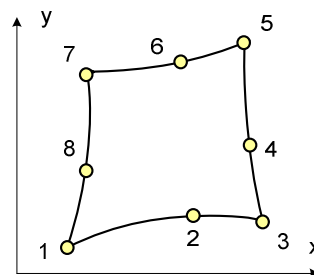
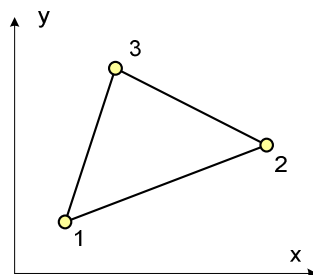
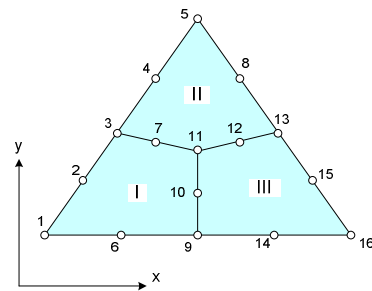
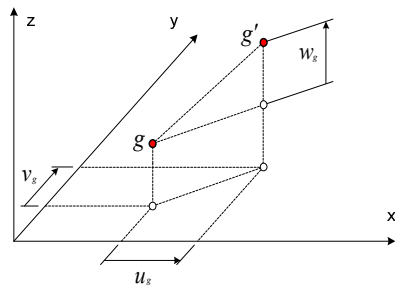


Г.А.Маковкин
С.Ю.Лихачева

**Применение МКЭ к решению задач
механики
деформируемого твердого тела**

Учебное пособие

Часть 1



Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский
государственный архитектурно-строительный университет»
(ФГБОУ ВПО ННГАСУ)

Г.А.Маковкин, С.Ю.Лихачева

**Применение МКЭ к решению задач механики
деформируемого твердого тела
Часть 1**

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве
учебного пособия

Нижний Новгород

2012

УДК 539.3

ББК

Маковкин Г.А., Лихачева С.Ю. Применение МКЭ к решению задач механики деформируемого твердого тела. Учебное пособие. Часть 1. Н.Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2012. 71 с.

В учебном пособии рассматриваются основы метода конечных элементов и его использование для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Информационные системы и технологии» и ПГС ННГАСУ и изучающих дисциплины «Алгоритмизация задач механики деформируемого твердого тела» и «Теоретические основы конечно-элементного моделирования металлических конструкций». Данное учебное пособие также может быть полезно студентам других технических вузов, а также аспирантам, применяющим МКЭ в своих научных исследованиях.

Рис. 36, Библиограф. 22 назв.

ББК

ISBN

©Маковкин Г.А., Лихачева С.Ю., 2012

©ННГАСУ, 2012

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ И ЕГО МЕСТО В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ.....	8
1.1. Цели проектирования.....	8
1.2. Моделирование объекта как основа процесса проектирования.....	8
1.3. Этапы процесса проектирования.....	9
1.4. Расчетные дисциплины, составляющие «Механику деформируемого твердого тела».....	11
1.5. Необходимость использования численных методов расчета.....	11
1.6. Существующие численные методы и программные средства.....	12
2. МАТРИЦЫ КАК ОСНОВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ.....	15
2.1. Понятие о матрицах.....	15
2.2. Элементы матриц.....	15
2.3. Классификация матриц по их структуре.....	16
2.4. Основные операции над матрицами.....	16
2.5. Специальные виды матриц.....	20
3. СТЕРЖЕНЬ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	23
3.1. Ось стержня и его поперечное сечение.....	23
3.2. Геометрические характеристики сечения.....	23
4. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	29
4.1. Виды конечных элементов.....	29
4.2. Идеализация с помощью конечных элементов.....	30
4.3. Программы общего назначения.....	32

5. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	35
5.1. Принятая система координат. Узловые силы и перемещения.....	35
5.2. Соотношения между силами и перемещениями для элемента.....	38
5.3. Работа и энергия.....	41
5.4. Свойства взаимности.....	42
5.5. Преобразование соотношений жесткости и податливости.....	43
5.6. Преобразование степеней свободы.....	45
5.7. Выделение мод движения тела как твердого целого.....	47
6. МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	49
6.1. Основные переменные теории упругости.....	49
6.2. Основные соотношения теории упругости.....	52
6.3. Матричная запись соотношений Коши и закона Гука.....	53
7. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	56
7.1. Дискретизация задачи. Минимум потенциальной энергии системы.....	55
7.2. Структура матриц, используемых в методе КЭ.....	59
7.3. Сборка глобальной системы уравнений МКЭ.....	62
7.4. Нагрузки и воздействия.....	66
Список рекомендуемой литературы.....	70

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмизация — это создание понятного и точного предписания, последовательности действий, направленных на достижение цели. Применительно к науке «Механика деформируемого твердого тела» (МДТТ) такой целью является установление законов деформирования, повреждения и разрушения деформируемых твердых тел различной природы при разнообразных воздействиях.

И если возникновение понятия «алгоритм» отсчитывают с 825 года (алгоритм — аль-Хорезми – по имени персидского учёного Абу Абдуллах Мухаммеда ибн Муса аль-Хорезми), то основные понятия механики деформируемого твердого тела – прочность, деформативность, твердость, жесткость – сопровождают человечество с доисторических времен.

История этой науки настолько обширна и даже богата интригами, что ей посвящены целые книги. Имена же исследователей, развивших МДТТ от понятия предельного состояния балки до учета явлений наследственности в процессах движения и равновесия тел, могут поразить даже людей, далеких от техники. Галилео Галилей и Леонардо да Винчи, Ньютон и Гук, Эйлер и Лагранж, Коши и Пуассон, Журавский и Навье и многие другие замечательные ученые посвятили свою жизнь одной из интереснейших наук, которая и по сей день продолжает развиваться.

Как и для любой науки, описывающей реальные процессы, для МДТТ основным аппаратом служит математическое моделирование. Существует два основных класса задач, связанных с математическими моделями: прямые и обратные. В первом случае все параметры модели считаются известными, во втором какие-то параметры модели неизвестны (например, не могут быть измерены явно), и требуется их найти, сопоставляя поведение реальной системы с ее моделью. Математическое описание деформирования твердых тел сводится к системе уравнений, решение которой представляет достаточно сложную и до середины XX века во многих случаях нерешаемую задачу из-за большого количества неизвестных параметров, позволяющих адекватно описать деформируемую среду.

Решить эту проблему позволило использование численных методов. Особое место среди них на данный момент прочно занимает метод конечных элементов (МКЭ), благодаря своей универсальности в программной реализации и естественности механической природы.

Основная идея метода КЭ заключается в следующем: сплошная среда или конструкция моделируется путем разбиения ее на небольшие области (*конечные элементы*), в каждой из которых поведение среды описывается с помощью своего отдельного набора выбранных функций, представляющих перемещения или напряжения в указанной области. Целостность объекта обеспечивается взаимодействием конечных элементов в ряде точек, называемых *узловыми точками* или *узлами*. Математическое описание взаимодействия конечных элементов в узлах приводит к построению системы алгебраических уравнений, к решению которой в конечном счете и сводится решение исходной задачи.

Возникновение этого метода традиционно связывают с работой М.Тернера, Р.Клужа, Г.Мартина и Л.Топпа, посвященной решению задач космических исследований (1950г.). Хотя существует мнение, что идея МКЭ была разработана в СССР ещё в 1936 году, но из-за неразвитости вычислительной техники метод в то время не получил применения.

Математические основы метода были впервые сформулированы Р.Курантом в 1943г., а термин “конечный элемент” впервые был введен Р.Клафом в 1960 г.

Благодаря работам О.Зенкевича МКЭ из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод численного решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, в том числе и краевых задач теории упругости и теории пластичности.

Представленная в работе Р.Мелоша связь МКЭ с процедурой минимизации функционала позволила широко использовать МКЭ при решении задач в других областях техники, например, в задачах распространения тепла и задачах гидромеханики.

Дальнейшее развитие метода привело к тому, что расчет конструкций из разнородных материалов, учет реальных граничных условий, характеризующих контактные взаимодействия, адгезионных эффектов или больших пластических деформаций при использовании МКЭ не представляет особых затруднений.

Сегодня МКЭ во всем мире является инструментом, полностью интегрированным в процесс проектирования транспортных средств наземного и подземного назначения, судо- и авиастроения, атомных и гидроэлектростанций, теплопроводов и др. Одним из интересных применений МКЭ жизни является моделирование столкновений автомобилей как с целью выявления недостатков

конструкции, отрицательно влияющих на безопасность пассажиров, так и при реконструкции обстоятельств ДТП.

Решение же задач механики деформируемого твердого тела на современном уровне прочно связано с использованием метода конечных элементов.

Авторы выражают надежду, что представленное пособие поможет студентам технических вузов в освоении дисциплин «Алгоритмизация задач механики деформируемого твердого тела» и «Теоретические основы конечно-элементного моделирования конструкций», а также аспирантам и научным работникам, изучающим применение МКЭ в технике и строительстве.

1. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ И ЕГО МЕСТО В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

1.1. Цели проектирования

Целью проектирования является создание конструкции, обладающей рядом важных свойств.

- Все детали конструкции должны передавать нагрузку эффективно и экономично.
- Ни один элемент не должен разрушиться раньше некоторого заданного срока эксплуатации.
- Каждый элемент должен выполнять свою функцию, не мешая работе других частей конструкции.
- Элемент конструкции должен быть таким, чтобы его можно было изготовить и смонтировать.
- Вес, объем и стоимость готовой детали должны соответствовать ее назначению.
- Должна быть обеспечена возможность обслуживания и ремонта в процессе всего срока эксплуатации.
- Конструкция должна удовлетворительно функционировать в течение заданного времени и быть конкурентоспособной.
- Конструкция должна отвечать эстетическим и экологическим требованиям.

1.2. Моделирование объекта как основа процесса проектирования

Обеспечение перечисленных требований - основная задача процесса проектирования. Достигать этой цели в процессе проектирования можно различными способами, которые отличаются как по методике, так и по расходуемым средствам.

Самым прямолинейным решением этой задачи является испытание готовой конструкции. Этот подход до сих пор часто используется при создании технических изделий выпускаемых большими сериями, например, автомобилей. Но в большинстве случаев испытание реальной конструкции или невозможно, или очень дорого.

В этом случае прибегают к испытаниям уменьшенной копии изделия. Например, при проектировании атомных реакторов проводят испытания уменьшенных моделей, выполненных из стекла. При этом возникает проблема: как по результатам испытаний

модели судить о поведении конструкции, поскольку в этом случае механическое уменьшение или увеличение результата испытания дает неправильный результат. Начинает влиять так называемый «масштабный фактор».

В ряде случаев используются методы моделирования, основанные на аналогичности уравнений, описывающих те или иные физические процессы. Например, вместо испытания фермы, состоящей из шарнирно соединенных в узлах стержней, может быть испытана аналогичная электрическая схема. На физических аналогиях основан также метод фотоупругости.

По мере развития отраслей математики появилась возможность подвергать испытаниям не физическую модель конструкции, а ее математическую модель. Для проведения такого «испытания» необходимо:

- сформулировать уравнения, правильно описывающие поведение реальной конструкции;
- решить сформированные уравнения, получив конкретный числовой результат.

В результате решения уравнений модели инженер получает разнообразную информацию о предполагаемом поведении реального объекта. Например, моделируя поведение конструкции, находящейся под действием нагрузки, инженер может получить:

- перемещения точек конструкции;
- усилия в стержневых элементах (продольные и поперечные силы, изгибающие и крутящий моменты);
- распределение деформаций и напряжений в материале конструкции.

По результатам расчета можно судить о работоспособности и эффективности данного варианта конструкции.

В настоящее время математическое моделирование является основным при проектировании новых технических изделий.

1.3. Этапы процесса проектирования

Итак, по результатам расчета можно судить о работоспособности варианта конструкции, который был предложен в результате первоначального процесса конструирования. Если полученные с помощью расчета параметры конструкции будут признаны неудовлетворительными, должен последовать возврат к этапу конструирования с тем, чтобы найти более эффективные конструктивные решения.

Таким образом, процесс проектирования представляет собой итерационный процесс, состоящий из последовательно повторяющихся этапов конструирования и расчета.

Процесс проектирования конструкции грубо можно разделить на две стадии (рис.1.1).

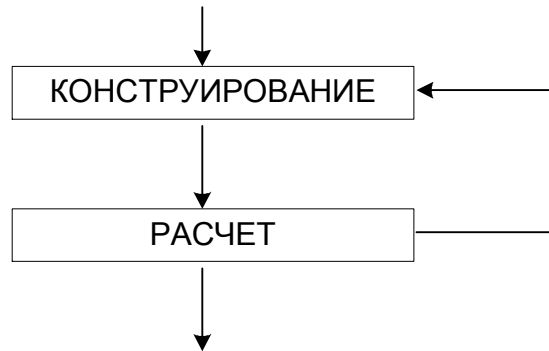


Рис. 1.1

Например, при проектировании рамы промышленного здания, на этапе конструирования может быть принято решение о перекрытии пролета балкой. В результате расчета может быть установлена неэффективность такого решения. В этом случае может быть рассмотрен новый вариант конструкции, в котором пролет перекрывается фермой (рис. 1.2). Расчет может показать неэффективность и такого конструктивного решения, после чего вновь потребуется возврат на этап конструирования и т.д.

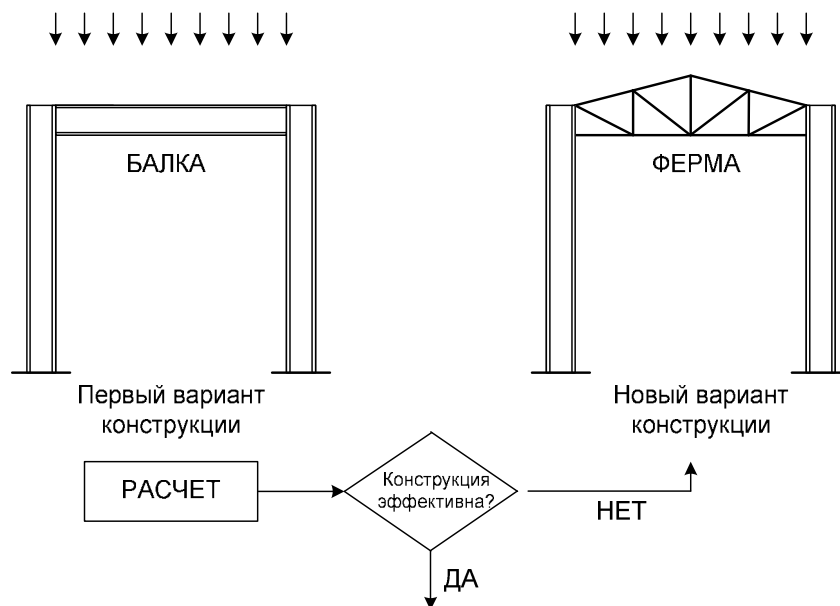


Рис. 1.2

1.4. Расчетные дисциплины, составляющие «Механику деформируемого твердого тела»

В широком смысле все расчетные дисциплины, а именно: сопротивление материалов, строительная механика, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, а также механика разрушения занимаются разработкой методов моделирования механических процессов, имеющих место в реальных конструкциях. Чем сложнее подлежащий моделированию реальный физический процесс, тем более сложным являются математические зависимости, его описывающие.

