

Сборник задач и упражнений по математике

ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Нижний Новгород
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Сборник задач и упражнений по математике

ЧАСТЬ 2

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2017

ББК 22.172
С 23
УДК 51(075)

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

И. Н. Цветкова – канд. физ.- мат. наук, доцент, зав. кафедрой информатики и информационных технологий Нижегородского института управления - филиала РАНХиГС при президенте РФ
С. Ю. Литвинчук – канд. физ.- мат. наук, доцент, учёный секретарь НИИ механики ННГУ им. Н.И.Лобачевского

Горбиков С. П. Сборник задач и упражнений по математике [Текст]: учеб. пособие Ч.2 / С. П. Горбиков, В. Н. Неймарк, Г. П. Опалева, В. В. Петров, Л. С. Сенниковская, Л. В. Филатов; Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун - т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2017. – 71 с.
ISBN 978-5-528-00224-8

Вторая часть сборника включает в себя задачи и упражнения по основам обыкновенных дифференциальных уравнений, двойным интегралам, числовым и функциональным рядам, теории вероятностей и элементам математической статистики.

Предназначено студентам технических, экономических и других специальностей, для которых математика будет не областью профессиональной деятельности, а средством для решения практических задач. Компонировка курса рассчитана на одновременное чтение лекций по этим разделам. В качестве теоретической основы для решения задач студентам предлагается использовать лекционный курс «64 лекции по математике» (авторы В. П. Важдаев, М. М. Коган, М. И. Лиогонький, Л. А. Протасова).

ББК 22.172

ISBN 978-5-528-00224-8

© С. П. Горбиков, В. Н. Неймарк,
Г. П. Опалева, В. В. Петров,
Л. С. Сенниковская, Л. В. Филатов, 2017
© ННГАСУ, 2017

Содержание

Глава 10. Дифференциальные уравнения	5
§ 1. Основные понятия и определения	5
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	6
§ 3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	8
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	9
§ 5. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков, допускающие понижение порядка	10
§ 6. Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков с постоянными коэффициентами	11
Глава 11. Двойные интегралы	14
§ 1. Расстановка пределов интегрирования	14
§ 2. Вычисление кратных интегралов	19
§ 3. Применение двойных интегралов для вычисления площадей и объёмов фигур	23
§ 4. Применение двойных интегралов для вычисления физических величин	24
Глава 12. Ряды	26
§ 1. Понятие ряда. Сумма ряда и его сходимость	26
§ 2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов	27
§ 3. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость	30
§ 4. Функциональные ряды	31
§ 5. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближённым вычислениям	32
Глава 13. Теория вероятностей	33
§ 1. Элементы комбинаторики	33
§ 2. Классическое определение вероятностей	34

§ 3. Геометрические вероятности	36
§ 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя одного события	37
§ 5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса	39
§ 6. Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона	42
Глава 14. Случайные величины	44
§1. Распределение случайных величин	44
§2. Числовые характеристики случайных величин	46
§3. Нормально распределенная случайная величина	47
Глава 15. Основы математической статистики	49
§1. Выборочный метод. Выборочные представления и выборочные числовые характеристики	49
§2. Статистические оценки неизвестных параметров распределения случайных величин	50
§3. Проверка статистических гипотез	51
Ответы	54
Список литературы	70

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия и определения

В задачах **10.1–10.11** проверить, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции (C – произвольная постоянная).

10.1. $y = 5x^2$ для $xy' = 2y$. **10.2.** $y = -\frac{2}{x^2}$ для $xy^2 dx - dy = 0$.

10.3. $y = \ln \cos x$ для $y' = \operatorname{tg} x$. **10.4.** $y = Ce^{-4x}$ для $y' + 4y = 0$.

10.5. $y = Cx^3$ для $3y = xy'$. **10.6.** $y = (x + C) \cdot e^x$ для $y' - y = e^x$.

10.7. $y = Ce^{3x}$ для $y' - 3y = 0$. **10.8.** $y = \frac{1}{x}$ для $y'' = x^2 + y^2$.

10.9. $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$ для $(x + y)dx + xdy = 0$. **10.10.** $x^2 - xy + y^2 = C$ для

$(x - 2y) \cdot y' - 2x + y = 0$. **10.11.** $y = \operatorname{arctg}(x + y) + C$ для $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1$.

10.12. Функция $y = \varphi(x)$ задана параметрически: $x = te^t$, $y = e^{-t}$. Докажите, что эта функция является решением уравнения

$$(1 + xy) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

В задачах **10.13–10.18** составить дифференциальные уравнения заданных семейств кривых (C, C_1, C_2 – произвольные постоянные).

10.13. $y = Cx^3$. **10.14.** $x^2 + y^2 = C^2$. **10.15.** $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

10.16. $y = \sin x + C \cos x$. **10.17.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. **10.18.** $y = (C_1 + C_2 x) e^x$.

10.19. Составить дифференциальное уравнение для семейства парабол, с вершиной в начале координат и осью, совпадающей: а) с осью абсцисс, б) с осью ординат.

10.20. Составить дифференциальное уравнение семейства эллипсов, имеющих постоянную большую ось, равную $2a$.

10.21. Составить дифференциальное уравнение семейства линий, у которых отрезок касательной между точками касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

В задачах **10.22–10.24** в семействе кривых найти ту, которая удовлетворяет заданным начальным условиям.

10.22. $x^2 - y^2 = C$, $y(0) = 3$. **10.23.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

10.24. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

В задачах **10.25–10.27** для данного дифференциального уравнения построить поле направлений. Методом изоклин построить приближённо графики интегральных кривых.

10.25. $y' = x^2$.

10.26. $y' = -x + y$.

10.27. $y' = x - 1$.

В задачах **10.28–10.32** для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через заданную точку M .

10.28. $y' = y - x^2$, $M(1; 2)$. **10.29.** $y' = 2 + y^2$, $M(1; 2)$. **10.30.** $y' = xy$,

$M(0; -1)$. **10.31.** $y' = x + 2y$, $M(3; 0)$. **10.32.** $y' = y - x$, $M(4; 2)$.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

В задачах **10.33–10.55** найти общее решение (общий интеграл) данных дифференциальных уравнений.

10.33. $y' = \frac{x}{y}$. **10.34.** $y' = \frac{y}{x}$. **10.35.** $y' + \frac{x}{y} = 0$. **10.36.** $y' + \frac{y}{x} = 0$.

10.37. $y' - xy^2 = 0$. **10.38.** $yy' = \frac{1}{2x+1}$. **10.39.** $xy' = 2y + 1$.

10.40. $x^2 y' - x + 1 = 0$. **10.41.** $xyy' = 1 - x^2$. **10.42.** $y' = (2y - 1)\operatorname{ctg} x$.

10.43. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$. **10.44.** $\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = xydy$. **10.45.** $\sqrt{3 + y^2} dx - ydy = x^2 ydy$. **10.46.** $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$. **10.47.** $y = y' \ln y$.

10.48. $y \ln y + xy' = 0$. **10.49.** $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$. **10.50.** $dy - y^2 \operatorname{tg} x dx = 0$.

10.51. $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$. **10.52.** $y'(1 + y) = xy \sin x$.

10.53. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2} y' = 0$. **10.54.** $e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$.

10.55. $y' \cos x - (y + 1) \sin x = 0$.

В задачах **10.56–10.70** найти частное решение дифференциального уравнения (задача Коши) удовлетворяющее данным начальным условиям.

10.56. $x^2 dy - y^2 dx = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$. **10.57.** $x dy - (1 + y^2) dx = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

10.58. $(x + xy^2) dx - (x^2 y - y) dy = 0$, $y(0) = 1$. **10.59.** $y dx + \sin^2 x dy = 0$,

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **10.60.** $\cos^2 x dy - \cos^2 y dx = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$. **10.61.** $\sqrt{y} \cdot \sin x dx = dy$,

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **10.62.** $\cos x \cdot \sin y dy = \cos y \cdot \sin x dx$, $y(\pi) = \pi$. **10.63.** $\sqrt{1 - x^2} dy +$

$+ y dx = 0$, $y(0) = e$. **10.64.** $\sqrt{1 - x^2} dy - \sqrt{1 - y^2} dx = 0$, $y(0) = 0$.

10.65. $e^x dy + 2^y dx = 0$, $y(0) = 0$. **10.66.** $\ln y^x dy = y dx$, $y(1) = 1$.

10.67. $e^x dy + (2x + 1) dx = 0$, $y(0) = 0$. **10.68.** $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$, $y(1) = 0$.

10.69. $y' = xe^{x-y}$, $y(2) = 2$. **10.70.** $x(y^6 + 1) dx - y^2(x^4 + 1) dy = 0$, $y(0) = 1$.

10.71. Определить и построить кривую, проходящую через точку $(-2; 2)$, если отрезок любой касательной к кривой, заключённый между осями координат, делится точкой касания пополам.

10.72. Определить и построить кривую, проходящую через точку $(-1; -1)$, для которой отрезок, отсекаемый на оси Ox касательной к кривой в любой её точке, равен квадрату абсциссы точки касания..

10.73. В благоприятных для размножения условиях находится некоторое количество N_0 бактерий. Из эксперимента известно, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Найти зависимость роста числа бактерий $N(t)$ с течением времени. .

10.74. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдёт тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 метров, а за 3 секунды – 40 метров?

10.75. Тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила вязкого трения, действующая на тело, пропорциональна величине скорости $F_{mp} = -\alpha V$, где $\alpha > 0$ - коэффициент трения. Определить зависимость скорости от времени, если тело начинает движение с нулевой скоростью.

10.76. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м. от начала отсчёта пути и имела скорость $V_0 = 20 \text{ м/с}$. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с. после начала движения.

§ 3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В задачах **10.77–10.94** найти общее решение (общий интеграл) данных дифференциальных уравнений.

10.77. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$ **10.78.** $y' = -\frac{x+y}{x}.$ **10.79.** $(x+2y)dx - xdy = 0.$

10.80. $ydx - (x+y)dy = 0.$ **10.81.** $y^2 + x^2y' = xy y'.$ **10.82.** $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

10.83. $y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$ **10.84.** $xy' = \frac{2yx^2 + 3y^3}{x^2 + 2y^2}.$ **10.85.** $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

10.86. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$ **10.87.** $xy' = y + \frac{y^2}{x}.$ **10.88.** $xy' = y + \frac{x}{\sin \frac{y}{x}}.$

10.89. $y' = \frac{y}{x} - \sin^2 \frac{y}{x}.$ **10.90.** $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}.$ **10.91.** $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}.$

10.92. $xy' = y + x \cdot 2^{\frac{y}{x}}.$ **10.93.** $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$ **10.94.** $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}.$

В задачах **10.95–11.102** найти частное решение дифференциальных уравнений (задача Коши).

10.95. $y' - 1 = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$ **10.96.** $xy' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{6}.$

10.97. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$ **10.98.** $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$

10.99. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0, \quad y(4) = 0.$ **10.100.** $(\sqrt{xy} + x)dy = ydx, \quad y(0) = 1.$

10.101. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1.$ **10.102.** $2xy + 2y^2 = (x^2 + xy) \cdot y',$
 $y(1) = 2.$

10.103. Найти кривую, проходящую через точку $A(3; 0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной равен $\frac{x+y}{x}$.

10.104. Кривая проходит через точку $(-1; 1)$. Расстояние любой касательной к этой кривой от начала координат равно абсциссе точки касания. Написать уравнение указанной кривой.

10.105. Найти кривую, проходящую через точку $A(1; 2)$, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, равен абсциссе точки касания.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

В задачах **10.106–10.117** найти общее решение данных дифференциальных уравнений.

10.106. $y' + xy = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. **10.107.** $y' - xy = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. **10.108.** $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$

10.109. $y' + \frac{y}{x^2} = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$. **10.110.** $y' - \frac{y}{x} = xe^{3x}$. **10.111.**

$y' + \frac{y}{x+1} = \frac{x}{x+1}$.

10.112. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = x^2 \cdot \cos x$. **10.113.** $y' - xy = \cos x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$. **10.114.** $y' + \frac{y}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^x}{\sin x}$. **10.115.** $y' - \frac{y}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$. **10.116.** $y' = \frac{y}{x+y^2}$.

10.117. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$.

10.118. Сила тока I в электрической цепи с сопротивлением R , коэффициентом индуктивности L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению $L \frac{dI}{dt} + RI = E$. Найти зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени, если $E = A \sin \omega t$ (L, R, A - постоянные).

В задачах **10.119–10.130** найти частное решение дифференциальных уравнений (задача Коши).

10.119. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$.

10.120. $y' + \frac{xy}{x^2 + 1} = 1, \quad y(0) = 0$.

$$10.121. \quad y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(-1) = 2. \qquad 10.122. \quad y' + xy = x^3, \quad y(0) = 0.$$

$$10.123. \quad y' - y = x^3 e^x, \quad y(0) = 6. \quad 10.124. \quad y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$10.125. \quad y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = -1. \quad 10.126. \quad y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$10.127. \quad y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1. \quad 10.128. \quad y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$10.129. \quad xy' + y = e^x, \quad y(a) = b. \quad 10.130. \quad y' - y \cdot \sin x = \sin x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

10.131. Сила тока I в электрической цепи с сопротивлением R , коэффициентом индуктивности L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению $L \frac{dI}{dt} + RI = E$. Найти зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени, если E меняется по закону $E = kt$ и $I(0) = 0$ (L, R, k - постоянные), k - коэффициент пропорциональности.

§ 5. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков, допускающие понижение порядка

В задачах **10.132–10.156** найти общее решение данных дифференциальных уравнений.

$$10.132. \quad xy'' = 1. \quad 10.133. \quad y'' = \cos 3x. \quad 10.134. \quad y'' = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad 10.135. \quad y'''' = \frac{1}{x^5}.$$

$$10.136. \quad y''' = e^{4x}. \quad 10.137. \quad y'' = \ln x. \quad 10.138. \quad xy'' = y'. \quad 10.139. \quad x^2 y'' = (y')^2.$$

$$10.140. \quad 2xy'y'' = (y')^2 - 1. \quad 10.141. \quad y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right). \quad 10.142. \quad y'' = y' + x.$$

$$10.143. \quad y'' = \frac{y'}{x} + x. \quad 10.144. \quad x^2 y'' + xy' = 1. \quad 10.145. \quad xy''' + y'' = 1 + x.$$

$$10.146. \quad xy'''' - y''' = 0. \quad 10.147. \quad yy'' = (y')^2. \quad 10.148. \quad y^3 y'' = 1.$$

$$10.149. \quad yy'' - (y')^2 - 1 = 0. \quad 10.150. \quad 1 + (y')^2 - 2yy'' = 0. \quad 10.151. \quad 2yy'' = (y')^2.$$

$$10.152. \quad y'' = y'(1 + (y')^2). \quad 10.153. \quad y'' = \sqrt{1 - (y')^2}. \quad 10.154. \quad 3y'y'' = 2y.$$

$$10.155. \quad y'' = y' \ln y'. \quad 10.156. \quad y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0.$$

В задачах **10.157–10.173** найти соответствующие частные решения дифференциальных уравнений.

10.157. $y'' = \operatorname{tg}^2 x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. **10.158.** $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$,
 $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$. **10.159.** $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
10.160. $y''' = e^{2x}$, $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = \frac{1}{2}$. **10.161.** $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$,
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. **10.162.** $xy'' - y' = x^3$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.
10.163. $y''(e^x + 1) + y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$. **10.164.** $y''x \ln x = y'$,
 $y(e) = 2$, $y'(e) = 4$. **10.165.** $xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 0$.
10.166. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. **10.167.** $y'' - y' \operatorname{ctg} x =$
 $= \sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **10.168.** $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
10.169. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$. **10.170.** $y''y^3 = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$,
 $y'(0) = \sqrt{2}$. **10.171.** $2(y')^2 = (y - 1)y''$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. **10.172.** $y'' +$
 $+ 18 \sin y \cos y^3 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. **10.173.** $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$,
 $y'(0) = 1$.

§ 6. Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков с постоянными коэффициентами

В задачах **10.174–10.186** составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений которого имеет вид.

