

Министерство образования и науки Российской Федерации.  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный строительный университет»

Кафедра Физики

# **ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Методические указания к выполнению лабораторной работы № 8 для студентов  
специальностей 271101, 230400.62, 120700.62, 270800.62, 221700.62, 022000.62**

Нижегород,   
ННГАСУ,  
2012

УДК 531.535

Изучение вращательного движения твердого тела. Методические указания к выполнению лабораторной работы № 8 для студентов специальностей 271101, 230400.62, 120700.62, 270800.62, 221700.62, 022000.62 / Нижегор. гос. архитектур.- строит. ун-т; сост. Л.Л. Бытин, Н.А. Бархатов - Н.Новгород, ННГАСУ, 2012. – 14с.

Даются сведения об основных закономерностях вращательного движения твердого тела и их проверка измерением углового ускорения и момента инерции вращающегося тела.

Рис.2, таблиц 1, библиография назв. 3.

Составители: Бытин Л.Л. д.ф.-м.н., профессор Бархатов Н.А.  
Редактор: к.ф.-м.н., доцент Бархатова О.М.

©Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
2012

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** изучение основных закономерностей вращательного движения твердого тела и их проверка измерением углового ускорения и момента инерции вращающегося тела.

## I. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ.

**Твердым телом** называется система материальных точек с неизменным расстоянием между ними. **Вращательным** называется движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения**.

Характеристиками **кинематики вращательного движения тела** являются угол поворота, угловая скорость и скорость ускорения.

**Угловой скоростью** называется вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

численно равный производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в сторону, определяемой правилом правого винта. Если правый винт (например, буравчик) вращать так же, как вращается тело, то он будет завинчиваться в направлении угловой скорости. Единицей угловой скорости в СИ является 1 рад/с (радиан в секунду).

**Угловым ускорением** называется вектор, равный производной по времени от угловой скорости:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Вектор  $\vec{\beta}$  направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и  $\vec{\omega}$  при ускоренном вращении и в противоположную сторону – при замедленном вращении. В данный момент времени угловые ускорения всех точек тела

одинаковы. Единицей углового ускорения в СИ является  $1 \text{ рад/с}^2$  (радиан на секунду в квадрате).

В зависимости от характера изменения углового ускорения со временем вращательные движения подразделяются на равномерное ( $\vec{\beta} = 0$ ), равнопеременное ( $\vec{\beta} = \text{const} \neq 0$ ) и неравномерное ( $\vec{\beta} \neq \text{const}$ ).

Характеристиками динамики вращательного движения тела являются момент силы, момент инерции и момент импульса.

Пусть к твердому телу приложена сила  $\vec{F}$  (см. рис.1). Момент  $\vec{M}$  силы определяется относительно точки и оси вращения. Моментом  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно точки «О» называется векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки «О» в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \text{ или } \vec{M} = (\vec{r} \times \vec{F})$$

На рис. 1а приведены ориентации векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  действующих на твердое тело. Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  в сторону, определяемую правилом правого винта. На рис. 1а точка «О» и векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  лежат в плоскости рисунка.