Исходя из характера работы конструкции, необходимо определить достаточную степень точности моделирования реальных физических процессов. В большинстве случаев это позволяет сильно упростить уравнения модели. Упрощение уравнений достигается введением некоторых дополнительных упрощающих положений и гипотез. Так, в сопротивлении материалов, уравнения которого можно считать наиболее простыми, используются: закон Гука, гипотеза плоских сечений, принцип Сен-Венана и т.п. Формулы теории упругости получены при меньшем числе упрощающих положений. Не используется, например, гипотеза плоских сечений. Расчет ряда конструкций не может быть признан соответствующим реальности, если при его проведении не учитывались пластические деформации. Для их учета следует отказаться от закона Гука, что приводит к еще более сложным соотношениям теории пластичности и ползучести.

Уравнения, составляющие математическую модель, можно разбить на три группы:

- статические уравнения (уравнения равновесия);
- геометрические уравнения (уравнения неразрывности деформаций);
- физические уравнения (уравнения, связывающие внутренние силы или напряжения с деформациями тела).

1.5. Необходимость использования численных методов расчета

Общим для всех перечисленных дисциплин является то, что математическое моделирование работы конструкции сводится к нахождению в заданной одно-, двух- или трехмерной области, ряда функций, описывающих распределение какой-либо физической величины. Так в сопротивлении материалов строятся эпюры усилий по длине стержня или эпюры напряжений по высоте сечения. В теории упругости

используются функции двух или трех переменных, показывающие распределение перемещение точек тела или возникающих в них напряжений и деформаций и т.д.

Искомое решение, как правило, имеет вид полинома или тригонометрической функции с неизвестными коэффициентами, которые находятся из уравнений модели.

Находя эти коэффициенты с помощью алгебраических или иных преобразований, мы получаем так называемое «точное» решение задачи. Характерной его особенностью является то, что найденные функции дают решение сразу для всех точек тела. Такое «точное» решение возможно практически для всех задач сопротивления материалов.

Уже при использовании уравнений теории упругости такое решение может быть получено только в тех случаях, когда рассматриваемая область имеет очень простую форму. К числу таких задач относятся задача о балке-стенке, задача о клине, задача о полом цилиндра и т.п. Уравнения же теории пластичности и ползучести чаще всего позволяют получить аналитический результат лишь для случая центрального растяжения-сжатия.

Реальные конструкции, как правило, имеют гораздо более сложную форму, а физические свойства материала, из которого они выполнены, могут существенно отличаться от свойств постулируемых теорией упругости. По этой причине подобрать функцию или набор функций, которые описывали бы состояние конструкции сразу во всей области, часто не представляется возможным.

Эти проблемы решаются использованием численных методов и программных комплексов, основанных на этих методах.

1.6. Существующие численные методы и программные средства

Можно выделить три группы наиболее интенсивно развивающихся численных методов:

- метод конечных разностей;
- метод граничных элементов (граничных интегральных уравнений);
- метод конечных элементов.

Лидирующее положение, как по числу публикаций, так и по количеству программных средств и капиталовложений, занимает метод конечных элементов (МКЭ), FEM – в англоязычной литературе.

Основная идея, положенная в основу метода, проста: представить исследуемую область (конструкцию) в виде большого числа подобластей (конечных элементов), на

каждой из которых искомая функция будет аппроксимироваться функцией очень простого вида, например полиномом или даже константой.

Этот прием не нов. Так, если рассматривать цветное изображение, как скалярную функцию, заданную на плоскости (цвет, как известно, определяется одним числом – длиной волны), то мозаика дает блестящий пример применения конечных элементов для аппроксимации. Аналогичный пример – формирование цветного изображения на экране монитора, которое строится, как известно, из множества пикселей, каждый из которых имеет свой цвет и яркость. Естественно, что чем меньше размер используемых при этом элементов (зерен мозаики, пикселей), тем более точным будет это описание.

Несмотря на логическую простоту, использование МКЭ связано с необходимостью выполнения очень большого числа вычислительных операций и хранения больших массивов информации. По этой причине интенсивное развитие метода началось лишь в середине 50-х годов XX века и происходило параллельно развитию вычислительной техники.

Математические зависимости МКЭ формулируются обычно в матричном виде, поскольку такое представление позволяет организовать огромное количество вычислений в рамках ясной логической схемы – алгоритма.

К концу XX века на рынке появилось большое количество программных средств (программ общего назначения), имеющих развитую сервисную часть и позволяющих в рамках единой вычислительной схемы метода конечных элементов решать разнообразные задачи расчета конструкций. Среди них наиболее популярными являются:

- ANSYS
- Code_Aster
- Comsol Multiphysics (Прежнее название FEMlab)
- Deal.II
- DSM FEM
- DEFORM-2D/3D
- Impact -- Dynamic Finite Element Program Suite
- Elcut или QuickField
- FEM Models
- Elmer FEM solver

- Femap
- FloEFD
- FreeFEM++
- LibMesh
- LS-DYNA
- Maxwell (Ansoft)
- MicroFe Nastran
- NX Advanced Simulation
- QForm 2D/3D
- RFEM (Ing. Software Dlubal)
- SCAD [5]
- SOFiSTiK
- STARK ES
- Z88
- ПК Лира.

и др.

В НИИ механики при ННГУ им. Н.И.Лобачевского под руководством профессора С.А.Капустина создан программный комплекс решения нелинейных задач деформирования и разрушения конструкций МКЭ при квазистатических термосиловых нагрузениях УПАКС. Этот вычислительный комплекс предназначен для численного решения на основе МКЭ квазистатических задач деформирования, разрушения, оценки несущей способности, а также стационарных и нестационарных задач теплопроводности конструкций, с учетом различных видов нелинейностей физического, геометрического характера и краевых условий.

2. МАТРИЦЫ КАК ОСНОВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

2.1. Понятие о матрицах

Матрица – прямоугольная таблица элементов, состоящая из n строк и m столбцов.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix}, \text{ которую также можно обозначить как } \underset{n \times m}{[A]}.$$

2.2. Элементы матриц.

Элементами матриц могут быть:

- действительные числа (действительные матрицы);
- нули или единицы, которые могут трактоваться, как логические значения «истина» или «ложь» (булевы или логические матрицы);
- функции (матричные функции);
- дифференциальные операторы (матричные операторы);
- другие матрицы, размеры которых в этом случае должны быть согласованы между собой (клеточные матрица).

Приведем примеры.

Действительная матрица

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2.5 \\ 1/3 & -4 & 0 \\ -2 & 2/3 & 6 \end{bmatrix}$$

Логическая (булевская матрица)

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матричная функция

$$[D] = \begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ x+y & -3 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}$$

Матричный оператор

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x \partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

Клеточная матрица

$$[F] = \begin{bmatrix} [H] & [K] & [J] \\ [S] & [T] & [J] \end{bmatrix}$$

Примечание. Размеры клеток должны быть согласованы.

2.3. Классификация матриц по их структуре

По особенностям структуры могут быть выделены некоторые частные случаи матриц:

- квадратные матрицы, у которых $n = m$;
- диагональные матрицы, у которых $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$;
- единичные матрицы, у которых $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $A_{ij} = 1$ при $i = j$;
- нулевые матрицы, у которых все элементы равны нулю;
- симметричные матрицы, у которых $A_{ij} = A_{ji}$;
- верхние и нижние треугольные матрицы:

$$[B] = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix},$$

где символом «*» обозначены ненулевые элементы;

- матрица-столбец:

$$[A]_{n \times 1} = \{A\}_n = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix};$$

- матрица-строка

$$[B]_{1 \times m} = [B]_m = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m].$$

2.4. Основные операции над матрицами

- *Равенство матриц.*

$$[A] = [B], \quad \text{если для всех } i \text{ и } j \quad A_{ij} = B_{ij}.$$

- *Сумма матриц и разность матриц.*

$$[C] = [A] + [B], \quad \text{если для всех } i \text{ и } j \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

$$[C] = [A] - [B], \quad \text{если для всех } i \text{ и } j \quad C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}.$$

- Умножение матрицы на скаляр.

$$[B] = c [A], \quad \text{если для всех } i \text{ и } j \quad B_{ij} = c A_{ij}.$$

- Умножение матриц.

Выполняется путем вычисления каждого элемента матрицы $[C]$ по следующему правилу:

$$C_{ij} = \sum_{t=1}^k A_{it} B_{tj}$$

Следует обратить внимание на то, что эта операция возможна только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, то есть когда:

$$[C] = [A][B].$$

$m \times n \quad m \times k \quad k \times n$

Процесс вычисления элемента матрицы $[C]$, лежащего на пересечении i -й строки и j -го столбца (то есть элемента C_{ij}) можно пояснить схемой (рис. 2.1):

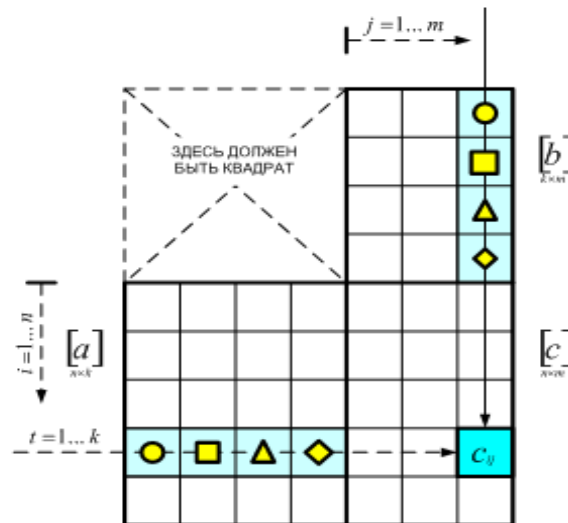


Рис.2.1

Характерно, что $[A][B] \neq [B][A]$, за исключением специальных случаев.

Могут не совпадать даже размерности получаемых матриц. Так, при перемножении матрицы-строки на матрицу-столбец результатом будет скаляр (матрица размером 1×1), а при перемножении матрицы-столбца на матрицу-строку результатом будет прямоугольная матрица.

Один из частных случаев, когда умножение матриц коммутативно, – умножение на единичную матрицу. Легко показать, что $[I][B] = [B][I]$.

Интересно отметить также, что произведение $[A][B]$ может быть равно нулю, даже если сомножители не являются нулевыми матрицами.

Например,
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Обращение матриц.*

Обратная матрица $[B] = [A]^{-1}$ есть такая матрица, для которой выполняется равенство:

$$[A][B] = [B][A] = [I].$$

Не всякая матрица имеет обратную. Если матрица имеет обратную, то говорят, что она невырожденная. Матрицы, не имеющие обратной матрицы, называются вырожденными или особенными. Определитель вырожденной матрицы равен нулю, то есть:

$$\det [A] = 0.$$

Следующие высказывания означают одно и то же:

- матрица $[A]$ - невырожденная,
- обратная матрица $[A]^{-1}$ существует,
- столбцы матрицы $[A]$ линейно независимы,
- строки матрицы $[A]$ линейно независимы.

Можно показать, что обратная матрица произведения нескольких матриц определяется по правилу:

$$([A][B] \dots [C])^{-1} = [C]^{-1} [B]^{-1} \dots [A]^{-1}.$$

- *Транспонирование матриц.*

$$[B] = [A]^T.$$

Транспонированная матрица $[B]$ получается путем замены в исходной матрице $[A]$ строк столбцами. В частности, транспонирование матрицы-столбца дает матрицу-строку и наоборот.

Транспонирование произведения нескольких матриц выполняется по правилу:

$$([A][B] \dots [C])^T = [C]^T [B]^T \dots [A]^T.$$

- *Дифференцирование и интегрирование матриц.*

Если элементами матрицы $[A]$ являются функции $A_{ij}(x)$, то можно условно определить производную от нее следующим образом:

$$[B] = \frac{d[A]}{dx} = [A]'_x, \text{ если для всех элементов матрицы } B_{ij} = \frac{d A_{ij}(x)}{dx}.$$

Частные производные и интегралы от матрицы можно понимать аналогично.

- *Нахождение собственных чисел (значений) и собственных векторов квадратной матрицы.*

Если в выражении $\{y\} = [A]\{x\}$ матрицы-столбцы рассматривать как вектора, то матрица $[A]$ будет представлять собой линейный оператор, преобразующий вектор $\{x\}$ в вектор $\{y\}$, имеющий в общем случае (рис. 2.2) иную длину и иное направление, нежели вектор $\{x\}$. Более того, если матрица $[A]$ не является квадратной, исходный вектор $\{x\}$ и полученный вектор $\{y\}$ могут принадлежать пространствам с разным числом измерений, то есть иметь различное число компонент. Преобразование же вида $\{y\} = \lambda \{x\}$ (рис. 2.3) изменяет лишь длину вектора, но не изменяет его направления.

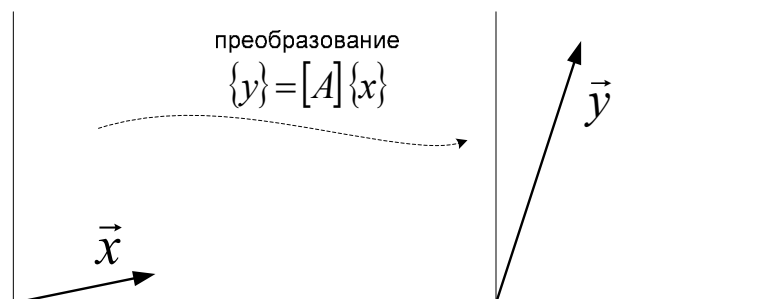


Рис. 2.2

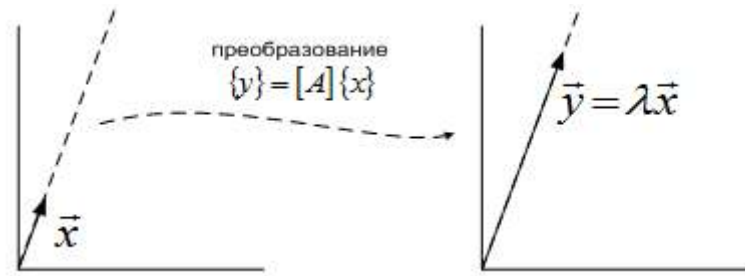


Рис. 2.3

Если удастся установить равенство вида $[A] \cdot \{x\} = \lambda \cdot \{x\}$, то это означает, что линейный оператор $[A]$ в данном частном случае также изменяет лишь длину вектора, не меняя его направления.

Собственные значения (собственные числа) матрицы $[A]$ - это такие числа λ , для которых выполняется равенство $[A] \cdot \{x\} = \lambda \cdot \{x\}$ для некоторого ненулевого столбца (вектора) $\{x\}$. Вектор $\{x\}$ в этом случае называется собственным вектором матрицы $[A]$ (рис. 2.3).

Квадратная матрица порядка n имеет n собственных чисел и, как правило, (не всегда) n собственных векторов.

2.5. Специальные виды матриц

Перестановочные матрицы.

Возьмем единичную матрицу $[A] = [I]$ и модифицируем ее следующим способом:

- выделим в ней i -й столбец и i -ю строку, j -й столбец и j -ю строку ($i \neq j$);
- положим $A_{ii} = A_{jj} = 0$ и $A_{ij} = A_{ji} = 1$ (рис. 2.4).

Легко убедиться, что в этом случае умножение вида $[C] = [B] [A]$ приводит к перестановке в исходной матрице $[B]$ i -го и j -го столбцов. В то же время умножение вида $[C] = [A] [B]$ приводит к перестановке в исходной матрице $[B]$ i -й и j -й строк. Матрица $[A]$, используемая для осуществления такой операции, называется перестановочной (рис. 2.4).

Матрицы преобразования системы координат (матрицы поворота осей).

Если для некоторого вектора \vec{a} (рис. 2.5) компоненты, заданные в одной системе координат матрицей-столбцом $\{a\}$, надо вычислить в другой, полученной путем поворота системы координат, представив столбцом $\{a'\}$, то указанное преобразование можно выполнить с помощью операции:

$$\{a'\} = [\Gamma] \{a\}.$$

$$[A] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & 1 & & \\ \hline & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2.4

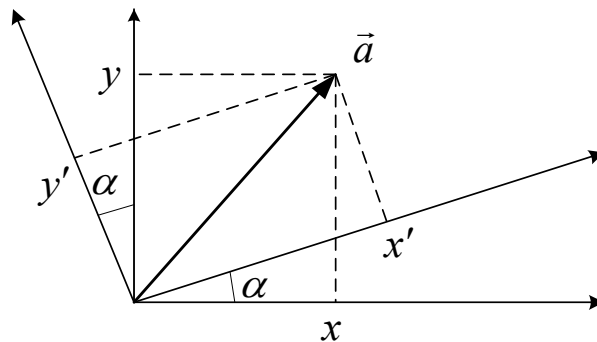


Рис. 2.5

Известно, что компоненты некоторого двумерного вектора \vec{a} изменяются при повороте системы координат на угол α по следующему правилу (рис.2.5):

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{cases}$$

Следовательно, в этом случае матрица $[\Gamma]$ должна быть сформирована следующим образом:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что определитель матрицы $[\Gamma]$ равняется единице, поскольку

$$\det [\Gamma] = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Легко также убедиться в том, что в случае ортогональных осей матрица преобразования системы координат обладает свойством $[\Gamma][\Gamma]^T = [I]$. По определению обратной матрицы $[\Gamma][\Gamma]^{-1} = [I]$. Поэтому должно иметь место равенство:

$$[\Gamma]^T = [\Gamma]^{-1}.$$

Матрицы, для которых обратная матрица равна транспонированной матрице, называются ортогональными.

3. СТЕРЖЕНЬ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

3.1. Ось стержня и его поперечное сечение

Стержень характеризуется осью и поперечным сечением.

Ось – линия, соединяющая **центры тяжести** всех поперечных сечений стержня.

Поперечное сечение – плоская фигура, получающаяся при рассечении стержня плоскостью перпендикулярной его оси (рис. 3.1).

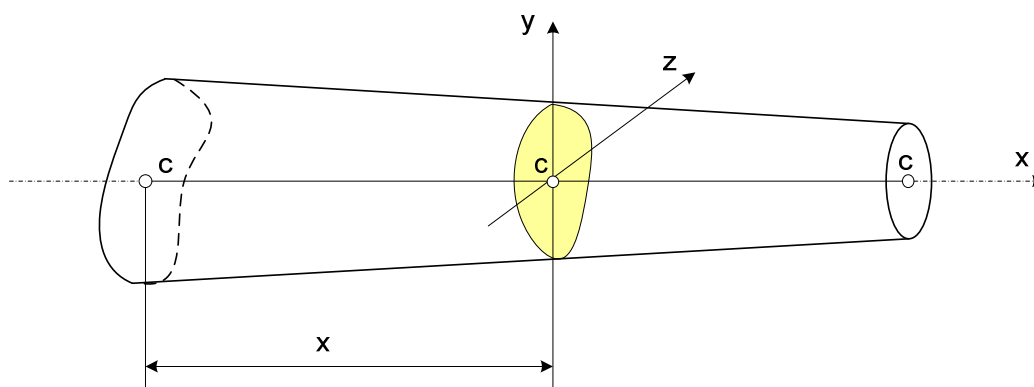


Рис. 3.1

Ось стержня может быть прямолинейной или криволинейной.

Поперечное сечение может быть постоянным по длине стержня, но может быть и переменным, как на рис.3.1.

3.2. Геометрические характеристики сечения

Рассмотрим произвольное поперечное сечение (рис.3.2). Оно характеризуется рядом параметров, которые используются в инженерных расчетах:

A - **площадь** поперечного сечения,

I_x, I_y - моменты инерции относительно осей x и y (**осевые моменты инерции**),

I_{xy} - **центробежный момент инерции**.

Из курса сопротивления материалов известно, что жесткость стержня при растяжении (сжатии) зависит от площади поперечного сечения A , а при изгибе – от величины осевого момента инерции I_x .

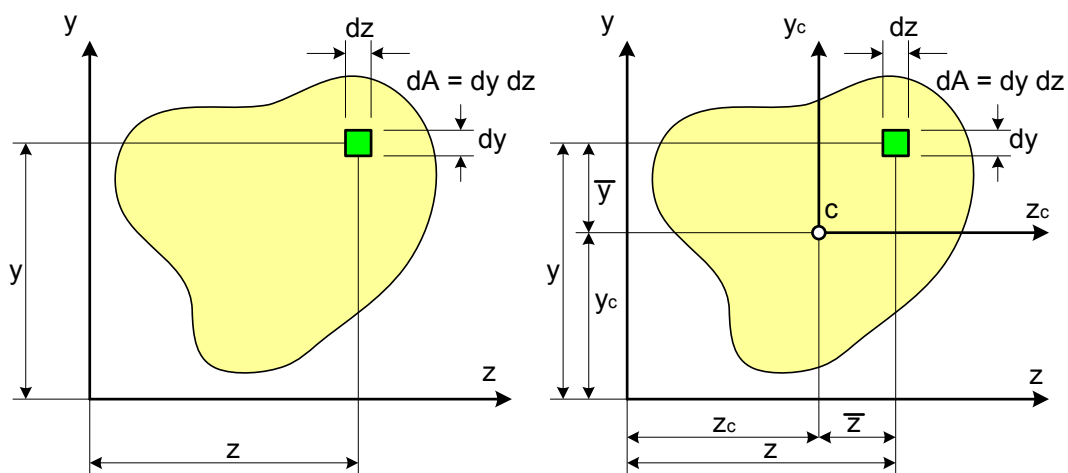


Рис. 3.2

По определению все перечисленные выше величины представляют собой интегралы, вычисленные по площади:

$$A = \int_A dA - \text{площадь}, \quad (3.1)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA - \text{момент инерции относительно оси } z, \quad (3.2)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA - \text{момент инерции относительно оси } y, \quad (3.3)$$

$$I_{zy} = \int_A yz dA - \text{центробежный момент инерции}. \quad (3.4)$$

В формулах (3.1) – (3.4) dA - представляет собой площадь бесконечно малой части сечения, а z и y – его координаты (рис. 3.2).

Перечисленные интегралы могут быть вычислены в любой системе координат, однако следует заметить, что для использования в расчетах необходимы моменты инерции относительно **центральных осей**, то есть осей, проходящих через центр тяжести сечения.

Из курса сопротивления материалов известно, что координаты точки, в которой находится центр тяжести сечения, следует определять по формулам:

$$z_c = S_y/A, \quad y_c = S_z/A, \quad (3.5)$$

где S_y и S_z - соответственно статические моменты относительно осей y и z , которые также как и моменты инерции, являются интегралами:

$$S_z = \int_A y dA - \text{статический момент относительно оси } x, \quad (3.6)$$

$$S_y = \int_A z dA - \text{статический момент относительно оси } y. \quad (3.7)$$

При переходе к системе центральных осей $y_c z_c$ координаты элементарной части площади dA изменятся (рис. 3.2) следующим образом:

$$\bar{y} = y - y_c, \quad \bar{z} = z - z_c, \quad (3.8)$$

и тогда вычисление интегралов в формулах (3.2) – (3.4) необходимо будет производить по формулам:

$$I_z = \int_A \bar{y}^2 dA; \quad (3.9)$$

$$I_y = \int_A \bar{z}^2 dA; \quad (3.10)$$

$$I_{yz} = \int_A \bar{y} \bar{z} dA. \quad (3.11)$$

Представим примерную схему алгоритма для вычисления основных геометрических характеристик сечения, имеющего произвольную форму.

Накроем поперечное сечение прямоугольной сеткой, имеющей ячейки очень малого размера, как это показано на рис. 3.3, и введем булевскую (логическую) матрицу $[c]_{n \times m}$, элементами которой будут являться нули, если ячейка находится вне контура сечения, и единицы, если внутри контура.

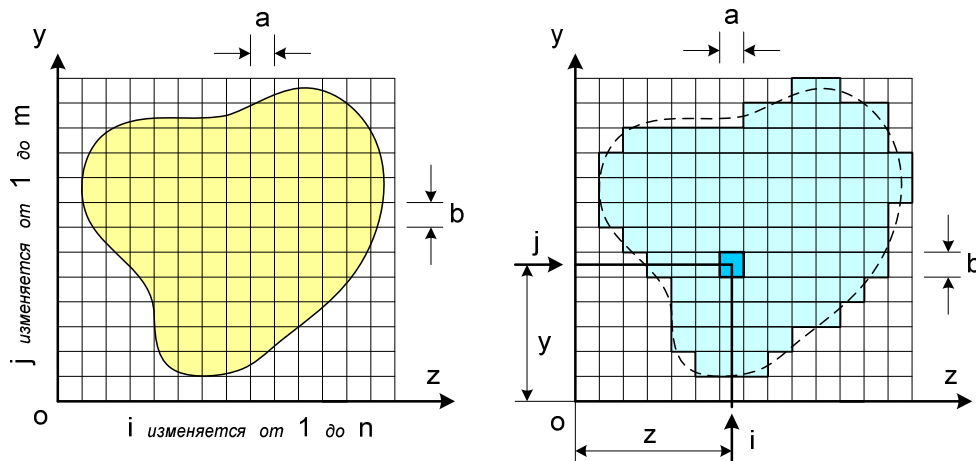


Рис. 3.2

В случае использования процедур графического ввода информации с монитора, в качестве ячеек такой сетки могут служить пиксели экрана.

$$[c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Входной информацией будут: m, n, a, b и матрица $[c]$, а выходной информацией - геометрические характеристики, вычисленные относительно центральных осей, и координаты центра тяжести. Тогда алгоритм будет иметь вид:

```

procedure Geom    (input:  $n, m, a, b, [c]$ ;
                   output:  $z_c, y_c, A, I_z, I_y, I_{zy}$ )
  ! вспомогательные переменные
  real  $S_z, S_y, z, y$ 
   $dA := a * b$ 
   $A := S_z := S_y := I_z := I_y := I_{zy} := 0$ 
  ! вычисляем площадь и статические
    моменты
  for  $i = 1 .. n$ 
    for  $j = 1 .. m$ 
      if  $c_{ij} = 1$  then
         $A := A + dA$ 
         $z := a * (i - 0.5)$ 
         $y := b * (j - 0.5)$ 
         $S_z := S_z + y * dA$ 
         $S_y := S_y + x * dA$ 
      end if
    end j
  end j

```

```

end i
! вычисляем положение центра тяжести
z_c := S_y / A
y_c := S_z / A
! вычисляем моменты инерции
for i = 1 .. n
  for j = 1 .. m
    if c_ij = 1 then
      z := a * (i - 0.5) - z_c
      y := b * (j - 0.5) - y_c
      I_z := I_z + y * y * dA
      I_y := I_y + z * z * dA
      I_zy := I_zy + z * y * dA
    end if
  end j
end i
end Geom

```

Вычисленные моменты инерции являются компонентами симметричного тензора Π ранга и могут быть представлены в виде матрицы. Чтобы не путать полученную матрицу с единичной, обозначим ее $[J]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} I_{zc} & -I_{zcyc} \\ -I_{yczc} & I_{yc} \end{bmatrix}, \text{ где } I_{zcyc} = I_{yczc}. \quad (3.12)$$

Предположим, что некоторый вектор $\{n\}$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_z \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

является собственным вектором матрицы $[J]$, то есть существует некоторое число λ , для которого справедливо равенство:

$$[J]\{n\} = \lambda \{n\}.$$

Умножив правую часть этого равенства на единичную матрицу, преобразуем его к виду:

$$([J] - [\Lambda])\{n\} = \{0\}, \quad (3.14)$$

где $[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - квадратная диагональная матрица.

Соотношение (3.14) представляет собой однородную систему двух уравнений

$$\begin{cases} (I_{zc} - \lambda)n_z - I_{zcyc}n_y = 0 \\ -I_{yczc}n_z + (I_{yc} - \lambda)n_y = 0 \end{cases}, \quad (3.15)$$

которая имеет ненулевое решение только при обращении в ноль определителя матрицы системы, то есть когда:

$$(I_{zc} - \lambda)(I_{yc} - \lambda)I_{zcyc}^2 = 0. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) представляет собой квадратное уравнение, которое при записи его в канонической форме имеет вид:

$$\lambda^2 - (I_{zc} + I_{yc})\lambda + (I_{zc}I_{yc} - I_{zcyc}^2) = 0. \quad (3.17)$$

Решая это уравнение, получим два корня, представляющие собой собственные числа матрицы (3.12):

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(I_{zc} + I_{yc}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{zc} - I_{yc})^2 + 4I_{zcyc}^2}, \quad (3.18)$$

которые в курсе сопротивления материалов называют главными центральными моментами инерции и обозначают

$$\lambda_1 = I_1 = I_{\max}, \quad \lambda_2 = I_2 = I_{\min}. \quad (3.19)$$

Поочередно подставим полученные значения главных моментов инерции в уравнения системы (3.15) и, решая ее, получим собственные векторы матрицы (3.12). Каждый из найденных собственных векторов определит положение одной из главных центральных осей поперечного сечения, то есть осей, относительно которых вычислены главные центральные моменты инерции I_{\max} и I_{\min} . В системе главных центральных осей центробежные моменты I_{zcyc} обращаются в ноль, и матрица (3.12) преобразуется к диагональному виду:

$$[J] = \begin{bmatrix} I_{\max} & 0 \\ 0 & I_{\min} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

4. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1. Виды конечных элементов

Геометрическая сторона задач расчета конструкций чрезвычайно разнообразна.

Инженерная конструкция может представлять собой:

- стержневую систему (ферму, балку или раму),
- двумерный объект (пластину, плиту или оболочку),
- объемный или трехмерный объект,
- являться комбинацией стержней, пластин, оболочек и т.д.

Для геометрического моделирования перечисленных видов инженерных конструкций разработано большое количество разнообразных конечных элементов. Их количество столь велико, что они с трудом поддаются классификации. Грубую классификацию можно осуществить с помощью четырех признаков:

- размерность пространства,
- количество узловых точек,
- количество степеней свободы (возможных перемещений) в узле,
- форма конечного элемента.

В англоязычной литературе широко используется следующее обозначение типа конечного элемента: nDm , где n – размерность пространства, в котором может быть размещен конечный элемент, m – количество узловых точек элемента. Например, обозначение $2D8$ говорит о том, что рассматривается плоский конечный элемент с числом узлов, равным восьми. Конечно, такое обозначение дает далеко не полную характеристику элемента, но, тем не менее, полезно.

Перечислим наиболее часто используемые разновидности конечных элементов в зависимости от описываемой области. Это стержневые, плоские и, наконец, объемные конечные элементы.

Семейство так называемых осесимметричных конечных элементов, используемых для расчета тел, имеющих осевую симметрию (таких как трубы, резервуары, орудийные стволы и т.п.), обычно относят к двумерным (плоским) элементам, поскольку при расчете таких конструкций обычно рассматривается их радиальное сечение.

4.2. Идеализация с помощью конечных элементов

При построении математической модели геометрия конструкции представляется набором конечных элементов очень простой формы. Изменение перемещений и напряжений внутри одного элемента моделируется также очень простыми функциями, линейными или квадратичными. При рассмотрении соединений конечных элементов действующие между ними напряжения представляются эквивалентными сосредоточенными силами (и иногда моментами), приложенными в точках соединения – узловых точках. Соответственно смещения этих точек – степени свободы используются для описания перемещений элемента. К узловым силам приводятся также внешние распределенные нагрузки, действующие на поверхности тела. Закрепление границ тела также сводится к закреплению узловых точек. Таким образом, расчетная модель становится дискретной.