10.174. e^x, e^{-2x} **10.175.** e^x, e^{-x} **10.176.** $1, x$. **10.177.** e^x, xe^x .
10.178. $\sin 3x, \cos 3x$. **10.179.** $\sin x, \cos x, e^x$. **10.180.** e^x, xe^{2x}, e^{2x} .
10.181. $e^x, e^{3x}, 1$. **10.182.** $\sin 2x, \cos 2x, 1$. **10.183.** $1, x, x^2$. **10.184.** e^{-x}, e^x ,
 $\sin 2x, \cos 2x$. **10.185.** $e^{-x}, xe^{-x}, \sin x, \cos x$. **10.186.** $\sin 3x, \cos 3x, 1, x$.

В задачах **10.187–11.206** решить однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

10.187. $y'' - 5y' + 6y = 0$. **10.188.** $y'' - 6y' + 5y = 0$. **10.189.** $y'' - 6y' + 9y = 0$.
10.190. $y'' - 6y' = 0$. **10.191.** $y'' - 9y = 0$. **10.192.** $y'' + 9y = 0$.
10.193. $y'' - 6y' + 10y = 0$. **10.194.** $y'' + y' + y = 0$. **10.195.** $4y'' + y = 0$.
10.196. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$. **10.197.** $y''' + 2y'' + y' = 0$. **10.198.** $y''' + 4y'' +$
 $+ 13y' = 0$. **10.199.** $y''' + y'' = 0$. **10.200.** $y''' + y' = 0$. **10.201.** $y''' + y = 0$.
10.202. $y''' + y'' - 2y = 0$. **10.203.** $y'''' + y''' = 0$. **10.204.** $y'''' + y'' = 0$.
10.205. $y'''' + y' = 0$. **10.206.** $y'''' + y = 0$.

В задачах **10.207 – 10.215** найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

10.207. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$. **10.208.** $y'' + 4y' + 4y = 0$,
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. **10.209.** $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
10.210. $y'' - 3y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$. **10.211.** $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 3$,
 $y'(0) = -3$. **10.212.** $y'' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. **10.213.** $y'' - 7y' +$
 $+ 12y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$. **10.214.** $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 0$,
 $y'(0) = -5$. **10.215.** $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

В задачах **10.216–10.235** найти общее решение неоднородного линейного уравнения, находя частное решение методом неопределённых коэффициентов.

10.216. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$. **10.217.** $y'' - 2y' + 2y = 2x$. **10.218.** $y'' + 4y' +$
 $- 5y = 0$. **10.219.** $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$. **10.220.** $y'' + 2y' + y = \cos x$.
10.221. $y'' + 3y' = 2e^{-3x}$. **10.222.** $y'' - 2y' = 2 \sin 3x$. **10.223.** $y'' - 4y' =$
 $= 2 \cos 3x$. **10.224.** $y'' + 3y' = 18x + 9$. **10.225.** $y'' + 4y = x^2 - 1$.
10.226. $y'' + y = \cos x$. **10.227.** $y'' + y = \sin 2x$. **10.228.** $y'' - 2y' + 3y =$
 $= e^{-x} \cos x$. **10.229.** $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$. **10.230.** $y''' - y' = -2x$.
10.231. $y'''' - y = 8e^x$. **10.232.** $y''' + y'' = e^{-x}$. **10.233.** $y''' + y'' = 6x$.
10.234. $y'' - y = 2xe^{-x}$. **10.235.** $y'''' - y = \cos x$.

В задачах **10.236–10.248** найти частное решение неоднородного линейного уравнения, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

10.236. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **10.237.** $y'' - 4y' + 3y =$

$= 1 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. **10.238.** $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

10.239. $y'' - y' - 6y = x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. **10.240.** $y'' + 3y' = x + 3$,

$y(0) = 0$, $y'(0) = -3$. **10.241.** $y'' - 2y' = x^2 - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$.

10.242. $y'' + y = 4xe^x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. **10.243.** $y'' + y = 4\sin x$,

$y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. **10.244.** $y'' + y' = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

10.245. $y'' + 9y = 6\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. **10.246.** $y'' + 2y' - 3y =$

$= 48x^2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$. **10.247.** $y''' + y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

$y''(0) = 2$. **10.248.** $y'''' - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

В задачах **10.249–10.260** найти общее решение методом вариации произвольных постоянных.

10.249. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$. **10.250.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$. **10.251.** $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

10.252. $y'' + 9y = \frac{2}{\cos 3x}$. **10.253.** $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$. **10.254.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$.

10.255. $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}$. **10.256.** $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$. **10.257.** $y'' - 2y' + y =$

$= \frac{e^x}{x^2 + 1}$. **10.258.** $y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}$. **10.259.** $y'' + 6y' + 9y = \frac{\ln x}{e^{3x}}$.

10.260. $y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}$.

В задачах **10.261–10.270** решить дифференциальные уравнения, применяя принцип суперпозиции решений.

10.261. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.

10.262. $y'' - y = 2e^{-x} - x^2$.

$$10.263. \quad y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} x + \sin x.$$

$$10.264. \quad y'' - 4y' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x.$$

$$10.265. \quad y''' + y'' = 6x + e^{-x}.$$

$$10.266. \quad y'''' - y = xe^x + \cos x.$$

$$10.267. \quad y'' + 25y = 3e^x + \frac{4}{\cos 5x}.$$

$$10.268. \quad y'' - 4y' + 13y = x - 2 + \frac{e^{2x}}{\cos 3x}.$$

$$10.269. \quad y'' + y' = \cos^2 x + x^2.$$

$$10.270. \quad y'' + 4y = x \sin^2 x.$$

В задачах **10.271** – **10.279** найти общие (частные) решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$10.271. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

$$10.272. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$10.273. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

$$10.274. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$10.275. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

10.276.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 18x + y. \end{cases}$$

$$10.277. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 8y. \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 5.$$

$$10.278. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

$$10.279. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t, \\ \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t \end{cases} \quad \text{при условии} \quad x(\pi) = 1, \quad y(\pi) = 2.$$

Глава 11 ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Расстановка пределов интегрирования

В задачах **11.1–11.17** найти пределы двойных интегралов $\iint_D f(x, y) dx dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D , представив интегралы в виде одного из повторных интегралов.

11.1. D – прямоугольник со сторонами $x = 1, x = 4, y = 0, y = 2$.

11.2. D – прямоугольник: $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 5$.

11.3. D – треугольник со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 2$.

11.4. D – треугольник: $x - 3y = 0, y - 2x = 0, x \leq 3$.

11.5. D – ограничена линиями $x + y = 2, 4x + 4 = y^2$.

11.6. $D: \begin{cases} x = 0, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ x + y^2 = 4. \end{cases}$ **11.7.** $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ y \leq x, \\ xy \geq 1. \end{cases}$ **11.8.** $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$

11.9. $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y + x \leq 3, \\ x \leq 2y^2. \end{cases}$

11.10. D – ограничена линиями $y = x + 3, y = 2x^2, (x \leq 0)$.

11.11. D – ограничена парабололами $y = x^2, x = y^2$.

11.12. $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

11.13. $D: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$.

11.14. $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ 4y \geq 3x, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$

11.15. $D: \begin{cases} x \geq 0,5, \\ y \geq x, \\ xy \leq 1. \end{cases}$

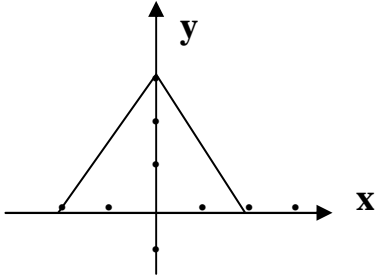
11.16. D – треугольник со сторонами $y = x, y = 2x, x + y = 6$.

11.17. D – параллелограмм: $y = x, y = x + 3, y = -2x + 1, y = -2x + 5$.

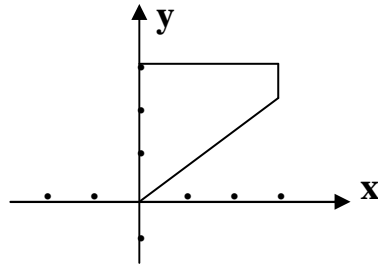
В задачах **11.18–11.25** представить двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$,

где D – заданные ниже треугольники, в виде одного повторного интеграла, выбрав соответствующим образом порядок интегрирования.

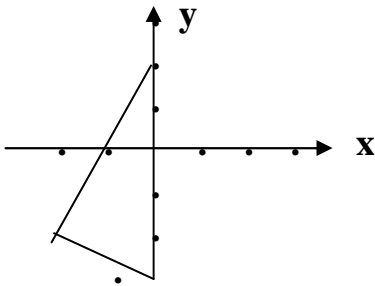
11.18.



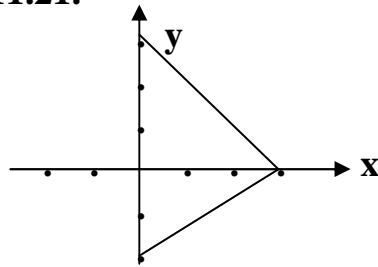
11.19.



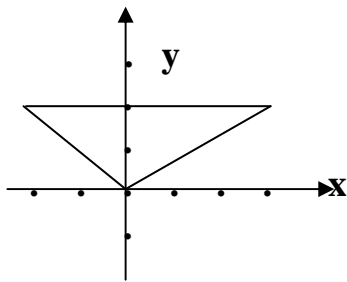
11.20.



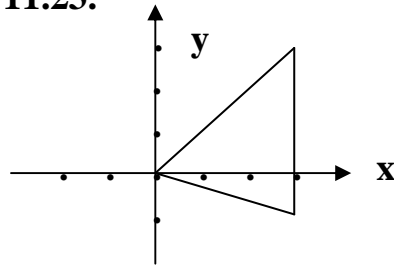
11.21.



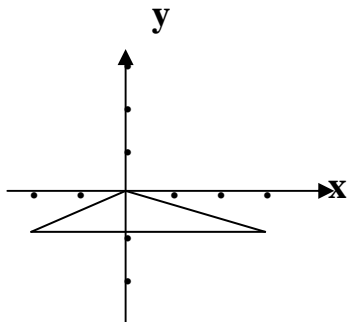
11.22.



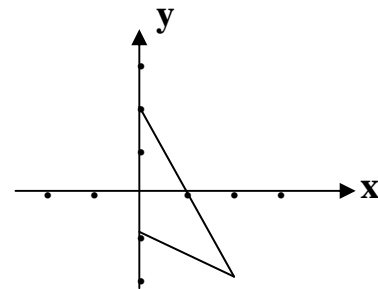
11.23.



11.24.



11.25.



В задачах **11.26 – 11.35.** представить двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$

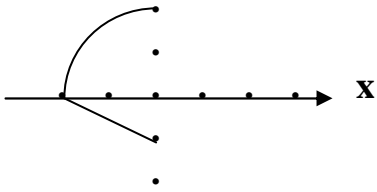
, где D - заданные ниже области, границы которых составлены из отрезков прямых и дуги окружности, в виде одного повторного интеграла, выбрав соответствующим образом порядок интегрирования.

11.26.

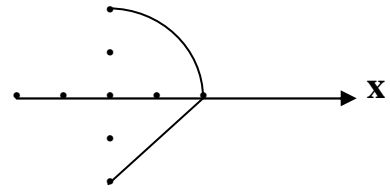
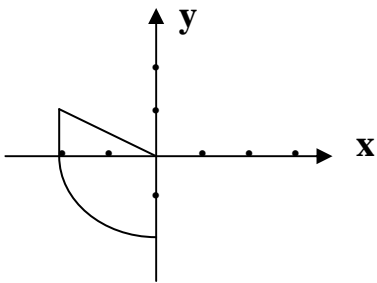
y

11.27.

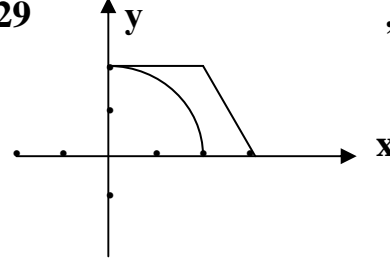
y



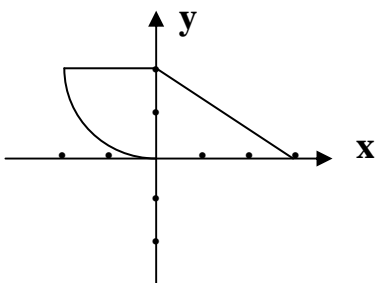
11.28.



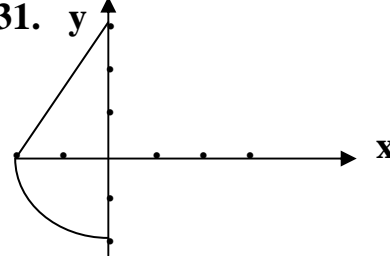
11.29



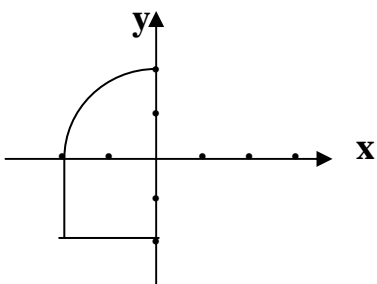
11.30.



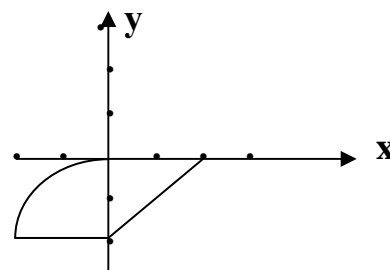
11.31.



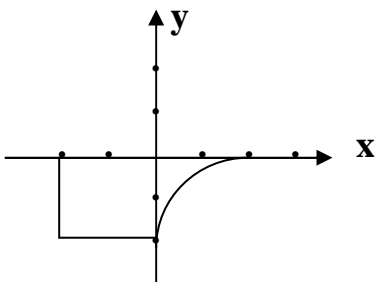
11.32.



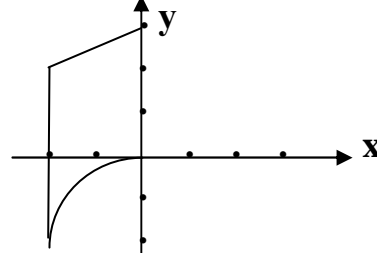
11.33.



11.34.



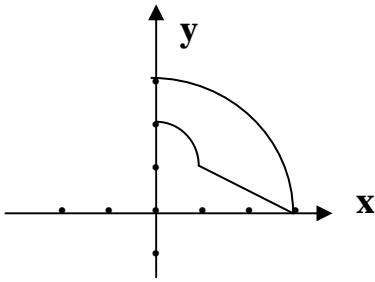
11.35.



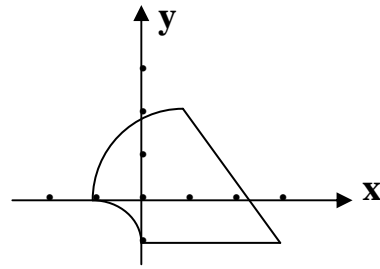
В задачах 11.36 – 11.43 представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$

в виде суммы повторных интегралов (с наименьшим числом слагаемых), если граница области D составлена из отрезков прямых линий и дуг окружностей.

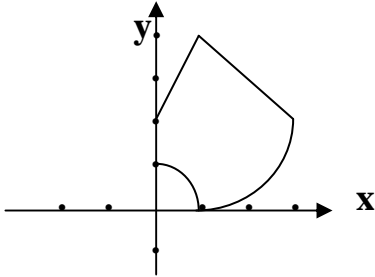
11.36.



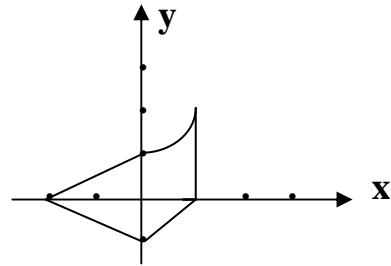
11.37.



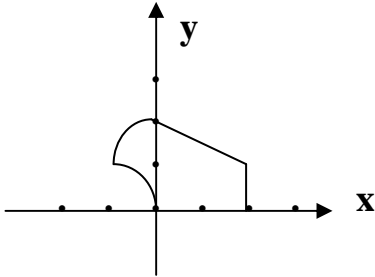
11.38.



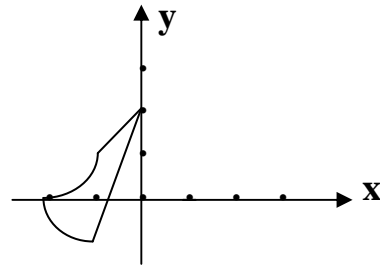
11.39.



