Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г.А. Маковкин, В.Б. Штенберг, М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов

Внецентренное растяжение – сжатие

Учебное пособие

Нижний Новгород
2018

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г.А. Маковкин, В.Б. Штенберг, М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов

Внецентренное растяжение – сжатие

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2018

Печатается в авторской редакции

ББК 30.121
В 60
УДК 624.04 (075)

Рецензенты:

А.Ю. Панов – д-р техн. наук профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»

А.К. Любимов –д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Маковкин Г. А. Внецентренное растяжение – сжатие. [Текст]: учеб. пособие /М. Ф. Сухов, Г. А. Маковкин, Д. А. Кожанов; Нижегор. гос. архитектур. - строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ, 2018. – 39 с. ISBN 978-5-528-00272-9

Пособие содержит теоретические сведения и основные методы расчета задач на внецентренное растяжение - сжатие, примеры расчета сопровождаются необходимыми пояснениями к решению. Даются рекомендации по самостоятельной работе обучающихся по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 08.03.01 «Строительство» и 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» для подготовки к лекционным и практическим занятиям.

ISBN 978-5-528-00272-9

Оглавление

Введение.. 4

1. Усилия и напряжения при внецентренном растяжении - сжатии................. 5

1.1. Усилия при внецентренном растяжении-сжатии... 5

1.2. Определение напряжений при ВЦРС.. 5

1.3. Уравнение нулевой линии.. 8

1.4. Свойства нулевой линии 11

1.5. Упрощенные формулы для определения напряжений.............................. 14

1.6. Построение эпюры нормальных напряжений.. 17

1.7. Расчет на прочность 19

2. Ядро сечения... 20

3. Решение задач... 23

Введение

Если в поперечном сечении бруса действует более одной компоненты внутренних сил, то такой вид деформации называется сложным сопротивлением.

При сложном сопротивлении в общем случае возникает шесть компонент внутренних сил: N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z (рис. 1). Эти внутренние силы возникают, как следствия четырех простых видов деформации:

растяжения (сжатия) – усилие N,

сдвига – усилия Q_x, Q_y,

изгиба – усилия M_x, M_y,

кручения – усилия M_z.

При различных комбинациях этих деформаций можно получить некоторые частные случаи сложного сопротивления:

косой изгиб (M_x, M_y),

или (Q_x, Q_y, M_x, M_y),

изгиб с кручением (M_x, M_z),

или (M_y, M_z),

или (M_x, M_y, M_z),

внецентренное растяжение – сжатие (N, M_x, M_y)

и так далее.

В случае достаточно жестких стержней, когда:

а) деформации можно считать малыми,

б) выполняется закон Гука,

применим принцип «суперпозиции» (принцип независимости действия сил), в соответствии с которым совместное действие ряда усилий приводит к напряженному состоянию, которое можно получить суммированием напряженных состояний, вызванных каждым из усилий по отдельности. Определяя нормальные или касательные напряжения в различных точках сечения от каждой компоненты внутренних сил по отдельности, можно произвести проверку прочности стержня, суммируя напряжения и используя при необходимости соответствующую гипотезу прочности.

1. Усилия и напряжения при внецентренном растяжении - сжатии

1.1. Усилия при внецентренном растяжении-сжатии

Внецентренным растяжением-сжатием (ВЦРС) называется деформация стержня, при которой в поперечном сечении стержня возникает три компоненты внутренних сил: $N,\ M_x,\ M_y$.

Как правило, это происходит в том случае, когда стержень нагружен силой *F*, параллельной своей продольной оси (рис.2).

Пусть продольная сила приложена в точке с координатами x_F и y_F. Приводя продольную силу *F* к продольной оси *z*, получим по теореме о параллельном переносе сил:

$N=+F,\ M_x=+F\cdot y_F,\ M_y=+F\cdot x_F$ при растяжении (рис. 2а),

$N=-F,\ M_x=-F\cdot y_F,\ M_y=-F\cdot x_F$ при сжатии (рис. 2б),

или, что тоже самое:

$N = \pm F$ ($+F$ – при растяжении; $-F$ – при сжатии),

$$M_x=N\cdot y_F;\ M_y=N\cdot x_F \qquad \textbf{(1)}$$

Таким образом, внецентренное растяжение - сжатие представляет собой сочетание центрального растяжения или сжатия и двух чистых прямых изгибов в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях.

1.2. Определение напряжений при ВЦРС

Способ определения напряжений в произвольной точке сечения с координатами *x*, *y* от каждой компоненты внутренних сил при ВЦРС:

Деформации	**Усилия**	**Напряжения**
Растяжение-сжатие	N	$\sigma_z(N)=N/A$
Изгиб в плоскости *yz*	M_x	$\sigma_z(M_x)=M_x\cdot y/I_x$
Изгиб в плоскости *xz*	M_y	$\sigma_z(M_y)=M_y\cdot x/I_y$

$$N \cdot x_F = M_y$$

$$N \cdot y_F = M_x$$

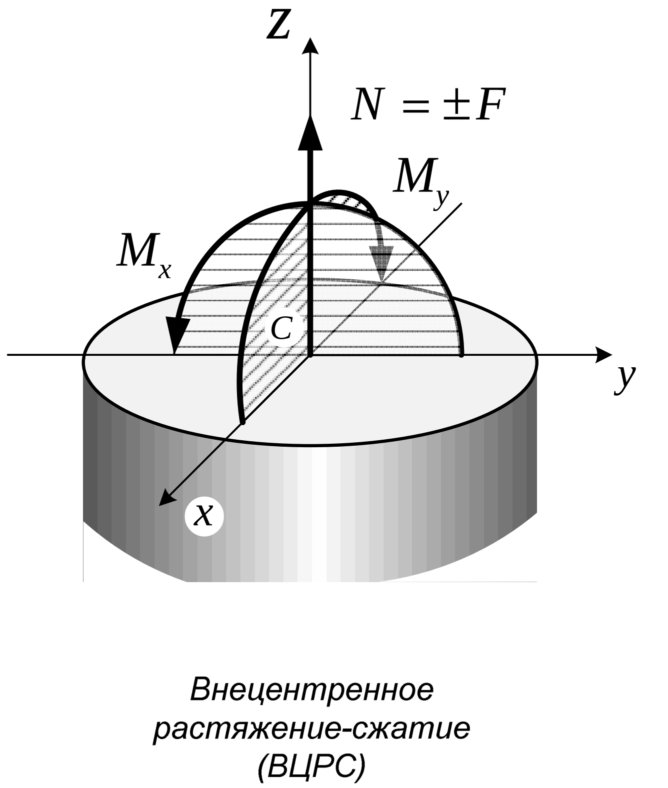


Рис. 1

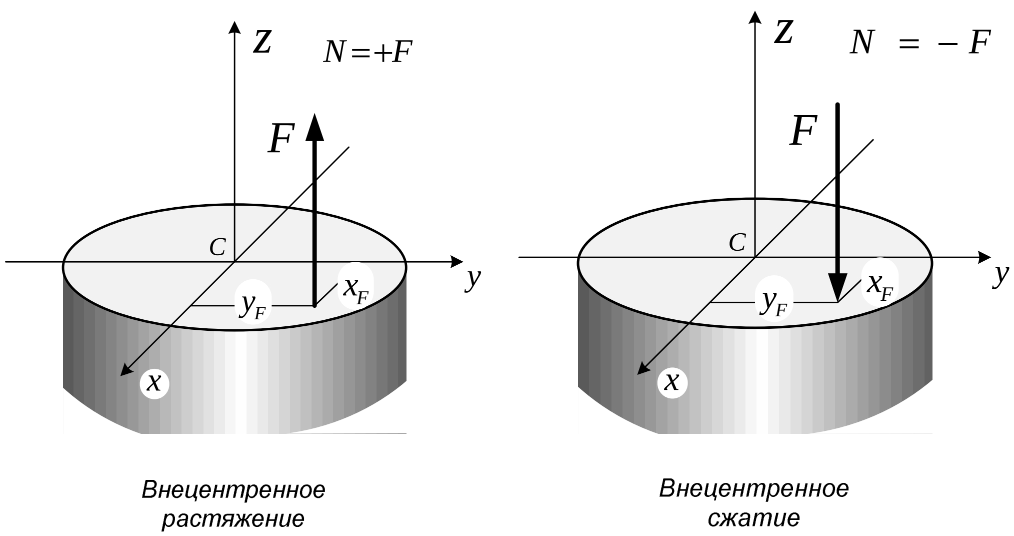


Рис. 2а

Рис. 2б

Нормальные напряжения σ_z, возникающие от всех трех усилий, действующих совместно, учитывая, что напряжения $\sigma_z(N)$, $\sigma_z(M_x)$, $\sigma_z(M_y)$ действуют в одну точку и направлены в одну сторону, можно найти на основании принципа независимости действия сил путем простого суммирования:

$$\sigma_z = \sigma_z\left(N\right) + \sigma_z\left(M_x\right) + \sigma_z\left(M_y\right) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad \textbf{(2)}$$

Подставив выражения продольной силы и изгибающих моментов через силу нагружения и ее координаты **(1)**, получим:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot y_F \cdot y}{I_x} + \frac{N \cdot x_F \cdot x}{I_y} =$$

$$= \pm F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{I_x} + \frac{x_F \cdot x}{I_y} \right) \quad \textbf{(3)}$$

Учитывая, что $I_x = i_x^2 \cdot A$ и $I_y = i_y^2 \cdot A$, представим уравнение напряжений **(3)** в более удобном виде:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right) = \pm \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right), \quad \textbf{(4)}$$

где:

i_x, i_y – главные радиусы инерции поперечного сечения стержня:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Следует отметить, что в формулах **(1) - (4)** координаты точки приложения силы $\left(x_F, y_F\right)$ и координаты точки, в которой определяются напряжения (x, y) подставляются со своими знаками. При подстановке силы F берется знак «плюс», если она растягивающая, и знак «минус», если она сжимающая. В этом случае знак напряжений σ_z будет получаться автоматически («плюс» – при растяжении, «минус» – при сжатии).

Заметим, что в центре тяжести поперечного сечения, то есть в точке с координатами $x = y = 0$, напряжения по формулам **(2)** и **(4)** всегда получаются равными $\sigma_z = N/A$.

При рассмотрении поперечного сечения стержня можно заметить, что в формуле **(3)**:

$$\frac{N}{A} = const; \quad \frac{N \cdot y_F}{I_x} = const; \quad \frac{N \cdot x_F}{I_y} = const,$$

и, следовательно, напряжения σ_z линейно зависят от координат точки, в которой определяется напряжение:

$$\sigma_z(x,y)=a+b\cdot y+c\cdot x$$

где *a, b, c* – константы.

Уравнение такого вида представляет собой уравнение наклонной плоскости, не проходящий через начало координат (рис.3).

1.3. Уравнение нулевой линии

Линия, на которой напряжения $\sigma_z(x,y)$ равны нулю, называется «нулевой линией».

С геометрической точки зрения в системе координат (x, y, σ_z) нулевая линия представляет собой линию пересечения наклонной плоскости напряжений $\sigma_z(x,y)$ и плоскости поперечного сечения.

Из рис.3 видно, что чем дальше от нулевой линии лежит точка, тем большее напряжение (по абсолютной величине) в ней возникает (рис.4). Кроме того, если нулевая линия рассекает сечение на две области, то в одной из них напряжения σ_z – растягивающие, а в другой – сжимающие. В ряде случаев нулевая линия может пройти за пределами контура поперечного сечения. В этом случае во всех точках сечения напряжение будет иметь один и тот же знак.

Наибольшие значения напряжений σ_z необходимо вычислять при проведении расчета на прочность. **Точки, в которых возникают максимальные значения напряжений, называются «опасными».** Для определения положения «опасных» точек необходимо определить положение нулевой линии.