Реальное поведение конструкции схематично показано на рис. 4.1 *a*, а ее конечно-элементная модель – на рис. 4.2 *b*. Идеализация конструкции должна выполняться таким способом, чтобы при уменьшении размеров элементов поведение модели стремилось к поведению реальной конструкции.

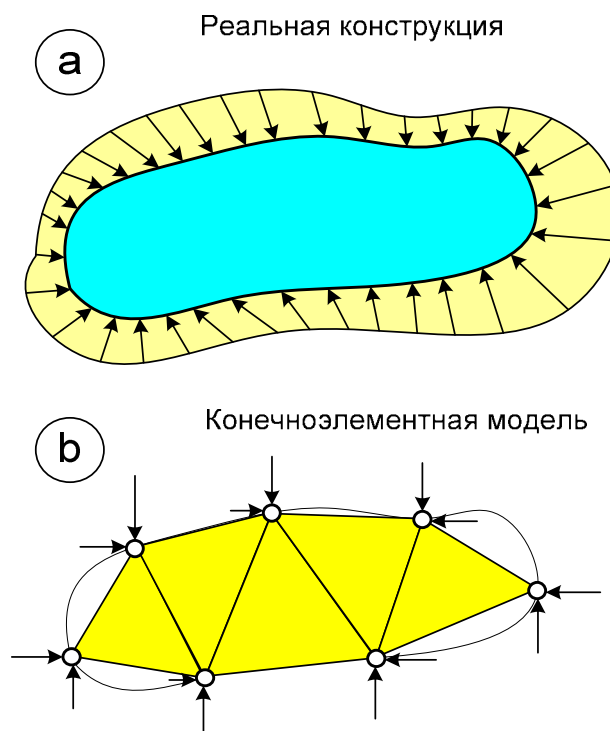


Рис. 4.1

Следует сразу заметить, что существует очень широко используемый подход, основанный на энергетических или вариационных принципах, при котором основополагающие концепции метода рассматриваются несколько иначе.

При замене реальной конструкции ее упрощенной моделью могут возникать ошибки. Посмотрим, какой характер они имеют.

При решении плоских или пространственных задач, поскольку уравнения равновесия и неразрывности деформаций выполняются лишь локально – в узлах, возможны нарушения непрерывности деформаций или поля напряжений на границах между элементами.

Например, на рис. 4.2 показано, что, если перемещения в пределах элемента изменяются по линейному закону, то при равенстве перемещений в узлах соблюдается непрерывность поля перемещений вдоль всей линии стыка. Но если для перемещений внутри элемента использовать квадратичную функцию, то при равенстве перемещений в узлах вдоль сторон элементов между ними могут возникать зазоры. Естественно, что величина этих зазоров уменьшается при уменьшении размеров элементов. Похожая картина возникает при рассмотрении напряжений действующих вдоль сторон элементов.

Таким образом, при расчете методом конечного элемента основные ошибки возникают в результате локальных нарушений непрерывности поля перемещений (нарушение неразрывности деформаций) и поля напряжений (уравнений равновесия).

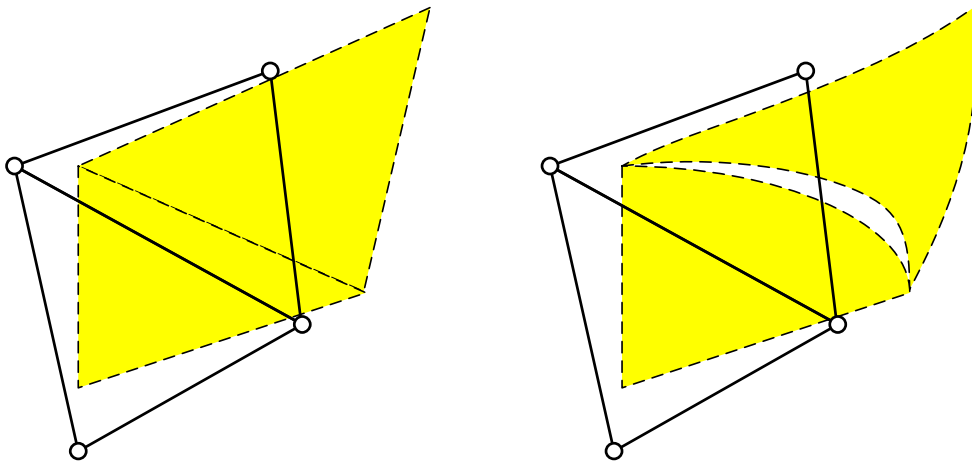


Рис. 4.2

Такая проблема не возникает при рассмотрении стержневых конструкций, поскольку элементы в них соприкасаются и взаимодействуют только в узловых точках. Поэтому, если для каждого из узлов выполнены уравнения равновесия и в узловых точках обеспечена неразрывность деформаций стержней, то такое решение можно считать точным.

Другим источником возникновения ошибок является накопление погрешности при решении системы уравнений, которое для систем алгебраических уравнений большой размерности может быть весьма значительным. Снижение этих ошибок, имеющих чисто вычислительный характер, является самостоятельным предметом для исследований.

4.3. Программы общего назначения

Основные соотношения метода конечных элементов и его процедуры, такие как построение сетки конечных элементов, учет условий на границах области или решение системы алгебраических уравнений мало зависят от физического содержания решаемой задачи. Это привело к повсеместному созданию программных средств, объединяющих решение разнотипных физических задач в рамках одного пакета программ. Например, такая программа, как ANSYS, возникшая как программа для определения напряженно-деформированного состояния конструкций, в настоящее время представляет собой огромный комплекс, позволяющий моделировать самые разнообразные физические процессы в сплошных средах и учитывать взаимодействие этих процессов.

Представленные на рис. 4.3 составные части присутствуют практически во всех программах общего назначения. Опишем их содержание.

На первом этапе осуществляется ввод информации о геометрии конструкции, данных о том, каким образом закреплены ее границы, о действующих на нее внешних силах. Указываются материалы, из которых конструкция изготовлена. Осуществляется подробный контроль за непротиворечивостью введенной информации и ее графическим отображением.

На втором этапе выполняется разбивка сетки конечных элементов, привязка внешних воздействий к узлам сетки. Большое значение имеет часть, названная библиотекой конечных элементов. Здесь хранится информация о различных типах конечных элементов. На этапе выполнения осуществляется выборка из библиотеки соответствующих процедур и построение с их помощью алгебраических соотношений для каждого конечного элемента.

В библиотеке физических моделей в закодированной форме хранятся физические соотношения, используемые при расчете конструкций из упругих материалов (закон Гука), модели, позволяющие учитывать пластические деформации и

деформации ползучести. Могут храниться уравнения теплопередачи или гидродинамики и т.д.



Рис. 4.3

Обе библиотеки должны иметь возможность непрерывно пополняться новыми моделями конечных элементов и физических зависимостей.

На третьем этапе осуществляется сборка конечных элементов в единое целое. Для статических задач это означает формирование, и затем решение системы линейных алгебраических уравнений с известной правой частью. В зависимости от структуры и размера построенной математической модели решение системы уравнений может осуществляться различными методами. Для небольших задач более эффективны прямые методы, представляющие собой модификации метода Гаусса. Для задач большой размерности более эффективными становятся итерационные методы последовательных приближений. Решение задач колебания и устойчивости может

потребовать решения задачи определения собственных значений и собственных векторов. Процедуры для формирования и решения систем алгебраических уравнений хранятся в библиотеке процедур решения систем уравнений.

На последнем этапе исследователю в текстовом или графическом формате выдается решение, которое помогает ему правильно определить пропорции конструкции и разрешить другие вопросы проектирования. При решении задач расчета конструкций такой информацией являются данные о перемещениях точек конструкции и о действующих внутри нее напряжениях.

5. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

5.1. Принятая система координат. Узловые силы и перемещения

В дальнейшем будем использовать декартовую систему координат, оси которой на рис. 5.1 обозначены x, y, z . Эти оси остаются неподвижными в процессе деформирования конструкции. Рассмотрим бесконечно малый элемент объема с центром в точке g . Действующие на него силы обозначим F_{xg}, F_{yg}, F_{zg} . В процессе деформирования конструкции точка g сместится в точку g' .

Компоненты смещения обозначим: $u_g = x'_g - x_g$, $v_g = y'_g - y_g$, $w_g = z'_g - z_g$. Положительные направления перемещений и сил соответствуют направлению координатных осей.

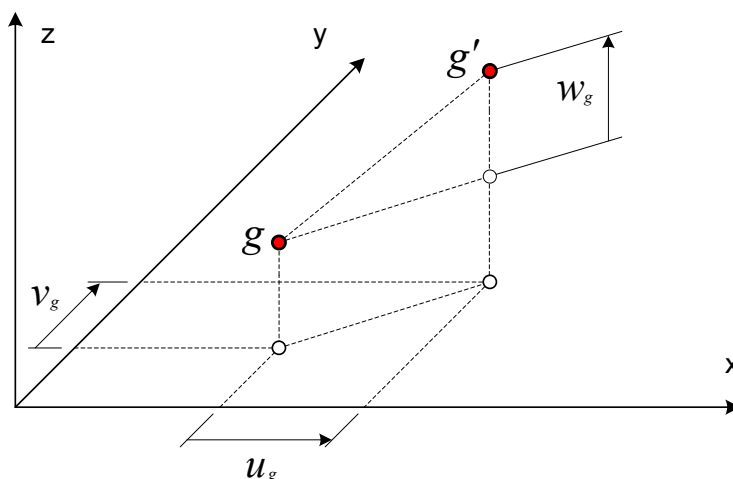


Рис. 5.1

Как говорилось ранее, при решении задачи расчета конструкции методом конечных элементов обычно находятся перемещения точек тела, которые называются узловыми. Все внешние силы также заменяются сосредоточенными силами, приложенными в узлах. Таким образом, описание поведения отдельного конечного элемента осуществляется с помощью компонент сил и смещений, заданных в узловых точках элемента.

Рассмотрим конечный элемент, у которого две узловые точки: i и j (рис. 5.2). Пусть в узле i приложены три **узловые силы**: F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} . Направлению этих сил соответствуют **узловые смещения** u_i, v_i, w_i , то есть в узле i - три **степени свободы**.

В некоторых задачах, например задачах расчета рам или балок, необходимо учитывать нагрузки в виде сосредоточенных моментов и находить углы, на которые поворачиваются при деформировании поперечные сечения. Приложим в узле j три сосредоточенных момента M_{xj}, M_{yj}, M_{zj} . Угловые смещения, соответствующие приложенным моментам, обозначим $\theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}$. Таким образом узел j также будет иметь три степени свободы.

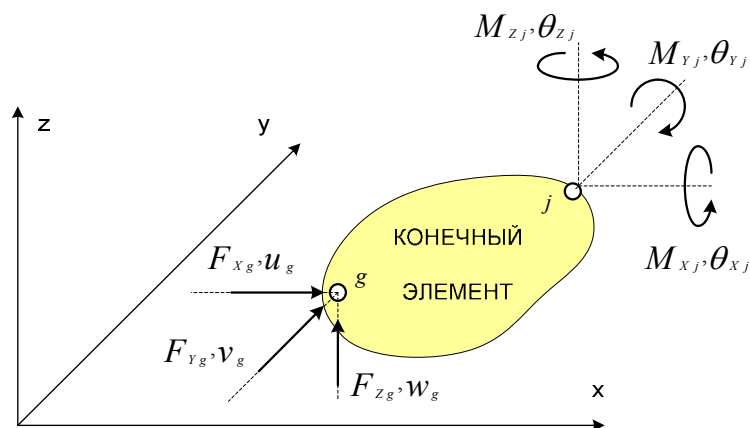


Рис. 5.2

Общее **число степеней свободы** элемента равно сумме степеней свободы всех узлов, то есть для данного элемента оно равно шести.

Совокупность узловых сил и узловых перемещений изображенного на рис. 5.2 конечного элемента представим соответствующими векторами: **вектором узловых сил** $\{F\}$ и **вектором узловых перемещений** $\{\Delta\}$:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}. \quad (5.1-5.2)$$

В дальнейшем для экономии места векторы-столбцы часто будем записывать в транспонированной форме, то есть в виде матрицы-строки. Например,

$$\{F\}^T = [F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}].$$

Отдельную i -ю компоненту вектора узловых перемещений $\{\Delta\}$ будем называть i -й степенью свободы.

В методе конечных элементов следует различать глобальные и локальные системы координат. Глобальные оси (оси xu на рис. 5.3) задаются для всей конструкции. **Локальные системы координат** могут относиться к отдельному элементу (оси $x'u'$ на рис. 5.3) или даже к отдельному узлу (оси $x''y''$ на рис. 5.3). Локальные координаты используют обычно при формулировке уравнений, относящихся к одному элементу. Получив эти уравнения, можно легко преобразовать силы и перемещения к глобальной системе координат. **Глобальная система координат** нужна для получения уравнений, описывающих поведение всей конструкции.

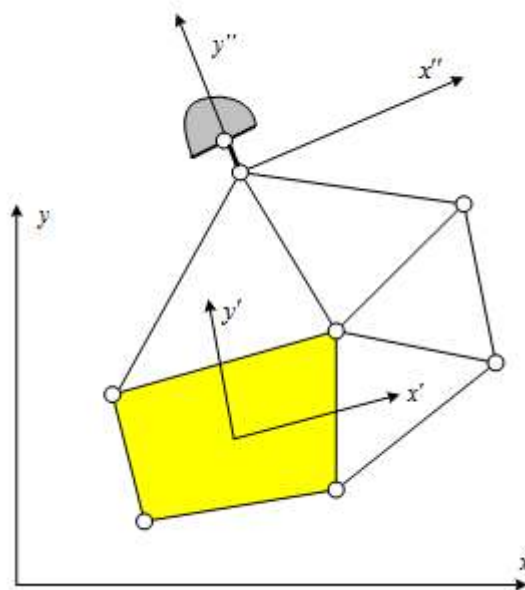


Рис. 5.3

Порядок нумерации узлов в конечном элементе традиционно направлен против часовой стрелки (рис. 5.4).

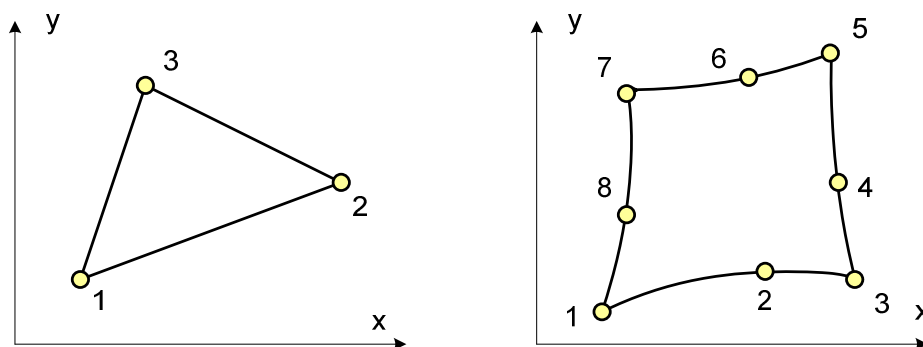


Рис. 5.4

5.2. Соотношения между силами и перемещениями для элемента

Соотношения между узловыми силами и узловыми перемещениями записываются в одном из трех основных видов: (1) **уравнения жесткости**, (2) **уравнения податливости**, (3) **смешанные соотношения** между силами и перемещениями.

Уравнения жесткости для элемента являются линейными алгебраическими уравнениями, которые записываются в виде:

$$\{F\} = [k] \{\Delta\}, \quad (5.3)$$

где $[k]$ - квадратная **матрица жесткости** элемента, а $\{F\}$ и $\{\Delta\}$ соответственно векторы сил и смещений для элемента.

Отдельный элемент k_{ij} матрицы жесткости, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, назовем **коэффициентом жесткости** элемента. Легко заметить, что если перемещение Δ_j положить равным единице, а все остальные перемещения приравнять к нулю, то значение силы F_i станет равным k_{ij} .

На рис. 5.5 изображен пример, когда перемещение, отвечающее 4-й степени свободы равно единице, то есть $\Delta_4 = 1$, а перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равны нулю, так как узлы по этим направлениям закреплены. В этом случае столбец узловых сил равен столбцу коэффициентов матрицы жесткости, то есть $F_i = k_{i4}$ ($i=1, \dots, 6$).

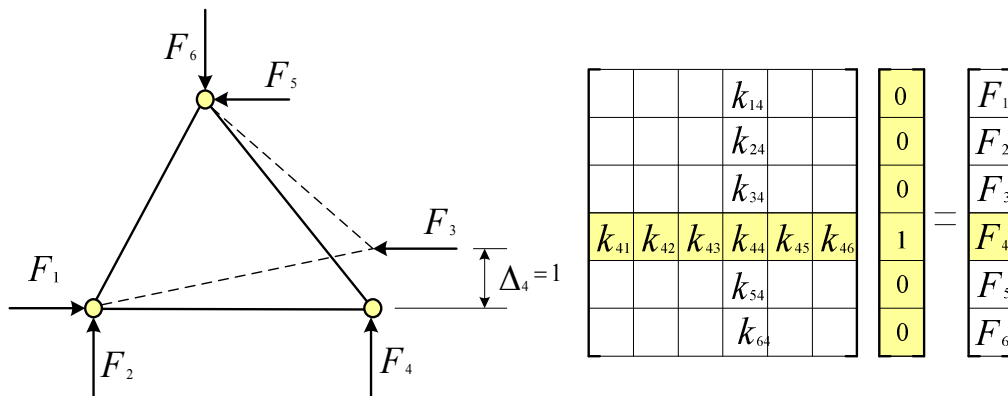


Рис. 5.5

При этом $F_4 = k_{44}$ можно рассматривать как силу, обеспечивающую единичное смещение Δ_4 по оси x первого узла, а остальные компоненты вектора $\{F\}$ - как реакции, возникающие в опорных связях при таком смещении. По этой причине

четвертый столбец матрицы жесткости (как и любой другой) будет представлять собой систему уравновешенных сил.

Уравнения податливости для закрепленного элемента выражают узловые перемещения через узловые силы. Но соотношения податливости можно записать только для закрепленных неподвижно элементов, иначе при приложении сил будут возникать бесконечные перемещения тела как жесткого целого. В этом легко убедиться, попытавшись просто обратить матрицу жесткости. Отсюда следует, что для элемента можно записать столько вариантов уравнений податливости, сколько существует вариантов его неподвижного закрепления. Обычно рассматривают лишь статически определимые варианты закрепления. Если обозначить незакрепленные степени свободы и соответствующие им узловые силы индексом f , то можно записать общий вид уравнений податливости:

$$\{\Delta\}_f = [f] \{F\}_f, \quad (5.4)$$

где $[f]$ - один из возможных вариантов **матрицы податливости**, $\{\Delta\}_f$ - вектор незакрепленных степеней свободы, $\{F\}_f$ - вектор соответствующих узловых сил.

Рассмотрев общий вид соотношений податливости для стержневого двухузлового элемента (рис. 5.6):

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.5)$$

можно заметить, что соотношения податливости возможны в двух вариантах. При закреплении левого узла и исключении из системы компонентов, содержащих индекс равный 1, мы получаем одно единственное уравнение податливости:

$$u_2 = \frac{F_2 L}{EA}.$$

При закреплении правого узла и исключении из уравнений относящихся ко второй степени свободы компонентов, мы получим:

$$u_1 = \frac{F_1 L}{EA}.$$

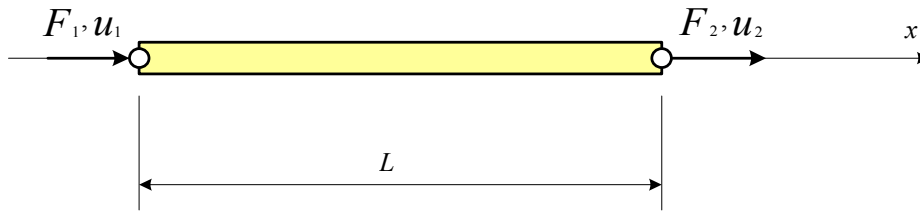


Рис.5.6

Для балочного элемента (рис. 5.7а), матрица жесткости которого имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.6)$$

можно подобрать два возможных вида закрепления: свободное опирание (рис.5.7b), при котором соотношения податливости получаются в виде:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.7)$$

и консольное закрепление (рис.5.7с), при котором они выглядят иначе:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}. \quad (5.8)$$

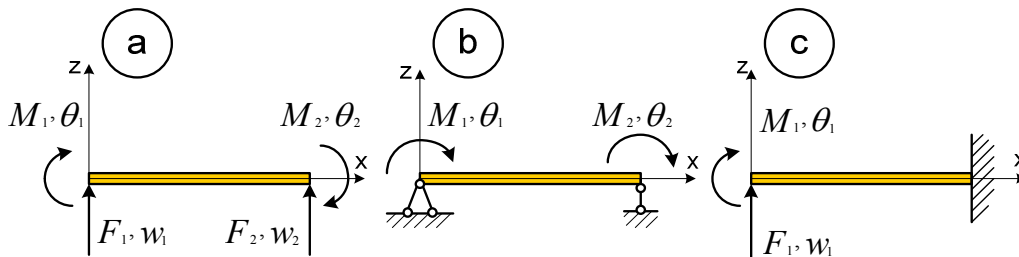


Рис. 5.7

Смешанные соотношения между силами и перемещениями устанавливают соотношения между векторами, имеющими в качестве компонент как силы, так и

перемещения. Если степени свободы разбиты на две группы, обозначенные соответственно индексами f и s , то общий вид смешанных соотношений можно записать формулой:

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_f \\ \{\Delta\}_f \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} \{F\}_s \\ \{\Delta\}_s \end{Bmatrix}. \quad (5.9)$$

В частности, такой вид соотношений очень удобно использовать для установления связи между силами и перемещениями, возникающими на одном конце стержня с силами и перемещениями, действующими на другом конце. Например, для балки, изображенной на рис. 5.7а, можно записать:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

В этом случае матрица $[\Omega]$ называется **передаточной матрицей**.

5.3. Работа и энергия

Работа W силы равна произведению величины силы на величину перемещения точки приложения в направлении действия силы. Если сила увеличивается постепенно от нуля до своего конечного значения, то, проинтегрировав совершенную работу, получим для нее следующее выражение:

$$W = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T \{F\} = \frac{1}{2} \{F\}^T \{\Delta\}. \quad (5.11)$$

На рис.5.8 видно, что отдельно взятая сила F_i на соответствующем ей перемещении Δ_i совершает работу, равную заштрихованной области.

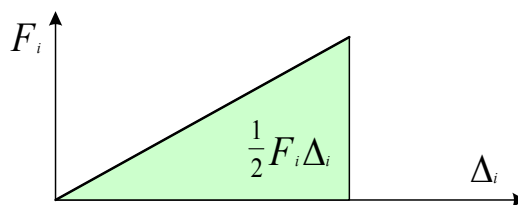


Рис. 5.8

В процессе деформирования совершенная работа преобразуется в потенциальную энергию деформаций U .

Соотношение (5.11) можно преобразовать таким образом, чтобы оно содержало только перемещения или только силы, используя для этого уравнения жесткости (5.3) или уравнения податливости (5.4).

Можно показать, что в одном случае мы получим энергию деформации элемента:

$$W = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [k] \{\Delta\} = U, \quad (5.12)$$

а в другом – дополнительную энергию деформаций:

$$W = \frac{1}{2} \{F\}_f^T [f] \{F\}_f = U^*, \quad (5.13)$$

которые равны, если соблюдается закон Гука, то есть если материал деформируется линейно упруго. При этом величина U является квадратичной функцией параметра $\{\Delta\}$, а U^* , в свою очередь, квадратичной функцией параметра $\{F\}_f$.

Полезно отметить, что всем возможным формам соотношений податливости, записанных для одного и того же элемента, соответствует одна и та же дополнительная энергия деформаций. В этом можно убедиться, вычислив по формуле (5.13) величину дополнительной энергии для балок U^* , изображенных на рис. 5.7b и рис. 5.7c. Соотношения податливости для указанных балок выражены формулами (5.7) и (5.8).

5.4. Свойства взаимности

Коэффициенты податливости и жесткости линейно упругого тела обладают свойством взаимности, то есть $f_{ij} = f_{ji}$ и $k_{ij} = k_{ji}$.

Равенство $f_{ij} = f_{ji}$ означает, что смещение по направлению 2-й силы от действия силы $F_1 = 1$ (рис. 5.9) равняется смещению по направлению 1-й силы от действия силы $F_2 = 1$. Утверждение $f_{ij} = f_{ji}$ известно как теорема взаимности Максвелла. Она доказывается на основе утверждения, что для линейно упругого тела производимая работа не зависит от порядка приложения сил. Отсюда следует, что матрица податливости $[f]$ симметрична.

Матрица жесткости в некотором смысле является обратной к матрице податливости. Поскольку матрица, обратная к симметричной, также симметрична, то

симметричной будет и матрица жесткости $[k]$. Отсюда следует равенство коэффициентов $k_{ij} = k_{ji}$.

Симметрия матриц жесткости и податливости широко используется при численной реализации метода.

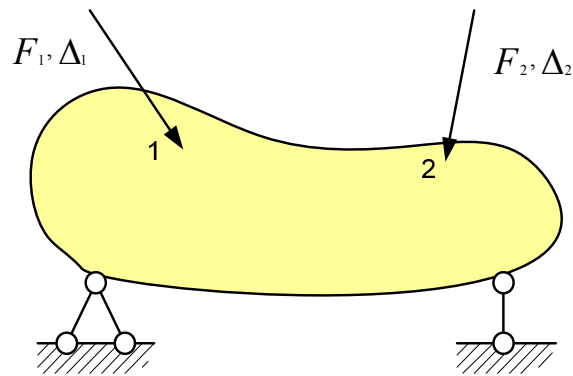


Рис. 5.9

5.5. Преобразование соотношений жесткости и податливости

Имея для элемента один тип соотношений между силами и перемещениями, можно получить другие типы соотношений с помощью простых операций. Покажем это.

Преобразование соотношений жесткости в соотношения податливости

Уже упоминалось, что при построении соотношений податливости элемент должен быть закреплен так, чтобы было невозможно его движение как жесткого целого, и чтобы система была статически определима. Рассмотрим нагруженный узловыми силами треугольный конечный элемент (рис. 5.10 а) и покажем один из возможных способов его закрепления (рис. 5.10 б).

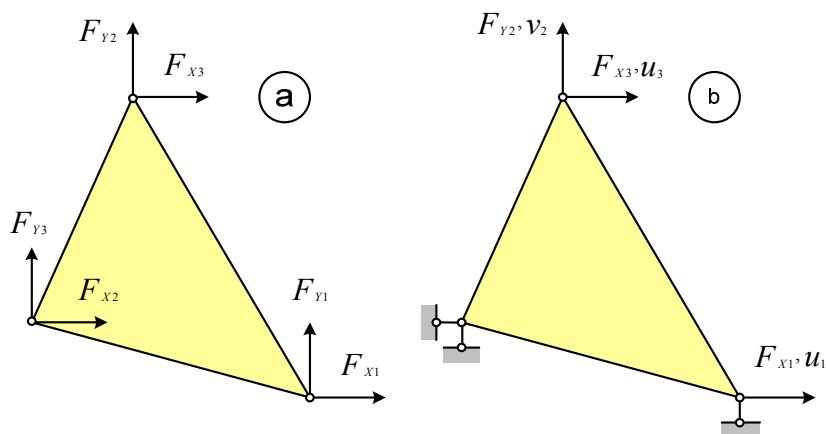


Рис. 5.10

Величины, соответствующие закрепленным степеням свободы, обозначим индексом s , величины, соответствующие остальным степеням свободы, - индексом f . Таким образом, соотношения жесткости оказываются разбитыми на клетки:

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_f \\ \{F\}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{ff} & [k]_{fs} \\ [k]_{sf} & [k]_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\}_f \\ \{\Delta\}_s \end{Bmatrix}, \quad (5.14)$$

где $\{F\}_f = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \end{Bmatrix}$, $\{F\}_s = \begin{Bmatrix} F_{x_3} \\ F_{y_1} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix}$, $\{\Delta\}_f^T = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$, $\{\Delta\}_s^T = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix}$,

а каждая из подматриц матрицы жесткости для данного случая является матрицей размера 3×3 .

Так как из условий закрепления $\{\Delta\}_s = 0$, то:

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_f \\ \{F\}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{ff} \\ [k]_{sf} \end{bmatrix} \{\Delta\}_f. \quad (5.15)$$

Верхняя часть этой системы уравнений представляет собой систему, связывающую внешние силы $\{F\}_f$ с соответствующими узловыми смещениями

$$\{F\}_f = [k]_{ff} \{\Delta\}_f, \quad (5.16)$$

обращая которую получим

$$\{\Delta\}_f = [k]_{ff}^{-1} \{F\}_f = [f] \{F\}_f. \quad (5.17)$$

Преобразование соотношений податливости в соотношения жесткости

Для обратного преобразования необходимо сначала обратить матрицу податливости:

$$\{F\}_f = [f]^{-1} \{\Delta\}_f = [k]_{ff} \{\Delta\}_f, \quad (5.18)$$

после чего соотношения, связывающие внешние силы $\{F\}_f$ и реакции опор $\{F\}_s$, представляют собой уравнения равновесия, и могут быть записаны в виде:

$$\{F\}_s = [R] \{F\}_f, \quad (5.19)$$

После формирования уравнений равновесия и определения реакций на опорах вид матрицы жесткости может быть восстановлен полностью:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_{ff} & [k]_{fs} \\ [k]_{sf} & [k]_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f]^{-1} & [f]^{-1}[R]^T \\ [R][f]^{-1} & [R][f]^{-1}[R]^T \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Соотношения смешанного вида

Не останавливаясь подробно на порядке вывода смешанных соотношений, приведем в качестве примера полезные соотношения, позволяющие силы и перемещения в свободных узлах связать с перемещениями и силами (реакциями) в закрепленных степенях свободы. Эти соотношения имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_f \\ \{\Delta\}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]^{-1} & [0] \\ \{f\}[R]^{-1} & -[R]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F\}_s \\ \{\Delta\}_s \end{Bmatrix}. \quad (5.21)$$

5.6. Преобразование степеней свободы

Пусть для некоторого вектора \vec{a} (рис. 5.11) компоненты, заданные в одной системе координат матрицей-столбцом $\{a\}$ надо вычислить в другой системе координат, представив столбцом $\{a'\}$. Указанное преобразование можно выполнить с помощью операции:

$$\{a'\} = [\Gamma] \{a\}. \quad (5.22)$$

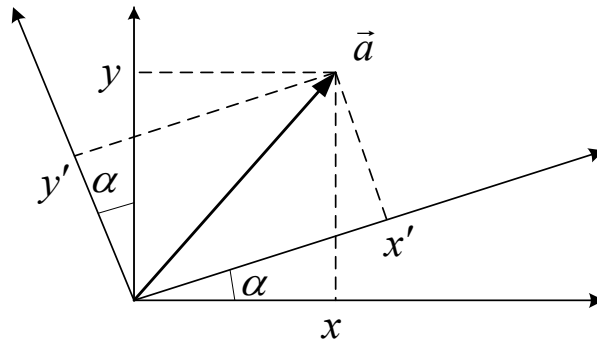


Рис. 5.11

Так, например, для преобразования компонент вектора из одной плоской системы декартовых координат в другую, полученную с помощью поворота исходной системы координат, матрица $[\Gamma]$ должна быть сформирована следующим образом:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Преобразование координат в случае ортогональных осей обладает свойством $[\Gamma][\Gamma]^T = [I]$. По определению обратной матрицы $[\Gamma][\Gamma]^{-1} = [I]$. Поэтому должно иметь место равенство:

$$[\Gamma]^T = [\Gamma]^{-1}. \quad (5.24)$$

Матрицы, для которых обратная матрица равна транспонированной, называются ортогональными.

Предположим, что уравнения жесткости элемента:

$$[k'] \{\Delta'\} = \{F'\}, \quad (5.25)$$

сформированные в локальной системе координат, надо преобразовать к глобальной системе координат.

Для векторов, относящихся к произвольному узлу p элемента, в соответствии с (5.22) можно записать:

$$\{\Delta'\}_p = [\Gamma]_p \{\Delta\}_p, \quad \{F'\}_p = [\Gamma]_p \{F\}_p. \quad (5.26)$$

Если весь элемент содержит m узлов, то матрица преобразования для всего элемента будет иметь блочно-диагональный вид:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [\Gamma]_1 & & & \\ & [\Gamma]_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [\Gamma]_m \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Тогда степени свободы и узловые силы всего конечного элемента преобразуются по правилу:

$$\{\Delta'\} = [\Gamma] \{\Delta\}, \quad \{F'\} = [\Gamma] \{F\}. \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в уравнения жесткости элемента (5.25), получим равенство:

$$[k'] [\Gamma] \{\Delta\} = [\Gamma] \{F\}. \quad (5.29)$$

После умножения на $[\Gamma]^T = [\Gamma]^{-1}$ левой и правой частей (5.29) получим:

$$[\Gamma]^T [k'] [\Gamma] \{\Delta\} = \{F\}. \quad (5.30)$$

То есть матрица жесткости при переходе в другую систему координат будет преобразовываться по закону:

$$[k] = [\Gamma]^T [k'] [\Gamma]. \quad (5.31)$$

Поскольку при использовании преобразования (5.31) нет необходимости обращать матрицу $[\Gamma]$, а надо ее только транспонировать, то она не обязательно

должна быть квадратной. Следовательно, возможен переход из пространства n измерений в пространство m измерений. Например, матрица жесткости стержневого элемента (5.5), сформированная для одномерного случая, может быть преобразована в плоскую или пространственную систему координат.

5.7. Выделение мод движения тела как твердого целого

В ряде случаев геометрия конструкции имеет достаточно сложный характер, что делает затруднительным выявление возможных форм ее движения как жесткого целого. Моды движения конструкции как жесткого целого могут появиться в результате неправильного задания условий ее закрепления, что является распространенной ошибкой, совершаемой на этапе подготовки исходной информации.

Число мод (возможных способов) движения тела как жесткого целого можно определить на основе анализа матрицы жесткости. Сначала необходимо преобразовать матрицу жесткости к диагональному виду (к главным направлениям). Для этого следует определить ее собственные числа и собственные векторы. По определению вектор $\{d\}$, для которого становится возможным равенство

$$[k]\{d\} = \lambda \{d\}, \quad (5.32)$$

называется собственным вектором матрицы, а соответствующее число λ - ее собственным числом. Равенство (5.32) эквивалентно однородной системе уравнений

$$[[k] - \lambda [I]]\{d\} = \{0\}, \quad (5.33)$$

которая, как известно, имеет ненулевое решение лишь при условии, что ее определитель равен нулю. Получаем характеристическое уравнение для матрицы $[k]$:

$$\det [[k] - \lambda [I]] = 0, \quad (5.34)$$

которое представляет собой алгебраическое уравнение n -й степени. Корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы $[k]$. Каждому **собственному значению** λ_1 соответствует ненулевой вектор $\{d\}_i$, удовлетворяющий равенству $[k]\{d\} = \lambda \{d\}$, называемый **собственным вектором**.

После определения собственных чисел и собственных векторов матрицы $[k]$ становится возможным с помощью преобразования системы координат привести ее к так называемому «модальному» виду, при котором она становится диагональной. Диагональные компоненты модальной матрицы $[k_{\text{mod}}]$ будут равны найденным собственным числам. Очевидно, что число независимых уравнений в $[k]$ определяется

ненулевыми компонентами в модальной матрице жесткости $[k_{\text{mod}}]$. Число нулевых диагональных элементов даст число возможных движений тела как жесткого целого. Так как диагональные элементы модальной матрицы являются собственными числами, то поиск числа мод движений тела как жесткого целого сводится к нахождению нулевых корней характеристического уравнения (5.34).

6. МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

6.1. Основные переменные теории упругости

Рассмотрим 3-х мерное тело, нагруженное внешними силами и помещенное в систему координат xuz (рис. 6.1). Под действием внешних сил тело деформируется. При деформировании произвольная точка g смещается по координатным осям. Компоненты смещения произвольной точки тела в теории упругости обозначают $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Положительные смещения направлены в положительном направлении координатных осей.

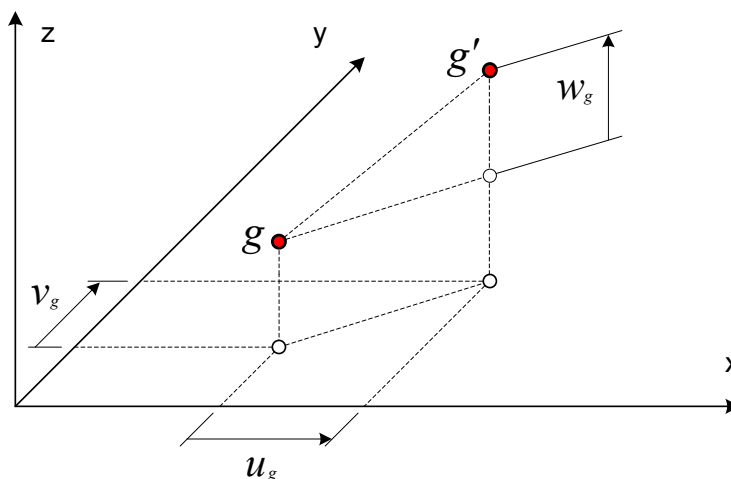


Рис. 6.1

Элементарный бесконечно малый объем тела $dV = dxdydz$ в процессе деформирования всей конструкции изменяет свои линейные размеры и изменяет форму.

Для упрощения рассмотрим процесс изменения размеров и формы на двумерной проекции, исключив третью координату.

Изменение размеров элементарного объема выражается в том, что длины ребер dx, dy, dz изменяются соответственно на величины $\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$, которые называются абсолютными линейными деформациями и положительны при увеличении размеров. В уравнениях удобнее использовать относительные линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, которые получаются делением соответствующей абсолютной деформации на первоначальный размер (рис. 6.2):

$$\varepsilon_x = \Delta dx / dx, \quad \varepsilon_y = \Delta dy / dy, \quad \varepsilon_z = \Delta dz / dz. \quad (6.1)$$

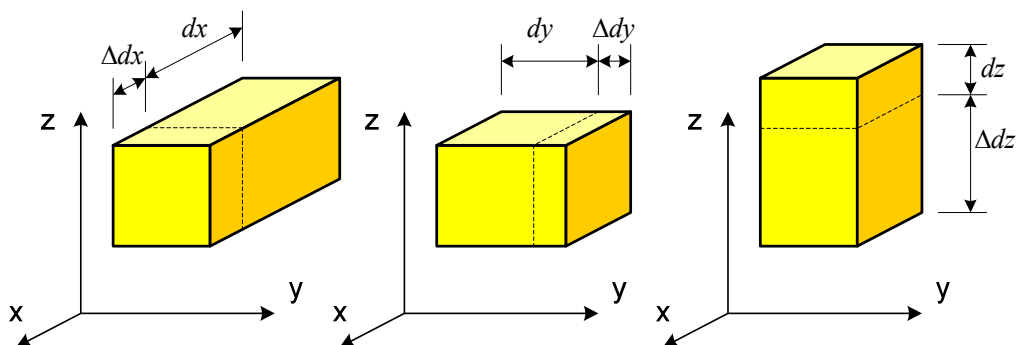


Рис. 6.2

Изменение формы элементарного объема $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ сводится к тому, что его ребра скашиваются, не приводя при этом к изменению объема (рис. 6.3). Изменение формы описывается тремя переменными γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , которые показывают, насколько при деформировании изменяются прямые углы между гранями объема. Они называются угловыми деформациями или сдвигами.

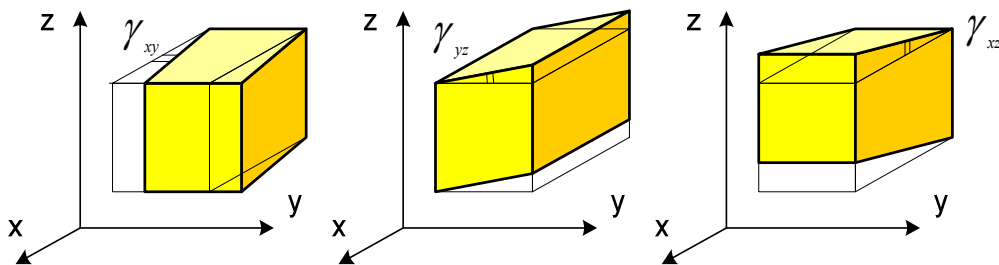


Рис. 6.3

Деформации элементарного объема полностью описываются физической величиной, которая называется тензором деформаций и в декартовой системе координат обычно задается квадратной матрицей (6.2), компонентами которой служат перечисленные выше линейные и сдвиговые деформации. Матрица тензора деформаций является симметричной, поскольку $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Вследствие деформаций тела в материале конструкции возникают внутренние, распределенные по объему силы, которые называются напряжениями, и фактически представляют собой давление, которое элементарный объем $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ испытывает со стороны остального материала.

Рассмотрим напряжения, действующие на элементарный объем (рис. 6.4). Полные напряжения p_x, p_y, p_z , действующие на грани объема dV можно разбить на компоненты по координатным осям, обозначив символом σ напряжения, перпендикулярные к граням (нормальные напряжения), и символом τ - напряжения, лежащие в плоскости грани (касательные напряжения). Первый индекс у всех напряжений показывает, вдоль какой оси направлена нормаль к той площадке, в которой действует напряжение. Вторым индексом у касательных напряжений показывает направление самого вектора.

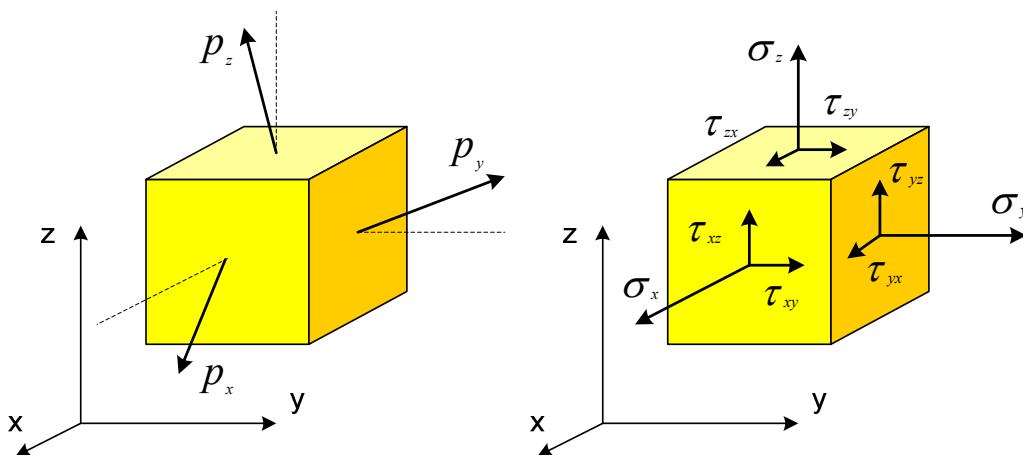


Рис. 6.4

Напряженное состояние в точке тела полностью описывается физической величиной, которая называется тензором напряжений. Тензор напряжений в декартовой системе координат обычно задается квадратной матрицей (6.3), компонентами которой служат перечисленные выше нормальные и касательные напряжения. Матрица тензора напряжений является симметричной, поскольку в соответствии с законом парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Таким образом видно, что теория упругости оперирует с 15 функциями, каждая из которых, в общем случае, зависит от трех координат.

Смещения	Деформации		Напряжения	
	линейные	угловые	нормальные	касательные
u, v, w	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

6.2. Основные соотношения теории упругости

Как и любая наука, составляющая МДГТ, теория упругости располагает тремя группами уравнений: геометрическими, физическими (уравнения состояния) и статическими (уравнения равновесия) соотношениями.

Полная система уравнений теории упругости содержит, в частности, геометрические соотношения, позволяющие по известным функциям смещений $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ определить компоненты тензора деформаций, и физические соотношения, позволяющие по известным компонентам тензора деформаций определить компоненты тензора напряжений.

Шесть геометрических соотношений, связывающих смещения с деформациями, известны как соотношения Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Физические соотношения, связывающие деформации и напряжения, известны как обобщенный закон Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), & \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x), & \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y), & \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}. \end{cases} \quad (6.5)$$

В формулах 6.5 E - продольный модуль упругости материала (модуль Юнга), а ν - коэффициент Пуассона.

6.3. Матричная запись соотношений Коши и закона Гука

При матричной формулировке уравнений теории упругости принято информацию о смещениях точек тела, а также о деформированном и напряженном состоянии, учитывая симметрию соответствующих тензоров, представлять векторами:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (6.6-6.8)$$

В этом случае, введя матричный дифференциальный оператор $[L]$, соотношения Коши можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}, \quad (6.9)$$

где

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Закон Гука нетрудно записать как в прямой, так и в обратной форме:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\}, \quad (6.11-6.12)$$

где матрица упругих постоянных $[D]^{-1}$, как это видно из соотношений (6.5), имеет следующие постоянные компоненты:

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

где G - модуль упругости при сдвиге (модуль сдвига), который равен:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.14)$$

Путем обращения приведенной выше матрицы, получается матрица перехода от деформаций к напряжениям:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

где $\lambda = \nu/(1-\nu)$, $\mu = (1-2\nu)/2(1-\nu)$.

7. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

7.1. Дискретизация задачи. Минимум потенциальной энергии системы

В реальной конструкции число степеней свободы ее внутренних точек бесконечно, и поэтому замкнутое решение задачи зачастую становится невозможным. При численной постановке задачи приближенное решение строится с использованием конечного числа степеней свободы.

Как указывалось выше, в методе конечных элементов среда разделяется на серию элементов, которые взаимодействуют в конечном числе узловых точек. Этот процесс называется дискретизацией задачи.

В задачах анализа конструкций окончательные уравнения МКЭ могут быть получены минимизацией общей потенциальной энергии системы.

Потенциальная энергия конструкции Π является суммой энергии деформации U и потенциала внешних сил V , то есть:

$$\Pi = U + V. \quad (7.1)$$

Сформулируем принцип минимума потенциальной энергии, как это делается в строительной механике:

Среди всех допустимых перемещений те, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, обеспечивают стационарное значение потенциальной энергии.

Чтобы считаться допустимыми, перемещения

- должны быть непрерывными,
- должны удовлетворять условиям закрепления.

Так, на рис. 7.1 приведены примеры допустимых и недопустимых перемещений.

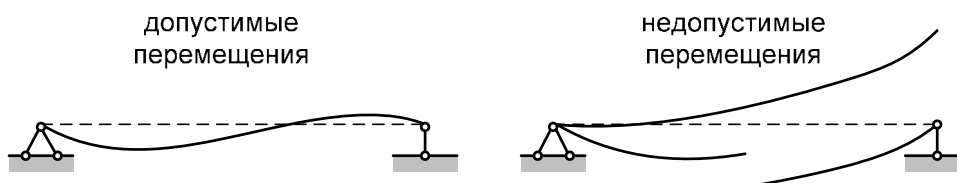


Рис. 7.1

Пользуясь матричными обозначениями, выразим энергию деформаций:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (7.2)$$

где $\{\sigma\}$ - вектор, содержащий компоненты напряжений или усилий, $\{\varepsilon\}$ - вектор, содержащий компоненты деформаций.

Потенциал нагрузок, приложенных в объеме конструкции и на ее поверхности, равен:

$$V = - \int_V \{u\}^T \{p\} dV - \int_S \{u\}^T \{q\} dS, \quad (7.3)$$

где $\{u\}$ - вектор перемещений внутренних точек конструкции, $\{p\}$ - вектор сил, распределенных по объему материала, $\{q\}$ - вектор сил, распределенных по поверхности тела.

Выразим величину потенциальной энергии, запасенной телом при деформировании:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{u\}^T \{p\} dV - \int_S \{u\}^T \{q\} dS. \quad (7.4)$$

В МКЭ перемещения произвольных точек внутри конечного элемента выражаются через узловые перемещения с помощью матриц функций формы:

$$\{u\} = [N] \{\Delta^{el}\}, \quad (7.5)$$

где $[N]$ - матрица функций формы, $\{\Delta^{el}\}$ - вектор узловых перемещений конечного элемента.

Функции формы формируются по аналогии с координатными функциями, которые используются в вариационных методах, и должны удовлетворять условиям полноты, линейной независимости и принадлежать энергетическому пространству, связанному с исходным дифференциальным оператором.

Необходимо отметить, что в МКЭ эти требования формируются в несколько другой форме. Так, одним из свойств функции формы является ее равенство нулю во всех узлах, кроме одного.

Деформации в точках внутри конечного элемента получаются путем дифференцирования перемещения точек тела с помощью матричного дифференциального оператора $[L]$ подобно тому, как это делается, например, в теории упругости при записи соотношений Коши:

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\}. \quad (7.6)$$

Подставляя в (7.6) соотношение (7.5), получаем выражение вектора деформаций через перемещения узловых точек конечного элемента:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{\Delta^{el}\} \quad (7.7)$$

или

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\Delta^{el}\}, \quad (7.8)$$

где

$$[B] = [L][N] - \quad (7.9)$$

матрица, не совсем удачно называемая матрицей деформаций, которая обычно строится с использованием производных от функций формы конечного элемента.

Напряжения выражаются через деформации с помощью закона Гука:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (7.10)$$

или, с учетом (7.8):

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\Delta^{el}\}, \quad (7.11)$$

где $[D]$ - матрица упругих постоянных материала конструкции.

Таким образом, все неизвестные функции, определяющие напряженно-деформированное состояние внутри конечного элемента оказались выраженными через перемещения узловых точек.

Подставляя в (7.4) выражения (7.5), (7.8) и (7.11) и вычисляя интегралы по объему или по поверхности только одного конечного элемента, получим развернутое выражение потенциальной энергии, запасенной в теле данного конечного элемента:

$$\Pi_{el} = \frac{1}{2} \int_{V_{el}} \{\Delta^{el}\}^T [B]^T [D][B]\{\Delta^{el}\} dV - \int_{V_{el}} \{\Delta^{el}\}^T [N]^T \{p\} dV - \int_{S_{el}} \{\Delta^{el}\}^T [N]^T \{q\} dS, \quad (7.12)$$

где V_{el} - объем конечного элемента, S_{el} - нагруженная поверхность конечного элемента.

Возьмем первые производные от полученной потенциальной энергии по узловым перемещениям. Естественно, что их число будет равно числу степеней свободы элемента и, следовательно, их можно представить в виде вектора:

$$\frac{\partial \Pi_{el}}{\partial \{\Delta^{el}\}} = \int_{V_{el}} [B]^T [D][B]\{\Delta^{el}\} dV - \int_{V_{el}} [N]^T \{p\} dV - \int_{S_{el}} [N]^T \{q\} dS \quad (7.13)$$

или, учитывая то, что перемещения узлов не зависят от пространственных координат x , y , z и, следовательно, могут быть вынесены из-под знака интеграла:

$$\frac{\partial \Pi_{el}}{\partial \{\Delta^{el}\}} = [K^{el}] \{\Delta^{el}\} - \{F^{el}\}, \quad (7.14)$$

где

$$\{F^{el}\} = \int_{V_{el}} [N]^T \{p\} dV + \int_{S_{el}} [N]^T \{q\} dS - \quad (7.15)$$

вектор эквивалентных узловых сил, к которому приводятся все поверхностные и распределенные по объему силы, действующие на данный конечный элемент, а

$$[K_{el}] = \int_{V_{el}} [B]^T [D] [B] dV - \quad (7.16)$$

матрица жесткости конечного элемента.

Представим, что модель содержит всего один конечный элемент. В этом случае для экстремальности потенциальной энергии необходимо обращение в ноль первых производных по всем узловым степеням свобода, то есть:

$$\frac{\partial \Pi_{el}}{\partial \{\Delta^{el}\}} = 0, \quad (7.17)$$

что приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$[K^{el}] \{\Delta^{el}\} = \{F^{el}\}. \quad (7.18)$$

Когда конструкция моделируется набором конечных элементов, потенциальная энергия всей конструкции будет складываться из потенциальных энергий отдельных конечных элементов, то есть:

$$\Pi = \sum_{elements} \Pi_{el} \quad . \quad (7.19)$$

В силу этого глобальная система уравнений МКЭ может быть получена суммированием по всем конечным элементам выражений, полученных по формуле (7.19) с последующим приведением подобных членов (суммированием коэффициентов жесткости, относящихся к разным конечным элементам, но к одному и тому же узловому перемещению) и приравниванием полученных выражений к нулю. Эта процедура называется сборкой системы уравнений метода конечных элементов.

Таким образом, общая процедура метода включает в себя ряд последовательных этапов:

- разбивку тела конструкции на конечные элементы;

- вычисление матрицы жесткости и вектора узловых сил для каждого конечного элемента;
- сборку жесткостей и узловых сил отдельных конечных элементов в глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор узловых сил;
- решение системы линейных алгебраических уравнений и нахождение узловых перемещений;
- вычисление величин, характеризующих напряженное состояние, во внутренних точках конечного элемента.

Каждый этап решения задачи при программировании оформляется в виде отдельной процедуры.

7.2. Структура матриц, используемых в методе КЭ

Пусть используется конечный элемент, содержащий n узлов. В этом случае вектор узловых перемещений элемента, вектор узловых сил элемента, матрица жесткости элемента оказываются логически разделенными на блоки, а именно:

$$\{\Delta^{el}\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \\ \dots \\ \{\Delta_n\} \end{Bmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\{F^{el}\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \dots \\ \{F_n\} \end{Bmatrix}, \quad (7.21)$$

$$[K^{el}] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \dots & [K_{1n}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \dots & [K_{2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{n1}] & [K_{n2}] & \dots & [K_{nn}] \end{bmatrix}, \quad (7.22)$$

где блоки $\{\Delta_i\}$ содержат узловые перемещения, относящиеся к i -му узлу; блоки $\{F_i\}$ содержат узловые силы, относящиеся к i -му узлу; блоки $[K_{ij}]$ содержат коэффициенты жесткости, связывающие силы, относящиеся к i -му узлу, с перемещениями j -го узла, которые можно трактовать как реакции, возникающие в закрепленных степенях свободы i -го узла в результате смещения j -й узловой точки.

Стоит помнить, что матрица жесткости симметрична и поэтому

$$[K_{ij}] = [K_{ji}]^T. \quad (7.23)$$

Наполнение векторов $\{\Delta_i\}$ и $\{F_i\}$, относящихся к отдельной узловой точке, зависит от характера решаемой задачи.

Так, при решении задачи определения напряженного состояния тонкой пластины, нагруженной в своей плоскости (плоская задача теории упругости), указанные векторы могут иметь следующую структуру:

$$\{\Delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (7.24)$$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (7.25)$$

где u_i, v_i - смещения i -го узла по осям x и y , а компоненты P_{xi} и P_{yi} - узловые силы, приложенные в этом узле (рис 7.2).

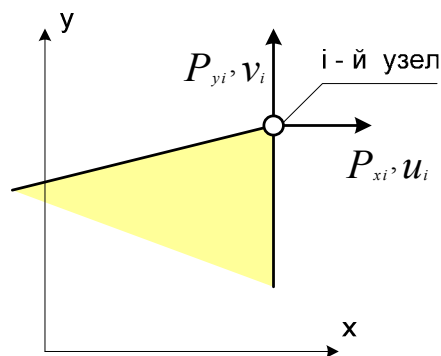


Рис. 7.2

При решении задачи изгиба пластины наполнение указанных векторов будет совсем другим:

$$\{\Delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (7.26)$$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (7.27)$$

где P_i - узловая сила, приложенная по нормали к поверхности плиты (вдоль оси z);
 M_{xi}, M_{yi} - пары сил, приложенных в i -м узле соответственно в плоскостях xz и yz ;
 $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ - прогиб и угловые перемещения (повороты) i -го узла в тех же направлениях.

Имея величины перемещений в узлах, перемещения во внутренних точках элемента можно выразить путем интерполяции с помощью набора алгебраических функций N_i , которые известны как функции формы. Это делается с помощью формулы 7.5 следующим образом:

$$\{u\} = [N]\{\Delta^e\} = \begin{bmatrix} [N_1] & [N_2] & \dots & [N_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \\ \dots \\ \{\Delta_n\} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [N_i]\{\Delta_i\}, \quad (7.28)$$

где n - число узловых точек конечного элемента, причем блоки $[N_i]$ имеют диагональную структуру и могут быть построены по правилу:

$$[N_i] = N_i \cdot [I], \quad (7.29)$$

где $[I]$ - единичная матрица размером $m \times m$, а m - число степеней свободы в узле.

В качестве примера приведем структуру матрицы функций формы для трехузлового конечного элемента с двумя степенями свободы в узле:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

Матрица деформаций $[B]$ в соответствии с формулой (7.9) формируется путем умножения матричного оператора $[L]$ на матрицу функций формы $[N]$. По этой причине матрица $[B]$, как и матрица функций формы $[N]$, будет иметь блочную структуру:

$$[B] = [L][N] = [L] \begin{bmatrix} [N_1] & [N_2] & \dots & [N_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \dots & [B_n] \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

Тогда соотношение (7.8) для элемента, содержащего n узлов, может быть развернуто следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\Delta^{el}\} = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \dots & [B_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \\ \dots \\ \{\Delta_n\} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [B_i]\{\Delta_i\}. \quad (7.32)$$

7.3. Сборка глобальной системы уравнений МКЭ

Для разъяснения процедуры сборки глобальной матрицы жесткости и глобального вектора узловых сил рассмотрим для начала простой пример стержня, нагруженного осевой нагрузкой представленного двумя квадратичными конечными элементами типа 1D3 (рис.7.3). Каждый i -й узел такого конечного элемента будет иметь одну степень свободы.

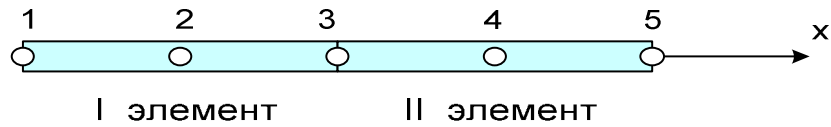


Рис. 7.3

Предположим, что для каждого из двух элементов вычислена матрица жесткости и вектор узловых сил. Таким образом, мы имеем в распоряжении следующие матрицы:

$$[K^I] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad \{F^I\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}, \quad (7.33)$$

$$[K^{II}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} \\ \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{45} \\ \bar{k}_{53} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{55} \end{bmatrix}, \quad \{F^{II}\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \\ \bar{f}_5 \end{Bmatrix}.$$

Потенциальная энергия каждого КЭ может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi^I &= \frac{1}{2} \{u^I\}^T [K^I] \{u^I\} - \{u^I\}^T \{F^I\} = \\ &= \frac{1}{2} (u_1(k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3) + u_2(k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3) + \\ &+ u_3(k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3)) - (f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3). \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{II} &= \frac{1}{2} \{u^{II}\}^T [K^{II}] \{u^{II}\} - \{u^{II}\}^T \{F^{II}\} = \\ &= \frac{1}{2} (u_3(\bar{k}_{33}u_3 + \bar{k}_{34}u_4 + \bar{k}_{35}u_5) + u_4(\bar{k}_{43}u_3 + \bar{k}_{44}u_4 + \bar{k}_{45}u_5) + \\ &+ u_5(\bar{k}_{53}u_3 + \bar{k}_{54}u_4 + \bar{k}_{55}u_5)) - (\bar{f}_3u_3 + \bar{f}_4u_4 + \bar{f}_5u_5). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Общая потенциальная энергия равняется сумме потенциальных энергий элементов (7.34) и (7.35):

$$\Pi = \Pi' + \Pi'' \quad (7.36)$$

Теперь применим теорему о минимуме потенциальной энергии системы.

Приравнявая к нулю первые производные от потенциальной энергии (7.36) по каждому из узловых перемещений, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = k_{11} u_1 + k_{12} u_2 + k_{13} u_3 - f_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = k_{21} u_1 + k_{22} u_2 + k_{23} u_3 - f_2 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = k_{31} u_1 + k_{32} u_2 + (k_{33} + \bar{k}_{33}) u_3 + \bar{k}_{34} u_1 + \bar{k}_{35} u_2 - (f_3 + \bar{f}_3) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = \bar{k}_{43} u_3 + \bar{k}_{44} u_4 + \bar{k}_{45} u_5 - \bar{f}_4 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = \bar{k}_{51} u_3 + \bar{k}_{52} u_4 + \bar{k}_{53} u_5 - \bar{f}_5 = 0. \end{cases} \quad (7.37)$$

Сформированная система уравнений (7.37) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & (k_{33} + \bar{k}_{33}) & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{45} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{53} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 + \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \\ \bar{f}_5 \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

Видно, что коэффициенты жесткости в формуле 7.38, относящиеся к 3-му узлу и входящие в матрицы жесткости, как первого, так и второго элементов, при сборке матрицы жесткости всей конструкции суммируются.

Несколько более сложный характер будет иметь процесс сборки для двумерных и трехмерных сеток конечных элементов. Продемонстрируем порядок формирования глобальных матриц на примере плоской сетки состоящей из трех квадратичных конечных элементов типа **2D8** (рис. 7.4). На приведенном рисунке показана общая (глобальная) нумерация узловых точек сетки.

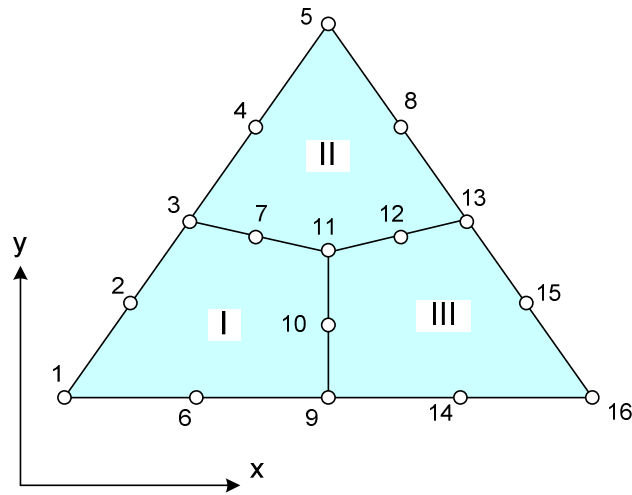


Рис. 7.4

Для начала рассмотрим первый конечный элемент (рис. 7.5). В кружочках приведены глобальные номера узлов сетки, а внутри конечного элемента указана против часовой стрелки их локальная нумерация от 1 до 8, начиная с правого верхнего узла.

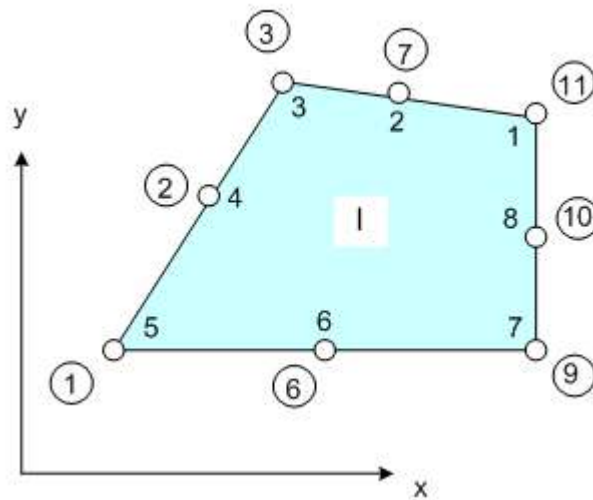


Рис. 7.5

Матрица жесткости данного элемента может быть представлена в блочном виде (рис. 7. 6), на котором каждый квадратный блок $[K_{ij}]$ имеет размерность $t \times t$, где t - число степеней свободы в узле, и содержит, как указывалось выше, реакции, возникающие в i -м закрепленном в результате смещений j -й узловой точки. Блоки матрицы жесткости элемента упорядочены в соответствии с локальной нумерацией узлов, но указаны также и их глобальные номера. Поскольку матрица жесткости

обладает свойством симметрии, отсутствует необходимость в хранении ее нижней треугольной части. На рис. 7.6 показан и вектор узловых сил данного конечного элемента.

При включении коэффициентов жесткости и узловых сил, относящихся к данному конечному элементу, в соответствующие глобальные матрицы, необходимо учитывать несоответствие глобальной и локальной нумерации узлов элемента. Так, например, блок $[K_{3,4}]$ в глобальной матрице жесткости (рис. 7.7) должен стоять на пересечении 3-й строки и 2-го столбца и, в силу симметрии, на пересечении 2-й строки и 3-го столбца, поскольку 4-му узлу данного конечного элемента соответствует глобальный номер 2.



Рис. 7.6

При включении в глобальные матрицы жесткостей и узловых сил для всех последующих конечных элементов соответствующие жесткости и узловые силы должны суммироваться с теми, которые уже были размещены там ранее.

Описанный алгоритм называется сборкой глобальной системы уравнений МКЭ.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 →
1	$[K_{5,5}]$	$[K_{4,5}]$	$[K_{3,5}]$			$[K_{5,6}]$	$[K_{2,5}]$		$[K_{5,7}]$	$[K_{5,8}]$	$[K_{1,5}]$	
2		$[K_{4,4}]$	$[K_{3,4}]$			$[K_{4,6}]$	$[K_{2,4}]$		$[K_{4,7}]$	$[K_{4,8}]$	$[K_{1,4}]$	
3			$[K_{3,3}]$			$[K_{3,6}]$	$[K_{2,3}]$		$[K_{3,7}]$	$[K_{3,8}]$	$[K_{1,3}]$	
4												
5												
6						$[K_{6,6}]$	$[K_{2,6}]$		$[K_{6,7}]$	$[K_{6,8}]$	$[K_{1,6}]$	
7							$[K_{2,2}]$		$[K_{2,7}]$	$[K_{2,8}]$	$[K_{1,2}]$	
8												
9									$[K_{7,7}]$	$[K_{7,8}]$	$[K_{1,7}]$	
10										$[K_{8,8}]$	$[K_{1,8}]$	
11											$[K_{1,1}]$	
↓												

Рис. 7.7

7.4. Нагрузки и воздействия

В МКЭ все действующие на тело нагрузки, к которым относятся

- сосредоточенные силы,
- силы, распределенные по поверхности,
- распределенные по объему гравитационные силы

приводятся к эквивалентным системам сил, приложенным в узловых точках.

Покажем как сосредоточенную силу, приложенную в произвольной точке, привести к эквивалентной системе узловых сил.

Рассмотрим случай (рис. 7.8), когда сосредоточенная сила приложена в произвольной точке на одной из сторон плоского квадратного изопараметрического элемента.

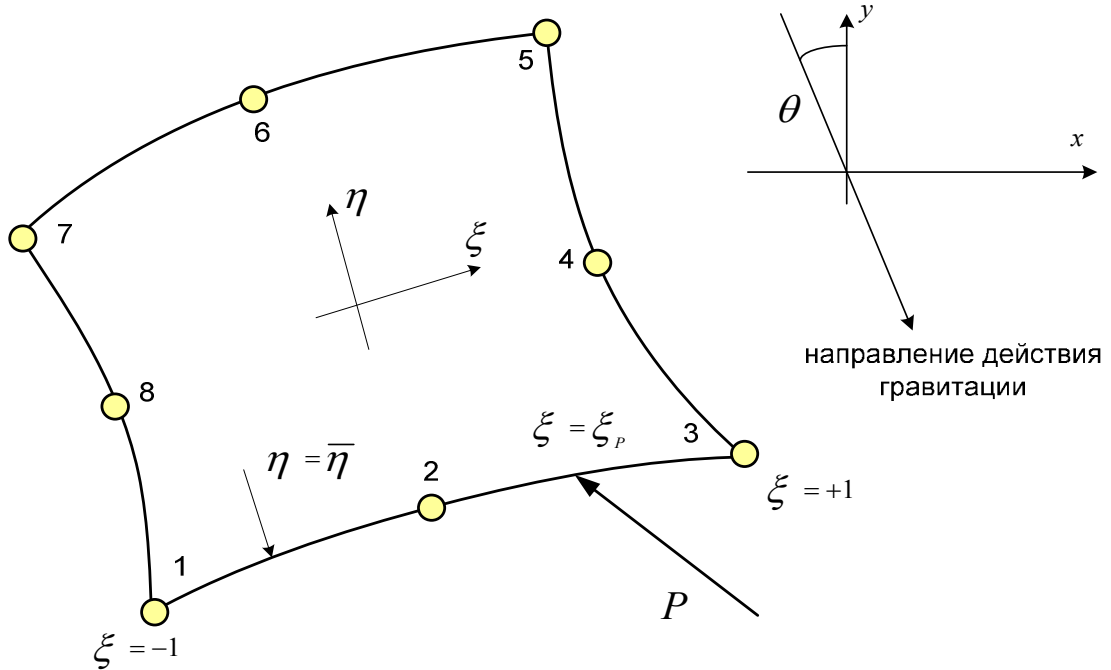


Рис.7.8

Дадим виртуальные смещения u^* и v^* соответственно по осям x и y , узлам, расположенным на рассматриваемой стороне элемента. Тогда для i -го узла можно написать равенства:

$$P_{xi} u^* = P_x N_i(\xi_p, \bar{\eta}) u^*, \quad (7.39)$$

$$P_{yi} v^* = P_y N_i(\xi_p, \bar{\eta}) v^*,$$

где P_x и P_y компоненты силы P ; ξ_p — локальная координата точки приложения силы, а $\bar{\eta}$ — постоянное значение другой локальной координаты, определяющее положение рассматриваемой стороны (+1 или -1).

$$\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} = N(\xi_p, \bar{\eta}) \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}. \quad (7.40)$$

Таким же образом с помощью функций формы глобальные координаты точки, в которой приложена сосредоточенная сила, могут быть выражены через координаты узлов:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi_p, \bar{\eta}) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (7.41)$$

где x_i и y_i - координаты i -го узла рассматриваемой стороны.

Гравитационная сила действует на каждый элементарный объем тела, и ее направление в общем случае может не совпадать с направлением координатных осей x и y . Ее величина равняется:

$$dG = \rho g dV,$$

где ρ — удельная плотность материала конструкции, g — ускорение свободного падения.

Компоненты этой силы по осям x и y соответственно равны:

$$dG_x = \rho g dV \sin \theta,$$

$$dG_y = -\rho g dV \cos \theta.$$

Дадим виртуальные смещения u^* и v^* в направлении осей x и y . В соответствии с принципом виртуальных работ получим следующие выражения:

$$P_{xi} u^* = \int_{V_e} N_i(\xi_p, \bar{\eta}) u^* \rho g \sin \theta dV, \quad (7.42)$$

$$P_{yi} v^* = -\int_{V_e} N_i(\xi_p, \bar{\eta}) v^* \rho g \cos \theta dV, \quad (7.43)$$

где N_i — функции формы, а индекс i для рассматриваемого типа конечного элемента изменяется от 1 до 8.

Из формул 7.42 - 7.43 следует матричное выражение для эквивалентных узловых сил:

$$\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} = \int_{V_e} N \rho g \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{Bmatrix} dV.$$

Численное интегрирование может быть выполнено по правилу Гаусса:

$$\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \rho g t \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{Bmatrix} N_i(\xi_n, \eta_m) W_n W_m \det[J]$$

где t — толщина элемента; $[J]$ — матрица Якоби; W_n, W_m - весовые множители.

На каждую из сторон конечного элемента в том случае, когда она выходит на поверхность тела, могут действовать распределенные нормальные и касательные внешние силы (рис.7.9).

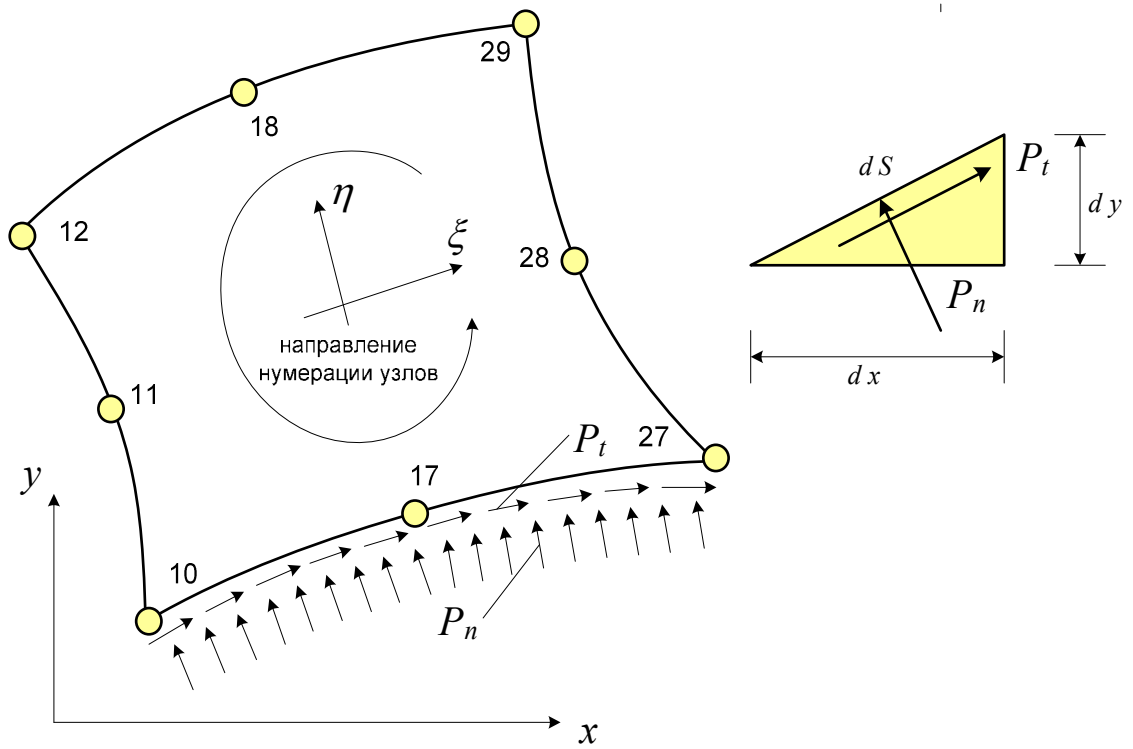


Рис.7.9

Применение квадратичных конечных элементов позволяет учитывать распределенные воздействия, которые изменяются по квадратичному закону, используя приведение их к сосредоточенным силам, приложенным в узлах конечного элемента.

Список рекомендуемой литературы:

1. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов : пер. с англ. / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
2. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов : пер. с англ. / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
3. Белоцерковский, О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский. – М. : Наука, 1984. – 520 с.
4. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов : пер. с англ. / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.
5. Постнов, В. А. Численные методы расчета судовых конструкций / В. А. Постнов. – Л. : Судостроение, 1977. – 279 с.
6. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
7. Зенкевич, О. К. Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
8. Зенкевич, О. К. Конечные элементы и аппроксимация / О. К. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
9. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures / M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1956. – № 23. – P. 805-824.
10. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 459 с.
11. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности : учеб. пособие / В. И. Самуль. – М. : Высш. шк., 1978. – 288 с.
12. Розин, Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л. А. Розин ; Санкт.-Петербург. гос. техн. ун-т. – СПб. : СПбГТУ, 1998. – 532 с.
13. Райс, Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение : пер. с англ. / Дж. Рей. – М. : Мир, 1984. – 264 с.
14. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций : учеб. пособие для техн. вузов / Р. А. Хечумов, Х. Кешлер, В. И. Прокопьев ; под ред. Р. А. Хечумова. – М. : АСВ, 1994. – 353 с.
15. Плотников, Ю. Г. Матрицы в строительной механике : учеб. пособие / Ю. Г. Плотников; Дальневосточ. гос. ун-т путей сообщения. – Хабаровск : ДВГУПС, 2008. – 111 с. : ил.
16. Метод конечных элементов : учеб. пособие для вузов / под ред. П. М. Варвака. – Киев : Вища шк., 1981. – 176 с.
17. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 2004. – 380 с.
18. Голуб, Дж. Матричные вычисления : пер. с англ. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М. : Мир, 1999. – 548 с.
19. Melosh, R. J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness method / R. J. Melosh // American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1965. – № 1. – P. 1631-1637.
20. Капустин, С. А. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел : учеб. пособие / С. А. Капустин ; Нижегород. гос. ун-т. – Н. Новгород : ННГУ, 2002. – 180 с.
21. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.

22. Кашеварова, Г. Г. Основы автоматизации проектирования в строительстве : курс лекций / Г. Г. Кашеварова ; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь : ПГТУ, 2007. – 300 с.

Георгий Анатольевич Маковкин
Светлана Юрьевна Лихачева

Применение МКЭ к решению задач механики
деформируемого твердого тела

Учебное пособие

Часть 1

Редактор С.А.Елизарова