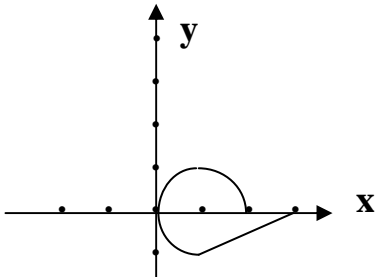
11.40.



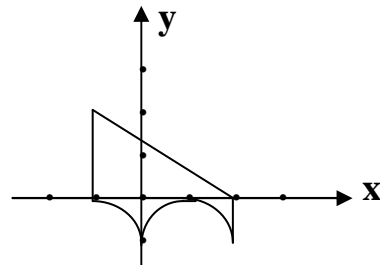
11.41.



11.42.



11.43.



В задачах 11.44 – 11.75 изменить порядок интегрирования.

11.44. $\int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$. 11.45. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy$. 11.46. $\int_{-1}^0 dy \int_{-y-1}^0 f(x, y) dx$.

11.47. $\int_{-1}^0 dy \int_0^{2y+2} f(x, y) dx$. 11.48. $\int_0^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx$. 11.49. $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy$.

11.50. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$. 11.51. $\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx$. 11.52. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy$.

$$\begin{array}{lll}
11.53. \int_0^2 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx & 11.54. \int_0^2 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx & 11.55. \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{2-2x} f(x, y) dy \\
11.56. \int_{-1}^0 dy \int_{-2y-2}^{3y+3} f(x, y) dx & 11.57. \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy & 11.58. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{x}} f(x, y) dy \\
11.59. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{1-x}^{\cos x} f(x, y) dy & 11.60. \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy & 11.61. \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \\
11.62. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy & 11.63. \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx & 11.64. \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{1}{4}y^2-1}^{2-y} f(x, y) dx \\
11.65. \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy & 11.66. \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx & 11.67. \int_{-1}^0 dy \int_y^{2+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
11.68. \int_0^4 dx \int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy & 11.69. \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx & 11.70. \int_0^{1/2} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx \\
11.71. \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy & 11.72. \int_0^3 dy \int_{\frac{3}{4}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx & 11.73. \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy \\
11.74. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy & 11.75. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx
\end{array}$$

В задачах **11.76–11.77** изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного повторного интеграла.

$$11.76. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$11.77. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

§ 2. Вычисление кратных интегралов

В задачах **11.78 – 11.95** вычислить повторные интегралы.

$$\begin{array}{lll}
11.78. \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{2}} x^2 y dy & 11.79. \int_0^4 dx \int_0^{x^2} (x+y) dy & 11.80. \int_{-2}^2 dx \int_0^{2-x} x^2 dy
\end{array}$$

$$11.81. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x+y) dy. \quad 11.82. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2y^2+1} (1-y^2) dx. \quad 11.83. \int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx.$$

$$11.84. \int_0^1 dy \int_y^{y+3} xy^2 dx. \quad 11.85. \int_0^2 dy \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx. \quad 11.86. \int_0^{0.5} dy \int_y^{\sqrt{y}} (4xy + x) dx$$

$$11.87. \int_0^2 dy \int_0^{y^2} \frac{e^{y^2}}{y} dx. \quad 11.88. \int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} xe^y dy. \quad 11.89. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{2y} \sin(2x-3y) dx.$$

$$11.90. \int_0^1 dx \int_0^{4-x^2} xe^{3y} dy. \quad 11.91. \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{0.5}^1 4ye^{2xy} dx. \quad 11.92. \int_0^1 dy \int_0^y 2y^2 e^{xy} dx.$$

$$11.93. \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int_1^2 4y^3 \sin(xy^2) dx. \quad 11.94. \int_{-1}^0 dy \int_{2y}^0 y^2 \cos \frac{\pi xy}{4} dx. \quad 11.95. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy \int_1^2 y \cos xy dx.$$

В задачах **11.96 – 11.115** вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$

по заданной области D в прямоугольных координатах, рационально выбрав порядок интегрирования.

$$11.96. \iint_D x dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x + y \geq 2. \end{cases} \quad 11.97. \iint_D xy dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

$$11.98. \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y \leq 2, \\ xy \geq 1, \\ y \geq x. \end{cases} \quad 11.99. \iint_D \cos(y^2) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x = 0, \\ x = y, \\ y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

$$11.100. \iint_D e^{x^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y = 0, \\ x = 1, \\ y = x. \end{cases} \quad 11.101. \iint_D \frac{dx dy}{x}, \quad \text{где } D: \begin{cases} y = 12x, \\ y = 3x^2. \end{cases}$$

$$11.102. \iint_D (x+y) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y=0, \\ x=0, \\ y=-\sqrt{x+4}. \end{cases} \quad 11.103. \iint_D (x+2y) dx dy,$$

$$\text{где } D: \begin{cases} y=x^2, \\ y=\sqrt{x}. \end{cases} \quad 11.104. \iint_D xy dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y=x, \\ x \geq 0, \\ y=2-x^2. \end{cases} \quad 11.105. \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

$$, \quad \text{где } D: \begin{cases} y=x, \\ x=2, \\ y=\frac{1}{x}. \end{cases} \quad 11.106. \iint_D y dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ x+y \geq 2. \end{cases} \quad 11.107.$$

$$\iint_D 15y^2 dx dy,$$

$$\text{где } D: \begin{cases} y=-x^3, \\ x=1, \\ y=\sqrt[3]{x}. \end{cases} \quad 11.108. \iint_D y \cos(xy) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$11.109. \iint_D (x^2+4y^2) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y=x^2, \\ x=y^2. \end{cases} \quad 11.110. \iint_D x dx dy,$$

$$\text{где } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ y-x \geq 2. \end{cases} \quad 11.111. \iint_D \sin(y^2) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y=2x, \\ x=0, \\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

$$11.112. \iint_D x \sin(xy) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad 11.113. \iint_D e^x dx dy,$$

$$\text{где } D: \begin{cases} x=0, \\ y=e, \\ y=2, \\ y=e^x. \end{cases} \quad 11.114. \iint_D y dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ x+y \leq -2. \end{cases}$$

$$11.115. \iint_D (x+y) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y=x, \\ x=1, \\ 2x+y=6. \end{cases}$$

В задачах **11.116** –**11.137** вычислить двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$ по заданной области D , перейдя к полярным координатам.

$$11.116. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$11.117. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$11.118. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ x \geq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

$$11.119. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3, \\ x \leq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

$$11.120. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y = x, \\ y = -x, \\ x = \sqrt{1 - y^2}. \end{cases}$$

$$11.121. \iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2y. \end{cases}$$

$$11.122. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 3y, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

$$11.123. \iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy, \quad \text{где } D: x^2 + y^2 \leq \pi^2.$$

$$11.124. \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ -x \leq y \leq x. \end{cases}$$

$$11.125. \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ x^2 + y^2 \leq e^2. \end{cases}$$

$$11.126. \iint_D (4 - x) dx dy, \quad \text{где } D: x^2 + y^2 \leq 4x.$$

- 11.127. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, где $D: \begin{cases} y \leq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$
- 11.128. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq -3x, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$
- 11.129. $\iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy$, где $D: x^2 + y^2 + 2x \leq 0$.
- 11.130. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq -2x, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$
- 11.131. $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$, где $D: \begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$
- 11.132. $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq Rx$.
- 11.133. $\iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy$, где $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x \geq 1. \end{cases}$
- 11.134. $\iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$, где $D: \begin{cases} y = x, \\ y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, \\ x = -\sqrt{1-y^2}. \end{cases}$
- 11.135. $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$, где $D: \begin{cases} y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2y. \end{cases}$
- 11.136. $\iint_D \frac{y dx dy}{x}$, где $D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$
- 11.137. $\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$. где $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \pi^2, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}. \end{cases}$

§3. Применение двойных интегралов для вычисления площадей и объёмов фигур

В задачах **11.138 – 11.150** вычислить площади фигур, ограниченных кривыми.

11.138. $xy=4, x+y-5=0.$

11.139. $x=4y-y^2, x+y=6.$

11.140. $y=\frac{3}{2}x, y=4-(x-1)^2, (x \geq 0).$ **11.141.** $x=4, y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}.$

11.142. $xy=1, x=y, x=2.$

11.143. $y=x^2, 4y=x^2, y=4.$

11.144. $xy=1, x=4, y=2.$

11.145. $x+y=1, y^2=x+1.$

11.146. $4x=y^2+4, 16x=y^2+64.$

11.147. $x=y^2-2y, x-y=0.$

11.148. $2y=x^2, y=0, xy=4, x=4.$ **11.149.** $x=y^2, y=2+x, y=2, y=-2.$

11.150. $y=\sin x, y=\cos x, x=0, (x > 0).$ **11.151.** $y=2x, x+y-2=0, y=0.$

В задачах **11.152 – 11.158** вычислить площади фигур, ограниченных заданными кривыми или удовлетворяющих данным неравенствам (от декартовых координат целесообразно перейти к полярным координатам).

11.152. $x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x, (y \geq 0).$

11.153. $x^2+y^2 \leq \sqrt{3}x,$

$x^2+y^2 \leq 3y.$ **11.154.** $x^2+y^2=3y, y=\sqrt{3}x, x=0.$ **11.155.** $x^2+y^2=4x,$

$(y \geq x).$ **11.156.** $x=0, x=\sqrt{4y-y^2}, (y \geq 2).$ **11.157.** $\rho=2(1-\cos\varphi).$

11.158. $\rho=2(1+\cos\varphi), \rho=2\cos\varphi.$

11.159. Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho=2$ из кардиоиды $\rho=2(1+\sin\varphi)$ и расположенную вне круга.

В задачах **11.160. – 11.172.** вычислить объемы тел, ограниченных данными поверхностями.

11.160. $x+y+2z=4, x=0, y=0, z=0.$

11.161. $z=x^2+3y^2, x+y=1, x=0, y=0, z=0.$

11.162. $z=4-x^2, y=0, y=5, z=0.$

11.163. $z=y^2, x+y=2, x=0, y=0, z=0.$

11.164. $z=0, x+z=6, y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}.$

11.165. $z=9-y^2, x+2y=6, x=0, y \geq 0, z=0.$

11.166. $z = \frac{x^2}{2}$, $2x + y - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

11.167. $z = x^2 + y^2 + 2$, $x + y \geq 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$, $y = 3$.

11.168. $z = x^2 + y^2 + 1$, $y = 6 - x$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$.

11.169. $z = \frac{x^3}{3}$, $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, $z = 0$

11.170. $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$, $z = y$, $z = 0$.

11.171. $x + y + z = 4$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

11.172. $x + y + z = 10$, $2x + y = 4$, $x + 2y = 8$, $z = 0$.

§4. Применение двойных интегралов для вычисления физических величин

11.173. Найти массу фигуры, ограниченной прямыми: $x = -1$, $x = 2$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $y = 0$, если плотность $\rho(x, y)$ в каждой точке равна квадрату абсциссы, умноженному на ординату этой точки.

11.174. Найти массу однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 3x$.

11.175. Найти массу пластины, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, если плотность её ρ в каждой точке (x, y) равна $\rho(x, y) = x + 2y$.

11.176. Найти массу круглой пластинки радиуса R , если плотность её $\rho(x, y)$ в каждой точке равна расстоянию от этой точки до центра окружности.

11.177. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y = x^2 - 1$, $y = 2$.

11.178. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y = \sqrt{4 - x}$, $y = 0$, $(x \geq 0)$.

11.179. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y = x^2$, $y + x = 2$, $y = 0$.

11.180. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $x = y^2$, $4x = y^2$, $x = 4$, $y \geq 0$.

11.181. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y = 2x^2$, $y = 4x^2$, $x = 4$.

11.182. Найти статический момент относительно оси OX однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $xy = 4$, $xy = 1$, $x = 2$, $x = 4$.

11.183. Найти статические моменты относительно осей координат меньшей части эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, отсекаемой прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ($\rho = 1$).

11.184. Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной прямыми: $y = 2 - x$, $y = 1$, $x = 2$.

11.185. Найти момент инерции однородной пластинки ($\rho = 1$) относительно оси OX , ограниченной линиями: $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y = 1$, $y = 3$.

11.186. Найти момент инерции относительно оси OY однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y = 1$, $y = 3$.

11.187. Найти момент инерции относительно оси OX однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $x^2 = 4 - y$, $y = 0$.

Глава 12

РЯДЫ

§1. Понятие ряда. Сумма ряда и его сходимость

В задачах **12.1- 12.15** написать общий член ряда.

12.1. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$ **12.2.** $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots$ **12.3.** $2 + \frac{4}{2!} + \frac{6}{3!} + \dots$

12.4. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$ **12.5.** $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$ **12.6.** $\frac{1}{2} + \frac{3!}{2 \cdot 4} +$

$+\frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$ **12.7.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ **12.8.** $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$ **12.9.** $1 - 1 +$

$$\begin{aligned}
& +1 - \dots. \quad \mathbf{12.10.} \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots. \quad \mathbf{2.11.} \quad -\frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \dots. \quad \mathbf{12.12.} \quad -\frac{1}{\ln 2} + \\
& + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \dots. \quad \mathbf{12.13.} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \dots. \quad \mathbf{12.14.} \quad 1 + x + \\
& + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots. \quad \mathbf{12.15.} \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots. \quad \mathbf{12.16.} \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots. \\
\mathbf{12.17.} \quad & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^3+9} + \dots. \quad \mathbf{12.18.} \quad x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots. \\
\mathbf{12.19.} \quad & 1 - 3^2 x + 5^2 x^2 - 7^2 x^3 + \dots. \quad \mathbf{12.20.} \quad (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \dots.
\end{aligned}$$

В задачах **12.21- 12.26** выписать три первых члена ряда.

$$\begin{aligned}
\mathbf{12.21.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}. & \mathbf{12.22.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} 2 + (-1)^n 2. & \mathbf{12.23.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^3+1}}. \\
\mathbf{12.24.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. & \mathbf{12.25.} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}. & \mathbf{12.26.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

В задачах **12.27- 12.34** написать формулу частичной суммы S_n , и вычислить её предел при $n \rightarrow \infty$. Сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

$$\begin{aligned}
\mathbf{12.27.} \quad & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots. & \mathbf{12.28.} \quad & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots. & \mathbf{12.29.} \quad & \frac{1}{1 \cdot 4} + \\
& + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots. & \mathbf{12.30.} \quad & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots. & \mathbf{12.31.} \quad & 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots. \\
\mathbf{12.32.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}. & \mathbf{12.33.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}. & \mathbf{12.34.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

В задачах **12.35- 12.43** проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда.

$$\begin{aligned}
\mathbf{12.35.} \quad & \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots. & \mathbf{12.36.} \quad & 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots. & \mathbf{12.37.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2}. \\
\mathbf{12.38.} \quad & 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots. & \mathbf{12.39.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}. & \mathbf{12.40.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n-1)^4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{12.41.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} & \mathbf{12.42.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^9+1}} & \mathbf{12.43.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+4)} \\
 \mathbf{12.44.} 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots & \mathbf{12.44.} e + \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \dots & \mathbf{12.45.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}
 \end{array}$$

§2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов

В задачах **12.46- 12.61** исследовать ряды на сходимость, применяя признаки сравнения (при необходимости использовать эквивалентность

следующих бесконечно малых последовательностей : $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \arcsin \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}$, $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ (при $n \rightarrow \infty$)).

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{12.46.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} & \mathbf{12.47.} \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} + \frac{\ln 4}{\sqrt{4}} + \dots & \mathbf{12.48.} \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \\
 + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots & \mathbf{2.49.} \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \dots & \mathbf{12.50.} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \\
 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots & \mathbf{12.51.} \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{4} + \sin \frac{1}{8} + \dots & \mathbf{12.52.} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \dots + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \dots \\
 \mathbf{12.53.} \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \dots & \mathbf{12.54.} \frac{1}{\sqrt[4]{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{3 \cdot 4}} + \dots & \\
 \mathbf{12.55.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} & \mathbf{12.56.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5} & \mathbf{12.57.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1}}{n^2 + 1} \\
 \mathbf{12.58.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n^6 + 2n - 2}} & \mathbf{12.59.} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) & \mathbf{12.60.} \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \\
 \mathbf{12.61.} \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{n^3} & &
 \end{array}$$

В задачах **12.62- 12.71** исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера.

$$12.62. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots. \quad 12.63. 2 + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \dots. \quad 12.64. 2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots.$$

$$12.65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{5^n}. \quad 12.66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}. \quad 12.67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{3})^n}.$$

$$12.68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{\sqrt{(n+1) \cdot 3^n}}. \quad 12.69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}. \quad 12.70. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)! \cdot 2^n}.$$

$$12.71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} \cdot \sqrt{n^2 + 3}}{(n-1)!}.$$

В задачах **12.72- 12.83** исследовать ряды на сходимость, применяя радикальный признак Коши.

$$12.72. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n-1} \right)^n. \quad 12.73. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n}. \quad 12.74. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}.$$

$$12.75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{-n}. \quad 12.76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^n}. \quad 12.77. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{8n+4} \right)^{n^2}.$$

$$12.78. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{4n^2+1} \right)^{3n}. \quad 12.79. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+10}{3n-1} \right)^{\frac{n}{3}}. \quad 12.80. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n \cdot 7^{n+1}} \right)^{-n}.$$

$$12.81. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{5n}. \quad 12.82. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\arcsin^n \frac{1}{n}}. \quad 12.83. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n}.$$

В задачах **12.84- 12.91** исследовать ряды на сходимость, применяя интегральный признак Коши.

$$12.84. \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots. \quad 12.85. \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots. \quad 12.86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}.$$

$$12.87. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}. \quad 12.88. \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} + \frac{\sqrt{\ln 3}}{3} + \frac{\sqrt{\ln 4}}{4} + \dots. \quad 12.89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$12.90. \frac{3}{6} + \frac{12}{13} + \dots + \frac{3n^2}{n^3+5} + \dots. \quad 12.91. \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2+1} + \dots.$$

В задачах **12.92 – 12.106** исследовать ряды на сходимость и указать применяемые признаки.

$$\begin{array}{lll}
12.92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3+n^2}. & 12.93. \frac{1 \cdot 2}{9} + \frac{2 \cdot 4}{27} + \frac{3 \cdot 8}{81} + \dots. & 12.94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n \cdot 2^{n+1}}. \\
12.95. \frac{1}{5} + \frac{4}{9} + \frac{7}{13} + \dots. & 12.96. \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{27}} + \dots. & 12.97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}. \\
12.98. \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{9}\right)^1 + \left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots. & 12.99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{2^n}. & 12.100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}. \\
12.101. \frac{6}{4} + \frac{7}{16} + \frac{8}{64} + \dots. & 12.102. \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots. & 12.103. \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+2)}{5^n}. & 12.104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}. & 12.105. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n. \\
12.106. \frac{1}{1+\sin^2 \alpha} + \frac{1}{4+\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{9+\sin^2 3\alpha} + \dots. & &
\end{array}$$

§3. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость

В задачах 12.107- 12.112 доказать, что ряд сходится условно.

$$\begin{array}{lll}
12.107. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots. & 12.108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}. & 12.109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}. \\
12.110. \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \dots. & 12.111. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. & 12.112. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n-1}.
\end{array}$$

В задачах 12.113- 12.120 доказать, что ряд сходится абсолютно.

$$\begin{array}{lll}
12.113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}. & 12.114. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+n^2)}. & 12.115. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^n. \\
12.116. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{4} - \dots. & & 12.117. \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{7}{9 \cdot 4} - \dots.
\end{array}$$

$$12.118. \frac{1}{2!} - \frac{8}{3!} + \frac{27}{4!} - \dots. \quad 12.119. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}. \quad 12.120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n(n+1)}.$$

В задачах **12.121- 12.132** исследовать ряд на сходимость.

$$12.121. -\frac{1}{1+2} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \dots. \quad 12.122. -\ln 2 + \ln 3 - \ln 4 + \dots.$$

$$12.123. -\ln \frac{4}{3} + \ln \frac{5}{5} - \ln \frac{6}{7} + \dots. \quad 12.124. \frac{1}{2 \ln^2 2} - \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} - \dots.$$

$$12.125. -\frac{1}{2-\sqrt{1}} + \frac{1}{4-\sqrt{2}} - \frac{1}{6-\sqrt{3}} + \dots. \quad 12.126. \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots.$$

$$12.127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n-1) \cdot 5^n}. \quad 12.128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{3n^2 \sqrt{n}}. \quad 12.129. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{5^{n^2}}{n^n}.$$

$$12.130. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}. \quad 12.131. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\cos 2n}{5^n}. \quad 12.132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n \cdot (n+1)}.$$

§4. Функциональные ряды.

В задачах **12.133- 12.146** определить область сходимости степенного ряда, используя признак Даламбера.

$$12.133. 1 + x + x^2 + \dots. \quad 12.134. x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots. \quad 12.135. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots.$$

$$12.136. 1 + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{\sqrt{4}} + \dots. \quad 12.137. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots.$$

$$12.138. 1 + \frac{3x}{2^2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{9x^2}{4^2 \cdot \sqrt{4}} + \frac{27x^3}{6^3 \cdot \sqrt{6}} + \dots. \quad 12.139. x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

$$12.140. 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots. \quad 12.141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^{2n-2}}{n}. \quad 12.142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!}.$$

$$12.143. \frac{(x+4)}{3} + \frac{(x+4)^3}{9} + \frac{(x+4)^5}{27} + \dots. \quad 12.144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2\sqrt{n}+3) \cdot 4^n}.$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{12.145.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2 + 1} \cdot \left(\frac{4x-1}{7} \right)^n. & \mathbf{12.146.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3n+1}. & \mathbf{12.147.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}}. \\
 & \mathbf{12.148.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{n^n}. & \mathbf{12.149.} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}. & \mathbf{12.150.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}.
 \end{aligned}$$

В задачах **12.151-12.162** определить интервал сходимости степенного ряда (используя формулу радиуса сходимости) и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{12.151.} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-1}}. & \mathbf{12.152.} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot x^n. & \mathbf{12.153.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}. \\
 & \mathbf{12.154.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2}. & \mathbf{12.155.} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{3n-1}. & \mathbf{12.156.} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot \ln n}. \\
 & \mathbf{12.157.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}. & \mathbf{12.158.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n \cdot 2^{n+1}}. & \mathbf{12.159.} \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n. \\
 & \mathbf{12.160.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. & \mathbf{12.161.} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n. & \mathbf{12.162.} \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.
 \end{aligned}$$

§5. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближённым вычислениям

В задачах **12.163-12.174** разложить данные функции в ряд Маклорена, пользуясь разложениями в ряд функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{12.163.} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). & \mathbf{12.164.} \ln(5+x). & \mathbf{12.165.} x \ln(1+x). & \mathbf{12.166.} \sin^2 x. \\
 & \mathbf{12.167.} \cos(x-\alpha). & \mathbf{12.168.} \sin\left(mx + \frac{\pi}{4}\right). & \mathbf{12.169.} \cos^2 3x. & \mathbf{12.170.} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \\
 & \mathbf{12.171.} \sqrt{1+x^2}. & \mathbf{12.172.} \sqrt[5]{x+32}. & \mathbf{12.173.} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. & \mathbf{12.174.} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

В задачах **12.175-12.188** разложить данные функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности заданной точки x_0 .

$$12.175. f(x) = x^4 - 4x^2, \quad x_0 = -2.$$

$$12.176. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 3.$$

$$12.177. f(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad x_0 = 1.$$

$$12.178. f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$12.179. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = -1.$$

$$12.180. f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 1.$$

$$12.181. f(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$12.182. f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}, \quad x_0 = 1.$$

$$12.183. f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$12.184. f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{8}.$$

$$12.185. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x_0 = 1.$$

$$12.186. f(x) = \ln(x-3), \quad x_0 = 4.$$

$$12.187. f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 4.$$

$$12.188. f(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad x_0 = 2.$$

В задачах **12.189- 12.198** вычислить значение функции с указанной точностью δ .

$$12.189. \cos 12^0, \quad \delta = 0,01. \quad 12.190. \sin 10^0, \quad \delta = 0,001. \quad 12.191. \cos 1^0,$$

$$\delta = 0,001. \quad 12.192. \sin 1, \quad \delta = 0,0001. \quad 12.193. \operatorname{tg} 9^0, \quad \delta = 0,001.$$

$$12.194. \sqrt[3]{70}, \quad \delta = 0,001. \quad 12.195. \sqrt[5]{40}, \quad \delta = 0,01. \quad 12.196. \sqrt[3]{500}, \quad \delta = 0,001.$$

$$12.197. \frac{1}{e}, \quad \delta = 0,0001. \quad 12.198. e^{-\frac{1}{4}}, \quad \delta = 0,0001.$$

В задачах **12.199- 12.206** вычислить значение определённого интеграла с указанной точностью δ .

$$12.199. \int_0^{0,5} x \cos x^3 dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$12.200. \int_0^{0,5} \cos 4x^2 dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$12.201. \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx, \quad \delta = 0,01.$$

$$12.202. \int_0^{0,4} \frac{1 - e^{\frac{x}{4}}}{x} dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$12.203. \int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$12.204. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}, \quad \delta = 0,001.$$

12.205. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx,$ $\delta = 0,001.$

12.206. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx,$ $\delta = 0,001.$

Глава 13 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Элементы комбинаторики

- 13.1.** Сколькими способами можно расставить на книжной полке пятитомник С. Есенина, располагая их в произвольном порядке ?
- 13.2.** Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так чтобы они не могли взять друг друга?
- 13.3.** Сколькими способами три награды (за 1, 2 и 3 места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований ?
- 13.4.** Правление банка выбирает из 8 кандидатов трех человек на разные должности (все кандидаты имеют равные шансы). Сколько возможных групп по три человека можно составить?
- 13.5.** Правление коммерческого банка выбирает из 8 кандидатов 3 человек на одинаковые должности (все кандидаты имеют равные шансы). Сколько возможных групп по три человека можно составить? (Сравните с предыдущей задачей).
- 13.6.** Код дверного замка состоит из трех цифр, причем дверь открывается только в том случае, если верные три кнопки нажать одновременно. Сколько существует способов создания такого кода?
- 13.7.** Из трех юристов и восьми экономистов должна быть создана комиссия в составе шести человек. Скольким числом способов это можно сделать, если в комиссию должен входить хотя бы один юрист?
- 13.8.** Сколькими способами можно разделить 12 различных учебников между четверью студентами так, чтобы каждому досталось по 3 учебника?
- 13.9.** Сколькими способами можно переставить буквы слова « логарифм» так, чтобы гласные буквы остались на своих местах?
- 13.10.** Сколькими способами можно раскрасить диаграмму из четырёх столбцов четырёхцветной ручкой так, чтобы каждый столбец был окрашен в свой цвет?
- 13.11.** Сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5, 7, чтобы все цифры в числе были разные?
- 13.12.** Сколько можно составить четырехзначных чисел из пяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, чтобы все цифры в числе были разные?

13.13. У одного человека 7 разных книг, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом двумя книгами?

§ 2. Классическое определение вероятностей.

13.14. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) сумма выпавших очков равна 7; 2) сумма выпавших очков равна 8, а разность равна 4; 3) сумма выпавших очков равна 8, если известно, что разность равна 4; 4) сумма выпавших очков равна 5, а произведение равно 4.

13.15. Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

13.16. В коробке 6 одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера всех извлечённых кубиков появятся в возрастающем порядке.

13.17. В первом ящике находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5, во втором – с номерами 8, 7, 8, 9, 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: 1) не меньше 7; 2) равна 11; 3) не больше 11?

13.18. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков, одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенных граней: 1) одну; 2) две; 3) три; г) ни одной окрашенной грани.

13.19. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманное двузначное число окажется: 1) случайно названным двузначным числом; 2) случайно названным двузначным числом, цифры которого различны.

13.20. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

13.21. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны наудачу вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

13.22. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны наудачу вынимают один шар и, не глядя, откладывают в сторону. После этого из урны берут ещё один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже белый.

13.23. Абонент забыл две последние цифры номера телефона, помнил лишь, что одна из них ноль, а другая – нечётная и набрал их наугад. Найти вероятность, что набраны верные цифры

13.24. В лифт 20-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека и поехали. Найти вероятность того, что: 1) они выйдут на разных этажах;

2) двое выйдут на одном этаже; 3) все выйдут на одном этаже.

13.25. Какова вероятность, что в 4-х сданных картах будет 1 туз и 1 валет?

13.26. Шесть шаров случайным образом раскладывают в 3 ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

13.27. При игре в русское лото из мешка поочерёдно извлекают все 90 бочонков (с различной нумерацией). Найти вероятность того, что бочонки извлекают в порядке убывания нумерации.

13.28. При игре в русское лото из мешка поочерёдно извлекают 86 бочонков (с различной нумерацией). Найти вероятность того, что бочонки появятся в строго убывающем порядке, начиная с бочонка под номером 90 (точнее появятся в таком порядке: 90, 89, 88, ..., 6, 5).

13.29. Найти вероятность угадать в лотерее «6 из 49» (когда извлекают 6 чисел из различных 49 чисел) при заполнении одного варианта: 1) все шесть номеров; 2) три номера.

13.30. У экзаменатора имеется 15 вопросов, среди которых 10 выучены студентом. Экзаменатор наудачу задаёт три вопроса. Какова вероятность того, что: 1) студент получит 5, т.е. все три заданных вопроса были выучены студентом; 2) студент получит 4, т.е. два из заданных вопросов были выучены студентом; 3) студент получит 3, т.е. только один из заданных вопросов был выучен студентом; 4) студент получит 2, т.е. ни один из заданных вопросов не были выучены студентом.

13.31. Студент знает 20 вопросов из 25. В экзаменационном билете три вопроса. Взяв билет, студент увидел, что первый вопрос он знает. Чтобы сдать экзамен нужно ответить на все вопроса билета. Какова вероятность того, что студент: а) сдаст экзамен; б) не сдаст экзамена?

13.32. В конверте 100 фотокарточек. Одну ищут. Из конверта достают 10 фотокарточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

13.33. В лотерее 1000 билетов: 500 выигрышных и 500 невыигрышных. Куплено два билета. Какова вероятность того, что: 1) оба билета выигрышные; 2) один билет выигрышный, а другой – невыигрышный.

13.34. В партии из 50 деталей имеется 28 стандартных. Наудачу отобрано 15 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 7 стандартных (указать только формулу).

13.35. В коробке 5 одинаковых изделий, причём три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлечённых изделий окажется: 1) одно окрашенное изделие; 2) два окрашенных изделия; 3) хотя бы одно окрашенное изделие.

13.36. Группа из 8 человек занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что 2 определённых лица кажутся рядом, если: 1) число мест равно 8; 2) число мест равно 12.

13.37. Игроку в покер сдаётся 5 карт (в колоде 52 карты). Найти вероятность того, что: 1) будут сданы две десятки и два валета; 2) сдан флеш – 5 карт одной масти; 3) сдано каре – 4 карты одного номинала.

§ 3. Геометрические вероятности

13.38. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

13.39. В круг радиуса R помещён круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадёт также и малый. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

13.40. На плоскости 2 концентрических окружности ($R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см). В большой круг брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадёт и в кольцо, образованное соответствующими окружностями.

Предполагается, что вероятность попадания в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры.

13.41. Круглый диск радиуса R разбит на два сектора. Длина дуги одного из них равна радиусу R . По быстро вращающемуся диску произведён выстрел. Цель поражена. Найти вероятность того, что попали в меньший сектор.

13.42. Быстро вращающийся диск разделён на чётное число секторов равной площади, попеременно окрашенных в чёрный и белый цвет. По диску произведён выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадёт в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

13.43. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из прямых.

13.44. На плоскость с нанесённой сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от её расположения.

13.45 Два студента условились о встрече в определённом месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждёт второго в течение $\frac{1}{4}$ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

13.46. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

§4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события

13.47. Безотказная работа прибора определяется работой двух узлов, соединённых последовательно. Вероятность безотказной работы i -ого узла равна: $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,8$. Узлы работают независимо друг от друга. Какова вероятность безотказной работы всего прибора.

13.48. Внутри круга радиуса R вписан правильный треугольник. Внутри круга наудачу одновременно брошены 4 точки. Найти вероятность того, что: а) все 4 точки попадут внутрь треугольника; б) только одна точка попадёт внутрь треугольника; в) хотя бы одна точка попадёт внутрь треугольника.

13.49. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна $0,1$. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий лишь одно стандартно.

13.50. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

13.51. В ящике 10 деталей, из них 4 окрашены. Сборщик взял наудачу три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

13.52. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна $0,7$, для второго – $0,8$. Найти вероятность того, что при одном выстреле лишь один стрелок попадёт в мишень.

13.53. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,6, третьим – 0,3. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадёт в цель, а другие промахнутся?

13.54. Вероятность того, что в течение дня произойдёт неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение 4 дней подряд не будет ни одной неполадки?

13.55. В два банка положены деньги. Банки работают независимо друг от друга. Вероятность разорения первого банка равна 0,15, а второго - 0,3. Какова вероятность того, что деньги сохранятся хотя бы в одном из банков.

13.56. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3, 0,4, 0,6, 0,7.

13.57. Три исследователя, независимо друг от друга, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показания прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователя эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один исследователь допустит ошибку.

13.58. В магазине имеются 10 мужских и 6 женских пальто. Для проверки качества отобрали 3 пальто случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных пальто окажутся :

- 1) только мужские пальто;
- 2) только мужские пальто или только женские.

13.59. В порт приходят корабли только из трёх пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6. Какова вероятность прибытия корабля из третьего пункта ?

13.60. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх накладных только две оформлены правильно.

13.61. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные.

13.62. На предприятие поступают заявки от нескольких торговых пунктов. Вероятности поступления заявок от пунктов A и B равны соответственно 0,5 и 0,4. Найти вероятность поступления заявок от пункта A или B , считая события поступления заявок независимыми, но совместными.

13.63. В районе находятся 100 посёлков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два посёлка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

13.64. В урне два белых и три чёрных шара. Два игрока поочерёдно вынимают без возвращения по одному шару. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. У кого из игроков больше шансов выиграть?

13.65. Студент знает 40 вопросов программы из 50. Экзаменатор задаёт ему вопросы до тех пор, пока не обнаруживает пробел в знаниях студента. Найти вероятность того, что будут заданы: 1) один вопрос; 2) два вопроса; 3) три вопроса; 4) более трёх вопросов.

§ 5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

13.66. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну с 5 дорогами. Вероятности выхода из леса в течение часа по этим дорогам равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность выхода из леса в течение часа?

13.67. В вычислительной лаборатории 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что время выполнения расчёта автомат не выйдет из строя, равна 0,95, а полуавтомат – 0,8. Студент производит расчёт на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчёта машина не выйдет из строя.

13.68. В урне находятся 2 шара. В неё опущен белый шар, затем наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что извлекли белый шар (все предположения о первоначальном наборе шаров в урне равновозможны).

13.69. В пирамиде 5 винтовок, причём 3 винтовки снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом – 0,95, а из винтовки без оптического прицела – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведёт один выстрел из наудачу взятой винтовки.

13.70. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

13.71. В городе 10 банков, шесть из них разорятся с вероятностью $p_1 = 0,1$, четыре – с вероятностью $p_2 = 0,4$. Найти вероятность сохранения вклада, если деньги доверены наудачу одному из банков.

13.72. В пирамиде 10 винтовок, причём четыре с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень с первого выстрела из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

13.73. 45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на 1-м заводе, 15% - на 2-м, остальные – на 3-м заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,90 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

13.74. Прибор состоит из двух дублирующих узлов и может функционировать в одном из режимов – благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме, вероятность которого равна 0,7, надёжность (вероятность безотказной работы) каждого узла равна 0,92, а в неблагоприятном их надёжность всего 0,65. Найти полную надёжность прибора.

13.75. Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. При одном попадании в мишень вероятность поражения цели равна 0,2, при двух – равна 0,6, а при трёх – цель заведомо поражается. Найти вероятность поражения цели.

13.76. При переливании крови надо учитывать группу крови и резус-фактор донора и пациента. Ограничимся только случаем положительного резус-фактора. Совместимость групп крови донора и больного представлена следующим образом: 1-ю группу можно вливать во все группы, 2-ю – во 2-ю и 4-ю, 3-ю – в 3-ю и 4-ю группы, 4-ю – только в 4-ю группу крови. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью и 7,9% – четвёртую группу крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

13.77. В инвестиционном портфеле фирмы имеются акции трёх компаний 1-ой, 2-ой, и 3-ей в соотношении 4:3:2. Рискованность акций первой компании составляет 4% (т.е. вероятность потерять вложенный капитал равна 0,04), акций второй – 7%, акций третьей – 9%. Каков общий средний риск данного инвестиционного портфеля?

13.78. В студенческой группе 70%- юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал 1) юноше, 2) девушке

13.79. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

13.80. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет запраиваться грузовая маши-

на, равна 0,1, легковая – 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

13.81. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому набору перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, вторая – 0,1. При сверке перфокарт обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица (перфораторы – исправны).

13.82. В пирамиде 10 винтовок, причём четыре с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень с первого выстрела из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

13.83. В городе находится 5 банков. Вероятность того, что деньги сохранятся в 2-х банках («хороших») равна 0,9, а в остальных банках («плохих») равна 0,5. Вкладчик сохранил деньги в наудачу взятом банке. Что вероятнее: вкладчик держал деньги в «хорошем» банке или в «плохом»?

13.84. Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек: 1) мужчина, 2) женщина.

13.85. Датчик системы безопасности срабатывает в 97% случаев несанкционированного проникновения в помещение. При отсутствии такого проникновения он реагирует на изменение физических параметров среды (т.е. ложно срабатывает) в 6% случаев. Зафиксировано срабатывание датчика. Какова вероятность того, что кто-то несанкционированно проник в охраняемое помещение, если априорные вероятности наличия и отсутствия посторонних одинаковы?

§ 6. Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона

13.86. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) два раза; б) менее двух раз; в) не менее двух раз.

13.87. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти (ничьи во внимание не принимаются).

13.88. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из 2-х или 2 партии из 4-х; б) выиграть не менее 2-х партий из 4-х или не менее 3-х партий из 5-ти? Ничьи во внимание не принимаются.

13.89. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми автомашин, на автобазе всего десять машин. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0.1. Найти вероятность нормальной работы автобазы.

13.90. а) Найти вероятность того, что событие A появится не менее 3-х раз в 4-х независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

б) Событие B появится в случае, если событие A наступит не менее 4-х раз. Найти вероятность наступления события B , если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8.

13.91. Отрезок AB разделён точкой C в отношении 2:1. На отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что 2 точки окажутся слева от точки C , две точки – справа (вероятность попадания на отрезок пропорциональна длине отрезка).

13.92. Лампа электрического освещения перегорает в месяц с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что из 5 ламп в помещении за месяц придется заменить хотя бы одну?

13.93. Найти вероятность того, при 600 выстрелах мишень будет поражена ровно 250 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,4.

13.94. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

13.95. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

13.96. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

13.97. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 раз; б) не менее 1470 раз и не более 1500 раз; в) не более 1470 раз.

13.98. При вытаскивании болтов наблюдается в среднем 10% брака. Какова вероятность того, что в партии из 400 болтов окажутся пригодными более 349?

13.99. В радиоаппаратуре за 10000 часов непрерывной работы происходит замена десяти ламп. Требуется подсчитать вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 100 часов непрерывной работы.

13.100. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,004. Производится выборка из в количестве 50 изделий. Найти вероятность того, что в выборке не окажется бракованных изделий.

13.101. На телефонной станции в течении одного часа возникает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что в течение одной минуты возникнет ровно 2 вызова?

13.102. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытание.

13.103. В некоторой лотерее из каждой тысячи выпущенных билетов выигрывают 10. Какова вероятность того, что из 60 приобретённых билетов этой лотереи выигрют 3 билета?

13.104. В некоторых условиях вероятность попасть в цель при каждом выстреле равна 0,01. Найти вероятность того, что при 500 выстрелах в таких же условиях не менее двух попаданий в цель.

13.105. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Глава 14

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§1. Распределение случайных величин

14.1. Вероятности работы каждого из пяти независимых станков на участке равны 0,7. Найти ряд распределения и функцию распределения для величины L – количества работающих станков на участке. Построить график функции распределения.

14.2. Вероятности работы трех независимых станков на участке равны 0,4, 0,7, 0,8 соответственно. Построить закон распределения для величины L – количества работающих станков на участке.

14.3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Вынимается наудачу 3 шара. Составить закон распределения числа белых шаров среди вынутых трех шаров.

14.4. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания, или до окончания патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7, а при каждом последующем выстреле она уменьшается на 0,1. Составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником.

14.5. Два спортсмена бросают мяч в корзину с вероятностями попадания при каждом броске 0,8 для первого и 0,7 для второго спортсмена. Всего мяч бросается 5 раз. Составить закон распределения для числа попаданий в корзину, если мяч начинает бросать первый спортсмен.

14.6. Случайная величина $X = \Delta(a; b; c)$ задается на интервале $(a; b)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \frac{x-a}{c-a}, & x \leq c \\ A \cdot \frac{b-x}{b-c}, & x \geq c \end{cases}$$

Вычислить значение величины A , и функцию распределения случайной величины. График функции распределения построить.

14.7. Случайная величина $X = \Delta(-1; +1; 0)$ задается на интервале $(-1; +1)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot (1+x), & x \leq 0, \\ A \cdot (1-x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислить значение величины A , и функцию распределения случайной величины. График функции распределения построить.

14.8. Случайная величина X задается на интервале $(0; \pi)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = A \sin x$. Определить значение постоянной A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$ и вычислить вероятность нахождения величины X в интервале $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

14.9. Случайная величина X задается на интервале $(0; 2)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = Ax$. Определить значение постоянной A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$ и вычислить вероятность нахождения величины X в интервале $(0,5; 1,5)$.

14.10. Случайная величина X задается на интервале $(0; \infty)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. Определить функцию распределения $F(x)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$. При $\lambda = 1$ вычислить вероятность нахождения величины X в интервале $(0; 2)$. Определить обратную функцию распределения и правостороннюю квантиль по уровню 0,1.

14.11. Двое студентов независимо задумали наудачу по действительному числу в интервале $(0; 10)$. Какова вероятность того, что их сумма будет меньше чем величина $Z = 15$? Построить график функции распределения величины Z в интервале $(0; 20)$.

14.12. Поезда метрополитена идут регулярно с периодом 5 минут. Пассажир приходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ему придется ждать поезд более 3-х минут?

14.13. Время ремонта телевизора в мастерской есть случайная величина, распределенная по показательному закону $X = E(\lambda)$, а среднее время ремонта 15 дней. Какова вероятность того, что ремонт телевизора продлится более 20 дней.

14.14. Вычислить функции распределения и плотности распределения вероятности для случайной величины $Y = X^2$, где $X = Rn(0;1)$ –равномерная непрерывная случайная величина, определенная на интервале $(0,1)$.

§2. Числовые характеристики случайных величин

14.15. В урне 5 белых и 3 черных шаров. Вынимается наудачу 4 шара. Составить закон распределения числа белых шаров среди вынутых четырех шаров. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

14.16. Вероятность отказа в работе каждого из пяти независимо работающих лифтов в здании определяется вероятностью $p=0,2$. Построить закон распределения для величины L – количества работающих станков на участке. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

14.17. При каждой стрельбе по мишени в тире клиент делает успешный выстрел с вероятностью p . Клиент не покидает тир до 1-го удачного выстрела. Построить закон распределения для величины L – количества произведенных клиентом выстрелов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

14.18. Непрерывная случайная величина $X = Rn(a;b)$ является равномерной и задается на интервале $(a;b)$. Вычислить значения математического ожидания и дисперсии случайной величины.

14.19. Случайная величина X задается на интервале $(-1;+1)$ следующей функцией плотности распределения вероятности $f(x) = A \cdot (1 - x^2)$. Вычислить значения величин A , математического ожидания и дисперсии случайной величины.

14.20. Случайная величина X задается на интервале $(-1;+1)$ следующей функцией плотности распределения вероятности $f(x) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Вычислить значения величин A , математического ожидания и дисперсии случайной величины.

14.21. Треугольная случайная величина $X = \Delta(a;b;c)$ задается на интервале $(a;b)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \frac{x-a}{c-a}, & x \leq c \\ A \cdot \frac{b-x}{b-c}, & x \geq c \end{cases}$$

Вычислить значение величины A , математическое ожидание случайной величины и её дисперсию.

14.22. Показательная случайная величина $X = E(\lambda)$ задается на интервале $(0;\infty)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. Вычислить значения математического ожидания и дисперсии случайной величины, а так же её медиану.

14.23. Случайная величина $X = \Delta(0;3;1)$ задается на интервале $(0;3)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{при } x \leq 1 \\ A \frac{3-x}{2} & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

Вычислить значения величины A , математического ожидания, дисперсии и медианы случайной величины.

14.24. Случайная величина $X = \Delta(-3;+3;0)$ задается на интервале $(-3;+3)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \frac{x+3}{3} & \text{при } x \leq 0, \\ A \frac{3-x}{2} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислить значения величины A и границы центральной квантили, где случайная величина находится с вероятностью 0.9?

14.25. Случайная величина Вигнера имеет полукруговое распределение

$f(x) = A \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$. Вычислить значения величины A , математического ожидания, дисперсии и медианы случайной величины.

§3. Нормально распределенная случайная величина

14.26. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{50}}$. Чему равны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины.

данные a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины.

14.27. Измерение скорости автомашин на определенном участке дороги показало, что она распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 60 км/час и среднеквадратичным отклонением 10 км/час. Найти вероятность того, что скорость машин не превысит 80 км/час. Вычислить вероятность нахождения скорости машины в интервале от 50 км/час до 70 км/час.

14.28. Размер детали, выпускаемой цехом, есть нормально распределенная случайная величина со средним значением 15 см и дисперсией 1,44 см². Найти вероятность того, что размер наудачу взятой детали отличается от среднего не более чем на 2 см.

14.29. Рассеивание снарядов по дальности при стрельбе подчинено нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 20 м. Определить вероятность разрушения цели, если перелет и недолет должны составить не более 15 м.

14.30. Время выполнения определенной работы РСУ колеблется от 6 до 9 часов. Какова вероятность выполнения этой работы менее чем за 8 часов? Считать время выполнения работы распределенным по нормальному закону.

14.31. Размер пятой фракции щебня есть нормально распределенная случайная величина со средним значением 5 см и дисперсией 0,81 см². Какой максимальный размер щебня во фракции можно гарантировать с вероятностью 0,99.

14.32. Ошибка при изготовлении детали размера 15см. есть нормально распределенная случайная величина с дисперсией $0,04 \text{ см}^2$. Какую точность размера можно гарантировать с вероятностью 0,99.

14.33. Цена хорошего автомобиля заданного класса на вторичном рынке есть нормальная случайная величина $X = N(350 \text{ т.р.}, 50 \text{ т.р.})$. Вам предлагают купить такой автомобиль менее чем за 250т.р. и уверяют в том, что это автомобиль «хороший». Какова вероятность вашей ошибки, если вы, не поверив продавцу, откажетесь от покупки этого автомобиля.

14.34. Вычислить функции распределения и плотности распределения вероятности для случайной величины $Y = X^2$, где $X = N(0;1)$ стандартная случайная нормальная величина.