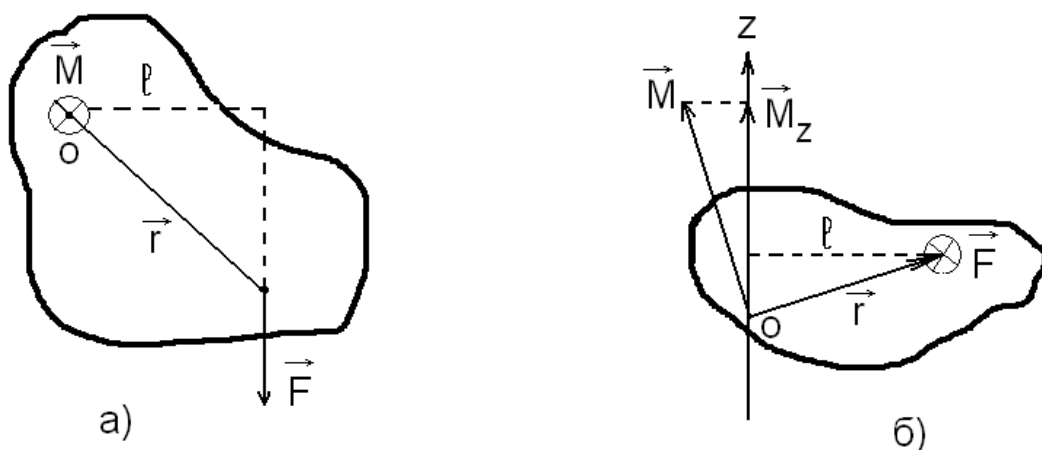


Рис. 1

Чтобы определить направление вектора  $\vec{M}$ , необходимо мысленно совместить начала векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , а затем рукоятку буравчика поворачивать от первого вектора  $\vec{r}$  ко вектору  $\vec{F}$  по кратчайшему пути. Буравчик будет завинчиваться в направлении вектора  $\vec{M}$ . На рис. 1а вектор момента силы направлен от нас, перпендикулярно к плоскости рисунка, и изображен кружком с крестиком.

**Модуль момента  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно точки «О»** равен произведению силы на плечо  $l$  (длина перпендикуляра, опущенного из точки О на прямую, вдоль которой действует сила):

$$M = Fl = Fr \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{r}$ .

**Моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси Z** называется составляющая на эту ось вектора момента силы  $\vec{M}$  относительно произвольной точки «О» этой же оси (рис. 1б)

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z \text{ или } \vec{M}_z = (\vec{r} \times \vec{F})_z$$

Вектор  $\vec{M}_z$  направлен вдоль оси в сторону, определяемую правилом правого винта. Единицей момента силы в СИ является 1 Н\*м (ньютон-метр).

**Модуль момента силы  $\vec{F}$  относительно оси** равен произведению модуля силы  $\vec{F}$  на плечо  $l$  – кратчайшее расстояние между осью и прямой, вдоль которой действует сила (на рис. 1б вектор силы  $\vec{F}$  направлен от нас, перпендикулярно к плоскости рисунка).

Реально при вращательном движении на тело действует несколько сил. Результирующий момент всех действующих сил относительно оси равен векторной сумме моментов отдельных сил относительно той же оси. Его направление всегда совпадает с направлением углового ускорения.

**Моментом инерции материальной точки** относительно оси называется произведение массы  $m_i$  материальной точки на квадрат ее расстояния  $r_i$  от оси вращения

$$J_i = m_i r_i^2$$

Момент инерции системы  $n$  материальных точек относительно оси

$$J_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

**Момент инерции твердого тела относительно оси** вычисляется по формуле

$$J = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

где  $r$  - расстояние от оси до элементарной массы  $dm$ ,  $dV$  - элементарный объем, занимаемый  $dm$ ,  $\rho$  - плотность тела в точке, где находится  $dm$ . Интеграл берется по всему объему тела. Единицей момента инерции в СИ является  $1 \text{ кг м}^2$  (килограмм - квадратный метр).

Момент силы, момент инерции и угловое ускорение  $\vec{\beta}$  связаны **основным уравнением динамики вращательного движения**:

$$\vec{M} = J \vec{\beta}$$

где  $\vec{M}$  - результирующий момент всех действующих на тело внешних сил,  $J$  - момент инерции всего тела.

## II. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ

Основными частями лабораторной установки являются 1 – маятник Обербека с грузами  $m_i$ , 2 - блок, 3 – подвешенный груз  $m_0$ , 4 - линейка и электронный секундомер. Маятник состоит из крестовины и четырех одинаковых грузов. Крестовина выполнена в виде четырех взаимно перпендикулярных одинаковых стержней, закрепленных в шкиве радиуса  $R=17$  мм. Грузы  $m_i$  могут быть укреплены в любых точках стержней. К шкиву маятника привязана нить. К свободному концу нити подвешивается груз  $m_0$ , состоящий из держателя и гирек. Этот груз обеспечивает приложение момента сил к маятнику. Основной задачей выполняемого лабораторного эксперимента является оценка влияния на угловое ускорение твердого тела в форме маятника Обербека его момента инерции и прикладываемого к нему момента силы.

Перед началом работы установки грузы  $m_i$  на стержнях маятника закрепляются на равных расстояниях от оси вращения, нить обматывается вокруг шкива и перебрасывается через блок, груз  $m_0$  на нити занимает верхнее положение. Если привязанный к нити груз  $m_0$  отпустить, то он будет падать вниз, натягивая нить и приводя маятник в равноускоренное вращательное движение. Высота падения груза  $m_0$  на нити отсчитывается по вертикальной линейке, время падения – по секундомеру.

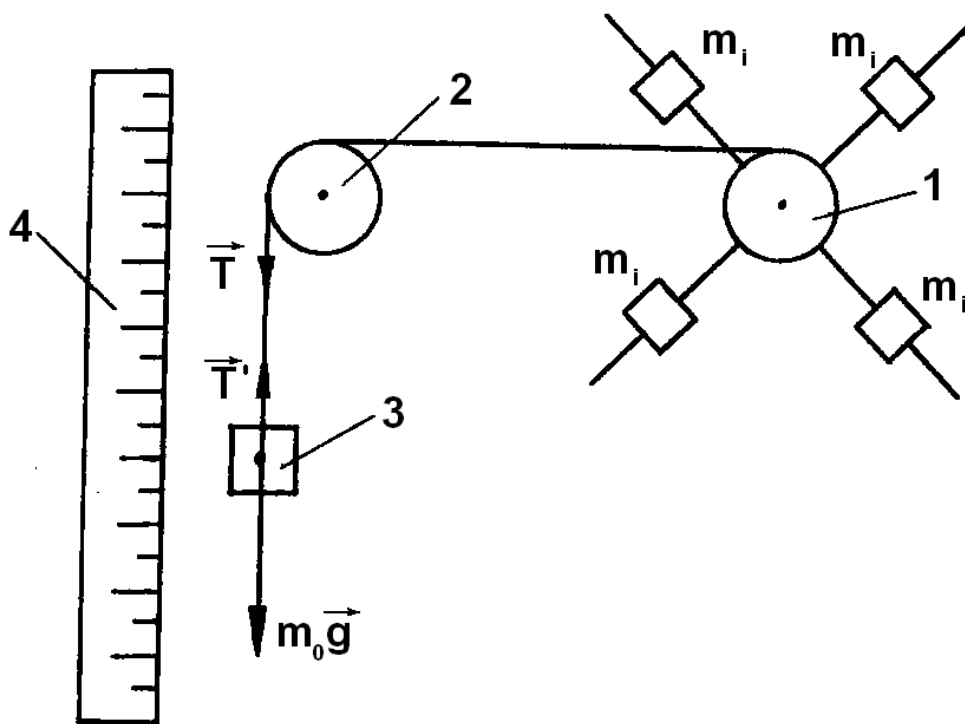


Рис. 2

При падении груза  $m_0$  на нити его ускорение «а» равно касательному ускорению точек обода шкива маятника. Согласно уравнению равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью это ускорение может быть вычислено

$$a = \frac{2h}{t^2},$$

где  $h$  - высота падения груза  $m_0$ ,  $t$  - время падения.

Угловое ускорение всех точек шкива и всего маятника можно определить по формуле

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{2h}{t^2 R} \quad (1)$$

где  $R$  - радиус шкива.



Движение маятника подчиняется основному уравнению динамики вращательного движения, которое в проекциях на ось вращения имеет вид

$$\vec{M} - \vec{M}_{TP} = J\vec{\beta}$$

где  $M = TR$  - момент вращающей силы,  $\vec{M}_{TP}$  - момент сил трения,  $J$  - суммарный момент инерции маятника и блока. Трение при вращении маятника и блока вокруг оси пренебрежимо мало. Пренебрегая трением и учитывая, что согласно второму и третьему законам Ньютона, вращающая сила  $T = m_0(g - a)$ , где  $m_0$  - масса груза,  $g$  - ускорение свободного падения, получим выражение для суммарного момента инерции

$$J = \frac{TR}{\beta} = m_0 R^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (2)$$

Поскольку момент инерции блока много меньше момента инерции маятника, последняя формула может применяться для вычисления с достаточно высокой точностью момента инерции маятника.

### III. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ РАСЧЕТА УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ

Расчет относительной и абсолютной ошибок измерения углового ускорения выполняется согласно методу обработки результатов косвенных измерений. При косвенных измерениях интересующая величина вычисляется по расчетной формуле. В нашем случае это формула (1). В процессе выполнения лабораторной работы величина  $h$  измеряется один раз линейкой с ценой деления 1 см. Это однократно измеряемая величина. Величина  $t$  измеряется три раза секундомером с ценой деления 0,01 с. Это многократно (три раза,  $n=3$ ) измеренная величина, поэтому в формуле (1) для вычисления углового ускорения используется среднее арифметическое значение результатов измерения времени падения

$$\langle t \rangle = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

Величина  $R$  в данной работе не измеряется и ее значение берется из описания лабораторной работы. Это табличная величина.

**Первым этапом** вычисления ошибок является вычисление абсолютной ошибки результата измерений времени падения. Она вычисляется по формуле соответствующей методу обработки прямых многократных измерений

$$\Delta t = t_{\alpha} \sigma ,$$

где  $t_{\alpha}$  - коэффициент Стьюдента,  $\sigma$  - средняя квадратичная ошибка. Коэффициент Стьюдента находится по таблице 1 приведенной в методической разработке к лабораторным работам по физике «Обработка результатов измерений». Его значение определяется числом измерений  $n = 3$  и доверительной вероятностью  $\alpha$ , которая при обработке результатов лабораторных измерений обычно берется не меньше  $\alpha = 0,9$ .

Средняя квадратичная ошибка измерения времени падения вычисляется при трех измерениях ( $n = 3$ ) по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{(t_1 - \langle t \rangle)^2 + (t_2 - \langle t \rangle)^2 + \dots + (t_n - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}} .$$

Значение ошибки измерения округляется так, чтобы в числе оставалась одна, отличная от нуля значащая цифра. Результат записывается в виде

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t$$

**Вторым этапом** вычисления ошибок является сначала вычисление относительной, а затем и абсолютной ошибок расчета углового ускорения. Получение **относительной ошибки**  $\beta$  и начинаем с логарифмирования формулы (1)

$$\ln \beta = \ln 2 + \ln h - 2 \ln t - \ln R$$

Далее вычисляем сумму модулей частных производных от  $\ln \beta$  по всем переменным ( $x = h; t; R$ )

$$\sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \ln \beta}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{h} + \frac{2}{t} + \frac{1}{R}$$

Умножаем каждое слагаемое на абсолютную ошибку соответствующей переменной ( $\Delta h, \Delta t, \Delta R$ ) и учитывая, что погрешности измерений

складываются, получаем выражение для относительной ошибки углового ускорения

$$\delta\beta = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \ln \beta}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta R}{R}$$

Заметим, что для однократно измеренных величин абсолютная ошибка измерения (ошибка прибора) равна цене наименьшего деления шкалы прибора. Это означает, что  $\Delta h = 1 \text{ см}$ . У многократно измеренных величин – абсолютная ошибка рассчитывается по формуле  $\Delta t = t_{\alpha} \sigma$  (см. выше). У табличных величин - абсолютная ошибка – единица последней цифры числа, выражающего значение величины  $\Delta R = 1 \text{ мм}$ .

**Абсолютная ошибка** измерения углового ускорения определяется по формуле

$$\Delta\beta = \delta\beta \cdot \beta$$

Полученное значение абсолютной ошибки следует округлить так, чтобы в числе осталась одна значащая цифра, отличная от нуля.

#### IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Укрепить грузики маятника на одинаковых максимальных расстояниях от оси вращения. Намотать нить на шкив маятника так, чтобы держатель гирек занял самое верхнее положение. Зафиксировать маятник ключом. Положить на держатель несколько (2 и более) гирек. Включить в сеть секундомер. Установить секундомер на нуль, нажав кнопку «Сброс». Замкнуть конечный выключатель секундомера, переводя рукой металлический лепесток на конце вертикальной линейки в горизонтальное положение до фиксации.
2. Произвести пробный пуск установки. Для этого перевести ключ в ближнее положение, освободив тем самым маятник и включив секундомер. Секундомер должен выключиться автоматически в момент удара груза на нити о лепесток конечного выключателя. Убедившись, что секундомер работает, а масса груза достаточна для срабатывания конечного выключателя, приступить к измерениям (**вращающийся маятник ключом**

не останавливать). После достижения грузом на нити крайнего нижнего положения нить будет наматываться на вращающийся шкив маятника. В результате маятник остановится сам.

3. Линейкой измерить расстояние  $r$  между осью вращения и центром грузов на стержнях. Намотав нить на шкив маятника, поднять груз на нити в самое верхнее положение. Зафиксировать маятник ключом. Измерить высоту  $h$  падения груза на нити (расстояние от нижнего основания держателя гирек до конца вертикальной линейки). Определить массу  $m_0$  груза на нити, сложив указанные на держателе и гирьках массы. Установить секундомер на ноль, нажав кнопку «Сброс». Переводя ключ в ближнее положение, измерить время  $t$  падения груза нити. Секундомер включится и выключится автоматически.

**Результаты измерений занести в таблицу**

№ опыта	$r$	$h$	$m_0$	$t$	$\beta$	$J$	$M$

Повторить измерения времени еще два раза, не изменяя массу и высоту падения груза на нити. Вычислить среднее значение времени падения  $\langle t \rangle$ . Именно оно должно быть в дальнейшем использовано при вычислении углового ускорения по формулам (1) и (2).

4. Для оценки влияния момента инерции на угловое ускорение вращающегося тела грузы маятника передвинуть на одинаковые немаксимальные расстояния от оси вращения. Не меняя массу груза на нити, снова проделать все опыты по п.3.

5. Для определения влияния момента силы, вращающей маятник, на его угловое ускорение, изменить массу груза на нити. Не меняя расстояние от оси вращения маятника до грузов на стержнях еще раз проделать все опыты по п.3. По окончании третьей серии опытов секундомер выключить из сети.

6. Для каждой серии опытов по формулам (1), (2) вычислить угловое ускорение и момент инерции маятника. По результатам измерения углового ускорения и момента инерции маятника с помощью формулы основного уравнения динамики вращательного движения оценить момент силы,

вращающей маятник. Взять радиус шкива  $R = 17$  мм. Вычисления производить в единицах СИ.

7. Рассчитать исходя из формулы (1) абсолютную  $\Delta\beta$  и относительную  $\delta\beta$  ошибки измерения углового ускорения в одной из серий опытов (см. также методическую разработку к лабораторным работам по физике «Обработка результатов измерений»).

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение.
2. Виды вращательного движения. Уравнения кинетики вращательного движения.
3. Момент силы относительно точки и оси. Момент инерции.
4. Основное уравнение динамики вращательного движения.
5. Показать, что вращательное движение маятника в данной работе является равноускоренным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Изд. «Лань». СПб. 2005
2. Яворский Б.М., Пинский А. А. Основы физики, т. I. М.: Наука, 1974. 496 с.
3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. Изд. «Книжный мир». СПб. 2003

Л.Л. Бытин

Николай Александрович Бархатов

## ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания к выполнению лабораторной работы № 8 для студентов специальностей 271101, 230400.62, 120700.62, 270800.62, 221700.62, 022000.62

---

Подписано в печать \_\_\_\_\_. Формат 60 x 90. 1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная. Уч. изд. л. \_\_\_\_\_. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Тираж 150 экз. Заказ № \_\_\_\_\_

---

Федеральное агентство по образованию.

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный строительный университет»

603950, Н. Новгород, Ильинская, 65.

Полиграфический центр ННГАСУ, 603950 Н.Новгород, Ильинская, 65.