Поскольку на нулевой линии $\sigma_z(x,y)=0$, ее уравнение можно получить, приравнивая нулю правую часть уравнения **(2)**:

$$\frac{N}{A}+\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x=0, \qquad \textbf{(5)}$$

Уравнение нулевой линии можно записать в другом виде, приравнивая нулю правую часть уравнения **(4)** и учитывая, что $N/A\neq 0$.

$$1+\frac{y_F\cdot y}{i_x^2}+\frac{x_F\cdot x}{i_y^2}=0. \qquad \textbf{(6)}$$

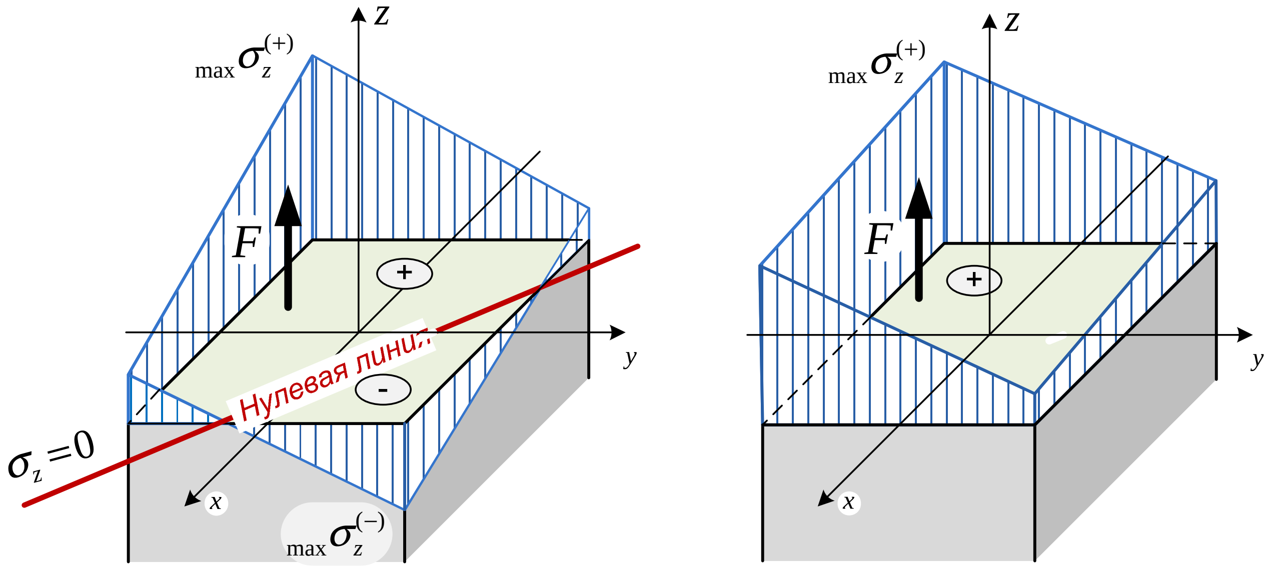


Рис. 3

Уравнение вида, $a+b\cdot y+c\cdot x=0$, а именно такой вид имеют уравнения **(5)** и **(6),** представляют собой уравнение прямой, не проходящей через начало координат. Нулевую линию удобно строить, проводя через две точки, в которых она пересекается с координатными осями (главными центральными осями поперечного сечения).

Найдем отрезки, которые нулевая линия отсекает на осях, обозначив их соответственно $\bar{x}$ и $\bar{y}$ (рис.5). Используем уравнение **(6).**

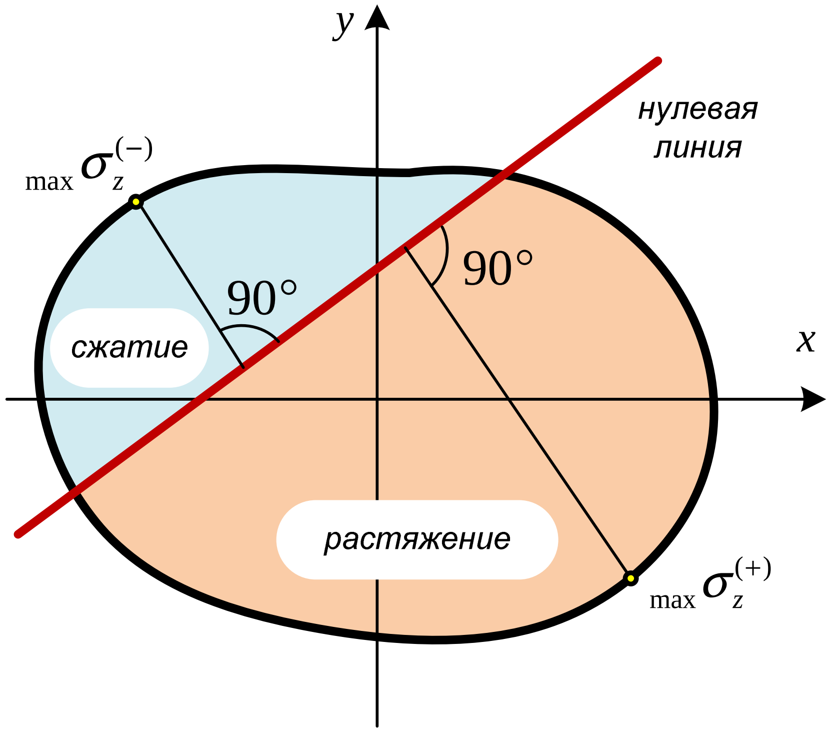
Координаты точки пересечения с осью $x: x=\bar{x};\; y=0$, тогда

$$1+\frac{x_F\cdot\bar{x}}{i_y^2}=0,\ \text{откуда}\ \bar{x}=-\frac{i_y^2}{x_F}.$$

Координаты точки пересечения с осью $y: x=0;\; y=\bar{y}$, тогда

$$1+\frac{y_F\cdot\bar{y}}{i_x^2}=0,\ \text{откуда}\ \bar{y}=-\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Таким образом: $\bar{x}=-\dfrac{i_y^2}{x_F},\; \bar{y}=-\dfrac{i_x^2}{y_F}.$ **(7)**


y
x
нулевая
линия
max $\sigma_z^{(-)}$
90°
90°
сжатие
растяжение
max $\sigma_z^{(+)}$

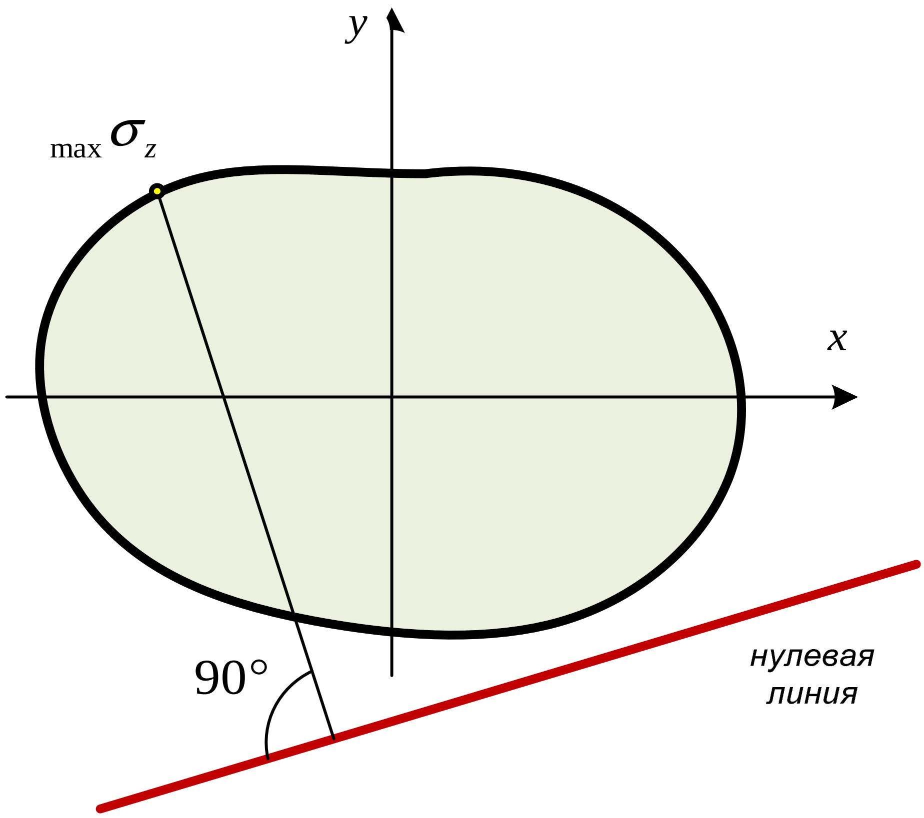

y
x
max σ_z
90°
нулевая
линия

Рис. 4

1.4. Свойства нулевой линии

1) Нулевая линия и точка приложения силы всегда располагаются по разные стороны от центра тяжести.

Это очевидно, поскольку в соответствии с равенствами **(7)** отрезки x и y имеют знаки обратные координатам силовой точки x_F, y_F (рис.5).

2) Если силовая точка лежит на одной из главных центральных осей, то нулевая линия параллельна другой координатной оси (рис.6).

Пусть силовая линия лежит на оси x и имеет координаты $\left(x_F, 0\right)$. В этом случае по формулам **(7)**:

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad \bar{y} = \infty \text{ (пересечений нет).}$$

Очевидно, что в данном частном случае напряжения в сечении зависят только от одной координаты (от *x* в данном случае).

3) Координаты силовой точки x_F, y_F и отрезки $\bar{x}$, $\bar{y}$ обладают свойством взаимности, то есть если в равенствах (7) их поменять местами, то справедливость формул не нарушится.

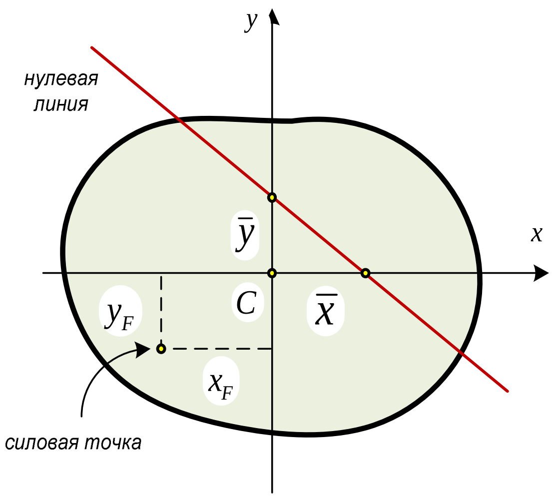


Рис. 5

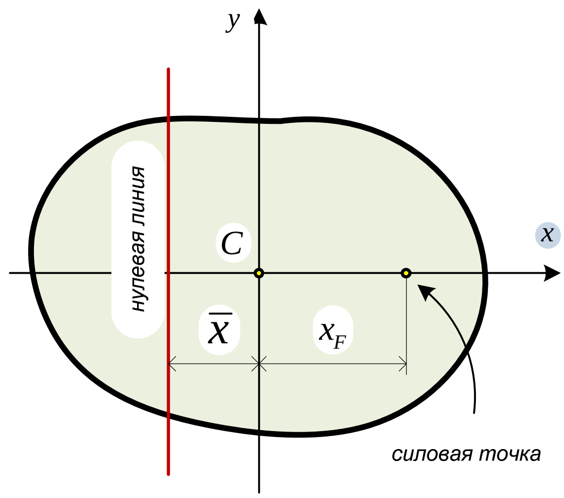


Рис. 6

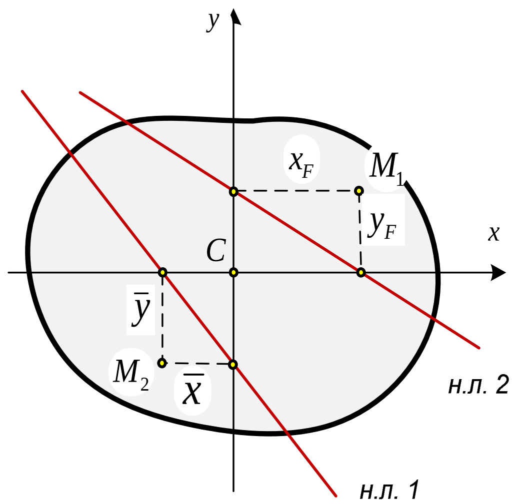


Рис. 7

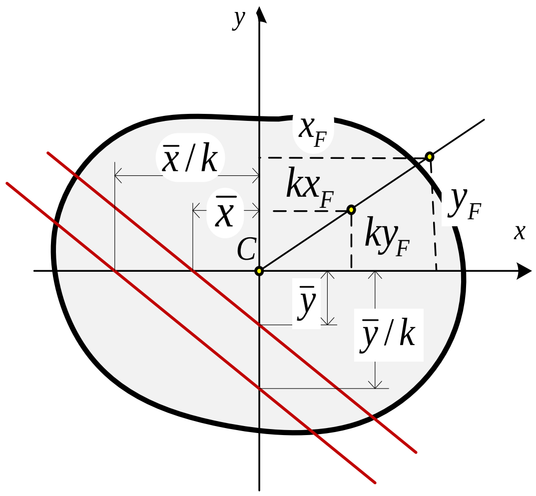


Рис. 8

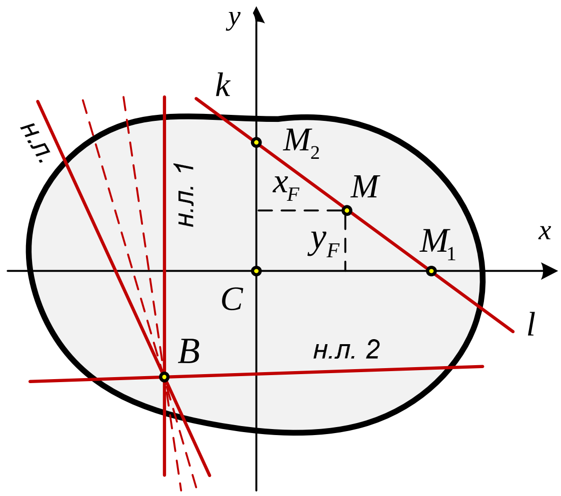


Рис. 9

Действительно, из формул:

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F}, \quad \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F} \quad \text{следует, что}$$

$$x_F = -\frac{i_y^2}{\bar{x}}, \quad y_F = -\frac{i_x^2}{\bar{y}}. \qquad \textbf{(8)}$$

То есть, приложив силу в новой точке A' с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$ (рис.7), мы получим новое положение нулевой линии (н. л. 2), которая отсечёт на осях x, y отрезки, равные координатам x_F, y_F.

4) Если силовая точка приближается к центру тяжести поперечного сечения по прямой линии, проходящей через центр тяжести сечения, то соответствующая нулевая линия будет удаляться от него, оставаясь параллельной себе, и наоборот.

Из формул **(7)** или **(8)** очевидно, что координаты x_F, y_F и отрезки $\bar{x}$, $\bar{y}$ обратно пропорциональны друг другу. Возьмём силовую точку *A* с координатами x_F, y_F (рис. 8) и построим для неё нулевую линию *1* по отрезкам

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F}, \; \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Теперь возьмем силовую точку *A'* с координатами $k \cdot x_F$, $k \cdot y_F$. Очевидно, что отрезки, которые нулевая линия отсечет на осях, теперь будут равны $\frac{x}{k}, \frac{y}{k}$. При этом нулевые линии *1* и *2* остаются параллельными. При приближении силы к точке *C* нулевая линия отодвигается от нее (*k*<*1*), при удалении (*k*>*1*) – нулевая линия приближается к центру тяжести. В пределе, когда $x_F = y_F = 0$, нулевая линия пройдет в бесконечности, и плоскость напряжений $\sigma_z(x,y)$ станет параллельной плоскости поперечного сечения, то есть $\sigma_z(x,y) = const$. В этом случае мы получим центральное растяжение-сжатие, как частный случай внецентренного растяжения-сжатия.

5) Если нулевая линия вращается вокруг некоторой точки, лежащей на ней, то точка приложения силы при этом перемещается по прямой, не проходящей через центр тяжести.

Пусть, например, сила приложена в точке $A(x_F, y_F)$ и соответствующая нулевая линия занимает положение, показанное на рис. 9. Выберем на ней произвольную точку $B(x_B, y_B)$ и, вращая вокруг нее нулевую линию, проследим как будут изменяться координаты точки *A*. Так как нулевая линия при всех своих положениях проходит через точку *B*, то ее координаты (x_B, y_B) должны удовлетворять уравнению нулевой линии **(6)**. Подставив вместо текущих координат *(x, y)* координаты точки *B*, получим:

$$1 + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} = 0. \qquad \mathbf{(9)}$$

Равенство **(9)** можно рассматривать, как уравнение прямой, в котором текущими координатами являются, уже координаты силовой точки x_F, y_F. Следовательно, при вращении нулевой линии вокруг точки *B* силовая точка *A* перемещается по прямой *k-l*, определяемой уравнением **(9).**

6) При перемещении точки приложения силы по прямой, не проходящей через центр тяжести, нулевая линия вращается вокруг некоторой точки, лежащей на ней.

Так как координаты точки приложения силы x_F, y_F и текущие координаты нулевой линии x, y обладают свойством взаимной заменяемости, то это свойство нулевой линии справедливо. При положении силовой точки в точках A_1 и A_2 (рис.9), то есть на осях x и y, нулевая линия замет соответственно положение н.л. 1 и н.л. 2, пересечение которых определит центр ее вращения B. Действительно, при расположении силовой точки на одной из осей, отрезок, отсекаемый нулевой линией на другой оси, согласно **(7)** обращается в бесконечность, то есть нулевая линия параллельна другой оси.

1.5. Упрощенные формулы для определения напряжений

Существует большое количество поперечных сечений (рис.10), для которых можем указать четыре точки, которые являются наиболее удаленными, как от оси x, так и от оси y (A, B, D, E). Применяя для определения напряжений в них формулу **(2)** можно записать:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_{\max}$$

Учитывая, что $\dfrac{I_x}{|y_{max}|} = W_x$ и $\dfrac{I_y}{|x_{max}|} = W_y$, можно записать, теряя при этом возможность автоматического получения знака напряжения σ_z:

$$\sigma_z^{A,B,C,D} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y}. \qquad \textbf{(10)}$$

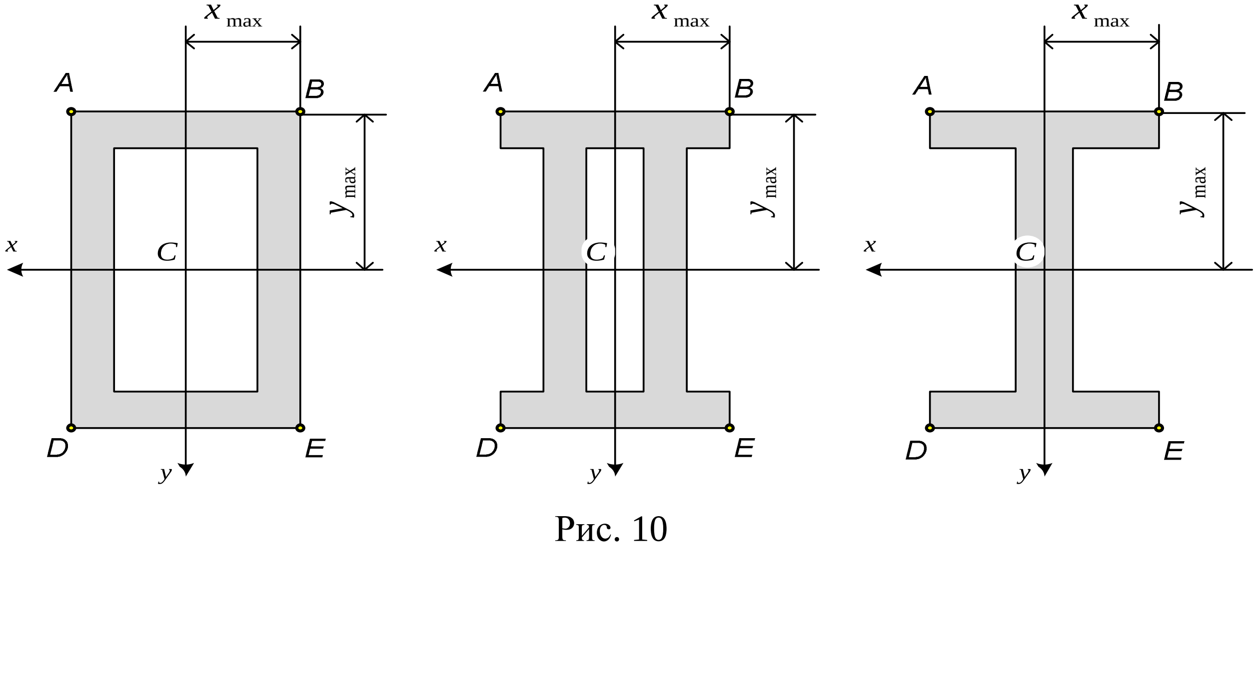


Рис. 10

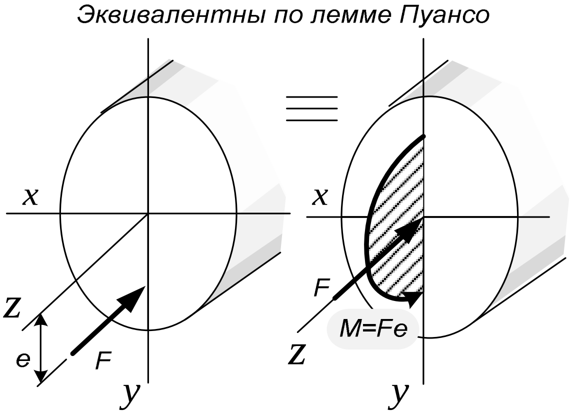


Рис. 11

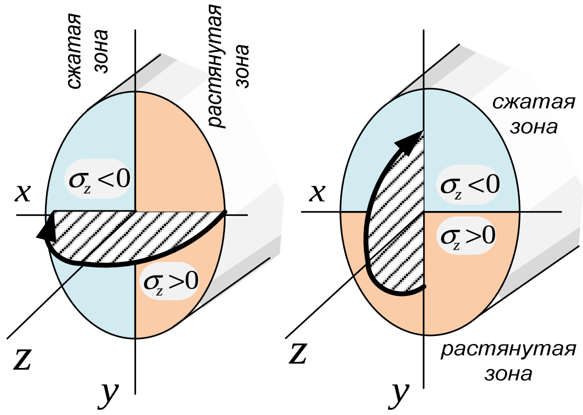


Рис. 12

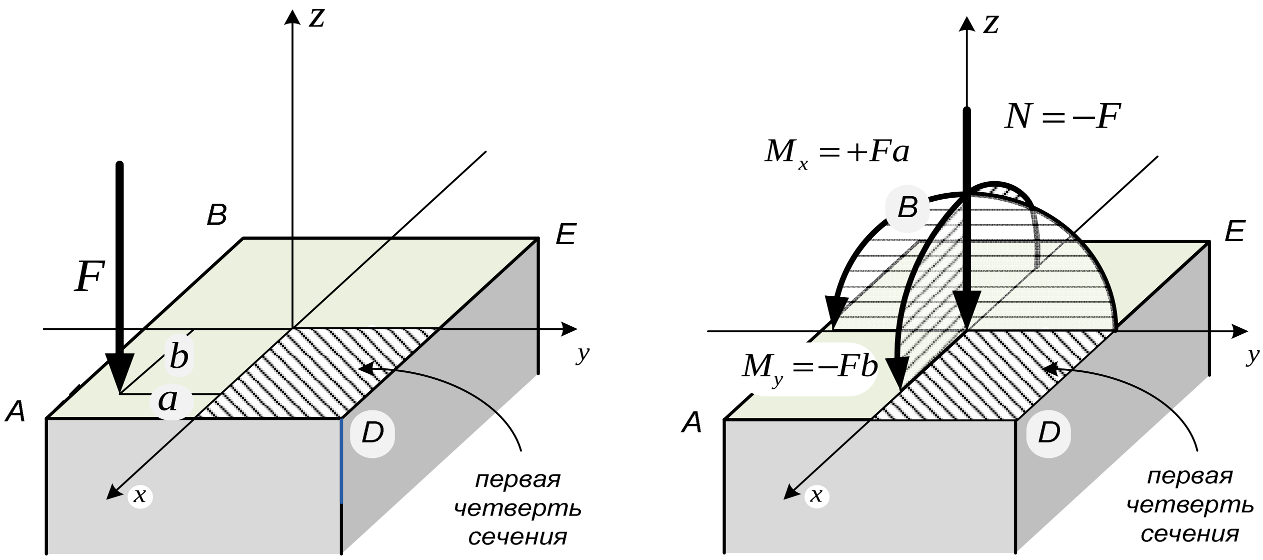


Рис. 13

Знак напряжения σ_z по формуле (**10**) получается в зависимости от сочетания знаков при втором и третьим слагаемых. Чтобы правильно выбирать эти знаки необходимо уметь по расположению силы определять направление изгибающих моментов, а по их направлению определять растяжение или сжатие вызывает данный изгибающий момент. Направление момента определяется теоремой о параллельном переносе силы (рис.11). Знак напряжения, возникающего в угловой точке от действия изгибающего момента можно определить, рассмотрев расположение сжатой и растянутой зон сечения (рис.12). Проиллюстрируем способ выбора знаков в формуле (**10**) с помощью рис.13.

Для случая, изображенного на рис.13:

$$\sigma_z^B = \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y},$$

где: $N = -F,\ M_x = N \cdot y_F = \mathrm{F} \cdot a,\ M_y = N \cdot x_F = -\mathrm{F} \cdot b$.

Напомним, что изгибающие моменты положительны, если вызывают растяжение в первой четверти (первом квадранте) сечения.

В точке *B* возникает сжатие от действия M_x (знак « - ») и растяжение от действия M_y (знак « + »).

Аналогично:

$$\sigma_z^E = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y},$$

$$\sigma_z^D = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y},$$

$$\sigma_z^A = \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}.$$

В случае сочетания «++» или «--» всегда будем получать соответственно наибольшее и наименьшее значение напряжений:

$$\max\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \qquad \textbf{(11а)}$$

$$\min\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}. \qquad \textbf{(11б)}$$

Если эти напряжения получаются с разными знаками, то они равны соответственно наибольшему растягивающему и наибольшему сжимающему напряжениям, то есть:

$$\max\sigma_z = \max\sigma_z^p,\ \min\sigma_z = \max\sigma_z^c.$$

Наибольшее по модулю значение напряжений всегда можно определить по формуле:

$$\max\sigma_z = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}. \qquad \textbf{(12)}$$

Грубой ошибкой является использование формул (10) и (11) в случае, когда сечение не содержит точек, являющихся наиболее удаленными как от оси *x*, так и от оси *y* (рис.14).

Фактически, напряжение в этой точке будет определяться в несуществующей точке, лежащей за пределами сечения (рис.14).

1.6. Построение эпюры нормальных напряжений

При внецентренном растяжении или сжатии эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении линейна, то есть нормальные напряжения в каждой точке прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до нулевой линии. Наибольшее напряжение возникает в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Эпюра нормальных напряжений, значения которых отложены от линии, перпендикулярной нулевой линии, показана на рис.15, каждая ордината этой эпюры определяет величину нормальных напряжений, возникающих в точках поперечного сечения, расположенных на прямой *B*-*B*, проходящей через эту ординату, параллельно этой линии. Для построения этой эпюры достаточно определить положение нулевой линии и вычислить нормальные напряжения в одной из точек поперечного сечения (не расположенной на этой оси), например, в центре тяжести.

Для определения положения опасных точек в сечении следует провести параллельно нулевой линии прямые, касающиеся контура сечения, таким путем будут найдены точки сечения, наиболее удаленные от нулевой линии, которые и являются опасными. Координаты этих точек подставляются в формулы **(2)** или **(4)** для определения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений.

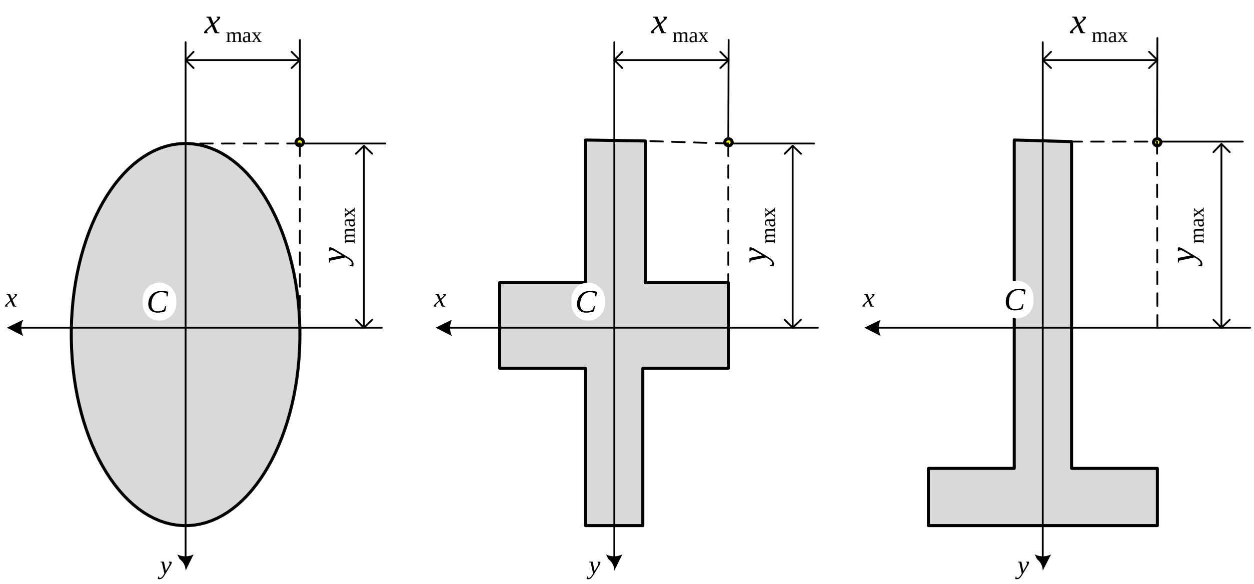


Рис. 14

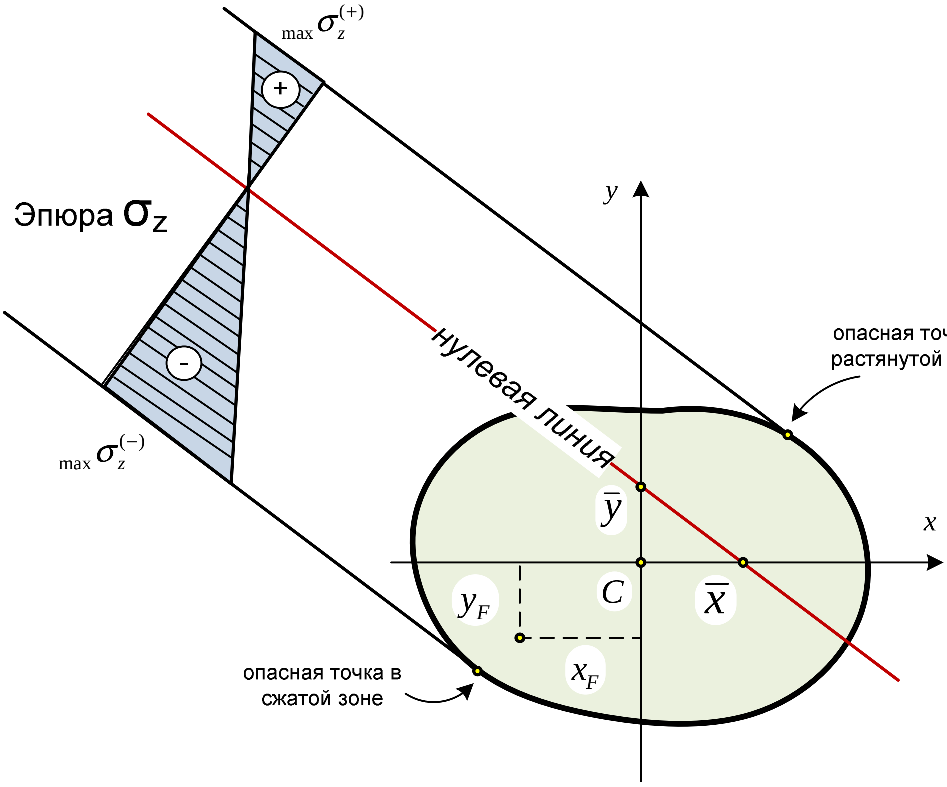

$_{\max}\sigma_z^{(+)}$
Эпюра σ_z
$_{\max}\sigma_z^{(-)}$
нулевая линия
y
x
опасная точка в растянутой зоне
$\bar{y}$
C
$\bar{x}$
y_F
x_F
опасная точка в сжатой зоне

Рис. 15

1.7. Расчет на прочность

При внецентренном растяжении-сжатии в сечении стержня возникают только нормальные напряжения σ_z. Это позволяет производить проверку прочности путем сравнения наибольшего напряжения с допускаемым.

Для материалов, у которых допускаемое напряжение на растяжение и сжатие не отличаются, условие прочности запишется:

$$\max|\sigma_z| \le [\sigma]. \qquad \textbf{(13)}$$

Для определения $\max|\sigma_z|$ можно использовать формулу **(12)**, а в тех случаях, когда ее применение невозможно, применяется формула **(2)** или **(4)**, предварительно определив положение нулевой линии и опасной точки.

Для материалов, у которых допускаемые напряжения на сжатие и растяжения различны, может возникнуть необходимость рассмотрения двух условий прочности. В сечении стержня при ВЦРС могут возникнуть как растягивающие, так и сжимающие напряжения. В этом случае условия прочности записываются для опасных точек *A* и *B* (рис.3, 4)

$$\max\sigma_z^p = \sigma_z(A) \le [\sigma]_p, \;\; \max|\sigma_z^c| = \sigma_z(B) \le [\sigma]_c \qquad \textbf{(14)}$$

поскольку изначально неясно, в какой из них условие прочности нарушится в первую очередь. При удовлетворении обоих неравенств прочность стержня будет обеспечена.

Однако, если напряжения в сечении имеют один знак (нулевая линия проходит за пределами поперечного сечения), то для расчета на прочность достаточно использовать одну из формул **(14)**.

Для определения $\max\sigma_z^p$ и $\max|\sigma_z^c|$ можно использовать формулы **(11)**. В тех случаях, когда их применение невозможно, следует применять формулу **(2)** или **(4)**, предварительно определив положение нулевой линии и опасных точек в сжатых и растянутых зонах.

Используя формулы **(13)** или **(14)** можно решать задачи 3 типов:

а) **Проверка прочности стержня.** Если задана нагрузка *F* и размеры или характеристики поперечного сечения, проверка прочности сводится к проверке выполнения неравенств в **(13)** или **(14)**.

б) **Определение допускаемой нагрузки (грузоподъемности).** Если известны размеры поперечного сечения, из формул **(13)** или **(14)** могут быть найдены значения силы *F*, при которой неравенства выполняются.

Так для опасных точек *A* и *B* (рис. 3) при условии что: $[\sigma]_p \ne [\sigma]_c$ следует записать, используя **(14)** и **(4)**, два неравенства:

$$\begin{cases} \max \sigma_z^p = \dfrac{F}{A} \cdot \left(1 + \dfrac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} + \dfrac{x_F \cdot x_A}{i_y^2}\right) \le [\sigma]_p \\ \max \sigma_z^c = \dfrac{F}{A} \cdot \left(1 + \dfrac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} + \dfrac{x_F \cdot x_A}{i_y^2}\right) \le [\sigma]_c \end{cases}$$

Решая систему, получаем два возможных значения допускаемой системы:

$$F_1 \le \frac{[\sigma]_p \cdot A}{1 + \dfrac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} + \dfrac{x_F \cdot x_A}{i_y^2}}, \quad F_2 \le \frac{[\sigma]_c \cdot A}{1 + \dfrac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} + \dfrac{x_F \cdot x_B}{i_y^2}}$$

Выбирая из них наименьшее, получаем искомое значение $F = \min\{F_1, F_2\}$.

в) **Определение размера поперечного сечения.** Если задана нагрузка *F*, то решение строится аналогично предыдущему случаю, но из неравенств находится неизвестный линейный размер поперечного сечения. При решении системы двух неравенств из двух полученных значений необходимо выбрать наибольшее, поскольку только в этом случае условие прочности на сжатие, и на растяжение будут выполнены.

Кроме перечисленных выше задач с помощью формул **(2)** или **(4)** можно решать задачу определения напряжений σ_z в произвольной точке сечения.

2. Ядро сечения

При внецентренном сжатии в поперечных сечениях бруса могут возникать растягивающие напряжения. Вместе с тем, если материал бруса хрупкий и обладает малой прочностью на растяжение, то такое внецентренное сжатие может привести к разрушению конструкции.

К материалам этого типа, например, относится бетон. Растягивающие напряжения практически не способна воспринимать и кирпичная кладка.

Стержни из таких материалов могут работать при внецентренном сжатии только при условии, что в поперечном сечении не возникает растягивающих напряжений. **Это происходит в том случае, когда точка приложения сжимающей силы расположена внутри или на границе некоторой центральной области поперечного сечения, называемой ядром.**

Ядром сечения называется область, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что сжимающая сила, приложенная внутри этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения стержня, сжимающие напряжения, то есть напряжения одного знака.

При расчете внецентренно сжатых элементов, изготовленных из материала, плохо воспринимающего растягивающие напряжения, важно знать форму и размеры ядра сечения. Это позволяет, не вычисляя напряжений, по эксцентриситету сжимающей силы устанавливать, возникнут в поперечном сечении растягивающие напряжения или нет.

Рассмотрим методику построения ядра сечения.

Первый способ (прямой). Точку, лежащую на границе ядра сечения, можно получить, проведя нулевую линию касательно к контуру сечения и вычислив для этого случая координаты точки приложения силы F по формулам **(8)**.

При построении ядра сечения используются следующее свойство нулевой линии и силовой точки: **при повороте нулевой линии вокруг некоторой точки *A* контура сечения точка приложения силы *F* перемещается вдоль некоторой прямой.**

Задавая последовательно некоторые положения нулевой линии как касательной к контуру сечения (1-1, 2-2, 3-3, …) (рис.16), вычисляют по формулам **(5)** координаты вершин ядра (1,2,3, …), соответствующих этим положениям нулевой линии. При построении ядра сечения отрезки, отсекаемые касательными к контуру сечения, удобно находить путем непосредственного измерения на чертеже. Учитывая, что переход нулевой линии из положения 1-1 в положение 2-2 можно осуществить поворотом вокруг точки A контура, между вершинами 1 и 2 ядра следует провести прямую (рис.16). На том же основании соединяют прямыми остальные вершины ядра сечения.

Второй способ (обратный).

В том случае, когда точка пересечения касательной к контуру сечения с одной из главных осей выходит за пределы чертежа, (например, касательная 4-4 на рис.16), построение ядра удобнее произвести другим способом. На контуре сечения отмечаются характерные (угловые) точки, отвечающие следующему требованию: через точку можно провести хотя бы одну касательную, которая бы не пересекала сечение (рис. 17). Эти точки следует рассматривать, как точки приложения продольных сил. Используя формулу **(7)**, необходимо определить положение нулевых линий, соответствующих выбранным силовым точкам. Выпуклая фигура, ограниченная этими нулевыми линиями, будет являться ядром сечения.

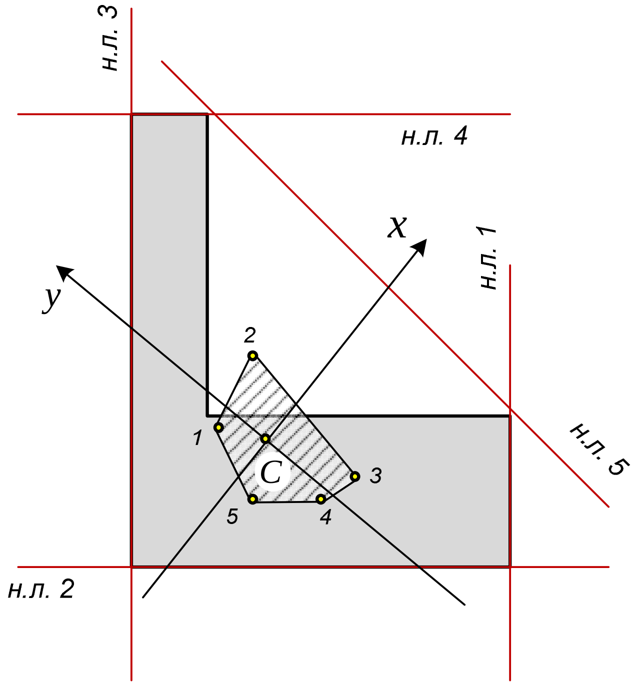


Рис. 16

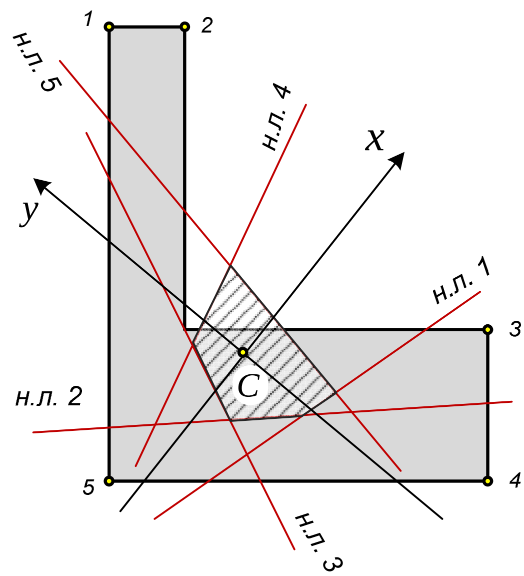


Рис. 17

3. Решение задач

Задача 1. Стальная труба, сечение которой изображено на рис.18, растягивается силой *F* = 500 *кН*, приложенной в точке *B*. Выполнить проверку прочности, если известно, что [σ] = 160 *МПа*.

Решение. Для кольцевого сечения любая центральная ось является одновременно и главной, поэтому решение задачи можно упростить, выбрав систему координат так, чтобы точка *B* лежала на одной из осей (рис. 18).

В этом случае:

$$M_y = 0,\ \left|M_x\right| = F \cdot r = 500 \cdot 4 = 2000\ \text{кН}\cdot\text{см}.$$

Поскольку допускаемые напряжения на сжатие и растяжение не различаются, условие прочности можно записать в виде **(13)**, использовав для определения наибольших напряжений формулу **(12)**. Наибольшие напряжения возникают в точке *D*, лежащей на главной оси, поэтому в данном случае использование формулы **(12)** допустимо. Вычислим геометрические характеристики, входящие в **(12)**:

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(6^2 - 4^2\right) = 20\pi\ \text{см}^2$$

$$W_x = \frac{I_x}{\left|y_{\max}\right|} = \frac{\left(\dfrac{\pi \cdot R^4}{4} - \dfrac{\pi \cdot r^4}{4}\right)}{R} = \frac{\pi}{4 \cdot R} \cdot \left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{4 \cdot 6} \cdot \left(6^4 - 4^4\right) = 43.33\pi\ \text{см}^3$$

Условие прочности:

$$\left|\max \sigma_z\right| = \frac{|N|}{A} + \frac{\left|M_x\right|}{W_x} \le [\sigma].$$

Проверим его:

$$\left|\max \sigma_z\right| = \frac{F}{20\pi} + \frac{4F}{43.33\pi} = \frac{500}{3.14} \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{4}{43.33}\right) \cong 20\ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 200\ \text{МПа}$$

Очевидно, что $\left|\max \sigma_z\right| > [\sigma]$, следовательно, условие прочности не выполняется.

Ответ: прочность не обеспечена.

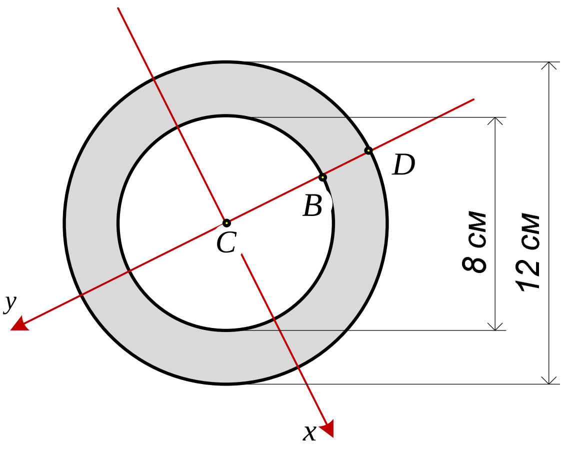


Рис. 18

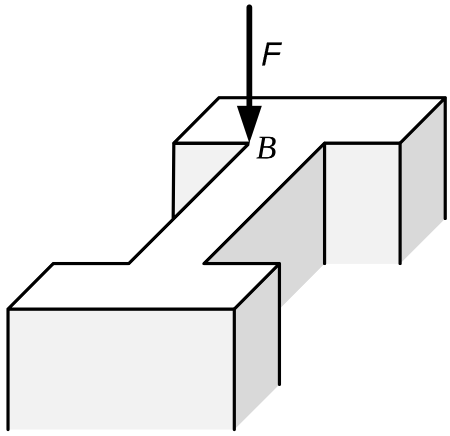


Рис. 19а

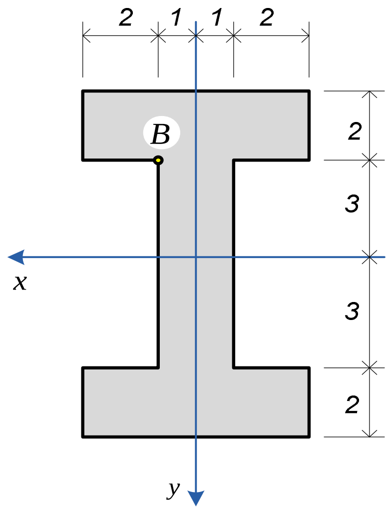
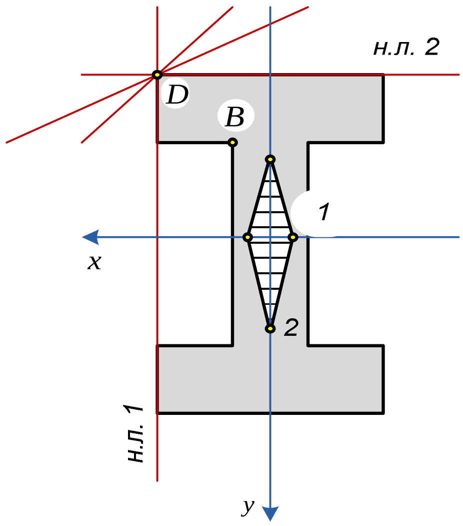


Рис. 19б



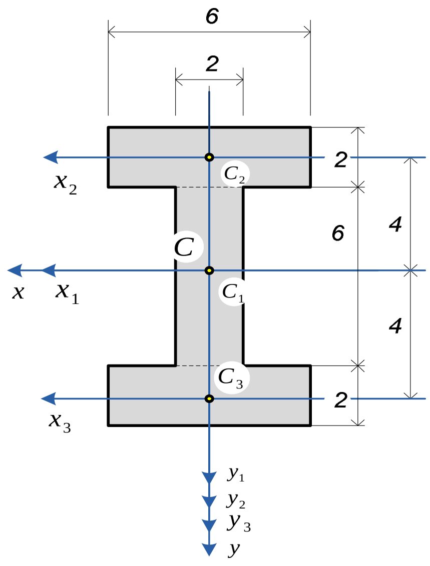


Рис. 20, 20а

Задача 2. Стальной стержень, имеющий двутавровое поперечное сечение (рис. 19), сжимается силой *F*, приложенной в точке *B*. Известно, что [σ] = 160 *МПа*. Определить допускаемое значение силы *F* из условия прочности. Построить ядро сечения прямым способом.

Решение. Поскольку для стали $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$, условие прочности должно быть записано в виде **(13)**, причём для данного сечения наибольшие напряжения можно искать по формуле **(12)**. Вычислим геометрические характеристики:

$$A = 3\cdot(2\cdot 6) = 36\ см^2,\ \ I_x = \frac{2\cdot 6^3}{12} + 2\cdot\left[\frac{2^3\cdot 6}{12} + 4^2\cdot(2\cdot 6)\right] = 428\ см^4,$$

$$I_y = \frac{2^3\cdot 6}{12} + 2\cdot\frac{2\cdot 6^3}{12} = 76\ см^4,$$

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} = \frac{428}{5} = 85.6\ см^3,$$

$$W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|} = \frac{76}{3} = 25.33\ см^3.$$

Вычислим усилия:

$$N = -F,\ M_x = N\cdot y_F = -F\cdot(-3) = 3F,\ M_y = N\cdot x_F = -F\cdot(+1) = -F.$$

Записываем условие прочности:

$$|\max\sigma_z| = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma];$$

$$\frac{F}{36} + \frac{3\cdot F}{85.6} + \frac{F}{25.33} \le 16\ \frac{кН}{см^2};$$

$$F \le \frac{16}{\left(\frac{1}{36} + \frac{3}{85.6} + \frac{1}{25.33}\right)} = 166.66\ кН.$$

Построим для данного сечения ядро прямым способом (см. раздел 2), используя для этого формулы **(8)**. Предварительно найдём:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{428}{36} = 11.89\ см^2,\ i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{76}{36} = 2.11\ см^2.$$

Учитывая, что сечение имеет две оси симметрии, ядро сечения может быть построено только в одном квадранте с последующим отражением в другие. Когда нулевая линия находится в положении 1-1 и отсекает на осях отрезки (рис.20) $\overline{x} = 3\ см,\ \ \overline{y} = \infty$, силовая точка 1 будет иметь координаты:

$$x_F=-\frac{i_y^2}{\bar{x}}=-\frac{2.11}{3}=-0.7\ см,\ \ y_F=-\frac{i_x^2}{\bar{y}}=-\frac{11.89}{\infty}=0.$$

Когда нулевая линия находится в положении 2-2 и отсекает на осях отрезки (рис.20) $\bar{x}=\infty$, $\bar{y}=-5\ см$, силовая точка 2 будет иметь координаты

$$x_F=-\frac{2.11}{\infty}=0,\ \ y_F=-\frac{11.89}{-5}=2.38\ см.$$

Когда нулевая линия, вращается вокруг точки D, силовая точка лежит на прямой 1-2.

Во всех перечисленных случаях в сечении не будет возникать растягивающих напряжений при условии, что сама сила сжимает стержень. Треугольник *С*-1-2 будет представлять собой четвертую часть ядра сечения. Отражая его относительно осей x и y в другие квадранты, построим все ядро сечения: ромб 1-2-3-4.

Задача 3. Стержень прямоугольного сечения (рис.21) сжат силой *F*, приложенной в точке *B*. Из условия прочности определить характерный размер поперечного сечения *a*, если известно, что $F=1000\ кН$, $[\sigma]_p=5\ МПа$, $[\sigma]_c=20\ МПа$.

Решение. Для решения задачи можно применить формулу **(11)**. Определим геометрические характеристики:

$$A=24a^2,\ W_x=\frac{4a\cdot(6a)^2}{6}=24a^3,\ W_y=\frac{(4a)^2\cdot 6a}{6}=16a^3.$$

Определим усилия по (1), учитывая, что $x_F=2a,\ y_F=-a$:

$$N=-F;\ M_x=N\cdot y_F=-F\cdot(-a)=Fa;\ M_y=N\cdot x_F=-F\cdot(+2a)=-2Fa.$$

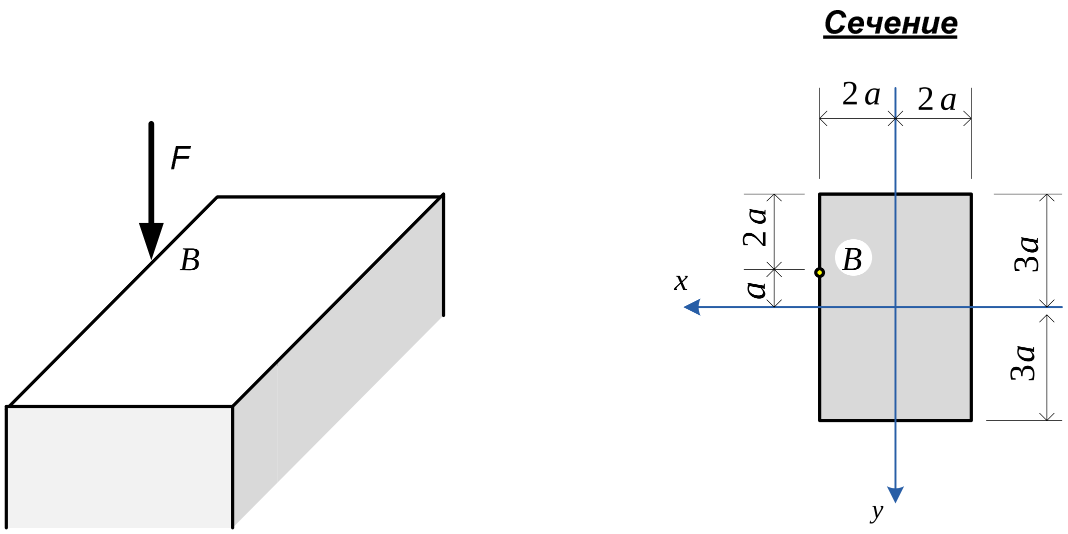


Рис. 21

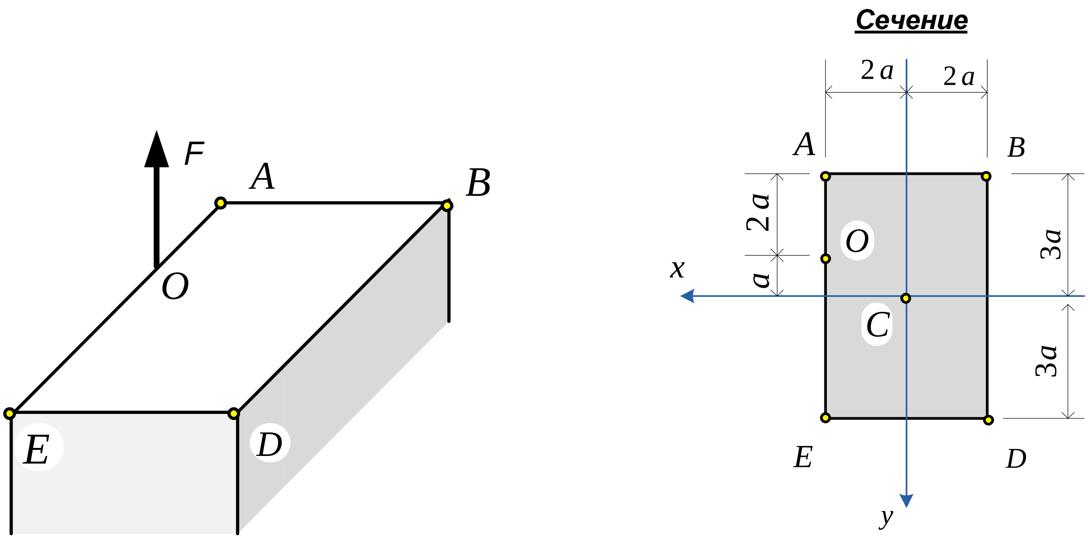


Рис. 22

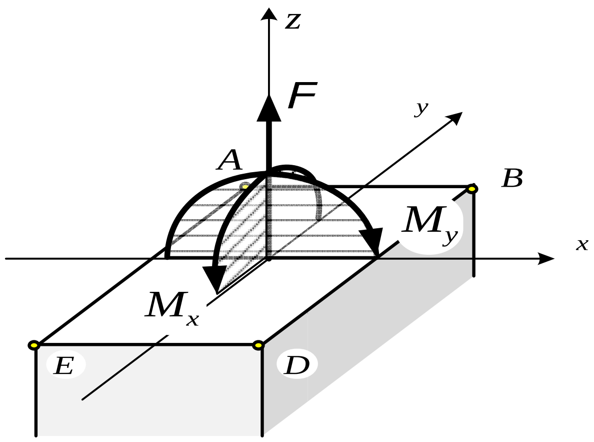


Рис. 23

Определим наибольшие напряжения в сжатой и растянутой зонах:

$$\max\sigma_z^p = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = -\frac{F}{24a^2} + \frac{Fa}{24a^3} + \frac{2Fa}{16a^3} = \frac{F}{24a^2}\cdot(-1+1+3) = \frac{F}{8a^2}$$

$$\max\sigma_z^c = \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} = -\frac{F}{24a^2} - \frac{Fa}{24a^3} - \frac{2Fa}{16a^3} = -\frac{F}{24a^2}\cdot(1+1+3) = \frac{-5F}{24a^2}$$

Запишем условия прочности в соответствии с **(14)**:

$$\begin{cases} \max\sigma_z^p \le [\sigma]_p \\ \max|\sigma_z^c| \le [\sigma]_c \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{F}{8a^2} \le [\sigma]_p \\ \dfrac{5F}{24a^2} \le [\sigma]_c \end{cases}.$$

Учитывая, что $[\sigma]_c = 20\ МПа = 2\ \dfrac{кН}{см^2}$, $[\sigma]_p = 5\ МПа = 0.5\ \dfrac{кН}{см^2}$, решаем систему и определяем размер a:

$$\begin{cases} a \geq \sqrt{\dfrac{F}{8[\sigma]_p}} = \sqrt{\dfrac{1000}{8\cdot 0.5}} = \sqrt{250} \cong 15.8\ см \\ a \geq \sqrt{\dfrac{5F}{24[\sigma]_p}} = \sqrt{\dfrac{5\cdot 1000}{24\cdot 2}} = \sqrt{104.2} \cong 10.2\ см \end{cases}$$

Откуда получаем, что $a \geq 10{,}2\ см$.

Ответ: a = 15,8 *см*.

Задача 4. Стержень, имеющий прямоугольное поперечное сечение (рис.22), растягивается силой F = 1000 *кН*, приложенной в точке O. Считая характерный размер a равным 1 *см*, изобразить положение плоскости напряжений $\sigma_z(x, y)$ и построить эпюру напряжений.

Решение. Используем для решения значения усилий и геометрических характеристик, вычисленных для задачи 3, а именно:

$A = 24a^2,\ W_x = 24a^3,\ W_y = 16a^3,\ |N| = F;\ |M_x| = Fa;\ |M_y| = 2Fa$.

При решении можно обойтись вычислением напряжений в угловых точках A, B, D, E, использовав для этого формулу **(10)**. Приводя силу F к оси z и, рассматривая направление действия изгибающих моментов M_x и M_y, заметим (рис. 23), что

M_x вызывает растяжение в точках A, B и сжатие в точках E, D;

M_y вызывает растяжение в точках E, A и сжатие в точках B, D.

Вычисляем напряжения:

$$\sigma_z^A = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{F}{24a^2} + \frac{Fa}{24a^3} + \frac{2Fa}{16a^3} = \frac{5F}{24a^2} = 208\ МПа$$

$$\sigma_z^B = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{F}{24a^2} + \frac{Fa}{24a^3} - \frac{2Fa}{16a^3} = -\frac{F}{24a^2} = -41.6\ МПа$$

$$\sigma_z^D = \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{F}{24a^2} - \frac{Fa}{24a^3} - \frac{2Fa}{16a^3} = -\frac{3F}{24a^2} = -125\ МПа$$

$$\sigma_z^E=\frac{N}{A}-\frac{|M_x|}{W_x}+\frac{|M_y|}{W_y}=\frac{F}{24a^2}-\frac{Fa}{24a^3}+\frac{2Fa}{16a^3}=\frac{3F}{24a^2}=125\ \text{МПа}$$

Найдем положение нулевой линии, вычислив отрезки, которые она отсекает на осях, учитывая, что $x_F=2a,\ y_F=-a$.

$$i_x^2=\frac{I_x}{A}=3a^2;\ i_y^2=\frac{I_y}{A}=\frac{4}{3}a^2$$

$$\bar{x}=-\frac{i_y^2}{x_F}=-\frac{\frac{4}{3}a^2}{2a}=-\frac{2}{3}a$$

$$\bar{y}=-\frac{i_x^2}{y_F}=-\frac{3a^2}{-a}=3a$$

Проведя по найденным отрезкам нулевую линию и откладывая от плоскости поперечного сечения вверх положительные и вниз отрицательные значения напряжений σ_z, построим плоскость $\sigma_z(x,y)$ на рис. 24. Попутно отметим, что в центре тяжести $\sigma_z^C=\frac{N}{A}=\frac{F}{24a^2}$. По значениям наибольших сжимающих (точка D) и растягивающих (точка A) напряжений построим на рис. 25 эпюру напряжений σ_z так, как это описано в разделе 1.6.

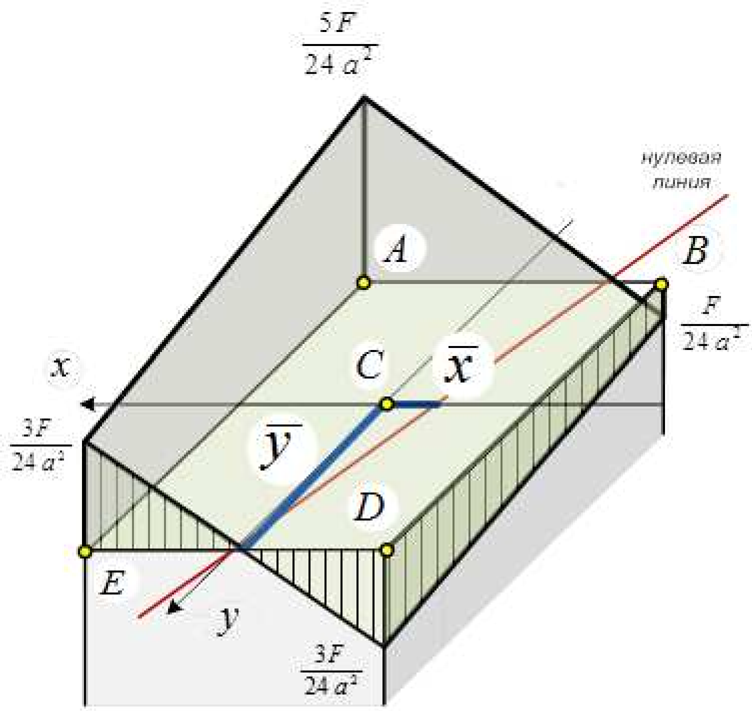


Рис. 24

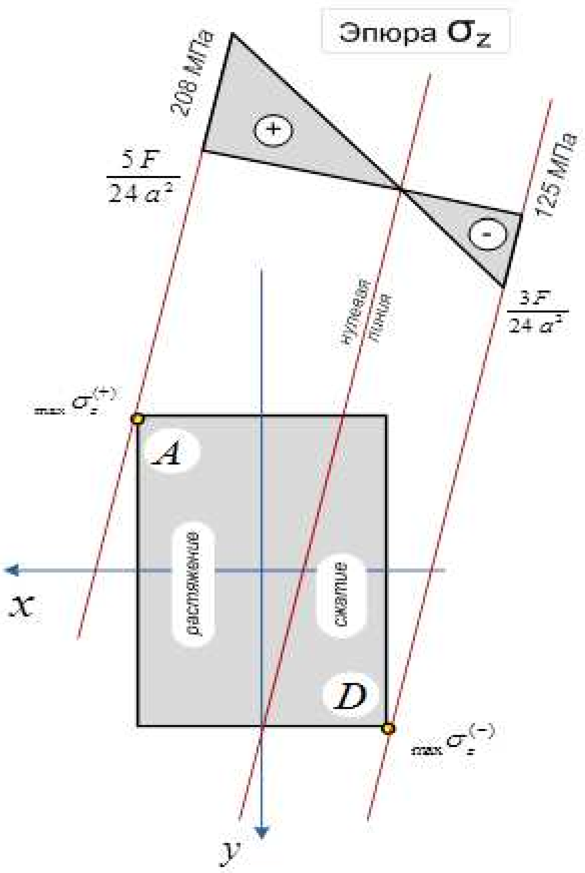


Рис. 25

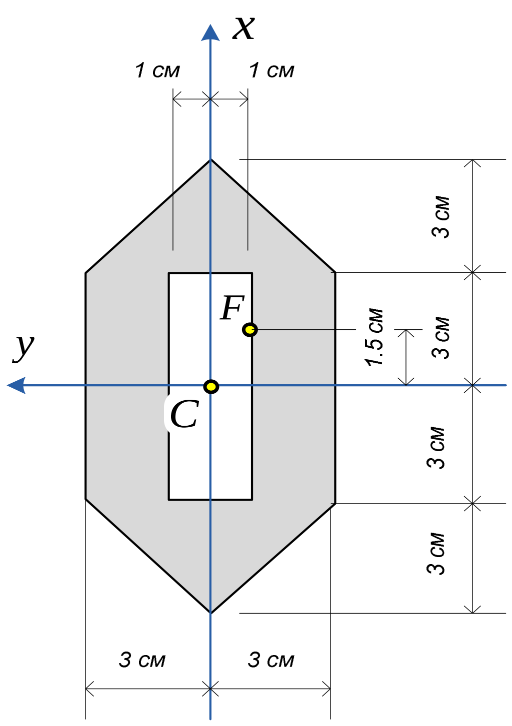


Рис. 26

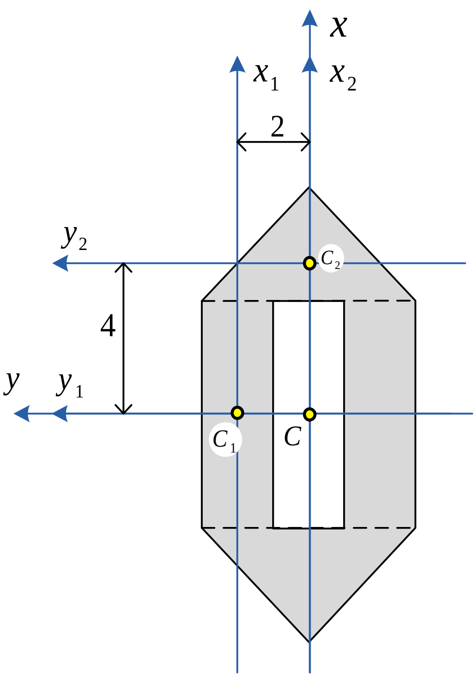


Рис. 27

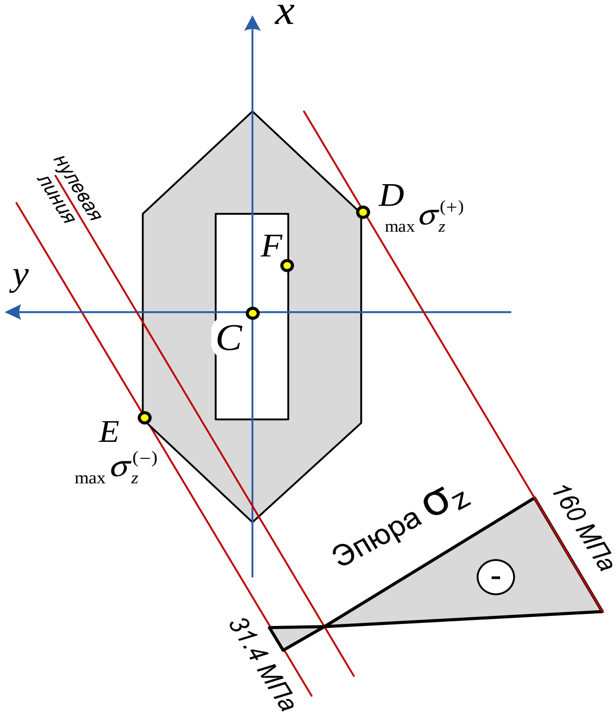


Рис. 28

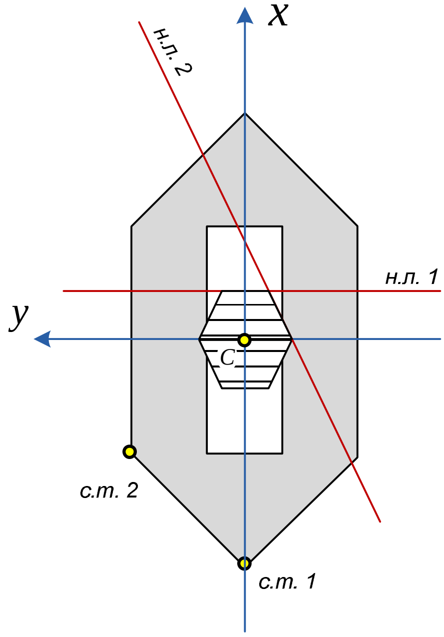


Рис. 29

Задача 5. Стержень, имеющий поперечное сечение, изображенное на рис. 26, сжимается силой *F*, приложенной в точке *B*. Известно допускаемое напряжение [σ] = 160 *МПа*. Найти допускаемую нагрузку *F* из условия прочности. Построить эпюру напряжений. Построить ядро сечения обратным способом.

Решение. При решении задачи нельзя применять формулы **(11)** и **(12)**. Определять напряжения в данном случае можно только либо по **(2)**, либо по **(4)**. Используем формулу **(2)**. Учитывая, что $\bar{x} = 1.5\ см$; $\bar{y} = -1\ см$, определим усилия:

$$N = -F;\ M_x = N \cdot y_F = -F \cdot (-1) = F;\ \ M_y = N \cdot x_F = -F \cdot (1.5) = -1.5 \cdot F$$

Разбив поперечное сечение на два прямоугольника и два треугольника определим необходимые геометрические характеристики.

$$A = 2 \cdot (2 \cdot 6) + 2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 3}{2}\right) = 42\ см^2;$$

$$I_x = 2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} + 2^2 \cdot 12\right) + 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot 6^3}{48}\right) = 131\ см^4;$$

$$I_y = 2 \cdot \left(\frac{6^3 \cdot 2}{12}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3^3 \cdot 6}{36} + 4^2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 3}{2}\right)\right) = 369\ см^4;$$

$$i_x^2 = \frac{131}{42} = 3.12\ см^2;\ i_y^2 = \frac{369}{42} = 8.78\ см^2.$$

Запишем уравнение плоскости напряжений:

$$\sigma_z(x,y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}\cdot y + \frac{M_y}{I_y}\cdot x = -\frac{F}{42} + \frac{F\cdot y}{131} - \frac{1.5\cdot F\cdot x}{369} = F\cdot\left(-\frac{1}{42} + \frac{y}{131} - \frac{1.5\cdot x}{369}\right)$$

Определить положение опасной точки, для которой нужно записать условие прочности, можно только построив нулевую линию. Для этого найдем $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по **(7)**.

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{8.78}{1.5} = -5.85;\ \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{3.12}{-1} = 3.12.$$

Строим нулевую линию. Из рисунка 28 можно определить, что наиболее удаленной от нулевой линии является точка *D*. Записываем условие прочности в виде **(14)**, учитывая, что

$$\sigma_z^D = F\cdot\left(-\frac{1}{42} - \frac{3}{131} - \frac{1.5\cdot 3}{369}\right) = -0.0589F,$$

$$\max|\sigma_z| \le [\sigma] = 16\ \frac{кН}{см^2}$$

Откуда $F \le \dfrac{16}{0.0589} = 271.6\ кН$.

Ясно, что при найденном значении силы, наибольшие сжимающие напряжения возникнут в точке *D*:

$$\max\sigma_z^C = \sigma_z^D = -160\ МПа.$$

а наибольшие растягивающие – в точке *E* (рис.28):

$$\sigma_z^E = 271.6\cdot\left(-\frac{1}{42} + \frac{3}{131} - \frac{1.5\cdot(-3)}{369}\right) = 3.31\ \frac{кН}{см^2} = 33.1\ МПа$$

Строим эпюру напряжений.

Теперь построим ядро сечения обратным способом (раздел 2). Так как сечение имеет две оси симметрии, то достаточно построить четвертую часть ядра, последовательно поместив силовые точки в т. 1 и в т. 2 (рис. 29) и найдя по формулам **(7)** положение соответствующих нулевых линий 1-1и 2-2.

Силовая точка 1: $x_F = -6;\ y_F = 0$.

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{8.76}{-6} = 1.46\ см;\ \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F} = \infty.$$

Силовая точка 2: $x_F = -3;\ y_F = 3$.

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{8.76}{-3} = 2.92\ см;\ \ \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{3.12}{3} = -1.04\ см.$$

Достроим ядро сечения по его четвертой части, используя симметрию относительно осей x и y.

Задача 6. Стержень, имеющий тавровое поперечное сечение (рис. 30), выполнен из материала с характеристиками $[\sigma]_c = 100\ МПа$; $[\sigma]_p = 40\ МПа$. Стержень загружен сжимающей силой F, которая приложена в точке D.

1. Построить эпюру напряжений σ_z в общем виде.
2. Из условий прочности определить характерный размер поперечного сечения a, если задана сила $F = 1000\ кН$.
3. Из условий прочности найти допускаемую нагрузку F, если известен размер $a = 1\ см$.
4. Построить ядро сечения обратным способом.

Решение. Для определения напряжений используем формулу **(4)**, поскольку упрощенные формулы **(11)** и **(12)** непригодны в данном случае. Предварительно, найдя положение центра тяжести, вычислим необходимые геометрические характеристики (рис. 31). Исходная система координат: x_0, y_0.

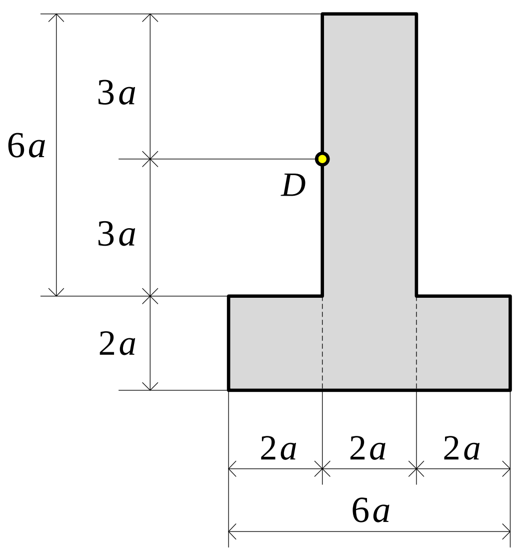


Рис. 30

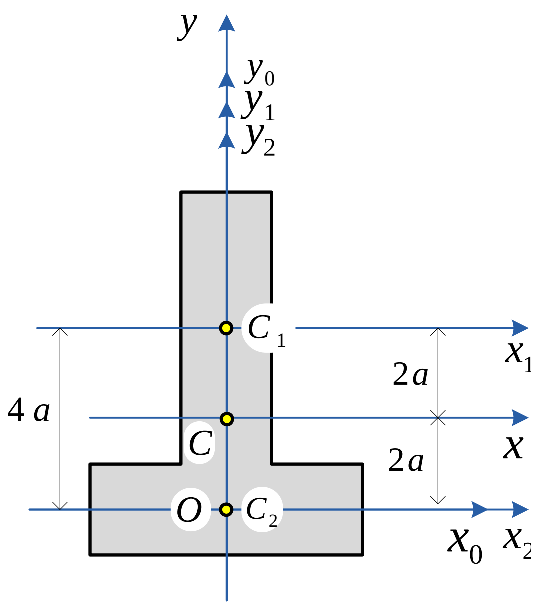


Рис. 31

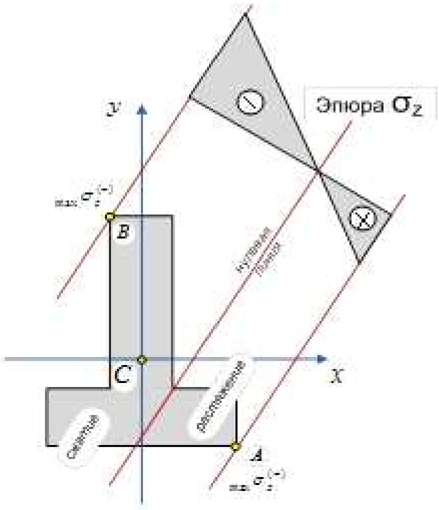


Рис. 32

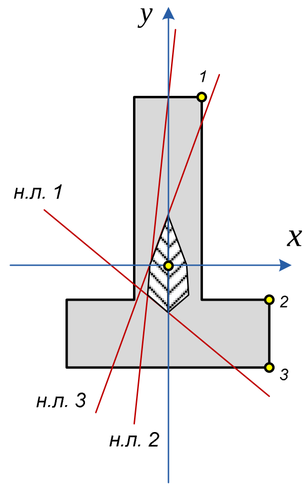


Рис. 33

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4a \cdot 12a^2 + 0 \cdot 12a^2}{12a^2 + 12a^2} = 2a\,.$$

Тогда

$$A = 12a^2 + 12a^2 = 24a^2;$$

$$I_x = \left[\left(\frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2^2 \cdot 12\right) + \left(\frac{2^3 \cdot 6}{12} + 2^2 \cdot 12\right)\right] \cdot a^4 = 136a^4;$$

$$I_y = \left[\frac{2^3 \cdot 6}{12} + \frac{2 \cdot 6^3}{12}\right] \cdot a^4 = 40a^4;$$

$$i_x^2 = \frac{136a^4}{24a^2} = \frac{17}{3}a^2; \;\; i_y^2 = \frac{40a^4}{24a^2} = \frac{5}{3}a^2$$

Учитывая, что $x_F = a,\; y_F = -a$, запишем выражение для σ_z:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2}\right) = -\frac{F}{24a^2} \cdot \left(1 - \frac{3x}{5a} + \frac{6y}{17a}\right).$$

Построив нулевую линию (рис. 32), определим положение опасных точек A и B.

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F} = \frac{5}{3}a; \;\; \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{17}{6}a\,.$$

В общем виде определим напряжение в этих точках.

Точка *A*. $\quad x = 3a; \;\; y = -3a;$

$$\sigma_z^A = -\frac{F}{24a^2}\cdot\left(1-\frac{3\cdot 3}{5}-\frac{6\cdot 3}{17}\right)=0.077\frac{F}{a^2}=\max\sigma_z^p .$$

Точка B. $x=-a;\ y=5a;$

$$\sigma_z^B = -\frac{F}{24a^2}\cdot\left(1+\frac{3\cdot 1}{5}+\frac{6\cdot 5}{17}\right)=-0.142\frac{F}{a^2}=\max\sigma_z^c .$$

Строим эпюру напряжений σ_z в общем виде (рис. 32). Поскольку $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$ запишем условие прочности в виде **(14)**.

$$\begin{cases} 0.077\dfrac{F}{a^2}\le[\sigma]_p \\ 0.142\dfrac{F}{a^2}\le[\sigma]_c \end{cases}$$

Если задана сила $F=1000\ кН$ (вопрос 2), то размер a найдется из решения системы:

$$\begin{cases} a\ge\sqrt{\dfrac{0.142\cdot 1000}{10}}=3.77\ см \\ a\ge\sqrt{\dfrac{0.077\cdot 1000}{4}}=4.38\ см \end{cases}$$

Выбираем a = 4,38 см.

Если задан размер a (вопрос 3), то значение силы F находится из решения системы:

$$\begin{cases} F\le\dfrac{10\cdot 1^2}{0.142}=70\ кН \\ F\le\dfrac{4\cdot 1^2}{0.077}=52\ кН \end{cases}$$

откуда F = 52 $кН$.

Теперь строим ядро сечения. Для этого поочередно помещаем силовую точку в углы контура (точка 1, 2 и 3), пропуская входящие углы (рис. 33).

Построим соответствующие нулевые линии:

точка 1: $x_F=a, y_F=5a$, н.л. *1-1*: $\bar{x}=-\frac{5}{3}a,\ \bar{y}=-\frac{17}{15}a$,

точка 2: $x_F=3a, y_F=-a$, н.л. *2-2*: $\bar{x}=-\frac{5}{9}a,\ \bar{y}=+\frac{17}{3}a$, точка 3: $x_F = 3a, y_F = -3a$, н.л. *3-3*: $\bar{x} = -\frac{5}{9}a,\ \bar{y} = +\frac{17}{9}a$.

По левую сторону от оси *y* данные нулевые линии отсекут выпуклую фигуру, которая в силу симметрии будет являться половиной ядра сечения. Достроим его до целого.

Задача 7. Бетонный стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 34, загружен сжимающей силой *F* = 1000 *кН*. $[\sigma]_c = 8\ МПа,\ [\sigma]_p = 0.8\ МПа$. Определить из условия прочности характерный размер поперечного сечения *a*.

Решение. Разбив поперечное сечение на два треугольника и прямоугольник, найдем положение центра тяжести и вычислим все необходимые геометрические характеристики.

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 10a = 15a^2;\ A_3 = 4a \cdot 6a = 24a^2;$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$x_c = \frac{\frac{1}{2} 3a \cdot 10a \cdot (-3a) \cdot 2 + 0}{15a^2 \cdot 2 + 24a^2} = -1.667a;\ y_c = 0,$$

так как ось *x* является осью симметрии. Оси *x*, *y* – главные центральные оси сечения.

Определим моменты инерции относительно центральных осей

$$I_{x_1} = I_{x_2} = \frac{10a \cdot (3a)^3}{36} = 7.5a^4;\ I_{y_1} = I_{y_2} = \frac{(10a)^3 \cdot 3a}{48} = 62.5a^4;$$

$$I_{x_3} = \frac{4a \cdot (6a)^3}{12} = 72a^4;\ I_{y_3} = \frac{(4a)^3 \cdot 6a}{12} = 32a^4,$$

$$I_x = \left[\left(7.5 + 15 \cdot (4)^2\right) \cdot 2 + 72\right] \cdot a^4 = 576a^4;$$

$$I_y = \left[\left(62.5 + 15 \cdot (-1.33)^2\right) \cdot 2 + 32 + 24 \cdot (1.67)^2\right] \cdot a^4 = 277a^4.$$

Найдем радиусы инерции:

$$i_x^2 = \frac{567a^4}{54a^2} = 10.5a^2;\ i_y^2 = \frac{277a^4}{54a^2} = 5.13a^2.$$

Для определения положения опасных точек необходимо построить нулевую линию. Учитывая, что $x_F = -0.33a,\ y_F = -5.4a$, получим

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{5.13a^2}{-0.3a} = 17.1a;\ \ \bar{y} = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10.5a^2}{-5.4a} = 1.94a.$$

Построить нулевую линию (рис. 35), определим положение опасных точек 2 и 5.

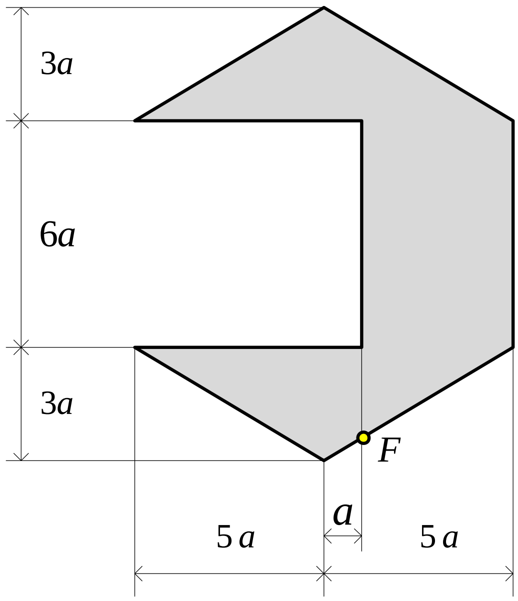


Рис. 34а

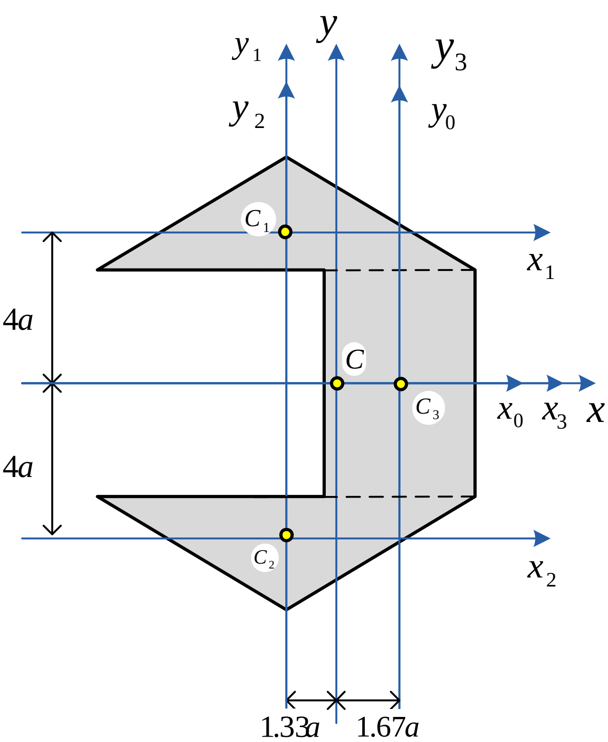


Рис. 34б

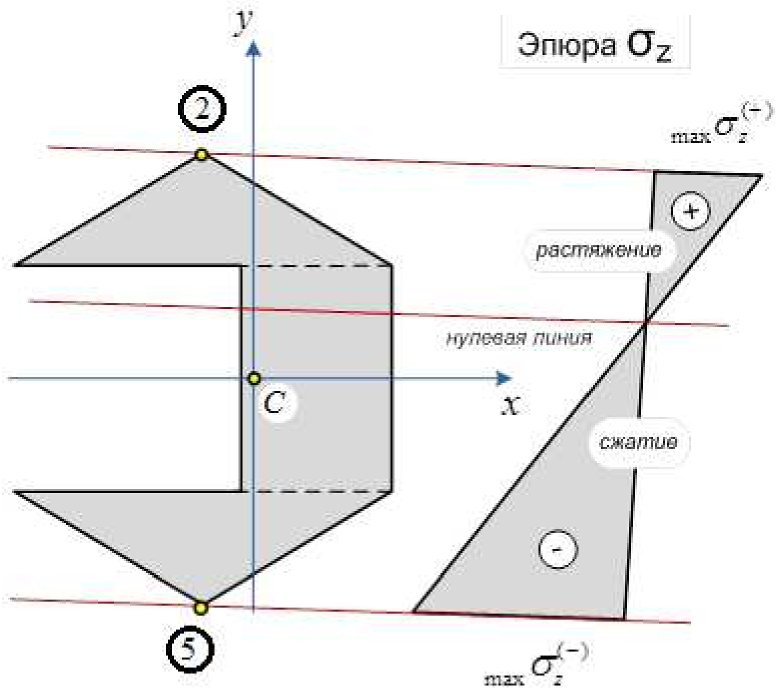

Эпюра σ_z
2
$_{\max}\sigma_z^{(+)}$
растяжение
нулевая линия
C
x
y
сжатие
5
$_{\max}\sigma_z^{(-)}$

Рис. 35

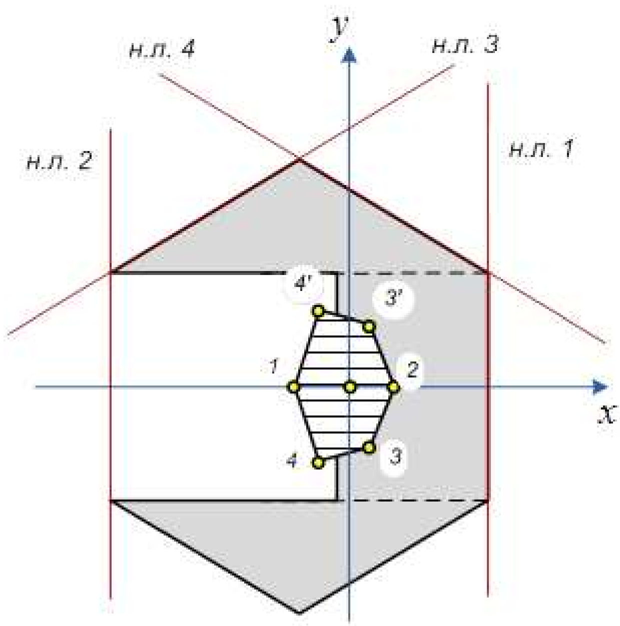

н.л. 4
y
н.л. 3
н.л. 2
н.л. 1
4'
3'
1
2
x
4
3

Рис. 36

<u>Точка 2.</u> $x = -1.33a,\ \ y = 6a$.

$$\max\sigma_z^p = \sigma_z^2 = \frac{-1000}{54a^2}\cdot\left(1 + \frac{(-5.4a)\cdot 6a}{10.5a^2} + \frac{(-0.33a)\cdot(-1.33a)}{5.13a^2}\right) = \frac{37.04}{a^2}$$

<u>Точка 5.</u> $x = -1.33a,\ \ y = -6a$.

$$\max\sigma_z^c = \sigma_z^5 = \frac{-1000}{54a^2}\cdot\left(1 + \frac{(-5.4a)\cdot(-6a)}{10.5a^2} + \frac{(-0.33a)\cdot(-1.33a)}{5.13a^2}\right) = \frac{-77.24}{a^2}$$

Эпюру напряжений построим в общем виде (рис. 35). Условие прочности запишем в виде **(14)**, так как $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$.

$$\begin{cases} \dfrac{37.04}{a^2} \le 0.08\ \ кН/см^2 \\ \dfrac{77,24}{a^2} \le 0.8\ \ кН/см^2 \end{cases}$$

Размер a найдется из решения системы неравенств

$$\begin{cases} a \ge \sqrt{\dfrac{37,04}{0,08}} \cong 21\ \ см \\ a \ge \sqrt{\dfrac{77,24}{0,8}} = 9.8\ \ см \end{cases}$$

Таким образом, характерный размер поперечного сечения $a \cong 21\ \ см$.

На рис. 36 представлено ядро сечения.

Маковкин Георгий Анатольевич
Штенберг Валерия Борисовна
Сухов Михаил Федорович
Кожанов Дмитрий Александрович

Внецентренное растяжение – сжатие

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 2,1. Усл. печ. л.2,4. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
http://www. nngasu.ru, srec@nngasu.ru