14.35 Даны законы распределения двух случайных величин:

x_i	-1	0	1
p_i	0.3	0.2	0.5

y_i	0	1	3
p_i	0.1	0.3	0.6

Составить закон распределения их произведения. Проверить выполнение формулы $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$

14.36. Даны законы распределения двух случайных величин:

x_i	-4	0	4
p_i	0.25	0.5	0.25

y_i	2	4	6
p_i	0.2	0.3	0.5

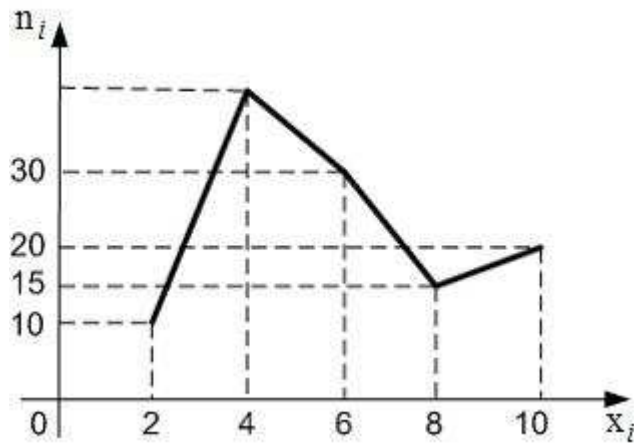
Составить закон распределения их суммы. Проверить выполнение формулы $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Глава 15

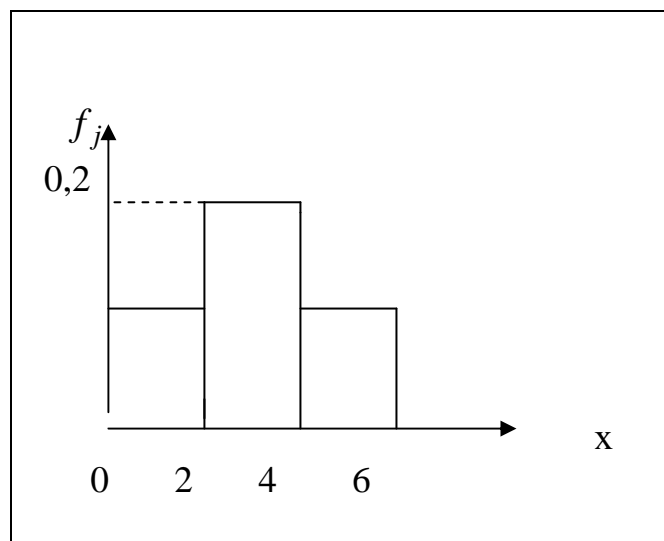
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§1. Выборочный метод. Выборочные представления и выборочные числовые характеристики.

15.1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=120$, полигон частот которой имеет вид, изображенный на рисунке. Чему равна относительная частота варианты $x_2=4$ в выборке?



15.2. На рисунке приведена гистограмма плотности относительных частот f_j выборки x_B объемом $n=20$. Сколько значений выборки находятся в третьем интервале значений от 4 до 6.



15.3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 110$:

x_i	4	6	8	10	12	14
n_i	10	15	20	25	30	n_6

Чему равно значение n_6 ?

15.4. Статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	1	4	7	10	13
w_i	0,32	w_2	0,24	0,16	0,08

Чему равно значение относительной частоты w_2 ?

§2. Статистические оценки неизвестных параметров распределения случайных величин

15.5. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна несмещенная оценка математического ожидания?

15.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна несмещенная оценка среднеквадратического отклонения?

15.7. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна интервальная оценка математического ожидания m_x при надежности 0,95?

15.8. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна интервальная оценка для среднеквадратического отклонения σ_x при надежности 0,99?

15.9. Глубина моря измеряется прибором без систематических ошибок, а случайная ошибка имеет нормальное распределение со среднеквадратическим отклонением 15м. Сколько нужно сделать независимых измерений,

чтобы определить глубину моря с ошибкой не более 5м при надежности оценки равной 0,9.

15.10. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 31; 33; 35; 36; 37. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна ...

15.11. Дан доверительный интервал (32,6;41,1) для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда чему равна точечная оценка математического ожидания равна ?

15.12. Дан доверительный интервал (22,15;23,65) для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна ...

15.13. По выборке 16 наблюдений вычислена дисперсия наблюдаемой величины равная 64 м^2 . По уровню надежности 0,99 построить доверительный интервал для среднеквадратического отклонения.

15.14. Для полученной в наблюдениях выборки вычислена дисперсия в 14 ед^2 . и стандартное отклонение в 4 ед. Каков объем полученной выборки.

§3. Проверка статистических гипотез.

15.15. Цена автомобиля заданного класса в хорошем состоянии на вторичном рынке есть нормальная случайная величина $X = N(350 \text{ т.р.}, 50 \text{ т.р.})$. Вам нужно купить такой автомобиль желательно дешевле. Какова для вас нижняя критическая цена на предлагаемые автомобили, если вы, не желая рисковать, готовы отказаться от хорошего автомобиля с вероятностью не более 0,05.

15.16. По выборке 16 наблюдений за нормальной случайной величиной вычислено ее среднее выборочное равное 5,7м и дисперсия 64 м^2 . По уровню значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что значение математического ожидания наблюдаемой величины равно 8м.

15.17. По выборке 16 наблюдений за нормальной случайной величиной вычислено ее среднее выборочное равное 5,7м и выборочная дисперсия 72 м^2 . По уровню значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что значение дисперсии наблюдаемой величины равно 64 м^2 .

15.18. Имеются две выборки наблюдений объема 15 и 25 измерений. По ним вычислены средние значения в 15 и 16,3 соответственно, а соответствующие выборочные дисперсии равны 20 и 18. Проверить гипотезу о равенстве

дисперсий и математических ожиданий μ у наблюдаемых в выборках случайных величин при уровне значимости гипотез 0,05.

15.19. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 20$

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности с математическим ожиданием равным выборочному среднему и дисперсии равной выборочной дисперсии.

Количество интервалов в критерии Пирсона взять равным 4.

15.20. При наблюдении за пятью признаками, по 16 измерениям была построена регрессионная зависимость с коэффициентом детерминации равным 0,5. Что можно сказать о его значимости по уровню 0,05.

15.21. В эксперименте получены выборки одновременно наблюдаемых случайных величин X и Y , с выборочными дисперсиями $D_x=0,81$; $D_y=0,64$. уравнение линейной среднеквадратической регрессии имеет вид: $y+0,28x=1$. Определить выборочный коэффициент корреляции ρ_{xy} ?

15.22. При построении тренда двух переменных с выборочными дисперсиями 25 и 36 полученными по 15 измерениям, был получен коэффициент наклона тренда для второй переменной равным 0,75. Что можно сказать о значимости тренда по уровню 0,01.

15.23. В четырех студенческих группах проведена контрольная работа, в первой верно решено 60 из 105 задач, во второй 69 из 140, в третьей 63 из 125 и в четвертой 105 из 160. По уровню значимости 0,05 проверить гипотезу о несущественном различии в усвоении материала учебными группами.

ОТВЕТЫ

Глава 10

10.20. $(a^2 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$. 10.33. $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$. 10.34. $y = Cx$.

10.35. $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$. 10.36. $y = \frac{C}{x}$. 10.37. $y = -\frac{2}{x^2 + 2C}$.

10.38. $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$. 10.39. $\sqrt{2y+1} = Cx$. 10.40. $y = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

10.41. $\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$. 10.42. $\sqrt{2y-1} = C\sin x$. 10.43. $y = \frac{C}{1-x} - 1$.

10.44. $\sqrt{y^2+1} = \ln|Cx|$. 10.45. $\operatorname{arctg} x = \sqrt{y^2+3} + C$. 10.46. $2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \ln|Cy|$.

10.47. $\frac{\ln^2 y}{2} = x + C$. 10.48. $y = e^{\frac{C}{x}}$. 10.49. $\frac{y^2}{2} = \ln|4 + e^x| + C$.

10.50. $y = -\frac{1}{\ln|C\cos x|}$. 10.51. $\sqrt{(x^2+3)^3} = C(y^2+2)$. 10.52. $\ln|y| + y =$

$= C - x\cos x + \sin x$. 10.53. $\operatorname{arctg} y = 2\sqrt{2-x^2} + C$. 10.54. $\ln|\sin y| =$

$= C + \frac{1}{2}e^{(x-1)^2}$. 10.55. $y = \frac{C}{\cos x} - 1$. 10.56. $y = \frac{x+1}{x}$. 10.57. $\operatorname{arctg} y =$

$= \ln|x| + 1$. 10.58. $1-x^2 = \frac{2}{1+y^2}$. 10.59. $y = e^{\operatorname{ctg} x}$. 10.60. $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + C$.

10.61. $2(\sqrt{y}-1) = \cos x$. 10.62. $\cos y = \cos x$. 10.63. $y = e^{\arccos x}$.

10.64. $y = x$. 10.65. $\frac{1-2^y}{\ln 2} = 1 - e^{-x}$. 10.66. $\ln^2 y = 2\ln|x|$. 10.67. $y = 3 -$

$-e^{-x}(2x+3)$. 10.68. $e^{-y}(y+1) = \frac{x^2+1}{2}$. 10.69. $e^{y-x} = x-1$.

10.70. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y^3 - \frac{\pi}{12}$. 10.71. $xy = -4$. 10.72. $y = \frac{2x}{1-x}$.

10.73. $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$. 10.74. 200м. 10.75. $v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right)$.

10.76. $S = 40\text{м}$, $v = \frac{20}{9}\text{м/с}$. 10.77. $Cx = \frac{x+y}{2x+y}$. 10.78. $\sqrt{x(x+2y)} = C$.

10.79. $x+y = Cx^2$. 10.80. $\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}} = Cx$. 10.81. $y = C \cdot e^{\frac{y}{x}}$.

$$10.82. y = x \cdot \operatorname{tg}(\ln C \sqrt{x^2 + y^2}). \quad 10.83. \frac{y}{x} + \ln \left| \frac{y^2}{Cx} \right| = 0. \quad 10.84. y \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^3.$$

$$10.85. y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^3. \quad 10.86. 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{C(x^2 + y^2)^3}{x^5}.$$

$$10.87. y = -\frac{x}{\ln |Cx|}. \quad 10.88. Cx = e^{-\cos \frac{y}{x}}. \quad 10.89. y = x \operatorname{arctg}(\ln x - C).$$

$$10.90. y = x \operatorname{arctg}(\ln x + C). \quad 10.91. \ln Cx = -e^{\frac{y}{x}}. \quad 10.92. -\ln 2 \ln Cx = 2 \frac{y}{x}.$$

$$10.93. y = x \sin(\ln xC). \quad 10.94. \ln x = C - e^{\frac{x}{y}}. \quad 10.95. 2e^x(2-x) = x.$$

$$10.96. y = x \operatorname{arcsin} \frac{x}{2}. \quad 10.97. \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4} \right) = x. \quad 10.98. \operatorname{tg} \frac{y}{2x} = x.$$

$$10.99. x(x^2 - y^2) = 4x^2. \quad 10.100. x = \frac{1}{4} y \ln^2 y. \quad 10.101. y^2 - x^2 = y^3.$$

$$10.102. y = 2x^2. \quad 10.103. (x-1)^2 + y^2 = 1. \quad 10.104. y = 2x - x \ln x.$$

$$10.105. y = 2x - x \ln x. \quad 10.106. y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right). \quad 10.107. y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

$$10.108. y = \frac{1}{x} (e^x + C). \quad 10.109. y = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \quad 10.110. y = x \left(\frac{1}{3} e^{3x} + C \right).$$

$$10.111. y = \frac{1}{x+1} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \quad 10.112. y = \cos x \cdot \left(\frac{x^3}{3} + C \right).$$

$$10.113. y = e^{\frac{x^2}{2}} (\sin x + C). \quad 10.114. y = \frac{1}{\sin x} (e^x + C). \quad 10.115. y = \sin x \cdot$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{\sin x} + C \right). \quad 10.116. x = y(y + C). \quad 10.117. x = y \ln y + \frac{C}{y}.$$

$$10.119. y = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right). \quad 10.120. y = \frac{x}{2} + \frac{\ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2\sqrt{x^2 + 1}}. \quad 10.121. y = \frac{1}{x} (x^3 - 1).$$

$$10.122. y = 2e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2. \quad 10.123. y = e^x \left(\frac{x^4}{4} + 6 \right). \quad 10.124. y = e^x (x + 1).$$

$$10.125. y = e^{-x} (x - 1). \quad 10.126. y = \sin x \cdot \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right). \quad 10.127. y = \frac{1}{\cos x} (x + 1)$$

10.128. $y = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **10.129.**
 $y = \frac{1}{x} (e^x + ab - e^a)$.

10.130. $y = 1 - \cos x - e^{-\cos x}$. **10.132.** $y = x \ln x - x + C_1 x + C_2$.

10.133. $y = -\frac{1}{9} \cos 3x + C_1 x + C_2$ **10.134.** $y = -\ln |\sin x| + C_1 x + C_2$.

10.135. $y = \frac{1}{24x} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$. **10.136.** $y = \frac{1}{64} e^{4x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

10.137. $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2$. **10.138.** $y = C_1 x^2 + C_2$.

10.139. $y = C_1 x - C_1^2 \ln |C_1 + x| + C_2$. **10.140.** $y = \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2$.

10.141. $y = e^{C_1 x} \left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \right) + C_2$. **10.142.** $y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$.

10.143. $y = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2$. **10.144.** $y = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \ln x + C_2$. **10.145.** $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + C_1 (x \ln x - x) + C_2 x + C_3$.

10.146. $y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

10.147. $y = C_1 e^{C_2 x}$. **10.148.** $C_1 y^2 = 1 + (C_1 x + C_2)^2$. **10.149.** $\frac{1}{C_1} \ln |y + \sqrt{y^2 - \frac{1}{C_1^2}}| = \pm x + C_2$.

10.150. $4(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2$. **10.151.** $y = C$;
 $2\sqrt{y} = C_1 x + C_2$. **10.152.** $y = \arcsin (e^{x+C_2} - C_1)$. **10.153.** $y = C_2 - \cos(x + C_1)$.

10.154. $y = C_1 \sec C_1 (x + C_2)$. **10.156.** $\frac{1}{1-y} + C_1 x + C_2$. **10.157.** $y = -\ln |\cos x| - \frac{x^2}{2}$.

10.158. $y = 3 \ln |x| + 2x^2 + 6x + 7$. **10.159.** $y = -\ln |\cos x| - x + \frac{\pi}{4}$.

10.160. $y = \frac{1}{8} e^{2x}$. **10.161.** $y = 3x + x^3$. **10.162.** $y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}$.

10.163. $y = x - e^{-x} + 4$. **10.164.** $y = 2 + 4(x \ln x - x)$. **10.165.** $y = 4\sqrt{x} - 2 \ln |x|$.

10.166. $y = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$. **10.167.** $y = x - \frac{1}{2} \sin 2x + 2 \cos x$. **10.168.** $y = -\frac{1}{3x-4}$.
10.169. $\frac{y^2}{2} = 3x - 2,5$. **10.170.** $y^2 = 4 + 4e^{2x}$. **10.171.** $y - 1 = \frac{1}{1-x}$.
10.172. $\operatorname{tg} y = 3x$. **10.173.** $\operatorname{ctg} y = -x$. **10.187.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.
10.188. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x$. **10.189.** $y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$. **10.190.** $y = C_1 + C_2 e^{6x}$.
10.191. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. **10.192.** $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.
10.193. $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. **10.194.** $y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.
10.195. $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$. **10.196.** $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-x}$.
10.197. $y = C_1 + e^{-x} (C_2 + C_3 x)$. **10.198.** $y = C_1 + e^{-2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$.
10.199. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$. **10.200.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$.
10.201. $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3} x + C_3 \sin \sqrt{3} x)$. **10.202.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3} x + C_3 \sin \sqrt{3} x)$.
10.203. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x}$.
10.204. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **10.205.** $y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$.
10.206. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$. **10.207.** $y = -3e^{-3x} + 5e^{-2x}$. **10.208.** $y = 2xe^{-2x}$.
10.209. $y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$. **10.210.** $y = \frac{11}{3} - \frac{2}{3} e^{3x}$. **10.211.** $y = e^{3x} + 2e^{-3x}$.
10.212. $y = -\frac{1}{5} \sin 5x$. **10.213.** $y = 19e^{3x} - 15e^{4x}$. **10.214.** $y = -5xe^{4x}$.
10.215. $y = e^{-x} \left(\cos \sqrt{3} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3} x \right)$. **10.216.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{5}{3} e^{-x}$.
10.217. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$. **10.218.** $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x + 1$.
10.219. $y = e^{-2x} (C_1 x + C_2) + e^{2x} \frac{1}{32} (2x - 1)$. **10.220.** $y = e^{-x} (C_1 x + C_2) +$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sin x. \quad \mathbf{10.221.} \quad y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \frac{2}{3} x e^{-3x}. \quad \mathbf{10.222.} \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} + \\
& + \frac{4}{39} \cos 3x - \frac{2}{13} \sin 3x. \quad \mathbf{10.223.} \quad y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{2}{25} \cos 3x - \frac{8}{75} \sin 3x. \\
\mathbf{10.224.} \quad y = C_1 + C_2 e^{-3x} + 3x^2 + x. \quad \mathbf{10.225.} \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{8}. \\
\mathbf{10.226.} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x. \quad \mathbf{10.227.} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \\
- \frac{1}{3} \sin 2x. \quad \mathbf{10.228.} \quad y = e^x (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + e^{-x} \left(\frac{5}{41} \cos x - \frac{4}{41} \sin x \right). \\
\mathbf{10.229.} \quad y = e^{2x} (C_1 x + C_2) + C_3 + e^{2x} \frac{1}{2} x^2. \quad \mathbf{10.230.} \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + x^2. \\
\mathbf{10.231.} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + 2x e^x. \quad \mathbf{10.232.} \quad y = C_1 + C_2 x + \\
+ C_3 e^{-x} + x e^{-x}. \quad \mathbf{10.233.} \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + x^2 (x-3). \quad \mathbf{10.234.} \quad y = C_1 e^x + \\
+ C_2 e^{-x} - \frac{x}{2} (x+1) e^{-x}. \quad \mathbf{10.235.} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{1}{2} x \sin x. \\
\mathbf{10.236.} \quad y = 2e^{2x} - 4e^x + x + 2. \quad \mathbf{10.237.} \quad y = -e^x + \frac{10}{9} e^{3x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{9}. \\
\mathbf{10.238.} \quad y = \frac{128}{27} e^{3x} - \frac{21}{4} e^{2x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{55}{108}. \quad \mathbf{10.239.} \quad y = \frac{34}{45} e^{3x} - \frac{9}{20} e^{-2x} - \\
- \frac{1}{6} x - \frac{11}{36}. \quad \mathbf{10.240.} \quad y = -\frac{35}{27} + \frac{35}{27} e^{-3x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{8}{9} x. \quad \mathbf{10.241.} \quad y = \frac{17}{8} - \frac{17}{8} e^{2x} - \\
- \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x. \quad \mathbf{10.242.} \quad y = 2(x-1)e^x. \quad \mathbf{10.243.} \quad y = \cos x + 4 \sin x - 2x \cos x. \\
\mathbf{10.244.} \quad y = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} e^\pi + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x. \quad \mathbf{10.245.} \quad y = \cos 3x + \sin 3x + x \sin 3x. \\
\mathbf{10.246.} \quad y = e^{-3x} + x e^x (4x^2 - 3x + 1,5). \quad \mathbf{10.247.} \quad y = 4 - 4 \cos x + \sin x - x^2. \\
\mathbf{10.248.} \quad y = -3e^x + e^{-x} + \cos x + 2 \sin x + 2x e^x. \quad \mathbf{10.249.} \quad y = \left(C_1 - \frac{1}{2} x \right) \cos 2x + \\
+ \left(\frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + C_2 \right) \sin 2x. \quad \mathbf{10.250.} \quad y = \left(-\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_1 \right) \cos x + C_2 \sin x. \\
\mathbf{10.251.} \quad y = \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + C_1 \right) \cos x + \left(C_2 - \sin x - \frac{1}{\sin x} \right) \sin x.
\end{aligned}$$

$$10.252. \quad y = \left(\frac{2}{9} \ln |\cos 3x| + C_1 \right) \cos 3x + \left(C_2 + \frac{2}{3} x \right) \sin 3x.$$

$$10.253. \quad y = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + \left(C_2 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - x \right) \sin 2x.$$

$$10.254. \quad y = e^x (C_1 + C_2 x - \ln |x|). \quad 10.255. \quad y = x - \ln(e^x + 1) + C_1 + (C_2 - \ln(e^x + 1)) \cdot e^{-x}.$$

$$10.256. \quad y = e^{-x} (C_1 - x) + (\ln |x| + C_2) x e^{-x}. \quad 10.257. \quad y = (C_1 + \operatorname{arctg} x) x e^x + \left(C_2 - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \right) e^x.$$

$$10.258. \quad y = \left(C_1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln |e^x + 1| \right) e^x + \left(C_2 + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln |e^x - 1| \right) e^{-x}. \quad 10.259. \quad y = \left(C_1 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{x^2}{2} \ln |x| \right) e^{-3x} + (C_2 - x + x \ln |x|) x e^{-3x}.$$

$$10.260. \quad y = \frac{(1 - e^{2x})^{3/2}}{3} + C_1 + \left(C_2 - \frac{1}{2} e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2} \arcsin(e^x) \right) e^x.$$

$$10.261. \quad y = e^{-x} (C_1 x + C_2) + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x}. \quad 10.262. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x e^{-x} + x^2 - 2. \quad 10.263. \quad y = e^{2x} (C_1 x + C_2) + \frac{5}{9} \operatorname{sh} x + \frac{4}{9} \operatorname{ch} x + \frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x.$$

$$10.264. \quad y = e^{2x} (C_1 x + C_2) + \frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x - \frac{1}{8} \sin 2x. \quad 10.265. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + (x - 3) x^2 + \frac{1}{3} x e^{-x}.$$

$$10.266. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \left(\frac{1}{8} x - \frac{3}{8} \right) x e^x - \frac{1}{4} x \sin x. \quad 10.267. \quad y = \left(\frac{4}{25} \ln |\cos 5x| + C_1 \right) \cos 5x +$$

$$10.268. \quad y = \left(\left(\frac{1}{9} \ln |\cos 3x| + C_1 \right) \cos 3x + \left(\frac{4}{5} x + C_2 \right) \sin 5x + \frac{3}{26} e^x. \right.$$

$$10.269. \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{10} \cos 2x + \left. \left(\frac{1}{3} x + C_2 \right) \sin 3x \right) e^{2x} + \frac{1}{13} x - \frac{22}{169}.$$

$$10.270. \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{20} \sin 2x + \frac{1}{3} x^3 - x^2 + \frac{5}{2} x.$$

$$-\frac{1}{32} x \cos 2x - \frac{1}{16} x^2 \sin 2x.$$

$$10.272. \quad \begin{cases} C_1 x^2 = 2t + C_2, \\ y^2 = C_1 (2t + C_2). \end{cases}$$

$$10.273. \quad \begin{cases} x^2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \\ y^2 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}. \end{cases}$$

$$10.274. \quad \begin{cases} x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$$

$$10.277. \quad \begin{cases} x = 5e^{2t} - 3e^{-7t}, \\ y = -e^{2t} + 6e^{-7t}. \end{cases}$$

$$10.278. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \cdot \operatorname{sh} t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \operatorname{sh} t + t \cdot \operatorname{ch} t. \end{cases} \quad 10.279. \begin{cases} x = 1 - 2(t - \pi) + 2 \sin t, \\ y = 4(t - \pi) - 2 \cos t + 3 \sin t. \end{cases}$$

Глава 11

$$11.3. \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy. \quad 11.5. \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} f(x, y) dx. \quad 11.6. \int_0^1 dy \int_0^{4-y^2} f(x, y) dy.$$

$$11.10. \int_{-1}^0 dx \int_{2x^2}^{x+3} f(x, y) dy. \quad 11.11. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dy. \quad 11.12. \int_{-2}^2 dx \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{+3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x, y) dy.$$

$$11.13. \int_1^5 dy \int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x, y) dx. \quad 11.16. \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x, y) dy. \quad 11.18.$$

$$\int_0^3 dy \int_{\frac{2}{3}y-2}^{\frac{2}{3}y} f(x, y) dx. \quad 11.23. \int_0^3 dx \int_{-\frac{x}{3}}^x f(x, y) dy. \quad 11.26. \int_{-2}^0 dx \int_{-1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$11.29. \int_0^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3-y}{2}} f(x, y) dx. \quad 11.31. \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\frac{3(y-2)}{2}} f(x, y) dx. \quad 11.34. \int_{-2}^0 dx \int_{1+\frac{x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$11.36. \int_0^1 dx \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{3-x}{2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy. \quad 11.38. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2+3x} f(x, y) dy +$$

$$+ \int_1^3 dx \int_{2-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\frac{13-3x}{2}} f(x, y) dy. \quad 11.41. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{1-\sqrt{1-(x+2)^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{3x+2}^{x+2} f(x, y) dy.$$

$$11.42. \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2y+3} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \quad 11.45. \int_0^1 dy \int_{y-1}^0 f(x, y) dx.$$

$$11.49. \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad 11.50. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad 11.51. \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy +$$

$$+ \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy. \quad \mathbf{11.53.} \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy. \quad \mathbf{11.57.} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx +$$

$$+ \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx. \quad \mathbf{11.59.} \int_{1-\frac{\pi}{2}}^0 dy \int_{1-y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

$$\mathbf{11.63.} \int_0^3 dx \int_0^4 f(x, y) dy + \int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy. \quad \mathbf{11.64.} \int_{-1}^0 dx \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x, y) dy +$$

$$+ \int_0^8 dx \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f(x, y) dy. \quad \mathbf{11.67.} \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^x f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{-1}^0 f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$\mathbf{11.70.} \int_0^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy + \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) dy. \quad \mathbf{11.74.} \int_0^1 dy \int_0^3 f(x, y) dx +$$

$$+ \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x, y) dx. \quad \mathbf{11.76.} \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx. \quad \mathbf{11.77.} \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$$

.

$$\mathbf{11.78.} 21. \quad \mathbf{11.79.} 166,4. \quad \mathbf{11.80.} \frac{32}{3}. \quad \mathbf{11.81.} 18. \quad \mathbf{11.82.} \frac{4}{5}. \quad \mathbf{11.83.} 50,4.$$

$$\mathbf{11.84.} \frac{9}{4}. \quad \mathbf{11.85.} \frac{8}{3}. \quad \mathbf{11.86.} \frac{3}{32}. \quad \mathbf{11.87.} \frac{1}{2}(e^4 - 1). \quad \mathbf{11.88.} \frac{1}{2}(e^2 - e - 1).$$

$$\mathbf{11.89.} -\frac{2}{3}. \quad \mathbf{11.90.} \frac{e^{12} - e^9 - 3}{18}. \quad \mathbf{11.91.} 5. \quad \mathbf{11.92.} e-2. \quad \mathbf{11.93.} 3 - \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{11.94.} \frac{4}{\pi^2}. \quad \mathbf{11.95.} -2. \quad \mathbf{11.96.} \frac{4}{3}. \quad \mathbf{11.97.} -\frac{1}{12}. \quad \mathbf{11.98.} \frac{9}{4}. \quad \mathbf{11.99.} \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{11.100.} \frac{1}{2}(e-1). \quad \mathbf{11.101.} 24. \quad \mathbf{11.102.} -\frac{188}{15}. \quad \mathbf{11.103.} \frac{9}{20}. \quad \mathbf{11.104.} \frac{11}{24}.$$

$$\mathbf{11.105.} \frac{9}{4}. \quad \mathbf{11.106.} \frac{4}{3}. \quad \mathbf{11.107.} 3. \quad \mathbf{11.108.} 1. \quad \mathbf{11.109.} \frac{3}{7}. \quad \mathbf{11.110.} -\frac{4}{3}.$$

$$\mathbf{11.111.} \frac{1}{4}. \quad \mathbf{11.112.} \frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{11.113.} \frac{1}{2}. \quad \mathbf{11.114.} \pi - \frac{2}{3}. \quad \mathbf{11.115.} \frac{11}{2}. \quad \mathbf{11.116.} \frac{8}{3}\pi.$$

- 11.117. $\frac{\pi}{3}$. 11.118. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. 11.119. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 11.120. $\frac{1}{6}\pi$. 11.121. $\sqrt{2} + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.
 11.122. $18\pi - 27$. 11.123. $2\pi^3$. 11.124. $\frac{3\pi}{2}$. 11.125. $2\pi(1 - \ln^2 2)$. 11.126. 8π .
 11.127. $\frac{\pi}{2}$. 11.128. $18\pi - 12$. 11.129. 4 . 11.130. $\frac{13\pi}{2}$. 11.131. $\frac{\pi}{6}(\sqrt{8} - 1)$.
 11.132. $\frac{\pi R^3}{3}$. 11.133. $2\sqrt{2} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{8}}$. 11.134. $\frac{5\pi \ln 2}{24}$. 11.135. $0,75$.
 11.136. $\frac{3}{4} \ln 2$. 11.137. $\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$. 11.138. $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$. 11.139. $\frac{1}{6}$.
 11.140. $\frac{13}{3}$. 11.141. $\frac{16}{3}$. 11.142. $\frac{3}{2} - \ln 2$. 11.143. $\frac{32}{3}$. 11.144. $7 - 3 \ln 2$.
 11.145. $4,5$. 11.146. 16 . 11.147. $4,5$. 11.148. $\frac{4}{3} + \ln 2$. 11.149. $\frac{40}{3}$.
 11.150. $\sqrt{2} - 1$. 11.151. $\frac{4}{3}$. 11.152. $\frac{3\pi}{8}$. 11.153. $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{8}$. 11.154. $\frac{3}{8} \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$. 11.155. $\pi - 2$. 11.156. π . 11.157. 6π . 11.158. 5π . 11.159. $\pi + 8$.
 11.160. $\frac{32}{3}$. 11.161. $\frac{2}{3}$. 11.162. $\frac{160}{3}$. 11.163. $\frac{4}{3}$. 11.164. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$.
 11.165. $\frac{135}{2}$. 11.166. 27 . 11.168. $85\frac{7}{32}$. 11.169. 9 . 11.170. $\frac{128}{3}$.
 11.171. 16π . 11.172. 64 . 11.173. $\frac{81}{20}$. 11.174. 4 . 11.175. $\frac{9}{20}$.
 11.176. $\frac{2\pi R^3}{3}$. 11.177. $\left(0; \frac{4}{5} \right)$. 11.178. $\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{4} \right)$. 11.179. $\left(1\frac{1}{10}; \frac{8}{25} \right)$.
 11.180. $\left(\frac{12}{5}; \frac{9}{4} \right)$. 11.181. $\left(3; 28\frac{4}{5} \right)$. 11.182. $\frac{15}{8}$. 11.183. $M_x = 3, M_y = 2$.
 11.184. $I_x = \frac{1}{4}, I_y = \frac{17}{12}$. 11.185. $36,3$. 11.186. $51\frac{15}{64}$. 11.187. $39\frac{1}{105}$.

Глава 12

- 12.1.** $u_n = \frac{2n}{2n+1}$. **12.2.** $u_n = \frac{2n}{3^n}$. **12.3.** $u_n = \frac{2n}{n!}$. **12.4.** $u_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.
12.5. $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$. **12.6.** $u_n = \frac{(2n-1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$. **12.7.** $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
12.8. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. **12.9.** $u_n = (-1)^{n+1}$. **12.10.** $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$.
12.11. $u_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{5^n}$. **12.12.** $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$. **12.13.** $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.
12.14. $u_n = \frac{x^{n+1}}{(n-1)!}$. **12.15.** $u_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. **12.16.** $u_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!}$.
12.17. $u_n = \frac{1}{x^n + n^2}$. **12.18.** $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$. **12.19.** $u_n = (-1)^{n-1} (2n-1)^2 x^{n-1}$.
12.20. $u_n = \frac{(x+1)^n}{n4^{n-1}}$. **12.21.** $u_1 = 3^2, u_2 = \frac{3^3}{\sqrt[3]{2}}, u_3 = \frac{3^4}{\sqrt[3]{3}}$. **12.22.** $u_1 = 0,$
 $u_2 = 4, u_3 = 0$. **12.23.** $u_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, u_2 = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}, u_3 = \frac{5}{\sqrt[3]{28}}$. **12.24.** $u_1 = x, u_2 = \frac{x^2}{2^2},$
 $u_3 = \frac{x^3}{3^2}$. **12.25.** $u_1 = x-2, u_2 = \frac{(x-2)^2}{2!}, u_3 = \frac{(x-2)^3}{3!}$. **12.26.** $u_1 = 1,$
 $u_2 = \frac{x+2}{\sqrt{2}}, u_3 = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}}$. **12.27.** $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1,$ ряд сходится.
12.28. $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2},$ ряд сходится. **12.29.** $S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \right.$
 $\left. + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{11}{18},$ ряд сходится. **12.30.** $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}},$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$, ряд сходится. **12.31.** $S_n = \frac{1 - (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{\frac{3}{3}}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$, ряд

сходится. **12.32.** $S_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$, ряд сходится.

12.33. $S_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4}{3}$, ряд сходится. **12.34.** $S_n = \ln(n+1)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, ряд расходится. **12.35.** Да. **12.36.** Да. **12.37.** Нет. **12.38.** Нет.

12.39. Нет. **12.40.** Нет. **12.41.** Нет. **12.42.** Да. **12.43.** Да. **12.44.** Нет.

12.45. Нет. **12.46.** Сходится. **12.47.** Расходится. **12.48.** Сходится.

12.49. Расходится. **12.50.** Сходится. **12.51.** Сходится. **12.52.** Расходится.

12.53. Расходится. **12.54.** Расходится. **12.55.** Сходится. **12.56.** Сходится.

12.57. Расходится. **12.58.** Сходится. **12.59.** Сходится. **12.60.** Расходится.

12.61. Расходится. **12.62.** Сходится. **12.63.** Расходится. **12.64.** Сходится.

12.65. Сходится. **12.66.** Сходится. **12.67.** Сходится. **12.68.** Сходится.

12.69. Расходится. **12.70.** Сходится. **12.71.** Сходится. **12.72.** Сходится.

12.73. Расходится. **12.74.** Сходится. **12.75.** Сходится. **12.76.** Сходится.

12.77. Сходится. **12.78.** Сходится. **12.79.** Сходится. **12.80.** Расходится.

12.81. Сходится. **12.82.** Сходится. **12.83.** Сходится. **12.84.** Расходится.

- 12.85.** Расходится. **12.86.** Сходится. **12.87.** Сходится. **12.88.** Расходится.
12.89. Расходится. **12.90.** Расходится. **12.91.** Сходится. **12.92.** Расходится.
12.93. Сходится. **12.94.** Расходится. **12.95.** Расходится. **12.96.** Расходится.
12.97. Сходится. **12.98.** Расходится. **12.99.** Сходится. **12.100.** Расходится.
12.101. Сходится. **12.102.** Сходится. **12.103.** Сходится. **12.104.** Расходится.
12.105. Сходится. **12.106.** Сходится. **12.121.** Сходится условно.
12.122. Расходится. **12.123.** Расходится. **12.124.** Сходится абсолютно.
12.125. Сходится условно. **12.126.** Сходится абсолютно. **12.127.** Сходится
абсолютно. **12.128.** Сходится абсолютно. **12.129.** Расходится.
12.130. Сходится абсолютно. **12.131.** Сходится абсолютно. **12.132.** Схо-
дится абсолютно. **12.133.** $-1 < x < 1$. **12.134.** $-1 < x < 1$. **12.135.** $-1 < x < 1$.
12.136. $-1 < x < 1$. **12.137.** $-3 < x < 3$. **12.138.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.
12.139. $-\infty < x < \infty$. **12.140.** $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.141.** $-1 < x < 1$.
12.142. $-\infty < x < \infty$. **12.143.** $-\sqrt{3} - 4 < x < \sqrt{3} - 4$. **12.144.** $-\frac{5}{3} < x < 1$.
12.145. $-\frac{3}{2} < x < 2$. **12.146.** $1 < x < 2$. **12.147.** $-1 < x < 0$. **12.148.** $-e - 1 <$
 $x < e - 1$. **12.150.** $-1 < x < 1$. **12.151.** $-1 < x < 1$. **12.152.** $-1 < x < 1$.
12.153. $2 \leq x < 4$. **12.154.** $-3 \leq x \leq 1$. **12.155.** $-1 < x \leq 1$.
12.156. $-3 \leq x \leq -1$. **12.157.** $-5 \leq x < 3$. **12.158.** $-3 < x \leq 1$.

12.159. $x = 0$. **12.160.** $-\infty < x < \infty$. **12.161.** $-1 < x < 1$. **12.162.** $x = 0$.

12.163. $2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$. **12.164.** $\ln 5 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{5^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 3} - \dots$.

12.165. $-x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$. **12.166.** $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots$.

12.167. $\cos \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \sin \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

12.168. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(mx)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(mx)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

12.169. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(6x)^{2n}}{(2n)!}$. **12.170.** $x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$.

12.171. $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} \cdot x^{2n}$.

12.172. $2 + \frac{x}{5 \cdot 16} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (5n-1)}{5^{n+1} (n+1)!} \cdot \left(\frac{x}{32} \right)^{n+1}$.

12.173. $1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3} x^6 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n} x^{2n} + \dots$.

12.174. $x^2 \left(1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1 \cdot 4}{2! \cdot 3^2} x^4 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3! \cdot 3^3} x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n! \cdot 3^n} x^{2n} + \dots \right)$.

2.175. $(x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 20(x+2)^2 - 16(x+2)$.

12.176. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} (x-3) + \frac{1}{3^3} (x-3)^2 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} (x-3)^{n-1} + \dots$.

12.177. $1 - 2(x-1) + 2^2(x-1)^2 - \dots + (-1)^{n+1} 2^{n-1} (x-1)^{n-1} + \dots$.

12.178. $1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - \dots + (-1)^{n+1} n(x-1)^{n-1} + \dots$.

12.179. $-1 + \frac{x+1}{3 \cdot 1!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3^{n+1} (n+1)!} \cdot (x+1)^{n+1}$.

$$12.180. \quad 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{3^n \cdot n!} \cdot (x+1)^n.$$

$$12.181. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi}{4}}{2^{n-1} (n-1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \quad 12.182. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} + n \frac{\pi}{2}\right)}{3^n n!} \cdot \pi^n (x-1)^n.$$

$$12.183. \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}.$$

$$12.184. \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1} \sqrt{2}}{(n+1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^{n+1}$$

$$12.185. \quad 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3^n n!} \cdot (x-1)^n.$$

$$12.186. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-4)^n}{n} \quad 12.187. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot e^8 \cdot (x-4)^n}{n!}.$$

$$12.188. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot (x-2)^n}{2^n \cdot n!} \quad 12.189. \quad 0,98. \quad 12.190. \quad 0,174. \quad 12.191. \quad 0,999.$$

$$12.192. \quad 0,0175. \quad 12.193. \quad 0,158. \quad 12.194. \quad 4,125. \quad 12.195. \quad 2,09. \quad 12.196. \quad 7,937.$$

$$12.198. \quad 0,7788. \quad 12.199. \quad 0,125. \quad 12.200. \quad 0,452. \quad 12.201. \quad 0,192. \quad 12.202. \quad 0,097.$$

$$12.203. \quad 0,118. \quad 12.204. \quad 0,498. \quad 12.205. \quad 0,098. \quad 12.206. \quad 0,499.$$

Глава 13

$$13.1. \quad 120. \quad 13.2. \quad 40320. \quad 13.3 \quad 720. \quad 13.4. \quad 336. \quad 13.5. \quad 56. \quad 13.6. \quad 120.$$

$$13.7. \quad 83. \quad 13.8. \quad C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3. \quad 13.9. \quad 120. \quad 13.10. \quad 24. \quad 13.11. \quad 6. \quad 13.12 \quad 96.$$

$$13.13. \quad 756. \quad 13.14 \quad 1) \frac{1}{6}; \quad 2) \frac{1}{18}; \quad 3) 0,5; \quad 4) \frac{1}{18}. \quad 13.15. \quad 0,75.$$

$$13.16. \quad \frac{1}{720}. \quad 13.17. \quad 1) 1; \quad 2) 0,2; \quad 3) 0,6. \quad 13.18. \quad 1) 0,008; \quad 2) 0,096;$$

$$3) 0,384; \quad 4) 0,512. \quad 13.19. \quad 1) \frac{1}{90}; \quad 2) \frac{1}{81}. \quad 13.20. \quad \frac{4}{9}. \quad 13.21. \quad 0,375.$$

$$13.22. \quad \frac{1}{6}. \quad 13.23. \quad 0,1. \quad 13.24. \quad p = \frac{m}{n}, \quad \text{где } n = (A_{19}^1)^3, \quad 1) m = A_{19}^3;$$

$$2) m = (A_{19}^1)^3 - A_{19}^3 - A_{19}^1; \quad 3) A_{19}^1. \quad 13.25. \quad n = C_{36}^4, \quad m = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2.$$

13.26. 0,6. **13.27.** $1/90!$. **13.28.** $\frac{4!}{90!}$. **13.29.** 1) $\frac{1}{C_{49}^6}$; 2) $\frac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0,01765$.

13.30. 1) $24/91$; 2) $45/91$; 3) $20/91$; 4) $2/91$. **13.31.** а) 0,62; б) 0,38.

13.32. 0,1. **13.33.** 1) $499/1998$; 2) $500/999$. **13.34.** $\frac{C_{28}^7 C_{22}^8}{C_{50}^{15}}$.

13.35. 1) 0,6; 2) 0,3; 3) 0,9. **13.36.** 1) 0,25; 2) $1/6$. **13.37.** $p = \frac{m}{n}$,

где $n = C_{52}^5$, 1) $m = 2C_4^2 \cdot C_{44}^1$; 2) $m = 4 \cdot C_{13}^5$; 3) $m = 13 \cdot C_{48}^1 = 624$.

13.38. $1/3$. **13.39.** r^2/R^2 . **13.40.** 0,75. **13.41.** $\frac{1}{2\pi}$. **13.42.** 0,5.

13.43. $\frac{(a-r)}{a}$. **13.44.** $\left(\frac{a-2r}{a}\right)^2$. **13.45.** $7/16$. **13.46.** $\frac{1+\ln 8}{4}$. **13.47.** 0,72.

13.48. а) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; б) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^3$; в) $1 - \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$. **13.49.** 0,18.

13.50. $\approx 0,5$. **13.51.** $5/6$. **13.52.** $P=0,38$. **13.53.** 0,306. **13.54.** $\approx 0,88$.

13.55. 0,955. **13.56.** 0,95. **13.57.** 0,388. **13.58.** 1) $3/14$; 2) $1/4$. **13.59.** 0,2.

13.60. 0,384. **13.61.** 0,009. **13.62.** 0,7. **13.63.** 0,002. **13.64.** $P_1 = 0,6$;

$P_2 = 0,4$. **13.65.** 1) 0,2; 2) 0,327; 3) 0,393; 4) 0,43. **13.66.** 0,36.

13.67. 0,89. **13.68.** $2/3$. **13.69.** 0,85. **13.70.** 0,5. **13.71.** $1/3$. **13.72.** без

оптического прицела. **13.73.** 0,918. **13.74.** 0,95877. **13.75.** 0,6448.

13.76. 0,574. **13.77.** $6\frac{1}{9}\%$. **13.78.** 1) $7/13$, 2) $6/13$. **13.79.** $10/17$.

13.80. $3/7$. **13.81.** $1/3$. **13.82.** без оптического прицела. **13.83.** вероятнее,

что вкладчик держал деньги в «хорошем» банке. **13.84.:** 1) $20/21$; 2) $1/21$.

13.85. 0,942. **13.86.** а) $5/16$; б) $3/16$; в) $13/16$. **13.87.** 2 партии из 4.

13.88. а) одну из двух; б) не менее 2 партий из 4. **13.89.** $\approx 0,93$. **13.90.**

а) 0,18; б) 0,74. **13.91.** $8/27$. **13.92.** 0,922. **13.93.** 0,024. **13.94.** 0,004.

13.95. 0,046. **13.96.** а) 0,889; б) 0,894; в) 0,106. **13.97.** а) $\approx 0,5$;

б) $\approx 0,4236$; в) $\approx 0,5$. **13.98.** $\approx 0,952$. **13.99.** $0,0905$. **13.100.** $0,819$.
13.101. $0,814$. **13.102.** $0,96$. **13.103.** $0,0308$. **13.104.** $: 0,96$. **13.105.** $0,5$.

Глава 14

14.6. $A = \frac{2}{b-a}$. **14.7.** $A = 1$. **14.8.** $A = 0,5$; $F(x) = 0,5(1 - \cos x)$.

14.10. $x_{0,1} = \ln 1,11$. **14.11.** $0,875$. **14.12.** $0,4$. **14.14.** $F(y) = 2\sqrt{y}$; $f(y) = 1/\sqrt{y}$.

14.15. $m_x = 2,5$; $D_x = 6,784$; $\sigma_x = 0,731$. **14.16.** $m_x = 5p$; $D_x = 5p(1-p)$.

14.17. $m_x = \frac{1}{p}$; $D_x = \frac{1-p}{p^2}$. **14.18.** $m_x = \frac{a+b}{2}$; $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$. **14.19.** $A = 0,5$;

$m_x = 0$; $D_x = 0,133$. **14.20.** $A = 0,5$; $m_x = 0$; $D_x = 0,133$. **14.21.** $A = \frac{2}{b-a}$;

$m_x = \frac{a+b+c}{3}$; $D_x = \frac{1}{3} \left(\frac{(b-a)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}{12} \right)$. **14.22.** $m_x = \frac{1}{\lambda}$;

$D_x = \frac{1}{\lambda^2}$; $x_{0,5} = \ln \frac{2}{\lambda}$. **14.23.** $A = 0,667$; $m_x = 1,333$; $D_x = 0,389$; $x_{0,5} = 1,268$.

14.24. $A = 0,333$; $x_{0,9} = 2,051$. **14.25.** $A = \frac{2}{\pi R^2}$; $x_{0,5} = 0$; $D_x = \frac{R^2}{4}$.

14.26. $a = 4$, $\sigma = 5$. **14.27.** $0,977$; $0,683$. **14.28.** $0,905$. **14.29.** $0,547$.

14.30. $0,62$. **14.31.** $7,097$. **14.32.** $0,516\text{см}$. **14.33.** $0,023$.

14.34. $F(y) = 1 + 2\hat{O}(\sqrt{y})$; $f(y) = 1/\sqrt{2\pi y} \cdot \exp(-y/2)$.

Глава 15

15.1. $\nu_2 = 0,375$. **15.2.** $n_3 = 6$. **15.3.** $n_6 = 10$. **15.4.** $w_2 = 0,2$. **15.5.** $5,1$.

15.6. $2,808$. **15.7.** $-0,777 < m_x < 10,977$. **15.8.** $1,97 < \sigma_x < 4,8$. **15.9.** не

менее 27 . **15.10.** $34,4$. **15.13.** $5,59 < \sigma_x < 14,92$. **15.14.** 8 . **15.15.** $267,76$.

15.16. Верна, с t -жесткостью; $-2,471 < 1,114 < 2,471$. **15.17.** Верна, с χ^2 -жесткостью; $4,6 < 18 < 32,82,471$. **15.18.** Дисперсии равны с F -жесткостью

$0,359 < 1,143 < 2,468$; Мат. ожидания равны с t -жесткостью $-2,02 < 0,87 < 2,02$.

15.20. Значим с F -жесткостью $0,151 < 2 < 4,236$. **15.21.** $0,315$. **15.22.** Не

значим с t-жесткостью $2,995 < 3,01$. **15.23.** Различие значимо с χ^2 - жесткостью $9,87 > 7,82$.

Список литературы

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Электронный ресурс]. В 2 ч. Ч. 1,2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – Москва: Оникс 21 век, 2003. – 720 с. – Режим доступа: <http://vipbook/info/nauka-i-ucheba/matematika/190523-danko-popov-ag-vysshaya-matematika-v-uprazhneniyah-i-zadachah-chasti-12-6-e-izdanie.html>
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – Москва: Физматлит, 2004. – 336 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие / под ред. В.И.Ермакова. – 2-е изд., испр. – Москва: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.
4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Айрис – пресс, 2003. – 576 с.
5. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике/ В.С. Шипачёв. – Москва: Высш. Шк., 2003. – 304 с.
6. Берман Г.С. Сборник задач по курсу математического анализа/ Г.С. Берман. – Санкт-Петербург: Профессия, 2003. – 432 с.
7. Важдаев В.П., Коган М.М., Лиогонький М.И., Протасова Л.А. 64 лекции по математике, книга 2. Нижний Новгород, ННГАСУ, 2012, – 284 с.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 2001, – 400 с.
9. Филатов Л.В. Проверка статистических гипотез. Нижний Новгород ННГАСУ, 2003, – 41 с.

Горбиков Сергей Павлович
Неймарк Валерия Николаевна
Опалева Галина Павловна
Петров Владислав Викторович
Сенниковская Людмила Семеновна
Филатов Леонид Владимирович

Сборник задач и упражнений по математике

ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 4,1. Усл. печ. л. 4,4. Тираж 500 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru