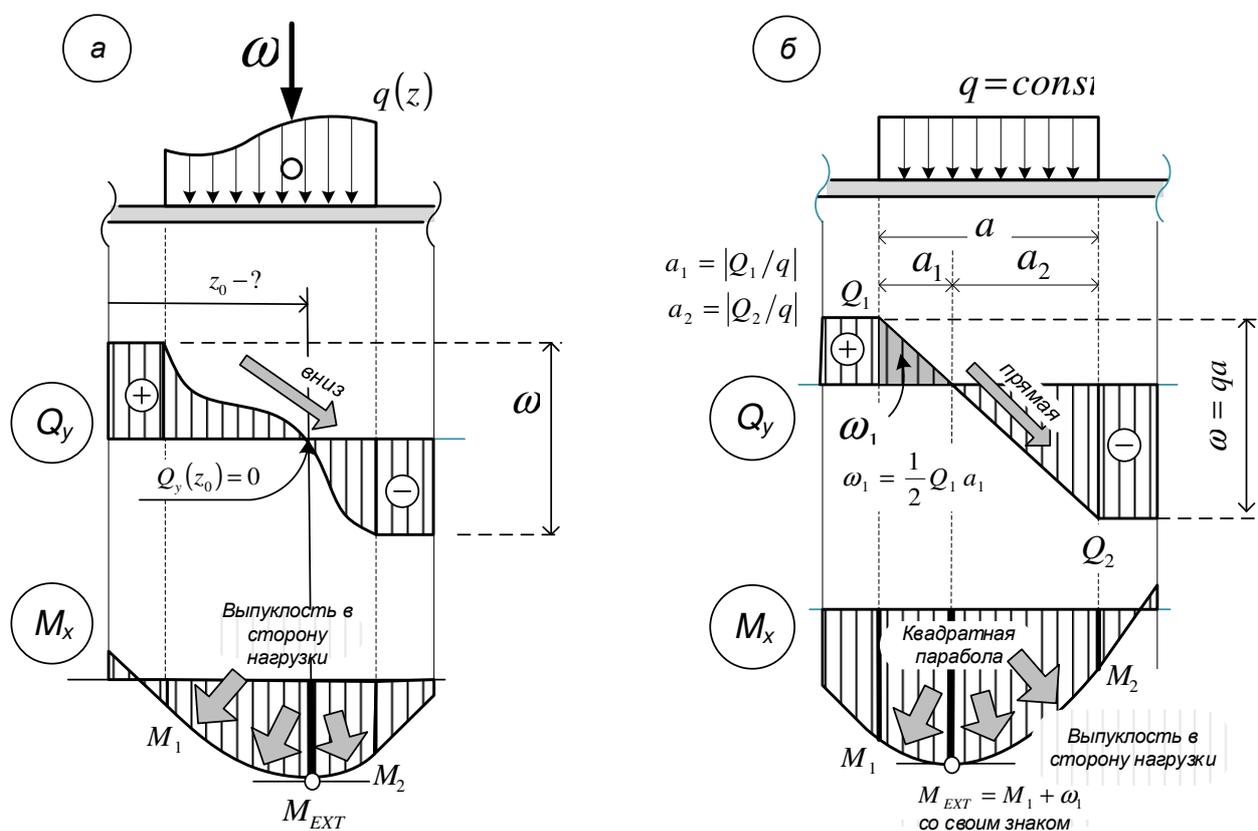


Рис. 30

- Выпуклость эпюры изгибающих моментов всегда направлена в сторону действия нагрузки. Эта закономерность известна как «правило паруса», поскольку наблюдается аналогия с тем, как наполняется воздухом парус под

действием ветра (рис. 30).

- Положение сечения, в котором поперечная сила обращается в ноль, и в котором возникает экстремальный изгибающий момент (рис. 30, б), определяется из решения уравнения вида $Q_y(z) = 0$.
- Экстремальное значение момента M_{EXT} можно найти, подставив в выражение $M_x(z)$ значение найденной для этого сечения координаты z .

Чаще всего (рис. 30, б) приходится сталкиваться с нагрузками, которые равномерно распределены на некотором участке балки ($q_y = const$). В этом случае, дополнительно к сказанному выше, можно заметить следующее:

- Поперечная сила описывается в этом случае линейной функцией, которая на эпюре изображается наклонной прямой, движение по которой происходит в сторону действующей нагрузки, если рассматривать эпюру в направлении слева-направо. Разница между конечным и начальным значением равнодействующей qa .
- Изгибающий момент описывается квадратичной функцией, которая на эпюре изображается квадратной параболой, выпуклость которой обращена в сторону действия нагрузки.
- Положение сечения, в котором поперечная сила обращается в ноль, и в котором возникает экстремальный изгибающий момент (рис. 30, б), в этом случае можно определить путём вычисления отрезков

$$a_1 = |Q_1/q| \text{ и } a_2 = |Q_2/q|.$$

- Экстремальное значение момента M_{EXT} можно найти, прибавив к изгибающему моменту M_1 , который действует на левом краю участка, площадь эпюры поперечных сил ω_1 (площадь треугольника), взяв её со своим знаком:

$$M_{EXT} = M_1 + \omega_1.$$

В расчётной практике достаточно часто возникает необходимость рассмотрения снеговых, ветровых или гидростатических нагрузок, которые распределены по треугольному или трапецидальному закону.

Трапецию всегда можно разделить на прямоугольник и треугольник, сведя решение к рассмотрению двух нагрузок, равномерно распределённой и распределённой по треугольному закону.

При рассмотрении треугольной нагрузки (рис. 31) поперечная сила описывается квадратичной функцией, а на эпюре изгибающего момента возникает кубическая парабола.

Направление выпуклости на эпюре Q_y определяется тем, как расположена треугольная нагрузка (правило паруса для эпюры поперечных сил не действует!). В том сечении, где распределённая нагрузка равна нулю («клин» треугольника), касательная к эпюре поперечных сил будет горизонтальна.

Положение сечения, в котором поперечная сила обращается в ноль, и в котором возникает экстремальный изгибающий момент, определяется из решения квадратного уравнения вида $Q_y(z) = 0$. Экстремальное значение момента M_{EXT} определяется подстановкой найденной для этого сечения координаты z в выражение изгибающего момента. Более простые способы определения экстремального значения M_{EXT} в данном случае, к сожалению, неприменимы.

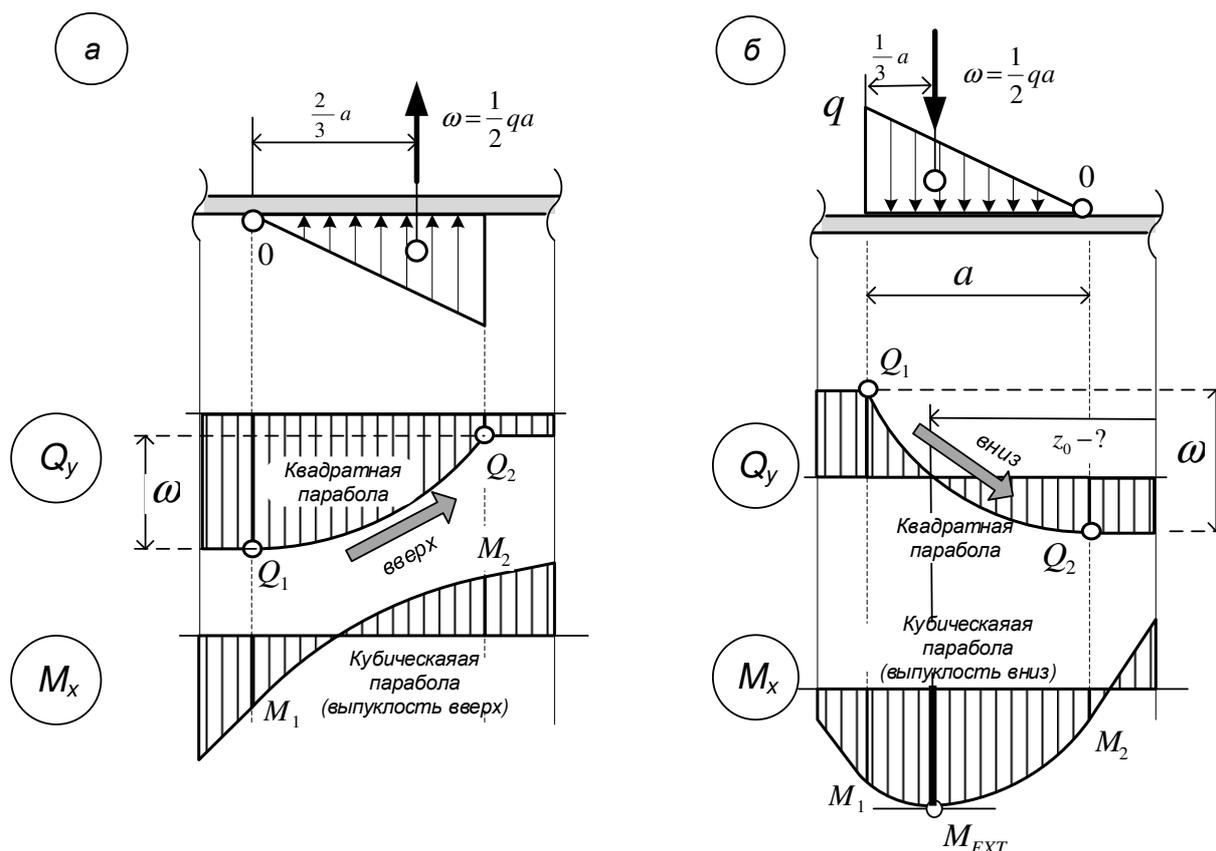


Рис. 31

15. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА АНАЛИТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Чтобы определить величину поперечной силы, нужно суммировать вертикальные проекции всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. При этом, в соответствии со схемой приведённой на рис. 10, силы, направленные по отношению к рассматриваемому сечению по ходу часовой стрелки, следует брать со знаком «+», а силы, действующие против хода часовой стрелки, – со знаком «-».

Чтобы определить величину изгибающего момента, нужно суммировать моменты всех односторонних сил относительно точки, через которую проведено сечение. При этом, в соответствии со схемой приведённой на рис. 11, моменты, изгибающие стержень выпуклостью вниз, следует брать со знаком «+», а моменты, изгибающие стержень выпуклостью вверх, – со знаком «-».

В качестве примеров рассмотрим несколько изгибаемых стержней (балок), которые наиболее часто встречаются при проведении практических расчётов. Эпюры для этих балок приводятся в таблицах многих справочников по сопротивлению материалов и по строительной механике. По этой причине их часто называют «**табличными балками**».

Примечания:

Для экономии места заданный стержень и построенные эпюры будем показывать на одном рисунке.

Задача 4.

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис 32.

Решение

1. В данном случае для построения эпюр реакции не нужны. Можно их не определять.
2. Показываем сечение, привязывая его к краю стержня.
3. Записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.

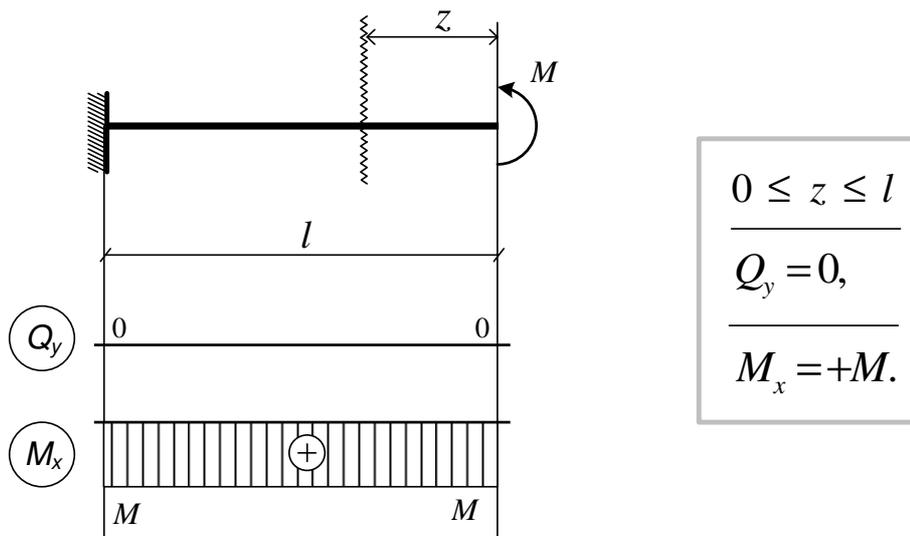


Рис. 32

Задача 5.

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис 33.

Решение

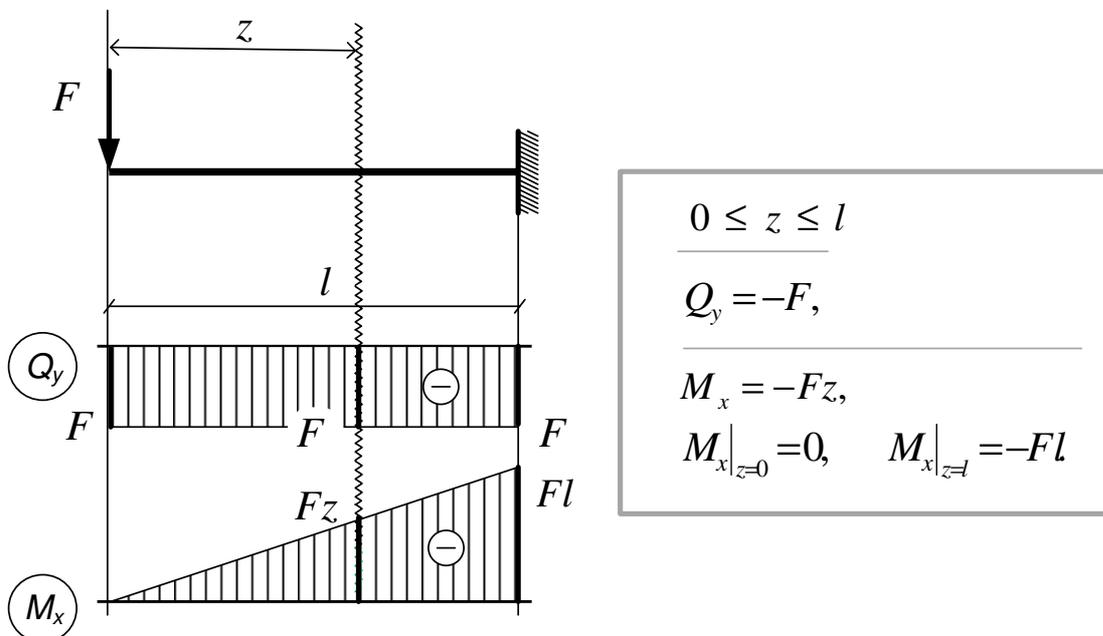


Рис. 33

1. Для построения эпюр реакции не нужны. Можно их не определять.
2. Показываем сечение, привязывая его к краю стержня.
3. Записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.

Задача 6.

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис 34.

Решение

1. Определяем опорные реакции. Построение эпюр можно выполнить, не зная их значений, но они могут быть полезны для проверки правильности построения, поскольку поперечная сила и изгибающий момент в заделке равны реакциям.
2. Показываем сечение, привязывая его к краю стержня.
3. Записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.

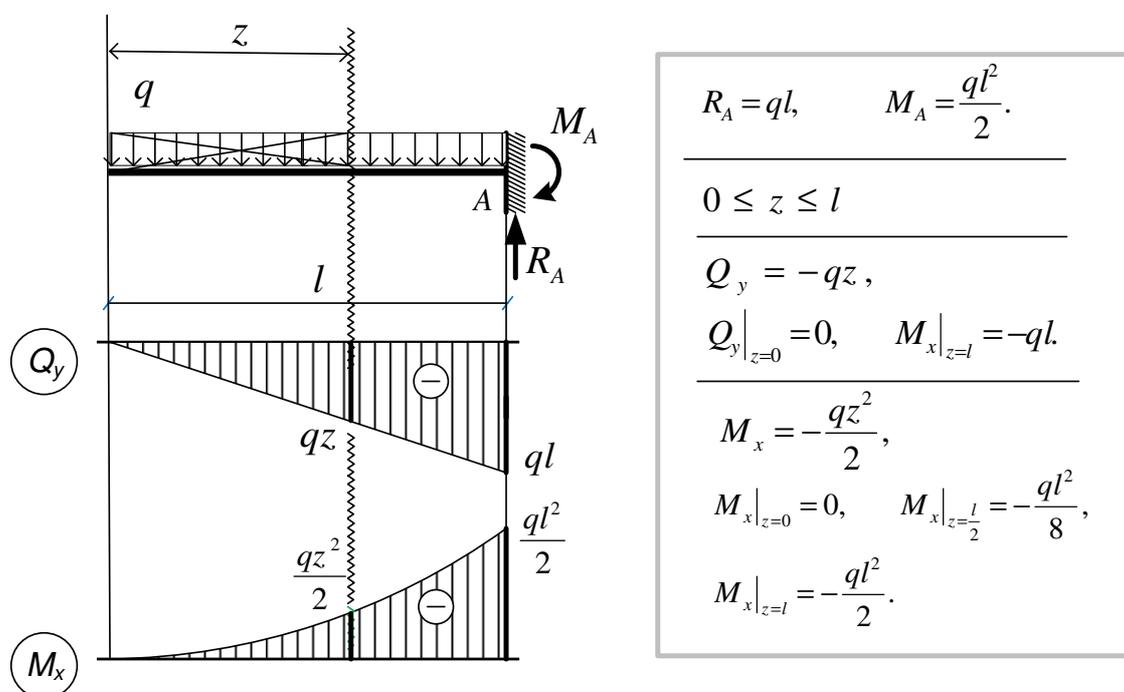


Рис. 34

Задача 7.

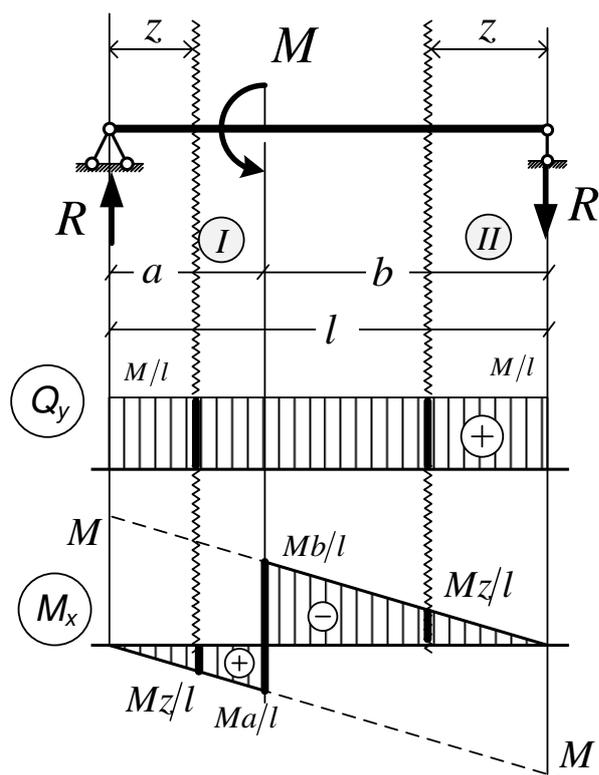
Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис 35.

Решение

1. Реакции равны, поскольку образуют пару, которая уравнивает нагрузку.

Определяем реакции с помощью уравнений равновесия.

2. Разбиваем балку на участки. Показываем сечения, привязывая их к краям стержня.
3. Для каждого участка записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.



$R = \frac{M}{l}.$	
(I) $0 \leq z \leq a$	(II) $0 \leq z \leq b$
$Q_y = +\frac{M}{l}$	$Q_y = +\frac{M}{l}$
$M_x = +\frac{Mz}{l},$ $M_x _{z=0} = 0,$ $M_x _{z=a} = +\frac{Ma}{l}.$	$M_x = -\frac{Mz}{l},$ $M_x _{z=0} = 0,$ $M_x _{z=b} = -\frac{Mb}{l}.$

Рис. 35

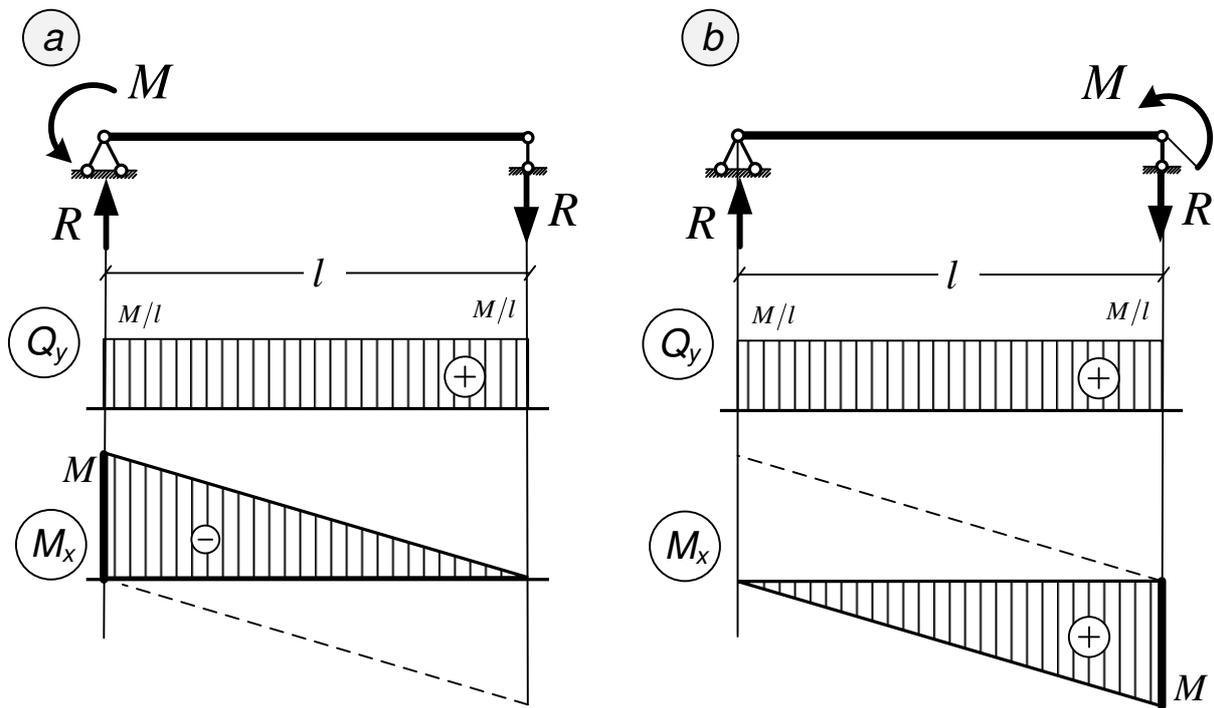


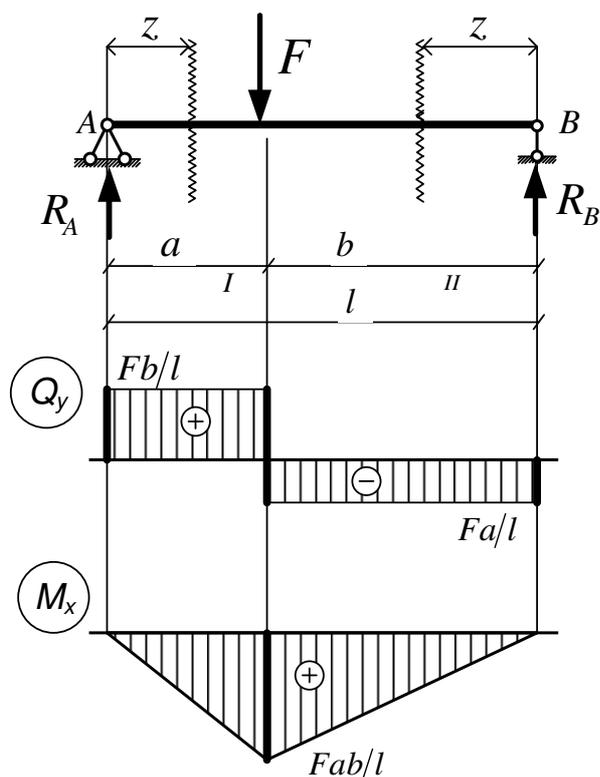
Рис. 36

Примечания:

- Заметим, что размер вертикального участка на эпюре моментов равен величине приложенного момента M (см. § 13).
- Поперечная сила Q_y постоянна по всей длине балки и, следовательно, угол наклона на эпюре изгибающего момента M_x также везде одинаков. В зависимости от расположения внешнего момента M , вертикальный участок будет смещаться по эпюре, передвигаясь по двум параллельным прямым, как по направляющим. Эти направляющие прямые показаны на рис. 35 пунктиром. В предельных положениях, когда момент приложен либо на левом, либо на правом краю балки, эпюры поперечной силы и изгибающего момента примут вид, показанный на рис. 36.

Задача 8.

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис 37.

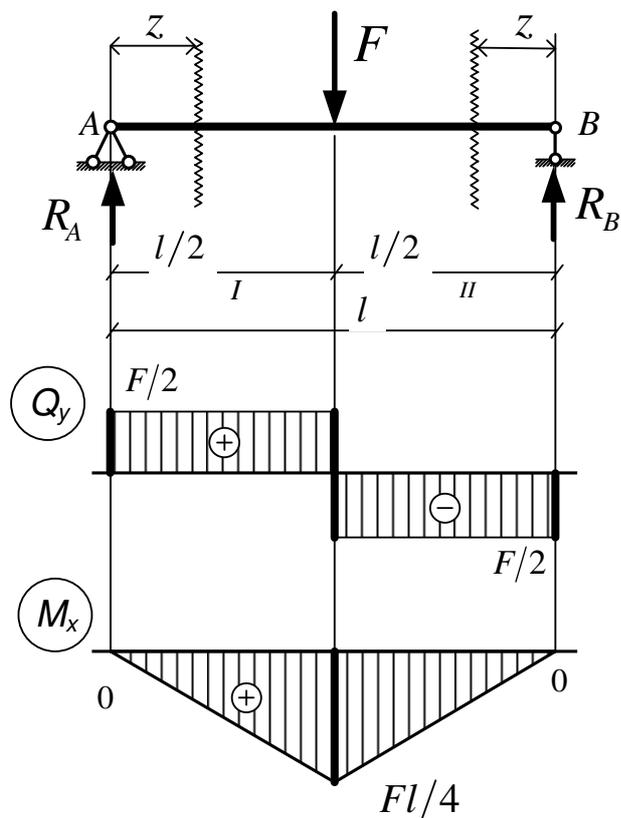


$\begin{cases} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = Fb/l \\ R_B = Fa/l \end{cases}$	
$\textcircled{I} \quad 0 \leq z \leq a$	$\textcircled{II} \quad 0 \leq z \leq b$
$Q_y = R_A = Fb/l$	$Q_y = -R_B = -Fa/l$
$M_x = R_A z = \frac{Fbz}{l},$	$M_x = R_B z = \frac{Faz}{l},$
$M_x _{z=0} = 0,$	$M_x _{z=0} = 0,$
$M_x _{z=a} = +\frac{Fbz}{l}.$	$M_x _{z=b} = \frac{Faz}{l}.$

Рис. 37

Решение

1. Определяем опорные реакции, составляя и решая уравнения равновесия.
2. Разбиваем балку на участки. На каждом участке показываем сечение, привязывая его к краю стержня.
3. Для каждого участка записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.



$a = b = l/2, \quad R_A = R_B = R,$ $\sum Y = 0 \Rightarrow R = F/2$	
$\textcircled{I} \quad 0 \leq z \leq l/2$	$\textcircled{II} \quad 0 \leq z \leq l/2$
$Q_y = R = F/2$	$Q_y = -R = -F/2$
$M_x = Rz = \frac{Fz}{2},$ $M_x _{z=0} = 0,$ $M_x _{z=l/2} = +\frac{Fl}{4}.$	$M_x = Rz = \frac{Fz}{2},$ $M_x _{z=0} = 0,$ $M_x _{z=l/2} = +\frac{Fl}{4}.$

Рис. 38

Примечания:

Часто встречающийся в расчётной практике частный случай, когда сила приложена в середине пролёта, представлен на рис. 38. Стоит обратить внимание на следующие особенности:

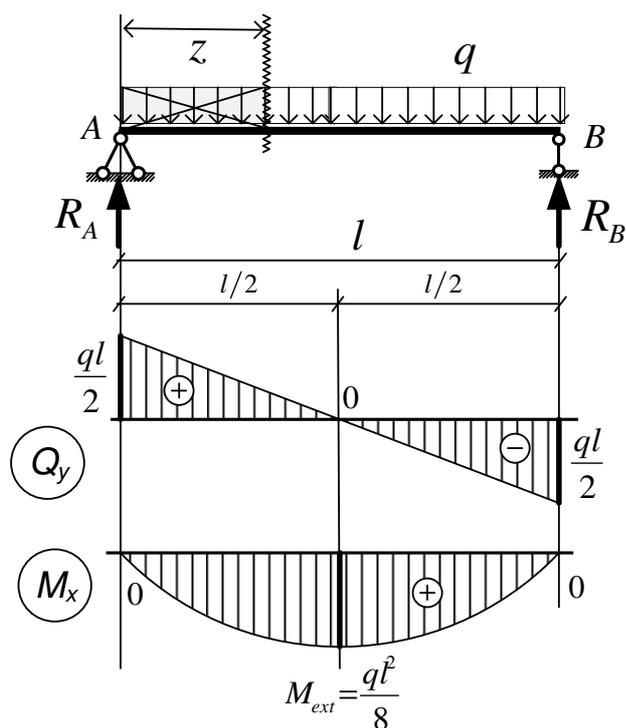
- Реакции в этом случае равны,
- Эпюра моментов симметрична относительно вертикальной прямой,
- Эпюра поперечных сил симметрична относительно своей центральной точки (кососимметрична).

Задача 9.

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис 39.

Решение

1. Определяем опорные реакции, которые в данном случае равны.
2. Показываем сечение, привязывая его к краю стержня.
3. Записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.



$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$Q_y = R_A - qz = \frac{ql}{2} - qz,$$

$$Q_y|_{z=0} = R_A = \frac{ql}{2},$$

$$Q_y|_{z=l} = -R_B = -\frac{ql}{2}.$$

$$M_x = R_A z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2} = \frac{q}{2} z(l-z),$$

$$M_x|_{z=0} = 0, \quad M_x|_{z=l} = 0,$$

$$M_x|_{z=l/2} = +\frac{ql^2}{8},$$

Рис. 39

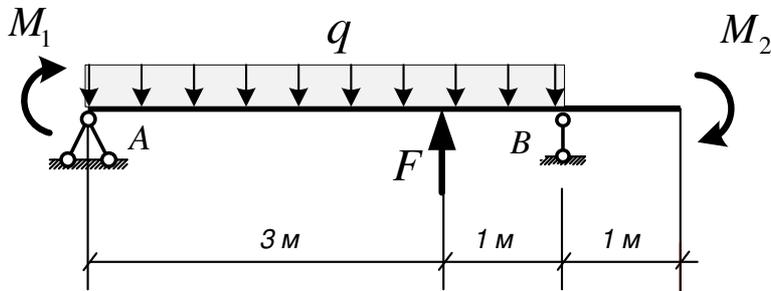
Далее, в качестве примера, рассмотрим более сложную задачу, в которой к балке приложено несколько нагрузок.

Ниже в §19 представлены еще три примера построения эпюр Q_y и M_x аналитическим способом:

- задача 13 (сосредоточенные воздействия),
- задача 14 (равномерно распределённая нагрузка),
- задача 15 (треугольная нагрузка).

Задача 10.

Аналитическим методом построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 40.



$$F = 40 \text{ кН},$$

$$q = 20 \text{ кН/м},$$

$$M_1 = 10 \text{ кН м},$$

$$M_2 = 30 \text{ кН м}.$$

Рис. 40

Решение

1. Определяем опорные реакции с помощью уравнений равновесия.

$$\sum M_A = 0, -M_1 - M_2 - 4q \cdot 2 + F \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{M_1 + M_2 + 8q - 3F}{4} = \frac{10 + 30 + 8 \cdot 20 - 3 \cdot 40}{4} = \frac{80}{4} = 20 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, -M_1 - M_2 + 4q \cdot 2 - F \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M_1 - M_2 + 8q - F \cdot 1}{4} = \frac{-10 - 30 + 8 \cdot 20 - 40 \cdot 1}{4} = \frac{80}{4} = 20 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y_i = R_A + R_B + F - 4q = 20 + 20 + 40 - 20 \cdot 4 = 0.$$

2. Разбиваем балку на участки. На каждом участке показываем сечение, привязывая его к краю стержня. В рассмотрении оставляем более простую часть балки.
3. Для каждого участка записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.

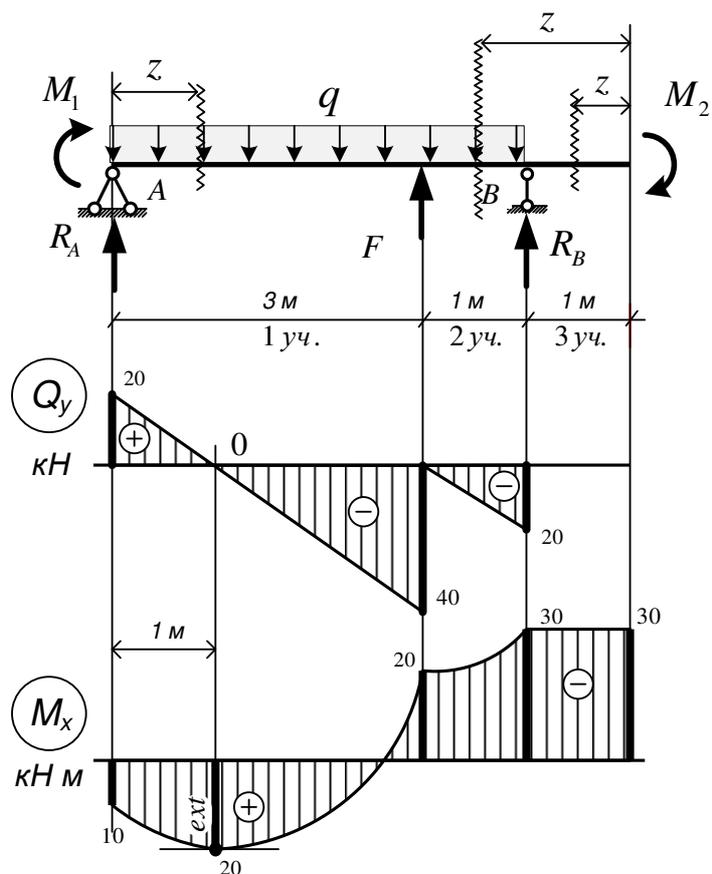


Рис. 41

1 участок: $0 \leq z \leq 3\text{м.}$

$$Q_y = R_A - qz = 20 - 20z, \quad (\text{наклонная прямая})$$

$$Q_y|_{z=0} = 20\text{кН}, \quad (\text{левый край участка})$$

$$Q_y|_{z=3} = 20 - 20 \cdot 3 = -40\text{кН.}$$

(правый край участка)

$$M_x = M_1 + R_A z - qz \cdot \frac{z}{2} = 10 + 20z - 10z^2,$$

(квадратная парабола)

$$M_x|_{z=0} = 10\text{кНм}, \quad (\text{левый край участка})$$

$$M_x|_{z=3} = 10 + 20 \cdot 3 - 10 \cdot 3^2 = -20\text{кНм.}$$

(правый край участка)

Ищем расстояние z_0 , при котором $Q_y = 0$, из уравнения

$$20 - 20z_0 = 0, \text{ откуда } z_0 = 1 \text{ м.}$$

Подставляя значение z_0 в выражение изгибающего момента, получаем **экстремальное значение момента**:

$$M_{EXT} = M_x|_{z=1} = 10 + 20 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 = 20 \text{ кНм.}$$

2 участок: $1 \leq z \leq 2 \text{ м.}$

$$Q_y = -R_B + q(z - 1) = -20 + 20(z - 1),$$

(наклонная прямая)

$$Q_y|_{z=1} = -20 \text{ кН,}$$

(правый край участка)

$$Q_y|_{z=2} = -20 + 20 \cdot 1 = 0 \text{ кН.}$$

(левый край участка)

$$M_x = -M_2 + R_B(z - 1) - q \frac{(z-1)^2}{2} = \\ = -30 + 20(z - 1) - 10(z - 1)^2,$$

(квадратная парабола)

$$M_x|_{z=1} = -30 \text{ кНм,}$$

(правый край участка)

$$M_x|_{z=2} = -30 + 20 - 10 = -20 \text{ кНм.}$$

(левый край участка)

На левом краю участка касательная к параболе горизонтальна, так как $Q_y = 0$.

3 участок: $0 \leq z \leq 1 \text{ м.}$

$$Q_y = 0 \text{ кН,}$$

$$M_x = -M_2 = -30 \text{ кНм.}$$

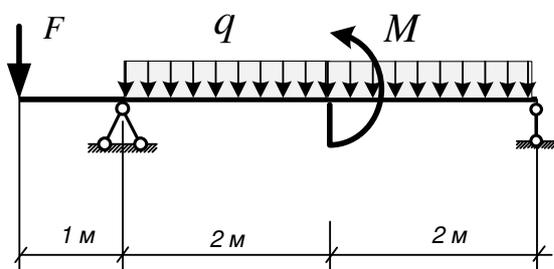
(горизонтальная прямая)

Задача решена

16. ЧИСЛЕННЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ (Построение по точкам)

В §§ 12, 13 и 14 подробно описано каким образом «работают» дифференциальные зависимости Журавского. Пользуясь этой информацией, можно строить эпюры, не записывая аналитических выражений поперечной силы и изгибающего момента. Покажем это на следующем примере.

Задача 11. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 42, не записывая аналитических выражений поперечной силы $Q_y(z)$ и изгибающего момента $M_x(z)$.



$$\begin{aligned} F &= 20 \text{ кН} \\ q &= 16 \text{ кН/м} \\ M &= 12 \text{ кНм} \end{aligned}$$

Рис. 42

1-й вариант решения

Найдём величины опорных реакций с помощью уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0, \quad + F \cdot 1 + M - (q \cdot 4) \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 1 - M + (q \cdot 4) \cdot 2}{4} = \frac{-20 - 12 + 16 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 24 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0, \quad + F \cdot 5 - R_A \cdot 4 + M + (q \cdot 4) \cdot 2 = 0,$$

$$R_A = \frac{+F \cdot 5 + M + (q \cdot 4) \cdot 2}{4} = \frac{+20 \cdot 5 + 12 + 16 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 60 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y_i = R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 60 + 24 - 20 - 16 \cdot 4 = 0.$

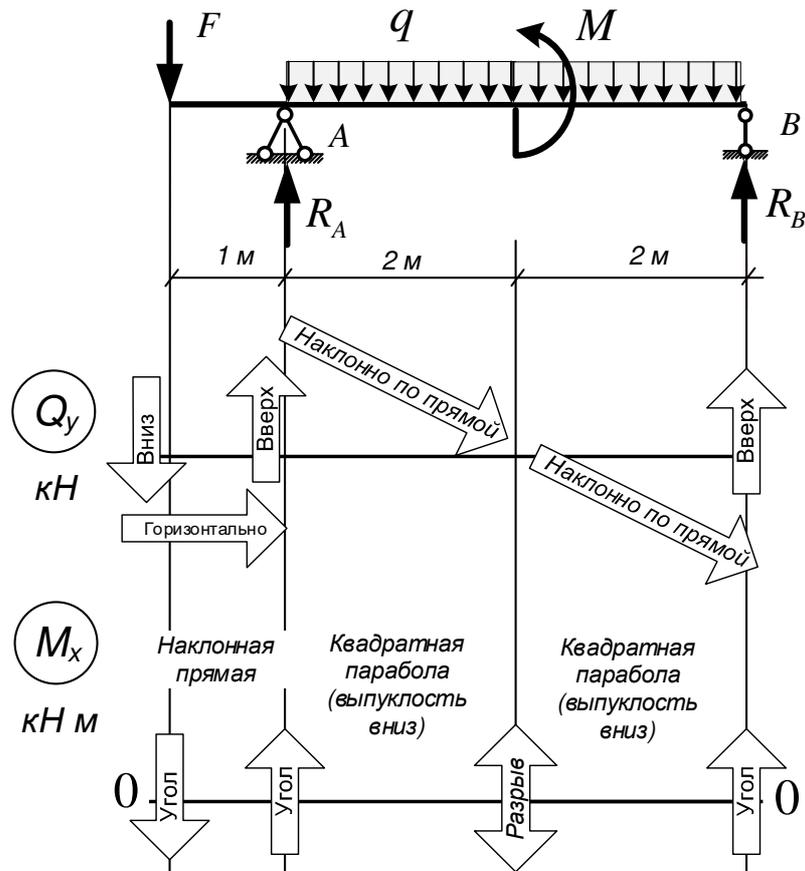


Рис. 43

Располагая информацией о том, как разного рода нагрузки отражаются на эпюрах, которая изложена в §§ 12, 13, 14, общий вид эпюр можно предвидеть заранее. Такого рода качественный прогноз представлен на рис. 43. Осталось наполнить его численными данными.

Пронумеруем участки, и для указания на сечения введем переменную z , которую будем отсчитывать от левого края стержня (рис. 44).

Построение эпюры поперечных сил

Построение начинаем с левого края балки, с точки, которая на рис. 44 отмечена кружочком. Рассматривая балку в направлении слева-направо, строим рассуждения в следующем порядке:

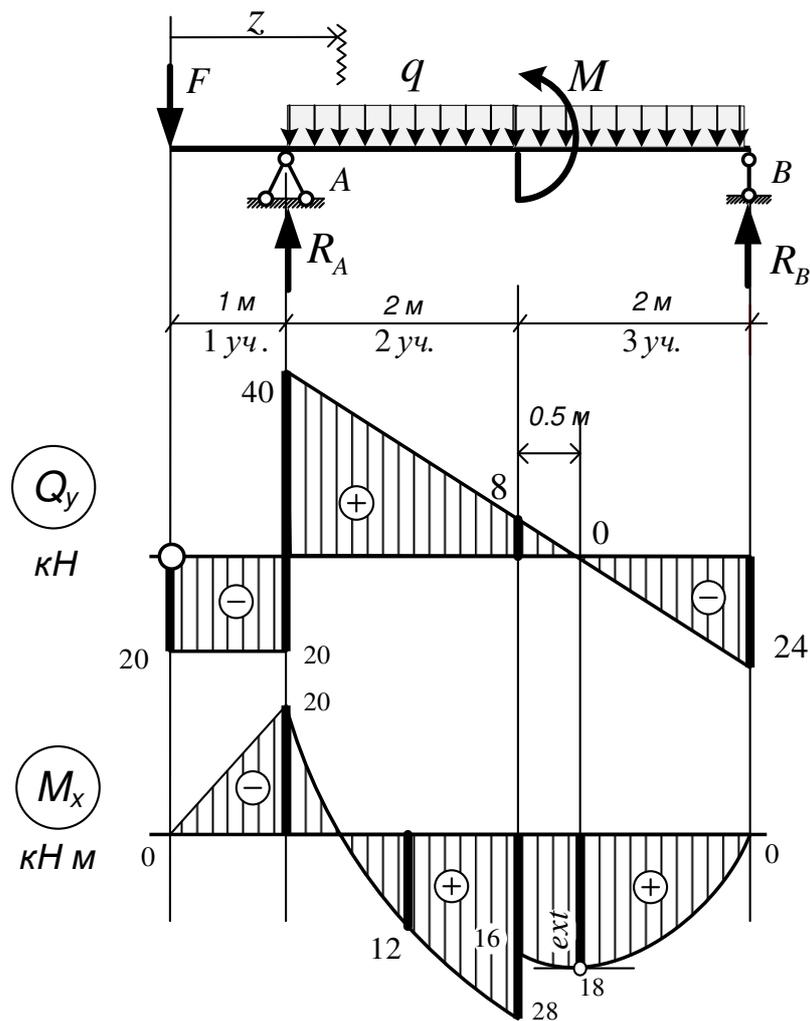


Рис. 44

- $z = 0$: Вертикально вниз на 20 кН (Сосредоточенная сила)
 $Q_y = -20 \text{ кН}$,
- Участок 1:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = -20 \text{ кН}$,
- $z = 1 \text{ м}$: Вертикально вверх на 60 кН (Реакция R_A вверх)
 $Q_y = +40 \text{ кН}$,
- Участок 2:** Прямая вниз на $q \cdot 2 = 32 \text{ кН}$ (Распределённая нагрузка)
 $Q_y = +8 \text{ кН}$,
- $z = 3 \text{ м}$: Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
 $Q_y = +8 \text{ кН}$,

Участок 3: Прямая вниз на $q \cdot 2 = 32 \text{ кН}$ (Распределённая нагрузка)

$$Q_y = -24 \text{ кН},$$

$z = 5 \text{ м}$: Вертикально вверх на 24 кН (Реакция R_B вверх)

Стоит обратить внимание на то, что, начав построение с нулевого значения Q_y , и отследив по очереди все силы, мы вновь получили в конце своих рассуждений нулевое значение. Это ещё раз подтверждает, что сумма проекций всех сил на ось y равна нулю.

$$\sum Y_i = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов

Находим значения изгибающих моментов на границах участков:

Рассматриваем левую часть балки:

$z = 0$: $M_x = 0 \text{ кНм},$

$z = 1 \text{ м}$: $M_x = -F \cdot 1 = -20 \text{ кНм},$

$z = 2 \text{ м}$: $M_x = -F \cdot 2 + R_A \cdot 1 - (q \cdot 1) \cdot 0.5 =$
 $= -20 \cdot 2 + 60 \cdot 1 - 16 \cdot 1 \cdot 0.5 = +12 \text{ кНм},$ (середина уч.)

$z = 3 \text{ м}$: $M_x = -F \cdot 3 + R_A \cdot 2 - (q \cdot 2) \cdot 1 =$
 $= -20 \cdot 3 + 60 \cdot 2 - 16 \cdot 2 \cdot 1 = +28 \text{ кНм}.$ (слева от M)

Рассматриваем правую часть балки:

$z = 3 \text{ м}$: $M_x = R_B \cdot 2 - (q \cdot 2) \cdot 1 = 24 \cdot 2 - 16 \cdot 2 \cdot 1 = 16 \text{ кНм},$
(справа от M)

$z = 5 \text{ м}$: $M_x = 0 \text{ кНм}.$

Вычисляем экстремальное значение:

Находим положение экстремума (рис. 30, б):

$$a_1 = \left| \frac{Q_1}{q} \right| = \frac{8}{16} = 0.5 \text{ м}.$$

Находим площадь эпюры поперечных сил (со своим знаком):

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot a_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0.5 = 2 \text{ кНм}.$$

Вычисляем экстремальное значение момента:

$$M_{\text{EXT}} = M_1 + \omega_1 = 16 + 2 = 18 \text{ кНм}.$$

Соединяем полученные точки:

Участок 1: Наклонная прямая,

Участок 2: Квадратная парабола (*Выпуклость вниз, экстремума нет*),

Участок 3: Квадратная парабола (*Выпуклость вниз, есть экстремум*).

Примечания:

- Подробная запись решения, которая приведена выше, служит для пояснения решения. При самостоятельном решении задач такая подробная запись не нужна.
- Рассмотренный метод построения эпюр обычно называют методом построения «по границам участков». Скорость решения задачи этим методом гораздо выше, чем при решении аналитическим способом.

Задача решена

2-й вариант решения

- При построении эпюры $M_x(z)$ можно использовать следующее её свойство (рис. 29, б): разница между конечным и начальным значением момента равна площади эпюры поперечных сил на данном участке (с учётом знака). Основанный на этом наблюдении метод называют **методом построения эпюры «по площадям»**.
- В первом варианте решения для указания сечений использовалась переменная z . Более простым способом указания является обозначение всех характерных сечений буквами.

Обозначим границы участков латинскими буквами (рис. 45).

Составив уравнения равновесия, найдём опорные реакции: $R_B = 60кН$,
 $R_D = 24кН$.

Построение эпюры поперечных сил

Построение начинаем с левого края балки, с точки, которая на рис. 45 отмечена кружочком. Рассматривая балку в направлении слева-направо, строим рассуждения в следующем порядке:

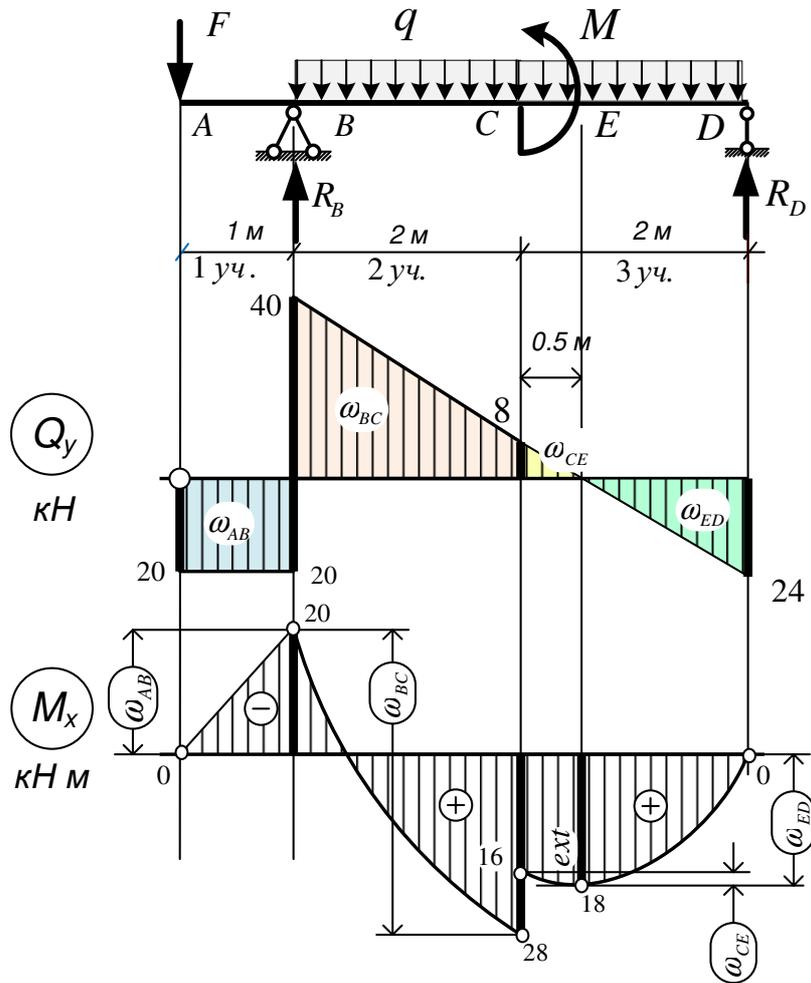


Рис. 45

- Сечение А:** Вертикально вниз на 20 кН (Сосредоточенная сила)
 $Q_y = -20 \text{ кН}$,
- Участок АВ:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = -20 \text{ кН}$,
- Сечение В:** Вертикально вверх на 60 кН (Реакция вверх)
 $Q_y = +40 \text{ кН}$,
- Участок ВС:** Прямая вниз на $q \cdot 2 = 32 \text{ кН}$ (Распределённая нагрузка)
 $Q_y = +8 \text{ кН}$,
- Сечение С:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
 $Q_y = +8 \text{ кН}$,
- Участок CD:** Прямая вниз на $q \cdot 2 = 32 \text{ кН}$ (Распределённая нагрузка)

$$Q_y = -24 \text{ кН},$$

Находим пересечение с осью: $a_1 = \left| \frac{Q_1}{q} \right| = \frac{8}{16} = 0.5 \text{ м}.$

Обозначаем полученное сечение буквой *E*.

Сечение D: Вертикально вверх на 24 кН (Реакция вверх)

$$\sum Y_i = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов «по площадям»

Находим площади эпюры поперечных сил на каждом отрезке:

$$\omega_{AB} = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм},$$

$$\omega_{BC} = \frac{40+8}{2} \cdot 2 = 48 \text{ кНм},$$

$$\omega_{CE} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0.5 = 2 \text{ кНм},$$

$$\omega_{ED} = -\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 1.5 = -18 \text{ кНм}.$$

Начнём построение с краёв балки.

$$M_x^A = M_x^D = 0$$

(На краях балки не приложены сосредоточенные моменты)

Рассматривая балку слева-направо, вычисляем моменты в оставшихся сечениях:

$$M_x^B = M_x^A + \omega_{AB} = 0 - 20 = -20 \text{ кНм},$$

$$M_x^C = M_x^B + \omega_{BC} = -20 + 48 = 28 \text{ кНм}, \quad (\text{Сечение слева от момента } M)$$

$$\bar{M}_x^C = M_x^C - M = 28 - 12 = 16 \text{ кНм}, \quad (\text{Сечение справа от момента } M)$$

$$M_{EXT} = M_x^E = \bar{M}_x^C + \omega_{CE} = 16 + 2 = 18 \text{ кНм},$$

$$M_x^D = M_x^E + \omega_{ED} = 18 - 18 = 0 \text{ кНм}, \quad (\text{Для проверки})$$

Соединяем полученные значения:

Участок AB: Прямая.

Участок BC: Квадратная парабола

(Выпуклость вниз, экстремума нет).

Сечение C: Вертикальный участок высотой 12 кНм

(Правильность проверяем по схеме на рис. 27).

Участок CD: Квадратная парабола

(Выпуклость вниз, экстремум в сечении E).

Задача решена

17. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭПЮР

В природе существует множество различных видов симметрии, как геометрических, так и абстрактных. В планиметрии (геометрия на плоскости) чаще других встречается осевая симметрия и центральная симметрия. Особенности этих видов симметрии схематично изображены на рис. 46.

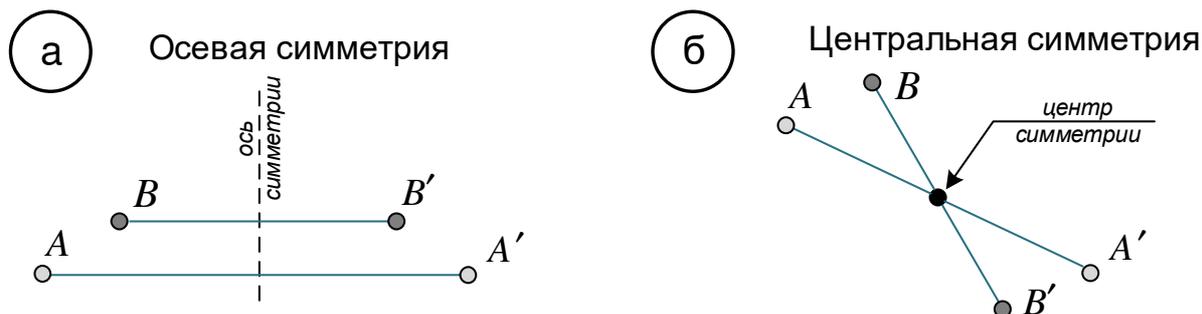


Рис. 46

Эпюры, обладающие свойством осевой симметрии, обычно называют **симметричными**, а эпюры, обладающие центральной симметрией, – **кососимметричными**.

Относительно функций, подчиняющихся дифференциальным зависимостям Журавского, можно сделать следующее наблюдение:

- Если внешние силы, приложенные к балке (включая и реакции, и моменты), симметричны относительно некоторой вертикальной прямой (рис. 47, а), то эпюра моментов также будет **симметричной**, а эпюра поперечных сил – **кососимметричной**.
- Если внешние силы симметричны относительно некоторой точки (рис. 47, б), то эпюра моментов также будет **кососимметричной**, а эпюра поперечных сил – **симметричной**.

Другими словами, при расположении эпюр в следующем порядке $q_y \rightarrow Q_y \rightarrow M_x$ виды симметрии эпюр чередуются.

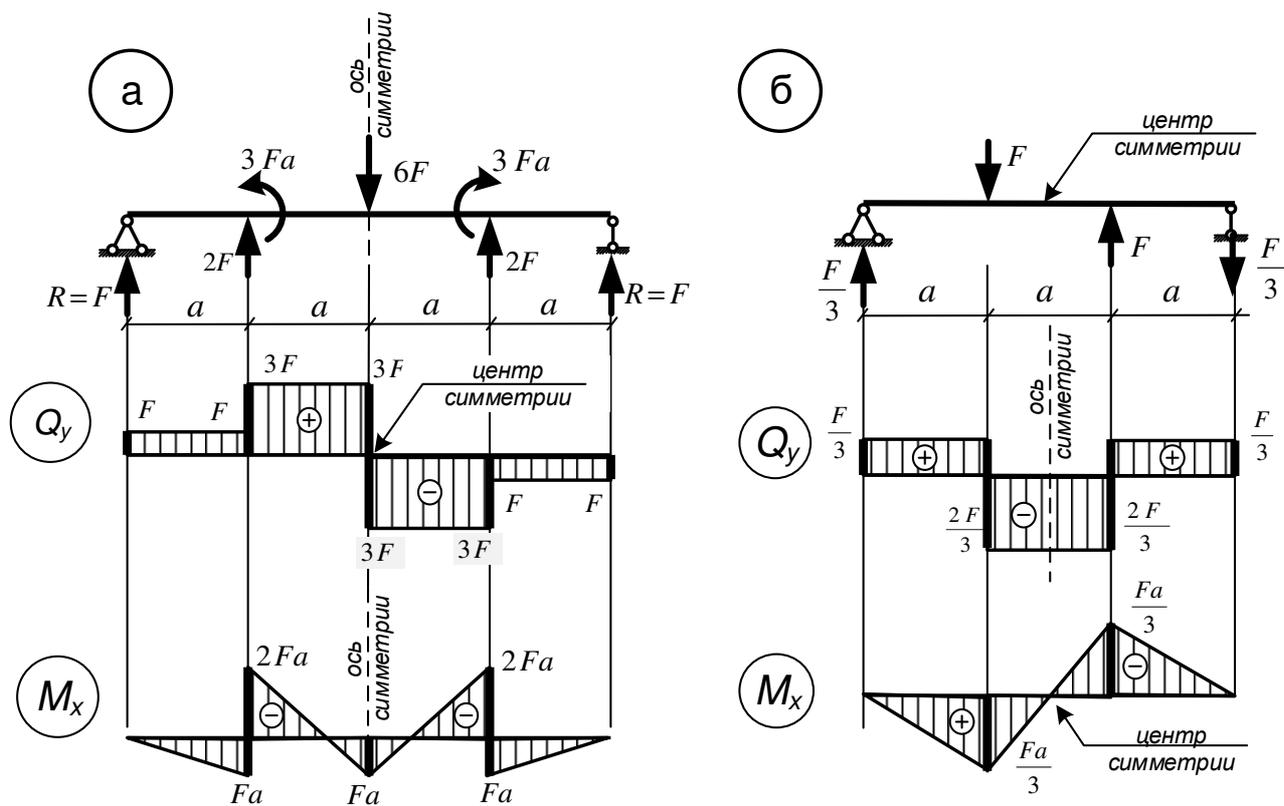


Рис. 47

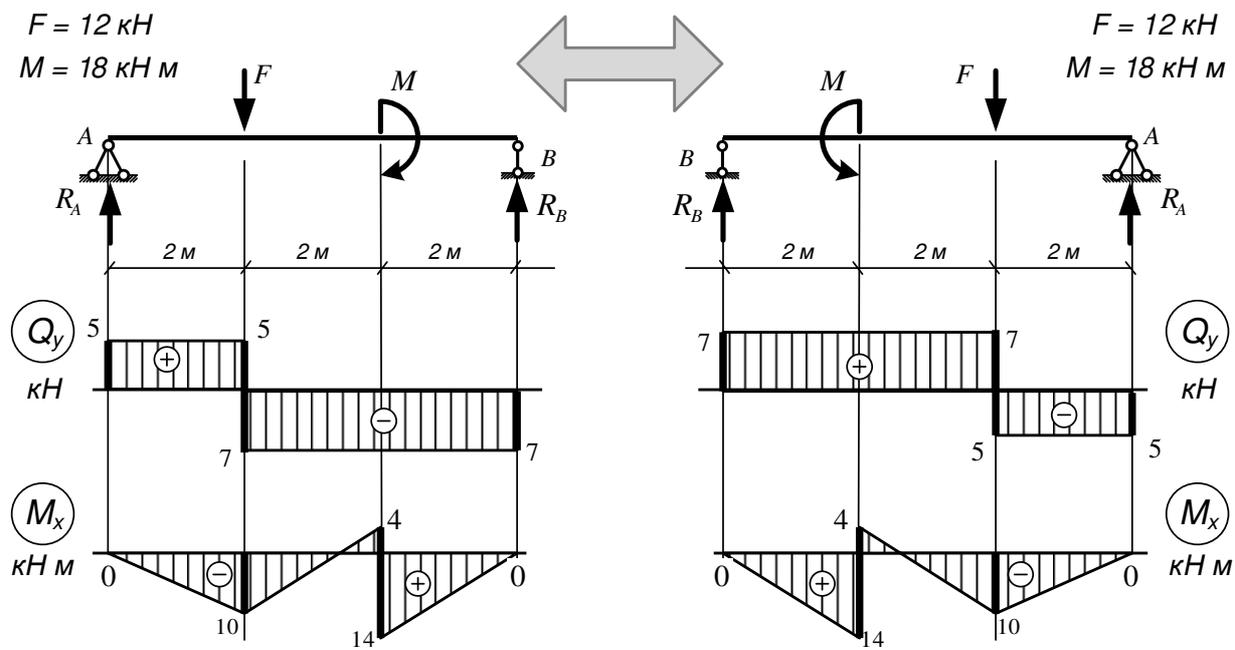


Рис. 48

Симметрия проявляет себя также и в том случае, когда мы рассматриваем зеркальное изображение расчётной схемы (рис. 48). В этом случае эпюра M_x также отразится зеркально, а эпюра Q_y отразится, но при этом поменяет знаки.

Пример использования симметрии при построении эпюр приведён в задаче 19.

Примечание:

- В некоторых случаях рассмотрение зеркального варианта расчётной схемы, когда мы смотрим на конструкцию с другой её стороны, приводит к значительному упрощению решения задачи.

18. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭПЮР

Когда деформации конструкции малы и при условии соблюдения закона Гука для решения задач может применяться «**принцип независимости действия сил**», известный также как «**принцип суперпозиции**».

В соответствии с принципом независимости действия сил результат действия на тело некоторой системы сил равен сумме результатов от действия каждой силы в отдельности.

Для упрощения решения задач этот принцип может быть применён, когда на балку действует несколько различных нагрузок. На рис. 49 приведён пример, в котором эпюра изгибающего момента для балки, загруженной силой и двумя моментами, получена путём суммирования эпюр, построенных от каждой нагрузки в отдельности.

Суммирование эпюр производится алгебраическим (с учётом знака) сложением значений M_x , подсчитанных для одного и того же сечения от разных воздействий.

Суммированием могут быть получены также и другие представляющие интерес величины, например опорные реакции.

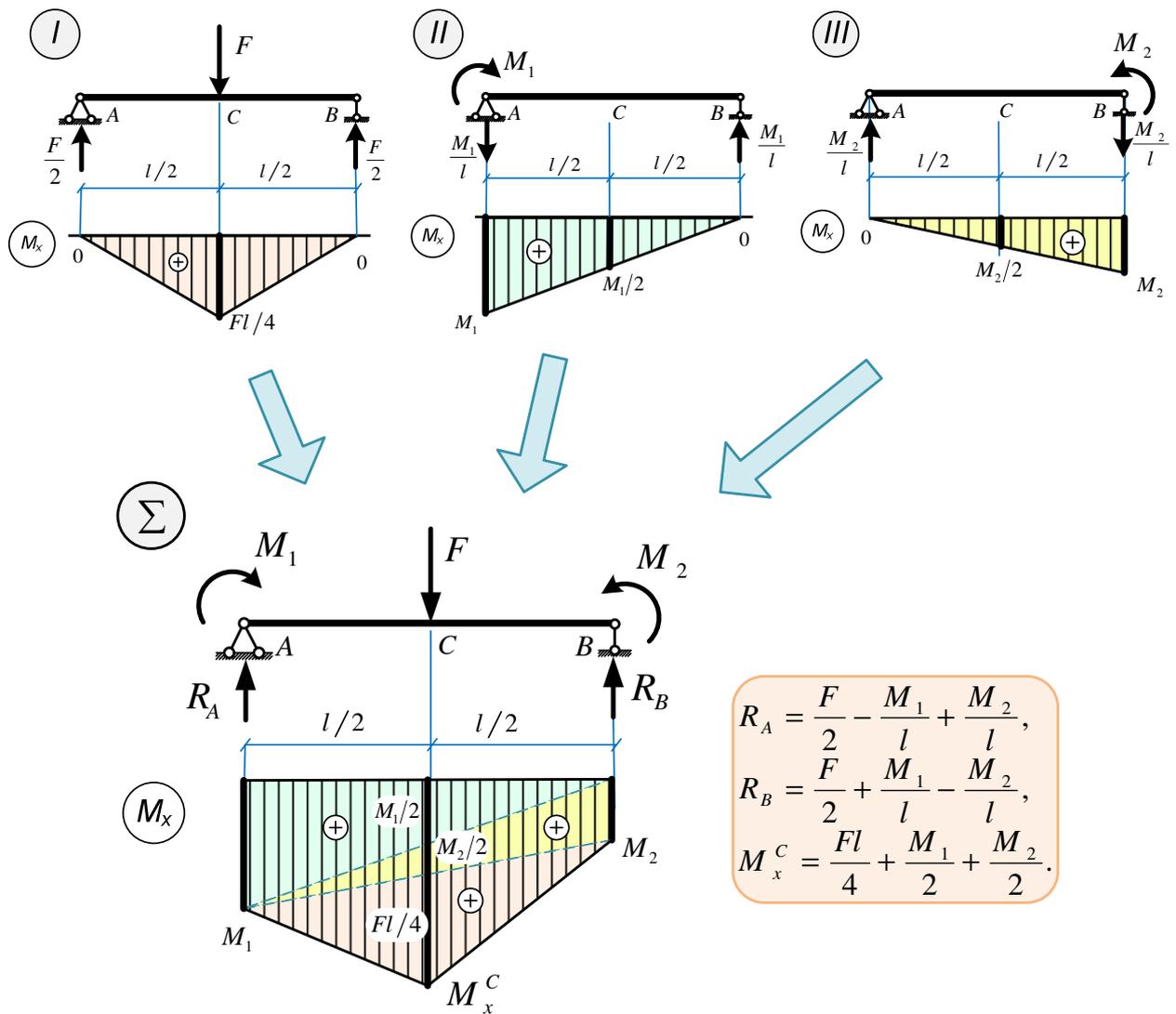


Рис. 49

Очень часто принцип суперпозиции используют для определения изгибающего момента в середине участка, на котором приложена равномерно распределённая нагрузка.

Эпюра моментов на таком участке полностью совпадает с эпюрой M_x , построенной для однопролётной балки, на которую кроме распределённой нагрузки действуют ещё опорные моменты, равные изгибающим моментам на краях участка.

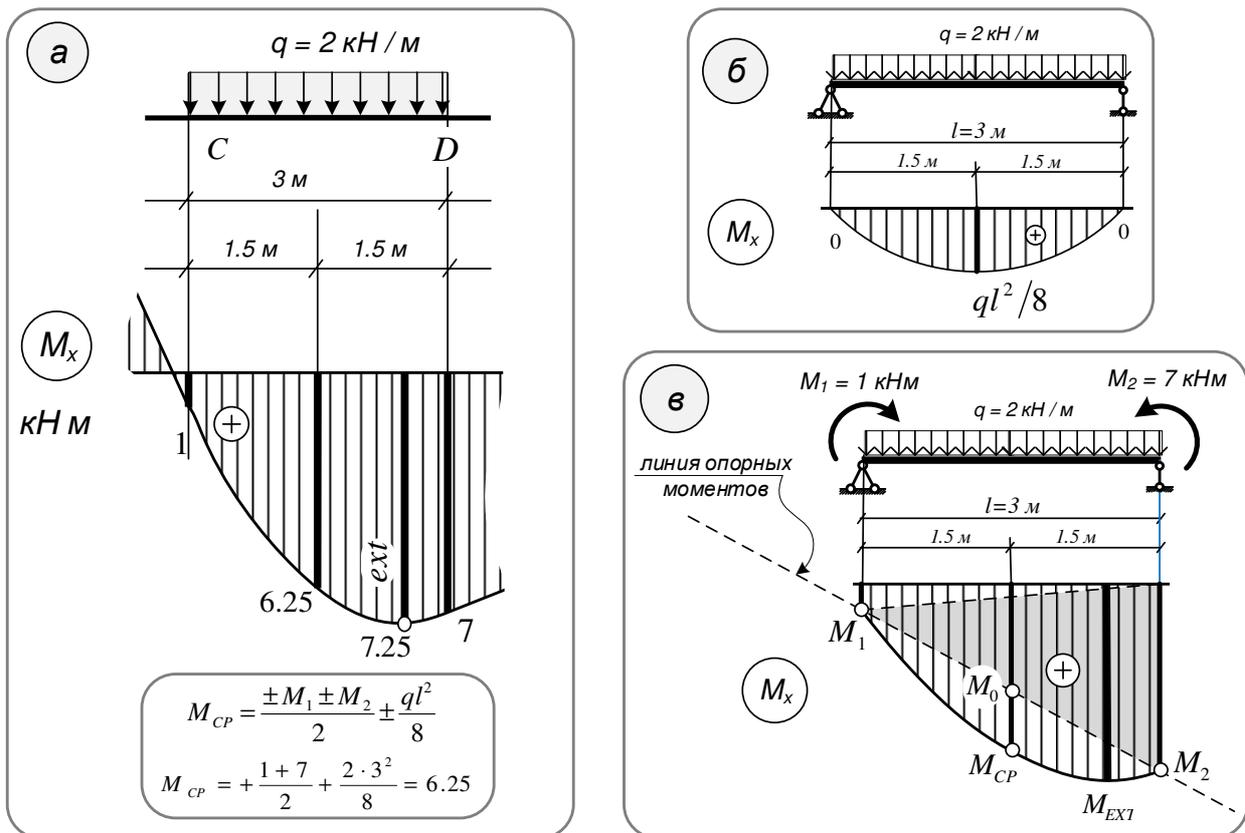


Рис. 50

На рис. 50, а показана эпюра моментов на участке CD балки, которая рассмотрена в задаче №16. Изгибающие моменты на краях участка CD равны $M_1 = 1 \text{ кНм}$ (левый край участка) и $M_2 = 7 \text{ кНм}$ (правый край). Однопролётная двухопорная балка, моменты в которой будут в точности совпадать с эпюрой на участке CD, изображена на рис. 50, в.

Принцип независимости действия сил применяется в этом случае следующим образом:

- Сначала находят значение момента M_0 в середине «линии опорных моментов». Так в строительной механике называют линию, соединяющую изгибающие моменты M_1 и M_2 на краях балки. Это можно сделать, взяв среднее арифметическое, учитывая при этом знаки моментов:

$$M_0 = \frac{\pm M_1 \pm M_2}{2}.$$

- Потом (рис. 50, в) от найденной точки M_0 в сторону действия распределённой нагрузки откладывают значение момента, подсчитанное в середине пролёта двухопорной балки, которая загружена только распределённой нагрузкой (рис. 50, б).

Говорят, что квадратная парабола «подвешивается» к линии опорных моментов. Фактически происходит суммирование изгибающих моментов от трех воздействий:

$$M_{CP} = M_x(M_1) + M_x(M_2) + M_x(q) = \pm \frac{M_1}{2} \pm \frac{M_2}{2} \pm \frac{ql^2}{8}.$$

19. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 12.

Строить эпюру продольной силы для стержня, изображённого на рис. 35

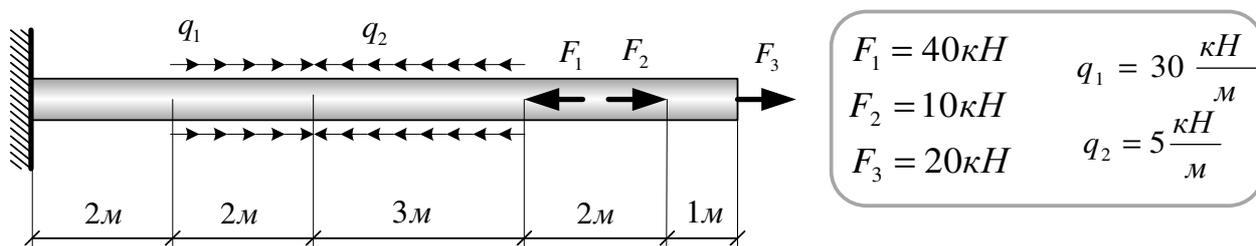


Рис. 51

Примечание: Распределённую нагрузку можно показывать на оси стержня, но, чтобы не спутать с сосредоточенными силами, её часто изображают по сторонам стержня в виде двух рядов векторов.

Решение.

Чтобы не определять реакцию R в жёсткой заделке, будем для всех четырёх участков определять силу N путём суммирования сил, приложенных к правой части стержня.

Пронумеруем участки.

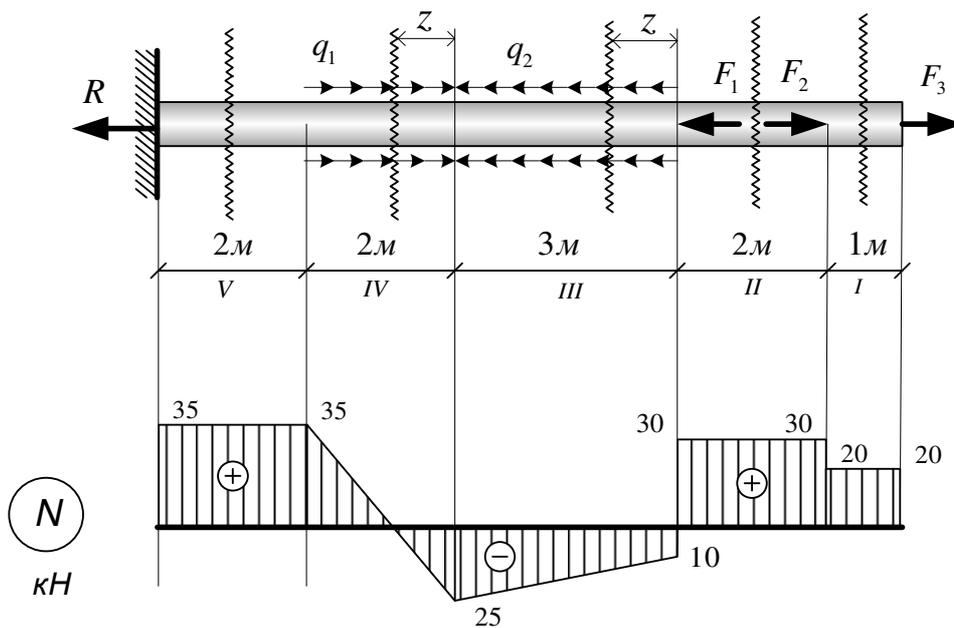


Рис. 52

Для каждого участка

- покажем рассматриваемое сечение,
- суммируем силы, расположенные по одну сторону от сечения, взяв силы, направленные от сечения со знаком «+», а силы, направленные от сечения – со знаком «-»:

$$1 \text{ участок: } N = F_3 = +20 \text{ кН.}$$

$$2 \text{ участок: } N = F_3 + F_2 = +20 + 10 = +30 \text{ кН.}$$

На третьем и четвертом участках приложена распределённая нагрузка.

При действии распределённой нагрузки продольная сила N зависит от того, где находится рассматриваемое сечение. По этой причине будем указывать расположение сечения с помощью переменной z , которую можно отсчитывать либо от края стержня, либо от края участка.

3 участок: $0 \leq z \leq 3\text{ м}$

$$N = F_3 + F_2 - F_1 - q_2 z = 20 + 10 - 40 - 5z = -10 - 5z.$$

Функция линейная, поэтому строим её график по двум точкам:

$$\text{при } z = 0\text{ м} \quad N = -10 \text{ кН},$$

$$\text{при } z = 3\text{ м} \quad N = -25 \text{ кН}.$$

4 участок: $0 \leq z \leq 2\text{ м}$

$$\begin{aligned} N &= F_3 + F_2 - F_1 - 3q_2 + q_1 z = \\ &= 20 + 10 - 40 - 3 \cdot 5 + 30z = -25 + 30z. \end{aligned}$$

Строим график по двум точкам:

$$\text{при } z = 0\text{ м} \quad N = -25 \text{ кН},$$

$$\text{при } z = 2\text{ м} \quad N = +35 \text{ кН}.$$

5 участок:

$$\begin{aligned} N &= F_3 + F_2 - F_1 - 3q_2 + 2q_1 = \\ &= 20 + 10 - 40 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 30 = +35 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, становится ясным, что реакция R также равна 35 кН.

Задача решена

Задача 13.

Аналитическим методом построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 53.

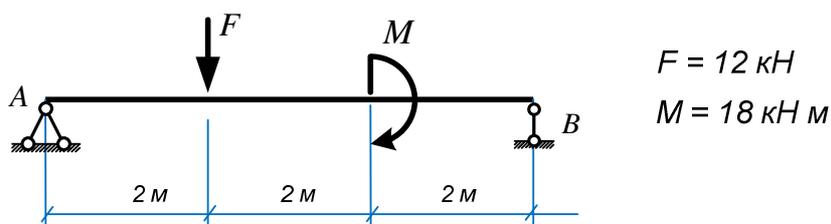


Рис. 53

Решение (аналитический метод)

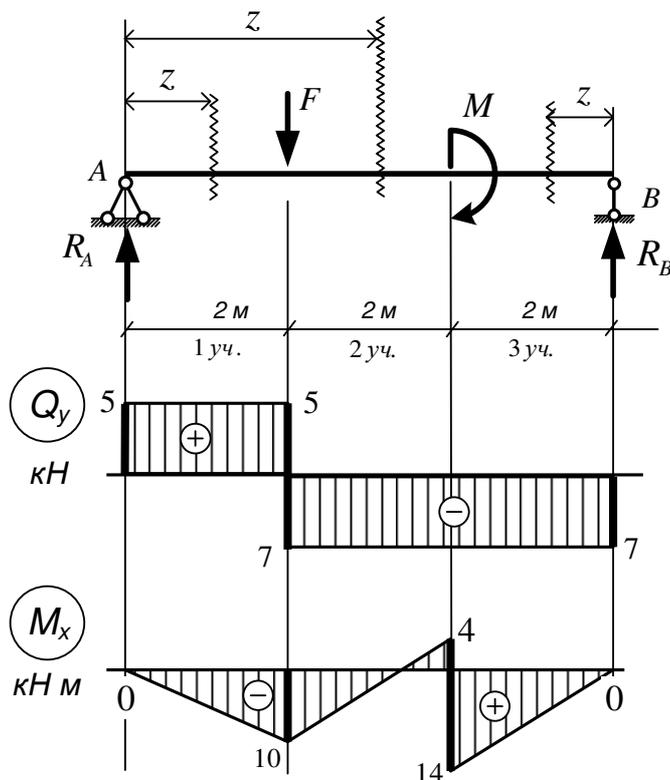


Рис. 54

1. Определяем опорные реакции с помощью уравнений равновесия.

$$\sum M_A = 0, \quad -F \cdot 2 - M + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{F \cdot 2 + M}{6} = \frac{12 \cdot 2 + 18}{6} = 7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad F \cdot 4 - M - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{F \cdot 4 - M}{6} = \frac{12 \cdot 4 - 18}{6} = 5 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y_i = R_A + R_B - F = 5 + 7 - 12 = 0.$

2. Разбиваем балку на участки. На каждом участке показываем сечение, привязывая его к краю стержня.
3. Для каждого участка записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.

1 участок: $0 \leq z \leq 2\text{ м}$.

$$Q_y = R_A = 5\text{ кН}, \quad (\text{горизонтальная прямая})$$

$$M_x = R_A z = 5z, \quad (\text{наклонная прямая – строим по двум точкам})$$

$$M_x|_{z=0} = 0\text{ кНм},$$

$$M_x|_{z=2} = 5 \cdot 2 = 10\text{ кНм}.$$

2 участок: $2 \leq z \leq 4\text{ м}$.

$$Q_y = R_A - F = 5 - 12 = -7\text{ кН}, \quad (\text{горизонтальная прямая})$$

$$M_x = R_A z - F(z - 2) = 5z - 12(z - 2), \quad (\text{наклонная прямая})$$

$$M_x|_{z=2} = 5 \cdot 2 = 10\text{ кНм},$$

$$M_x|_{z=4} = 5 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = -4\text{ кНм}.$$

3 участок: $0 \leq z \leq 2\text{ м}$.

$$Q_y = -R_B = -7\text{ кН}, \quad (\text{горизонтальная прямая})$$

$$M_x = R_B z = 7z, \quad (\text{наклонная прямая})$$

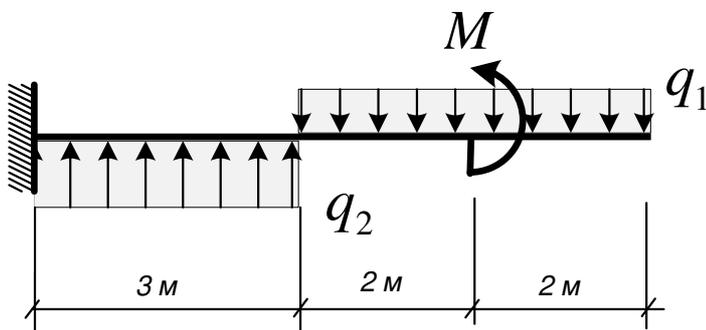
$$M_x|_{z=0} = 0\text{ кНм},$$

$$M_x|_{z=2} = 7 \cdot 2 = 14\text{ кНм}.$$

Задача решена

Задача 14.

Аналитическим методом построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 55.



$$q_1 = 2\text{ кН/м},$$

$$q_2 = 4\text{ кН/м},$$

$$M = 10\text{ кНм}.$$

Рис. 55

Решение (аналитический метод)

1. Разбиваем балку на участки. На каждом участке показываем сечение, привязывая его к краю стержня. Чтобы не определять реакции в жёсткой заделке, будем на всех трёх участках рассматривать правую часть стержня (рис. 56).
2. Для каждого участка записываем выражения для поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и строим соответствующие графики.

1 участок: $0 \leq z \leq 2\text{м}$.

$$\begin{aligned} Q_y &= +q_1 z = 2z, && \text{(наклонная прямая)} \\ Q_y|_{z=0} &= 0\text{кН}, && \text{(правый край участка)} \\ Q_y|_{z=2} &= 2 \cdot 2 = 4\text{кН}. && \text{(левый край участка)} \\ M_x &= -q_1 \cdot \frac{z^2}{2} = -z^2, && \text{(квадратная парабола)} \\ M_x|_{z=0} &= 0, && \text{(правый край участка)} \\ M_x|_{z=2} &= -2^2 = -4\text{кНм}. && \text{(левый край участка)} \end{aligned}$$

2 участок: $2 \leq z \leq 4\text{м}$.

$$\begin{aligned} Q_y &= +q_1 z = 2z, && \text{(наклонная прямая)} \\ Q_y|_{z=2} &= 2 \cdot 2 = 4\text{кН}, && \text{(правый край участка)} \\ Q_y|_{z=4} &= 2 \cdot 4 = 8\text{кН}. && \text{(левый край участка)} \\ M_x &= +M_2 - q_1 \frac{z^2}{2} = 10 - z^2, && \text{(квадратная парабола)} \\ M_x|_{z=2} &= 10 - 2^2 = 6\text{кНм}, && \text{(левый край участка)} \\ M_x|_{z=4} &= 10 - 4^2 = -6\text{кНм}. && \text{(правый край участка)} \\ M_x|_{z=3} &= 10 - 3^2 = 1\text{кНм}. && \text{(середина участка)} \end{aligned}$$

Экстремумы на участке отсутствуют.

3 участок: $4 \leq z \leq 7\text{м}$.

$$\begin{aligned} Q_y &= q_1 \cdot 4 - q_2(z - 4) = \\ &= 2 \cdot 4 - 4(z - 4) = -4z + 24, && \text{(наклонная прямая)} \\ Q_y|_{z=4} &= -4 \cdot 4 + 24 = 8\text{кН}, && \text{(левый край участка)} \\ Q_y|_{z=7} &= -4 \cdot 7 + 24 = -4\text{кН}. && \text{(правый край участка)} \\ M_x &= +M - q_1 \cdot 4 \cdot (z - 2) + q_2 \frac{(z-4)^2}{2} = \\ &= 10 - 8(z - 2) + 2(z - 4)^2, && \text{(парабола)} \end{aligned}$$

$$M_x|_{z=4} = 10 - 8 \cdot 2 + 0 = -6 \text{ кНм, (левый край участка)}$$

$$M_x|_{z=7} = 10 - 8 \cdot 5 + 2 \cdot 3^2 = 10 - 40 + 18 = -12 \text{ кНм.}$$

(правый край участка)

Ищем расстояние z_0 , при котором $Q_y = 0$, из уравнения

$$-4z_0 + 24 = 0, \text{ откуда } z_0 = 6 \text{ м.}$$

Подставляя значение z_0 в выражение изгибающего момента,

получаем экстремальное значение момента:

$$M_{EXT} = M_x|_{z=6} = 10 - 8 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot \frac{(6-4)^2}{2} = 10 - 32 + 8 = -14 \text{ кНм.}$$

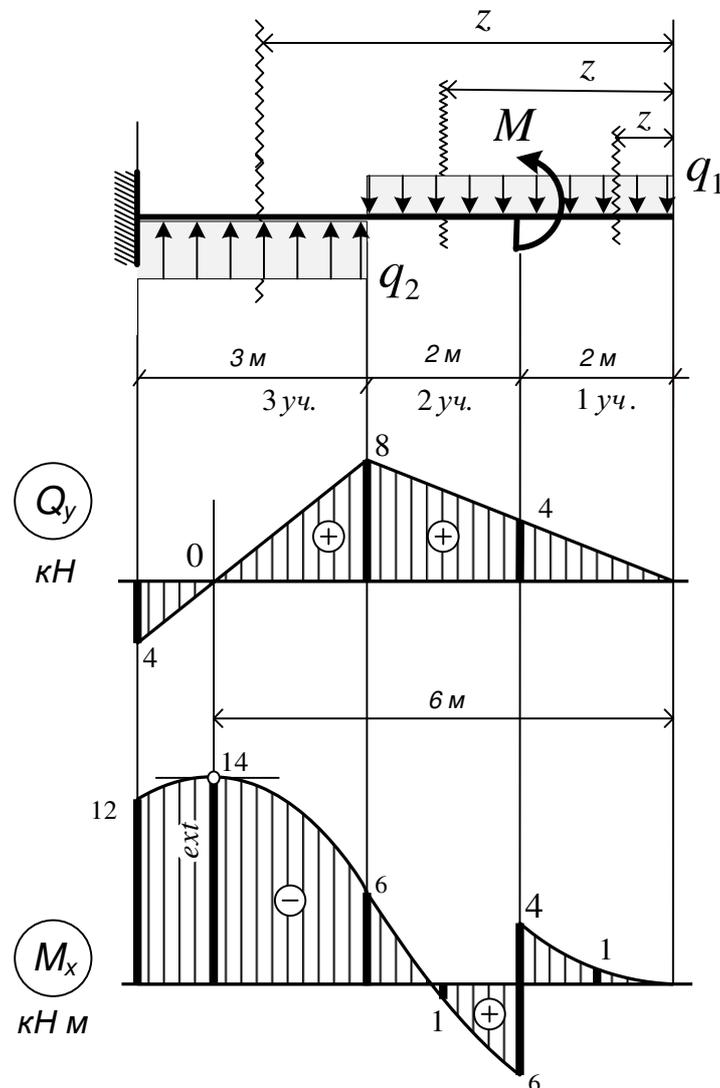


Рис. 56

Задача решена

Задача 15

Аналитическим методом построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 57.

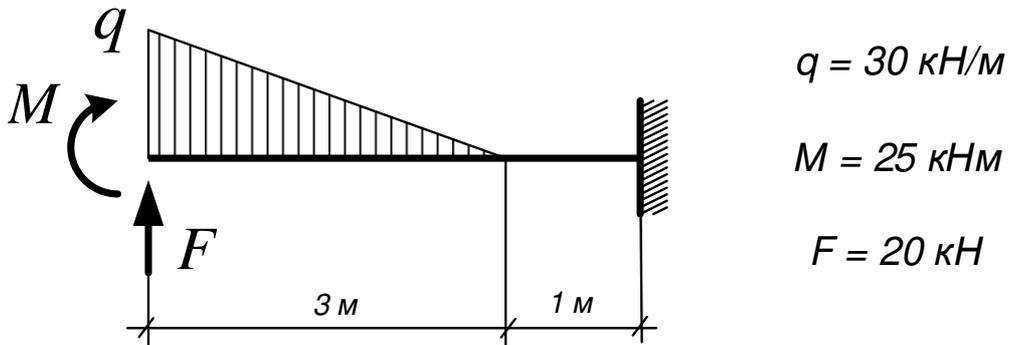


Рис. 57

Решение (аналитический метод)

Аналитические выражения Q_y и M_x на тех участках, где приложена треугольная нагрузка, легче составлять, рассматривая ту часть балки, куда нагрузка обращена клином. Часть нагрузки, имеющую форму трапеции, лучше оставлять в отброшенной части стержня. В этом случае для балки, показанной на рис. 57, определение реакций в жёсткой заделке становится необходимым.

Определяем реакции, составляя уравнения равновесия, учитывая при этом, что равнодействующая треугольной нагрузки P равна площади треугольника и проходит через его центр тяжести, то есть на расстоянии 1 м от левого края балки.

$$P = \frac{1}{2} q \cdot 3 = \frac{30 \cdot 3}{2} = 45 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0, \quad F + R_A - P = 0,$$

$$\text{откуда} \quad R_A = -F + P = -20 + 45 = 25 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0, \quad -M - F \cdot 4 + P \cdot 3 - M_A = 0,$$

$$\text{откуда} \quad M_A = -M - F \cdot 4 + P \cdot 3 = -25 - 20 \cdot 4 + 45 \cdot 3 = 30 \text{ кНм}.$$

Нумеруем участки и на каждом из них в произвольном месте показываем сечение, привязывая его к правому краю стержня (рис. 58).

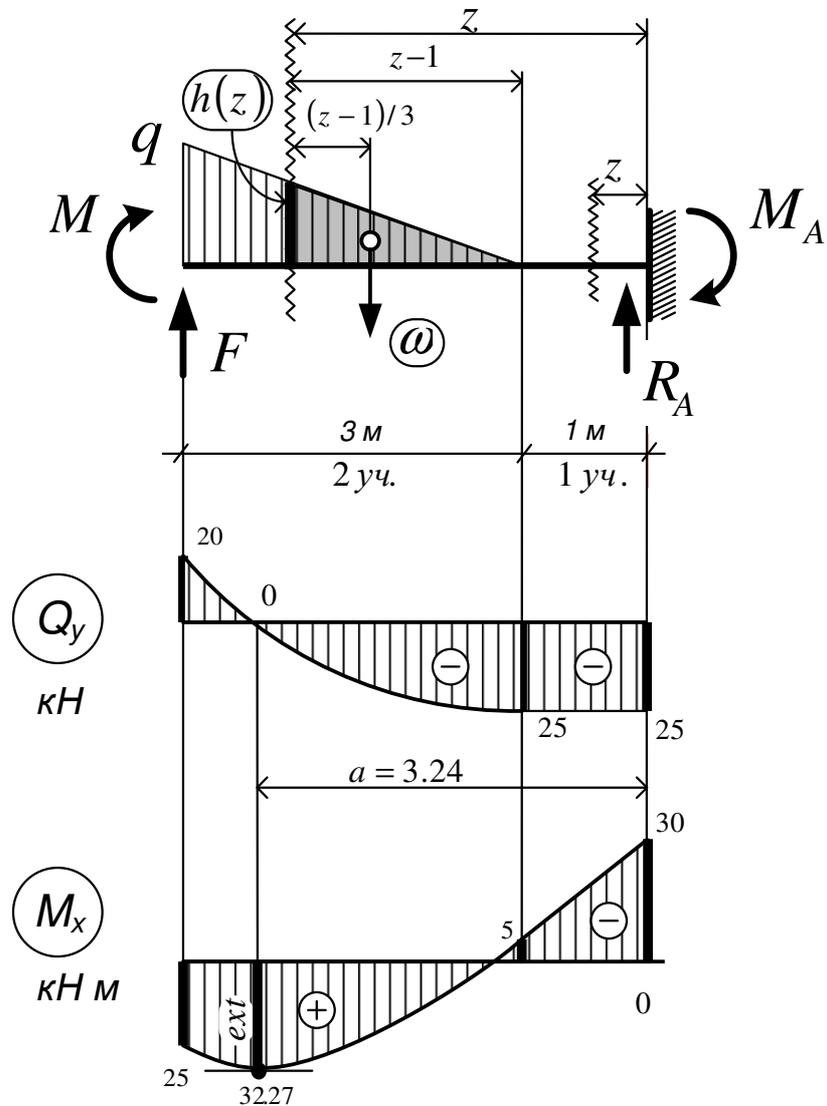


Рис. 58

Рассматриваем равновесие правой части стержня на каждом из участков.

1 участок: $0 \leq z \leq 1\text{ м.}$

$$Q_y = -R_A = -25\text{ кН}, \quad (\text{горизонтальная прямая})$$

$$M_x = -M_A + R_A z = -30 + 25z, \quad (\text{наклонная прямая})$$

$$M_x|_{z=0} = -30\text{ кНм}, \quad (\text{правый край участка})$$

$$M_x|_{z=1} = -30 + 25 \cdot 1 = -5\text{ кНм}. \quad (\text{левый край участка})$$

2 участок: $1 \leq z \leq 4\text{м.}$

Выразим площадь отсечённого треугольника ω :

$$\omega = \frac{1}{2}(z - 1) \cdot h(z),$$

Высоту треугольника $h(z)$ можно выразить, рассмотрев подобие треугольников:

$$\frac{h(z)}{q} = \frac{(z-1)}{3}, \quad \text{откуда можно получить, что}$$

$$h(z) = \frac{q}{3}(z - 1) = 10(z - 1), \text{ и тогда}$$

$$\omega = \frac{1}{2}(z - 1) \cdot 10(z - 1) = 5(z - 1)^2.$$

Составляем выражения для поперечной силы и изгибающего момента:

$$Q_y = -R_A + \omega = -25 + 5(z - 1)^2, \quad (\text{квадратная парабола})$$

$$Q_y|_{z=1} = -25\text{кН}, \quad (\text{правый край участка})$$

$$Q_y|_{z=4} = -25 + 5 \cdot 3^2 = +20\text{кН}. \quad (\text{левый край участка})$$

Касательная горизонтальна на правом краю.

$$M_x = -M_A + R_A z - \omega \cdot \frac{(z-1)}{3} = -30 + 25z - \frac{5}{3}(z - 1)^3,$$

(кубическая парабола)

$$M_x|_{z=1} = -30 + 25 \cdot 1 = -5\text{кНм}, \quad (\text{правый край участка})$$

$$M_x|_{z=4} = -30 + 25 \cdot 4 - \frac{5}{3} \cdot 3^3 = +25\text{кНм}.$$

(левый край участка)

Экстремум будет иметь место в том сечении, где $Q_y = 0$.

Найдём положение экстремума, приравнявая Q_y к нулю:

$$-25 + 5(z_{EXT} - 1)^2 = 0, \text{ откуда } (z_{EXT} - 1)^2 = 5,$$

$$(z_{EXT} - 1) = \sqrt{5} \cong 2.24\text{м}, \quad z_{EXT} \cong 3.34\text{м}.$$

Подставляя найденную координату в выражение $M_x(z)$, найдём экстремальное значение:

$$M_{EXT} = -30 + 25 \cdot 3.24 - 5 \cdot 2.24^3 = 32.27\text{кНм}.$$

(экстремальное значение)

Задача решена

Задача 16

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 59, выполнив вычисления «по границам участков».

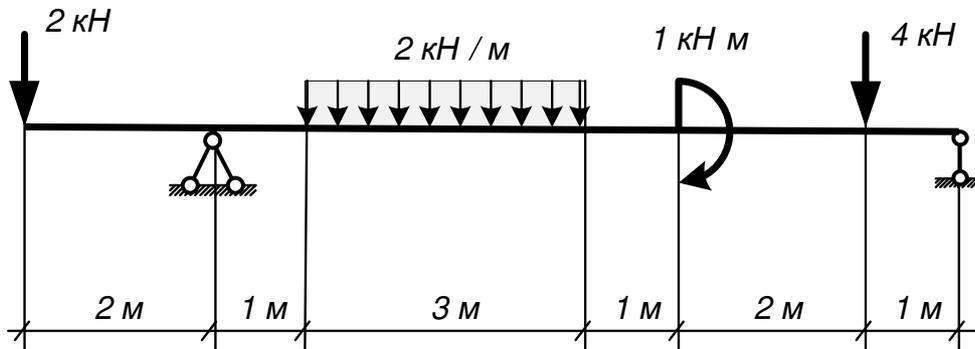


Рис. 59

Решение «по границам участков»

Обозначим характерные поперечные сечения буквами (рис. 60).

Составляя и решая уравнения равновесия, определяем опорные реакции.

$$\sum M_B = 0, \quad 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2.5 - 1 - 4 \cdot 7 + R_G \cdot 8 = 0,$$

$$R_G = \frac{-4 + 15 + 1 + 28}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_G = 0, \quad +2 \cdot 10 - R_B \cdot 8 + 2 \cdot 3 \cdot 5.5 - 1 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$R_B = \frac{+20 + 33 - 1 + 4}{8} = \frac{56}{8} = 7 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y_i = 7 + 5 - 2 - 4 - 2 \cdot 3 = 0.$

Построение эпюры поперечных сил

Построение начинаем с левого края балки, с точки, которая. Рассматривая балку в направлении слева-направо, выполняем построение в следующем порядке:

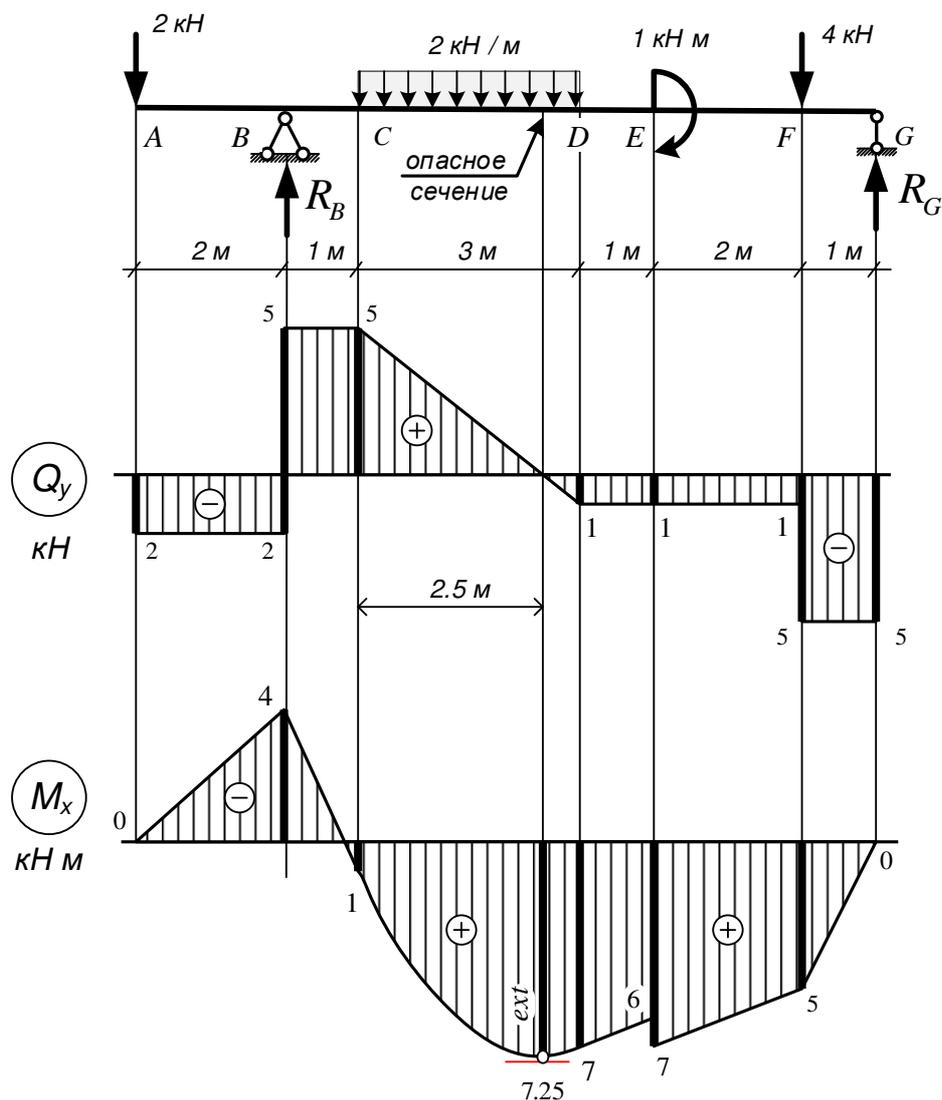


Рис. 60

- Сечение А:** Вертикально вниз на 2 кН (Сосредоточенная сила)
 $Q_y = -2 \text{ кН}$,
- Участок АВ:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = -2 \text{ кН}$,
- Сечение В:** Вертикально вверх на 7 кН (Реакция R_B вверх)
 $Q_y = +5 \text{ кН}$,
- Участок ВС:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = +5 \text{ кН}$,
- Сечение С:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)

- $Q_y = +5кН,$
- Участок CD:** Прямая вниз на $q \cdot 3 = 6кН$ (Распределённая нагрузка)
- $Q_y = -1кН,$
- Сечение D:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
- $Q_y = -1кН,$
- Участок DE:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
- $Q_y = -1кН,$
- Сечение E:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
- $Q_y = -1кН,$
- Участок EF:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
- $Q_y = -1кН,$
- Сечение F:** Вертикально вниз на $4 кН$ (Сила $4 кН$ вниз)
- $Q_y = -5кН,$
- Участок FG:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
- $Q_y = -5кН,$
- Сечение G:** Вертикально вверх на $5 кН$ (Реакция R_G вверх)
- $\sum Y_i = 0.$

Построение эпюры изгибающих моментов

Находим значения изгибающих моментов на границах участков:

Рассматриваем левую часть балки:

Сечение A: $M_x = 0кНм,$

Сечение B: $M_x = -2 \cdot 2 = -4кНм,$ (угол вверх)

Сечение C: $M_x = -2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = +1кНм,$

Сечение D: $M_x = -2 \cdot 6 + 7 \cdot 4 - (2 \cdot 3) \cdot 1.5 = +7кНм.$

Вычисляем экстремальное значение:

Находим положение экстремума (рис. 3.14, б):

$$a_1 = \left| \frac{Q_1}{q} \right| = \frac{5}{2} = 2.5м.$$

Находим площадь эюры поперечных сил (со своим знаком):

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot a_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2.5 = 6.25 \text{кНм.}$$

Вычисляем экстремальное значение момента:

$$M_{\text{EXT}} = M_1 + \omega_1 = +1 + 6.25 = 7.25 \text{кНм.}$$

Рассматриваем правую часть балки:

Сечение E: $M_x = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 1 = 6 \text{кНм,}$ (слева от момента M)

(Разрыв на 1 кНм)

Сечение E: $M_x = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 7 \text{кНм,}$ (справа от момента M)

Сечение F: $M_x = 5 \cdot 1 = 5 \text{кНм,}$ (угол вниз)

Сечение G: $M_x = 0 \text{кНм.}$

Соединяем полученные точки:

Участок AB: Наклонная прямая,

Участок BC: Наклонная прямая

Участок CD: Квадратная парабола

(Выпуклость вниз, есть экстремум),

Участок DE: Наклонная прямая,

Участок EF: Наклонная прямая

Участок FG: Наклонная прямая

Задача решена

Задача 17

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображённой на рис. 61, определяя изгибающие моменты «по площадям».

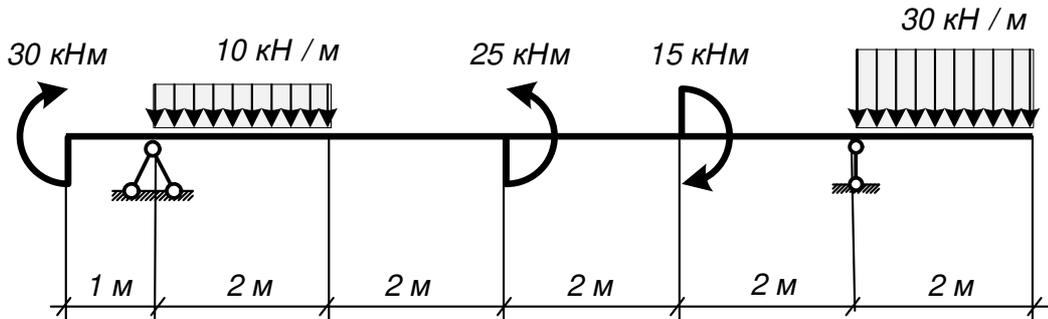


Рис. 61

Решение

Обозначим характерные поперечные сечения буквами (рис. 62).

Составляя и решая уравнения равновесия, определяем опорные реакции.

$$\sum M_B = 0, \quad -30 + 25 - 15 - (10 \cdot 2) \cdot 1 - (30 \cdot 2) \cdot 9 + R_F \cdot 8 = 0,$$

$$R_G = \frac{30 - 25 + 15 + 20 + 540}{8} = \frac{580}{8} = 72.5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_F = 0, \quad -30 + 25 - 15 + (10 \cdot 2) \cdot 7 - R_B \cdot 8 - (30 \cdot 2) \cdot 1 = 0,$$

$$R_B = \frac{-30 + 25 - 15 + 140 - 60}{8} = \frac{56}{8} = 7.5 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y_i = 7.5 + 72.5 - (10 \cdot 2) - (30 \cdot 2) = 0.$

Построение эпюры поперечных сил

Построение начинаем с левого края балки. Рассматривая балку в направлении слева-направо, выполняем построение в следующем порядке:

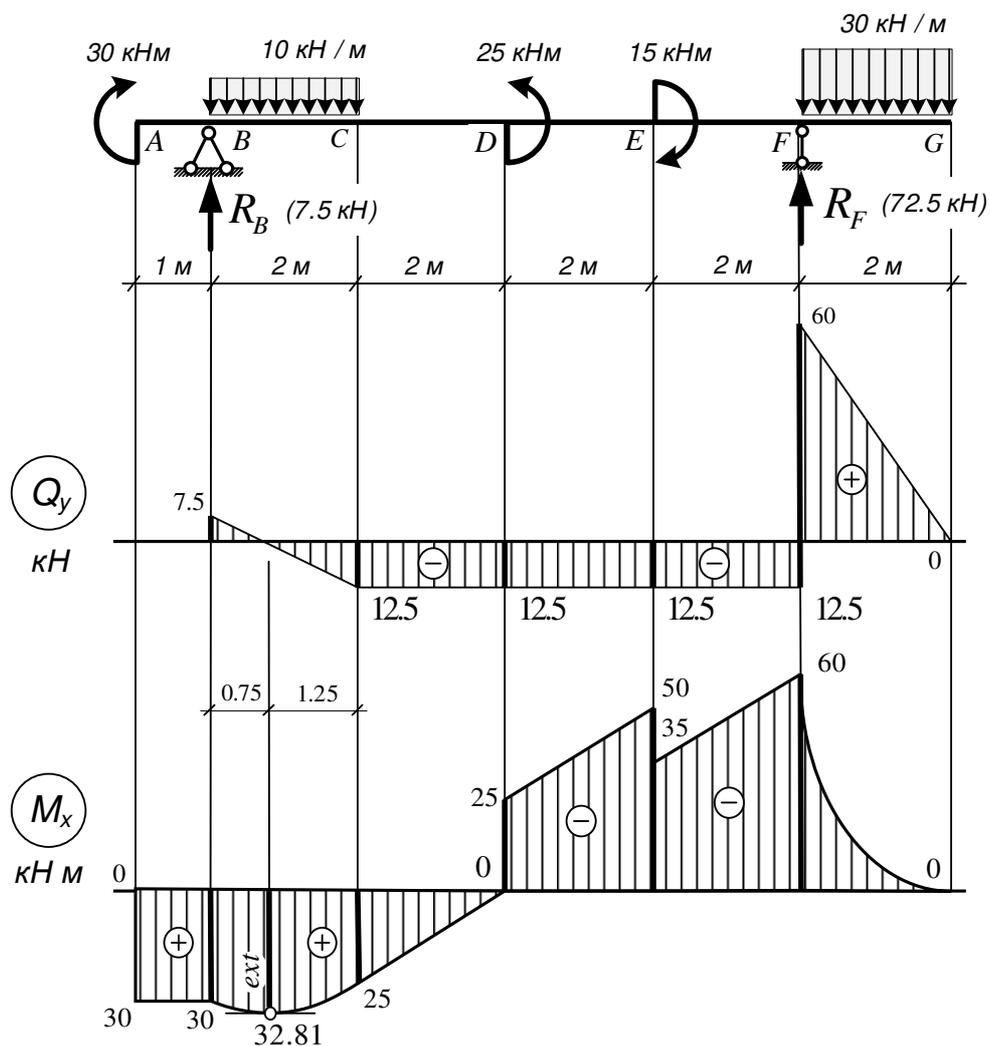


Рис. 62

- Сечение А:** (Сосредоточенной силы нет)
 $Q_y = 0 \text{ кН}$
- Участок АВ:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = 0 \text{ кН}$
- Сечение В:** Вверх на 7.5 кН (Реакция R_B вверх)
 $Q_y = +7.5 \text{ кН}$
- Участок ВС:** Прямая вниз на 20 кН (Распределённая нагрузка)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$
- Сечение С:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$

- Участок CD:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$,
- Сечение D:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$,
- Участок DE:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$,
- Сечение E:** Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$,
- Участок EF:** Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)
 $Q_y = -12.5 \text{ кН}$,
- Сечение F:** Вертикально вниз на 72.5 кН (Реакция R_F вверх)
 $Q_y = 60 \text{ кН}$,
- Участок FG:** Прямая виз на 60 кН (Распределённая нагрузка)
 $Q_y = 0 \text{ кН}$,
- Сечение G:** (Сосредоточенной силы нет)
 $Q_y = 0 \text{ кН}$.

Построение эпюры изгибающих моментов

Находим значения изгибающего момента в сечениях от А до G, проходя их в направлении слева-направо:

$$M_x^A = +30 \text{ кНм},$$

$$M_x^B = M_x^A + \omega_{AB} = +30 + 0 = +30 \text{ кНм},$$

Находим положение экстремума (рис. 62):

$$a_1 = \left| \frac{Q_1}{q} \right| = \frac{7.5}{10} = 0.75 \text{ м}.$$

Находим площадь эпюры поперечных сил (со своим знаком):

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot a_1 = \frac{1}{2} \cdot 7.5 \cdot 0.75 = 2.81 \text{ кНм}.$$

Вычисляем экстремальное значение момента:

$$M_{\text{EXT}} = M_x^B + \omega_1 = +30 + 2.81 = 32.81 \text{ кНм}.$$

Находим площадь правого треугольника (со своим знаком):

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot Q_2 \cdot a_2 = -\frac{1}{2} \cdot 12.5 \cdot 1.25 = -7.81 \text{ кНм}.$$

$$M_x^C = M_{EXT} + \omega_2 = +32.81 - 7.81 = 25 \text{ кНм.}$$

$$M_x^D = M_x^C + \omega_{CD} = 25 - 12.5 \cdot 2 = 0 \text{ кНм.}$$

(Слева от сосредоточенного момента)

$$\tilde{M}_x^D = 0 - 25 = -25 \text{ кНм.}$$

(Справа от сосредоточенного момента)

$$M_x^E = \tilde{M}_x^D + \omega_{DE} = -25 - 12.5 \cdot 2 = -50 \text{ кНм.}$$

(Слева от сосредоточенного момента)

$$\tilde{M}_x^E = -50 + 15 = -35 \text{ кНм.}$$

(Справа от сосредоточенного момента)

$$M_x^F = \tilde{M}_x^E + \omega_{EF} = -35 - 12.5 \cdot 2 = -60 \text{ кНм.}$$

$$M_x^G = M_x^F + \omega_{FG} = -60 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 2 = 0 \text{ кНм.}$$

Соединяем полученные точки:

Участок AB: Горизонтальная прямая

Участок BC: Квадратная парабола

(Выпуклость вниз, есть экстремум)

Участок CD: Наклонная прямая

Участок DE: Наклонная прямая

Участок EF: Наклонная прямая

Участок FG: Квадратная парабола

(Выпуклость вниз,

касательная горизонтальна в сечении G)

Задача решена

Задача 18

Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для двух балок, отличающихся характером приложения распределённой по треугольному закону нагрузки. Схемы балок приведены на рис. 63.

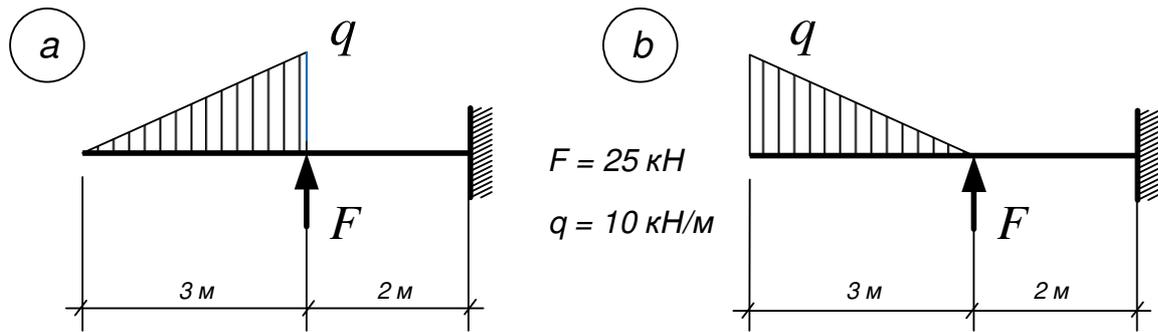


Рис. 63

Решение

Обозначим границы участков буквами.

Определим равнодействующую треугольной нагрузки ω (рис. 64):

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15 \text{ кН.}$$

Построение эпюры поперечных сил

Сечение А: (Сосредоточенной силы нет)

$$Q_y = 0 \text{ кН,}$$

Участок АВ: Квадратная парабола вниз (Треугольная нагрузка)

$$Q_y = -15 \text{ кН,}$$

В варианте «а» касательная горизонтальна на левом краю участка, где $q = 0$.

В варианте «b» касательная горизонтальна на правом краю участка, где $q = 0$.

Сечение В: Вверх на 25 кН (Сила F вверх)

$$Q_y = +10 \text{ кН,}$$

Участок ВС: Горизонтальная прямая (Распределённой нагрузки нет)

$$Q_y = +10 \text{ кН,}$$

Сечение С: Вниз на 10 кН (Это реакция).

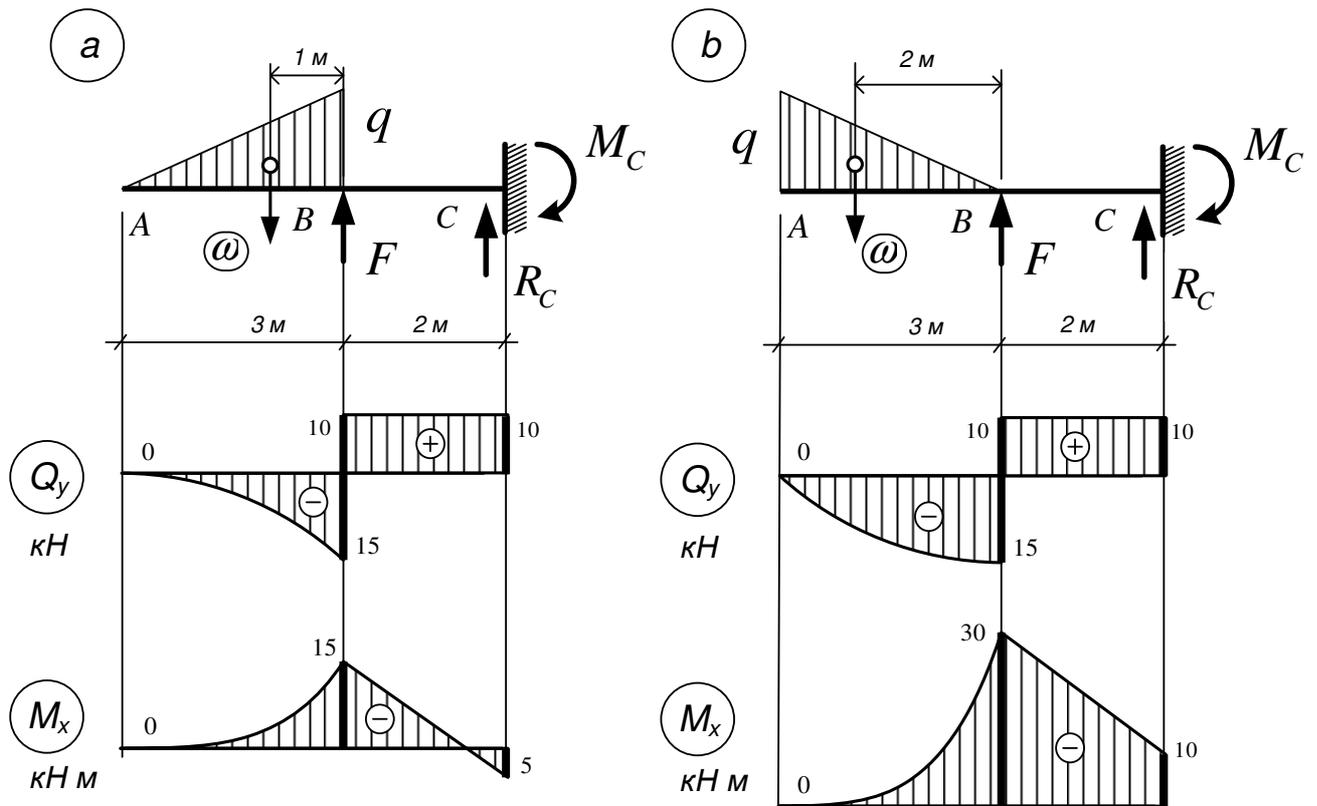


Рис. 64

Построение эпюры изгибающих моментов

Значения M_x для варианта *a*:

Сечение А: $M_x = 0$ кНм (не приложен момент),

Сечение В: $M_x = \omega \cdot 1 = -15$ кНм (угол вверх),

Сечение С: $M_x = -\omega \cdot 3 + F \cdot 2 = +5$ кНм. (Равен реактивному моменту)

Значения M_x для варианта *b*:

Сечение А: $M_x = 0$ кНм (не приложен момент),

Сечение В: $M_x = -\omega \cdot 2 = -30$ кНм (угол вверх),

Сечение С: $M_x = -\omega \cdot 4 + F \cdot 2 = -10$ кНм. (Равен реактивному моменту)

Характер функций:

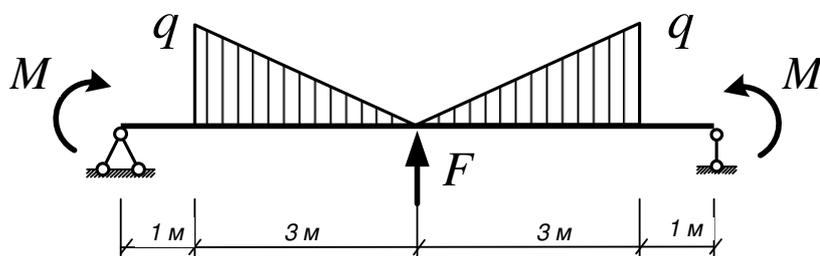
Участок АВ: Кубическая парабола выпуклостью вниз. Экстремума нет.

Участок ВС: Наклонная прямая (Нагрузка отсутствует)

Задача решена

Задача 19

Построить эпюры Q_y и M_x для балки, изображённой на рис. 65. При построении использовать свойства симметрии.



$$q = 10 \text{ кН/м}$$

$$M = 20 \text{ кНм}$$

$$F = 40 \text{ кН}$$

Рис. 65

Решение

Обозначим границы участков балки буквами.

Определим равнодействующую треугольной нагрузки ω (рис. 66):

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15 \text{ кН.}$$

Реакции на опорах равны в силу симметрии конструкции, поэтому реакции можно определить из уравнения $\sum Y_i = 0$. Составляем уравнение и находим величину реакции:

$$2R + F - 2\omega = 0, \quad R = \frac{2\omega - F}{2} = \frac{2 \cdot 15 - 40}{2} = -5 \text{ кН}$$

(реакции направлены вниз!)

Построение эпюры поперечных сил для левой половины балки

Сечение А: Вертикально вниз на 5 кН (Реакция)

$$Q_y = -5 \text{ кН,}$$

Участок АВ: Горизонтальная прямая (Нагрузка отсутствует)

$$Q_y = -5 \text{ кН},$$

Сечение В: Q_y не меняется (Нет вертикальной силы)

$$Q_y = -5 \text{ кН},$$

Участок ВС: По параболе вниз на 15 кН (Распределённая нагрузка)

$Q_y = -20 \text{ кН}$. Касательная горизонтальна на правом краю.

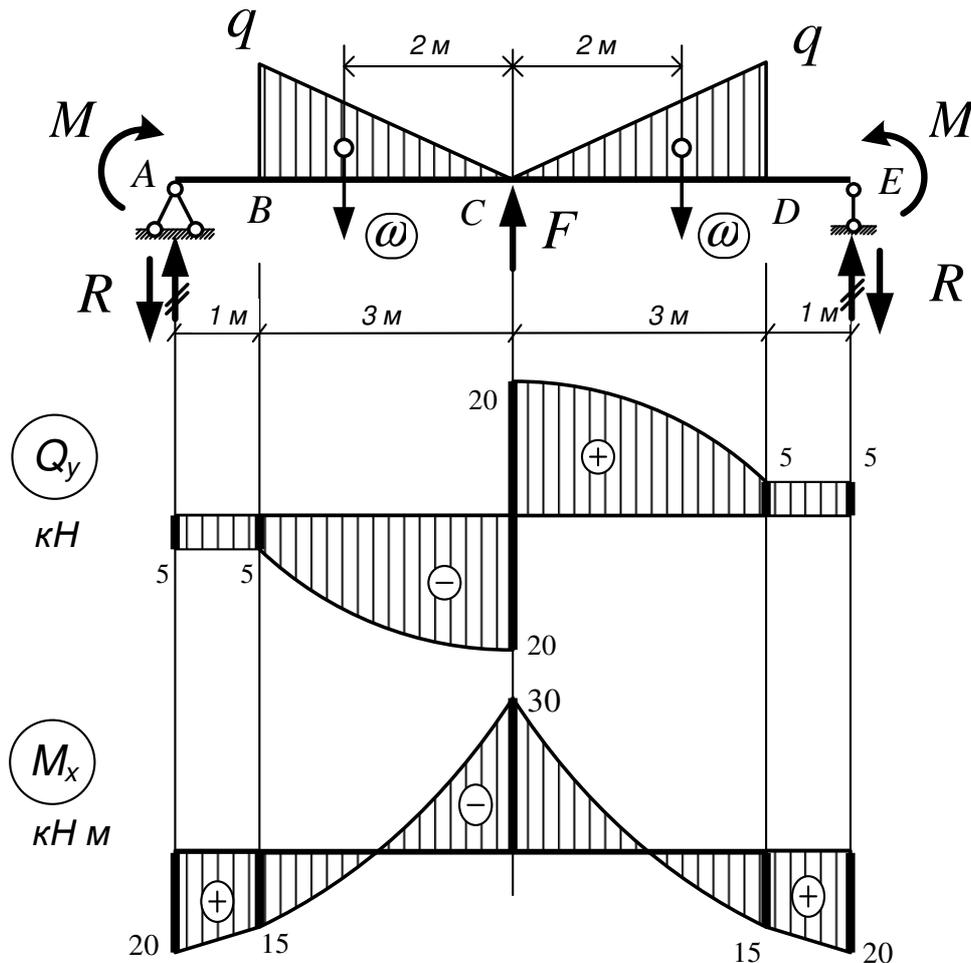


Рис. 66

Построение эпюры изгибающих моментов для левой половины балки

Сечение А: $M_x = +20 \text{ кНм}$,

Сечение В: $M_x = +20 - 5 \cdot 1 = 15 \text{ кНм}$,

(угла на эпюре нет, т. к. нет силы)

Сечение С: $M_x = +20 - 5 \cdot 4 - 15 \cdot 2 = -30 \text{ кНм}$.

Участок АВ: Наклонная прямая (*Нагрузка отсутствует*) ,

Участок ВС: Кубическая парабола выпуклостью вниз. Экстремума нет.

Построение эпюр для правой части балки

Теперь эпюры, построенные для левой части балки, отразим в правую часть относительно вертикальной оси симметрии, которая проходит через сечение C , а отражённую часть эпюры Q_y перевернем относительно базы эпюры.

Задача решена

Маковкин Георгий Анатольевич

Внутренние силы и способы их определения

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60x90 1/8 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 10,2. Усл. печ. л. 10,5. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru