МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Кафедра теоретической механики

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 1. Статика

Методические указания
для подготовки к интернет–тестированию по теоретической механике
для студентов направлений «Строительство» и «Теплоэнергетика»

Нижний Новгород

ННГАСУ

2012

УДК 531.1

Интернет-тестирование по теоретической механике. Выпуск 1. Статика. Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике для студентов направлений «Строительство» и «Теплоэнергетика». Н.Новгород: ННГАСУ, 2012

Настоящие методические указания предназначены для студентов ННГАСУ, обучающихся по направлениям «Строительство» и «Теплоэнергетика». Методические указания содержат основные теоретические положения и примеры решения типовых задач по рассматриваемым темам, предлагавшихся для решения в процессе интернет - тестирования.

Составители: Г.А. Маковкин, А.С. Аистов, А.С. Баранова,
Т.Е. Круглова, И.С. Куликов, Е.А. Никитина,
О.И. Орехова, С.Г. Юдников, Г.А. Лупанова

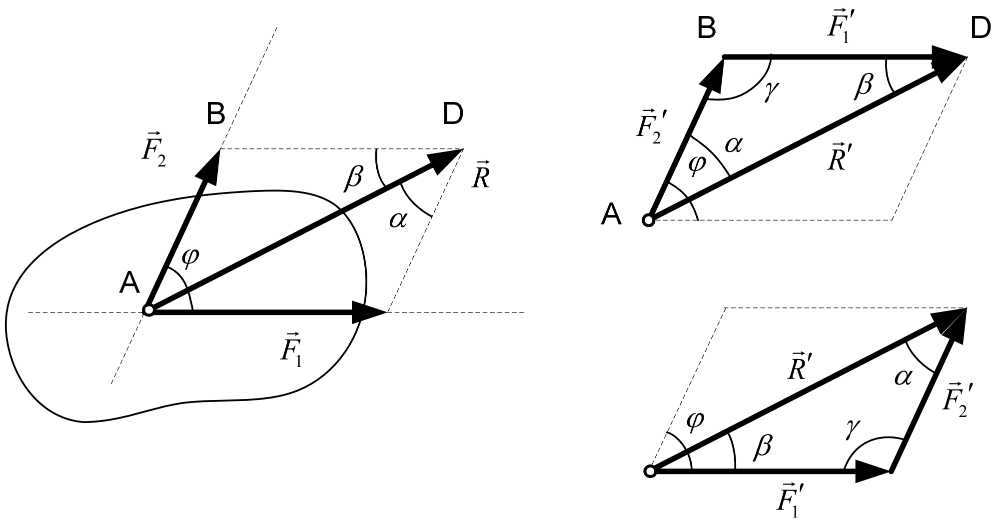
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

СИЛЫ И СИСТЕМЫ СИЛ

Совокупность нескольких сил $(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2, \ldots ,\ \vec{F}_n)$ называется **системой сил.**

Если одну систему сил, действующую на свободное твердое тело, можно заменить другой системой сил так, что при этом кинематическое состояние тела не изменится, то эти системы сил называют **эквивалентными** друг другу.
Для обозначения эквивалентности систем сил используются символ $\backsim$ или символ $\equiv$.
Одна сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется её **равнодействующей.** Она обозначается символом $\vec{\boldsymbol{R}}$.
Система сил, не выводящая из равновесия свободное твердое тело, называется **уравновешенной системой** или эквивалентной нулю.
Силу можно переносить вдоль линии действия в любую точку данного тела, не меняя ее модуля и направления.
Система из двух сил, приложенных в одной точке, имеет равнодействующую, равную их векторной сумме и приложенную в той же точке.

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить, используя формулы тригонометрии для треугольников.



По теореме косинусов модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}\ .$$

По теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta}.$$

Отсюда можно определить направление равнодействующей.

СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

Ограничения, наложенные на перемещения (скорости) точек механической системы, называются **связями.**
Связи всегда осуществляются материальными телами.

Реакцией связи называется сила, с которой связь действует на тело.
Силы, не являющиеся реакциями связей, называют **активными силами или нагрузками.**
Определение реакций, наложенных на механическую систему связей при ее равновесии, составляет содержание большинства решаемых в статике задач.
Изучение равновесия несвободных тел основано на **принципе освобождаемости от связей:**

> **Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи, заменив их действие соответствующими реакциями связей.**

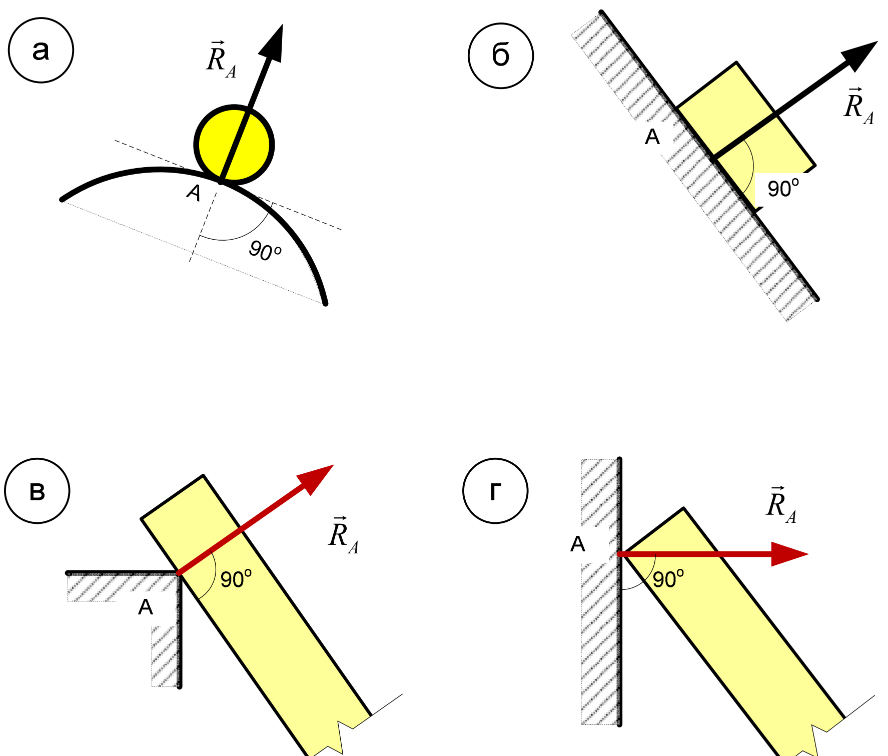
Реакция всегда направлена в сторону, противоположную той, куда тело, осуществляющее связь, не дает перемещаться данному телу.

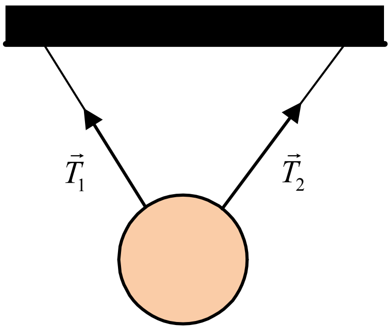
РАЗНОВИДНОСТИ СВЯЗЕЙ

Свободное опирание

Гладкая поверхность (поверхность без трения) позволяет взаимодействующему с ней телу свободно перемещаться по касательной плоскости в точке касания и не позволяет перемещаться в направлении нормали к этой плоскости. Реакция такой поверхности (сила $\vec{R}_A$) направлена по общей нормали.

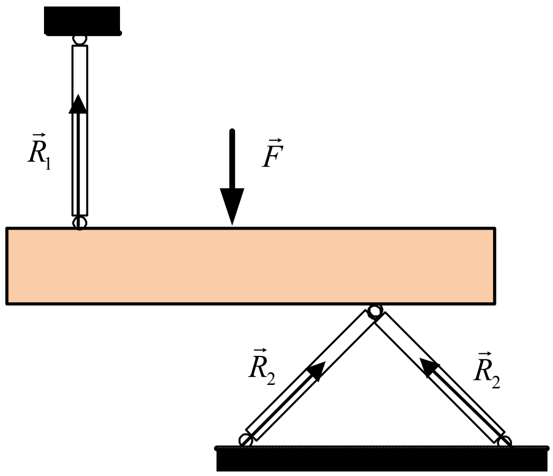
При опирании углом или на угол реакция направлена по нормали к той поверхности, которая соприкасается с углом.





Гибкая нить (трос, канат, цепь)

Реакция нити всегда направлена от тела вдоль нити (возникает только при натягивании нити).



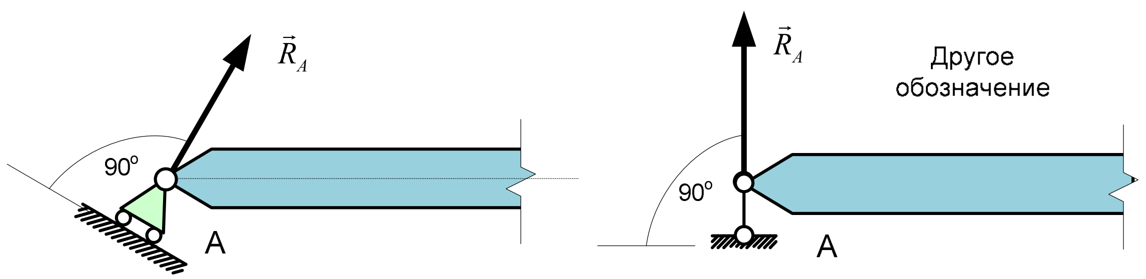
Опорный стержень

Опорным стержнем принято называть невесомый стержень, прикрепляемый с двух сторон с помощью шаровых шарниров, которые допускают свободный поворот тел вокруг центра этого шарнира.

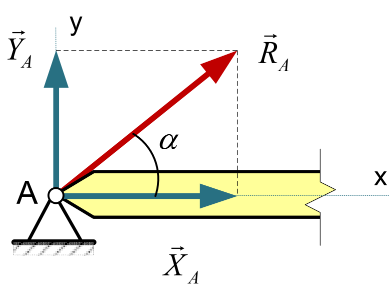
Реакция такого стержня направлена по линии, которая проходит через центры опорных шарниров.

Шарнирно-подвижная опора

Такой тип опоры реализуется в виде опоры на катках.



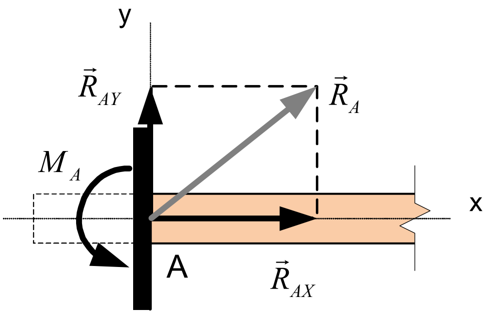
Для шарнирно-подвижной опоры известна точка приложения реакции (шарнир) и линия ее действия (она перпендикулярна опорной поверхности).



Шарнирно-неподвижная опора

Для этой опоры известна точка приложения реакции (шарнир), а линия действия неизвестна, т.к. угол α может быть любым.

В этом случае силу $\vec{R}_A$ неизвестного направления удобно разложить на две неизвестные силы $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленные по координатным осям.



Жесткая заделка

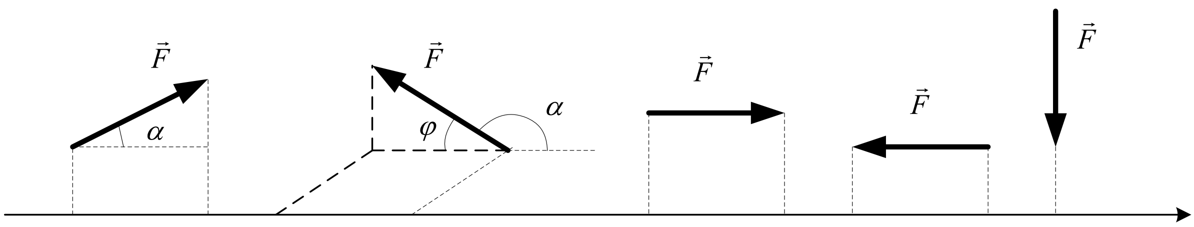
Жёсткая заделка препятствует любому поступательному перемещению тела, поэтому направление её реакции заранее определить нельзя и сначала определяют её составляющие $\vec{R}_{AX}$ и $\vec{R}_{AY}$.

Кроме того, жёсткая заделка препятствует повороту телу, поэтому, кроме силовой реакции, на тело действует ещё момент заделки M_A, уравновешивающий стремление нагрузок повернуть тело в заделке.

ПРОЕКЦИИ СИЛЫ

Проекцией вектора на ось называется скалярная величина равная произведению модуля вектора на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

Рассмотрим некоторые частные случаи проектирования вектора на ось:



$F_x = F\cos\alpha$ $\quad F_x = F\cos\alpha = -F\cos\varphi$ $\quad F_x = F$ $\quad F_x = -F$ $\quad F_x = 0$

Проекцией вектора на плоскость называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца вектора на эту плоскость.

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИСТЕМЫ СИЛ

Главный вектор системы сил равен векторной сумме всех сил системы:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

Модуль главного вектора равен

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{R}_x^2 + \mathbf{R}_y^2 + \mathbf{R}_z^2}$$

где $\mathbf{R_x}, \mathbf{R_y}, \mathbf{R_z}$ - проекции главного вектора на координатные оси:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \ \mathbf{R}_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \mathbf{R}_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ СИЛ

Сходящейся системой сил называются совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, приложенную в точке пересечения линий действия сил, которая геометрически равна главному вектору этой системы сил.

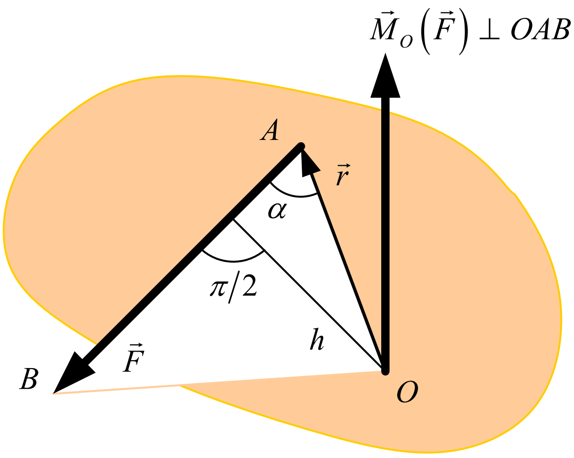
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СИЛАХ

При решении задач удобно пользоваться теоремой:

> **Для равновесия твердого тела, находящегося под действием трех непараллельных сил, необходимо, чтобы линии их действия пересекались в одной точке.**

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ



Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки О называется величина $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенного из данной точки в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Направление и модуль момента силы определяются по обычному правилу для векторного произведения.

Направление момента силы

Вектор-момент силы перпендикулярен плоскости, проведенной через линию действия силы и точку О, и направлен так, чтобы, глядя навстречу ему, видеть силу, стремящейся повернуть плоскость против часовой стрелки (правило «правого винта»).

Модуль момента силы

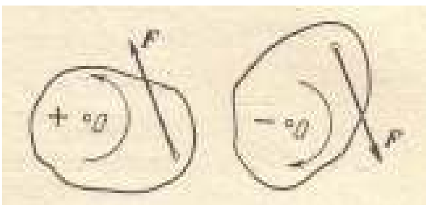
Модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha, \quad где\; r \cdot \sin\alpha = h \qquad \text{или} \qquad M_O\left(\vec{F}\right) = F \cdot h.$$

Модуль момента силы относительно точки равен произведению модуля силы на ее плечо. Плечом силы называется кратчайшее (по перпендикуляру) расстояние от точки до линии действия силы.

Когда силы лежат в одной плоскости, то векторы, изображающие моменты этих сил относительно какого-либо центра, лежащего в той же плоскости, будут перпендикулярны к плоскости. Поэтому моменты сил будут различаться между собой числовой величиной и **знаком**.

Момент считается положительным, если сила стремится вращать тело около центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу часовой стрелки.



МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

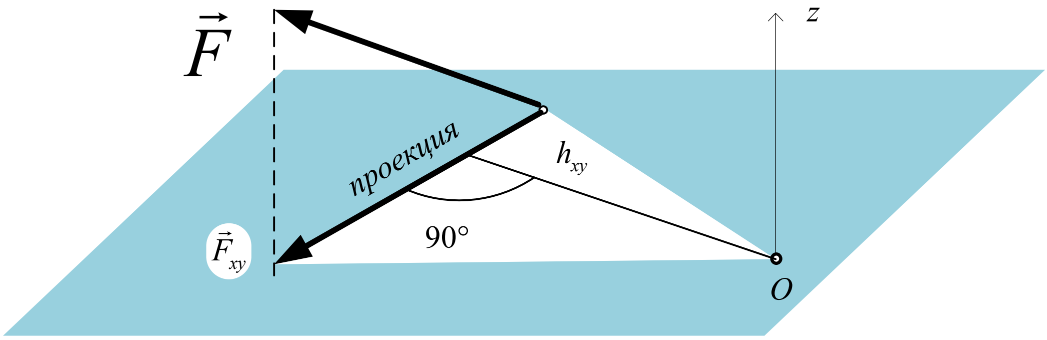
Чтобы вычислить момент силы относительно оси *z*, надо:

1. Спроектировать силу $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси.
2. Найти модуль момента, для чего следует перемножить модуль проекции силы F_{xy} на ее плечо h_{xy} относительно точки пересечения оси с плоскостью (см. рис.).
3. Выбрать знак в соответствии с **«правилом правого винта»**.

Получим, что

$$M_z\left(\vec{F}\right) = \pm h_{xy} F_{xy},$$

где h_{xy} − плечо силы F_{xy} относительно точки О.



ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Момент равнодействующей системы сил относительно некоторой точки равен векторной сумме моментов всех сил системы относительно этой точки.
Момент равнодействующей системы сил относительно некоторой оси равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этой оси.

ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ СИЛ

Главным моментом $\vec{\mathbf{M}}_O$ системы сил относительно некоторой точки О (данного центра) называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно этой точки:

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right).$$

Модуль главного момента равен

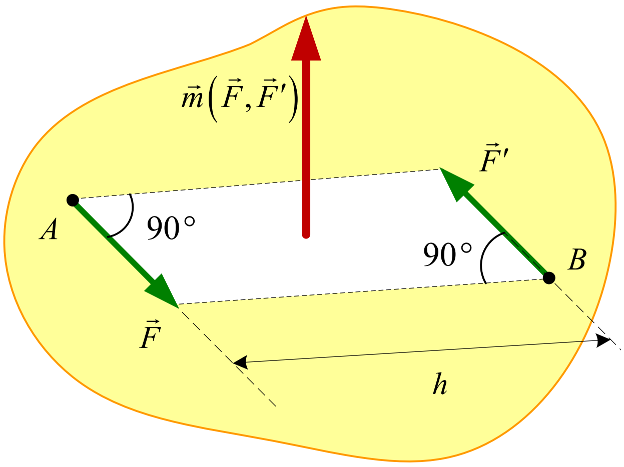
$$\mathbf{M}_O = \sqrt{\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_y^2 + \mathbf{M}_z^2},$$

где $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$ − проекции главного момента на координатные оси, проходящие через центр О:

$$\mathbf{M}_x = \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right), \quad \mathbf{M}_y = \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right), \quad \mathbf{M}_z = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right)$$

ПАРА СИЛ, МОМЕНТ ПАРЫ

<u>Парой сил (или просто парой)</u> называется система из двух равных по модулю, противоположно направленных параллельных сил.



<u>Моментом пары</u> $\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$ называется вектор $\vec{m}\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$, направленный перпендикулярно плоскости действия пары в такую сторону, чтобы, глядя навстречу ему, видеть вращение, осуществляемое парой, происходящим против часовой стрелки, и равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:

$$m\left(\vec{F},\vec{F}'\right) = F\cdot h = F'\cdot h$$

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ.

Условием равновесия произвольной пространственной системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента. Для этого необходимо, чтобы суммы проекций сил на каждую из координатных осей и суммы моментов сил относительно каждой из координатных осей были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Таким образом, в статике для произвольной пространственной системы сил в общем случае можно составить шесть уравнений равновесия.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

Сходящаяся система сил

Если линии действия всех сил системы проходят через одну точку, то моменты сил относительно этой точки (или любой проходящей через нее оси) будут равны нулю. В этом случае уравнения моментов оказываются тождествами и остаются только уравнения проекций сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

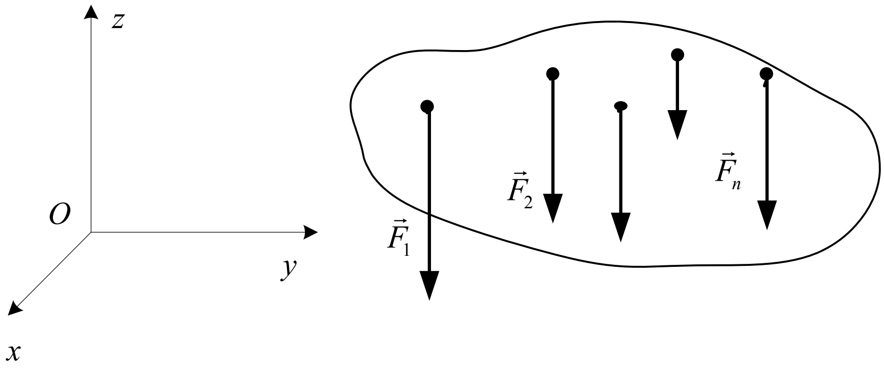
Система пар сил

Если система сил состоит только из пар, для каждой из которых, как известно, векторная сумма сил равна нулю, то уравнения проекций сил оказываются тождествами. Тогда в системе остаются только уравнения для моментов пар:

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\vec{F}_i\right) = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} m_y\left(\vec{F}_i\right) = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Пространственная система параллельных сил

Пусть линии действия всех сил параллельны друг другу. Направим ось z параллельно этим силам. В этом случае являются тождествами уравнения проекций сил на оси *x* и *y*, а также уравнения моментов сил относительно оси z.
Тогда остаются три уравнения:



$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Эти уравнения называются **уравнениями равновесия пространственной системы параллельных сил.**

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Уравнения равновесия плоской системы сил в аналитической форме представлены только тремя уравнениями:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Это есть первая (основная) форма уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Можно показать, что этой системе уравнений равносильны еще две формы записей уравнений равновесия.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Это вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил.

(ось *y* не должна быть перпендикулярна линии AB, иначе уравнения не будут независимы).

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Это третья форма уравнений равновесия плоской системы сил.

(при этом точки *A, B* и *C* не должны лежать на одной прямой).

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Положение центра тяжести некоторого объема, состоящего из нескольких частей, можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i V_i}{V}.$$

Координаты центра тяжести однородной тонкой пластины постоянной толщины определяются через площади отдельных ее частей A_i и общую площадь $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i A_i}{A}.$$

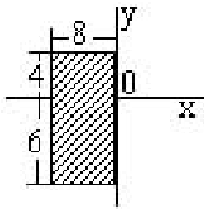
Центр тяжести однородного (имеющего одинаковую по длине площадь поперечного сечения и удельную плотность материала) длинного тонкого тела определяется через длины его участков L_i и общую длину $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i}{L}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}{L}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i L_i}{L}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1

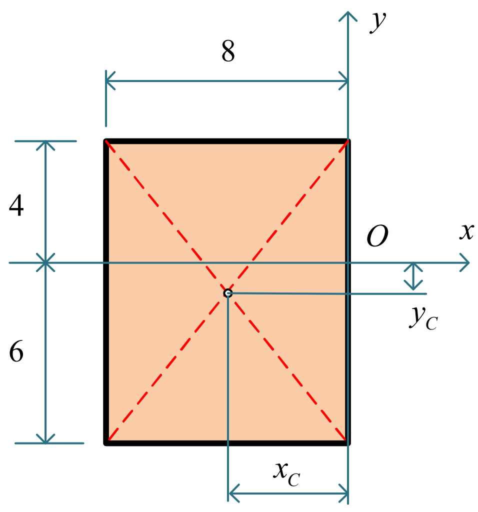
Для плоской однородной пластинки, изображенной на рисунке, координаты центра тяжести



при заданной системе координат–это …

- $x_C = -8,\ y_C = -5$
- $x_C = 4,\ y_C = 4$
- $x_C = 0,\ y_C = 6$
- $x_C = -4,\ y_C = -1$
- $x_C = 8,\ y_C = 5$

Решение



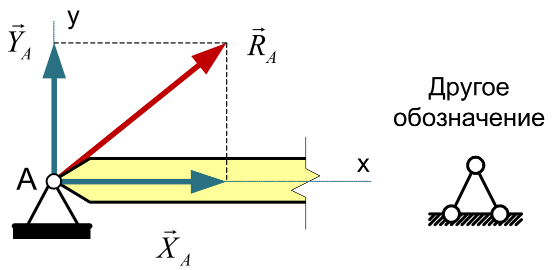
Центр тяжести такой пластины находится на пересечении диагоналей прямоугольника, поэтому в показанной на рисунке системе координат координаты центра тяжести пластины будут равны $x_C = -4, \quad y_C = -1.$

Ответ: Верным является четвертый ответ.

ЗАДАЧА 2

При освобождении объекта равновесия от связей реакции опор имеют различное количество неизвестных составляющих. Если опорой является неподвижный шарнир для плоской задачи, то количество составляющих реакции связи равно…

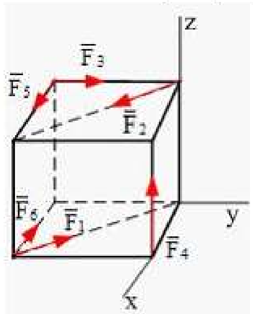
- шести
- единице
- двум
- трем



Ответ: Верным является третий ответ.

ЗАДАЧА 3

К вершинам куба, со стороной равной a, приложены шесть сил $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6=F$.



Главный вектор (геометрическая сумма всех сил) системы сил по модулю равен:

Решение

Определяем проекции главного вектора на координатные оси:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = -F_1 \cos 45° + F_2 \cos 45° + F_5 - F_6 = 0;$$

$$\mathbf{R}_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = +F_1 \cos 45° - F_2 \cos 45° + F_3 = F;$$

$$\mathbf{R}_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = +F_4 = F.$$

Определяем модуль главного вектора:

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{R}_x^2 + \mathbf{R}_y^2 + \mathbf{R}_z^2} = \sqrt{0^2 + F^2 + F^2} = F\sqrt{2}.$$

Ответ: Верным является третий ответ.

ЗАДАЧА 4

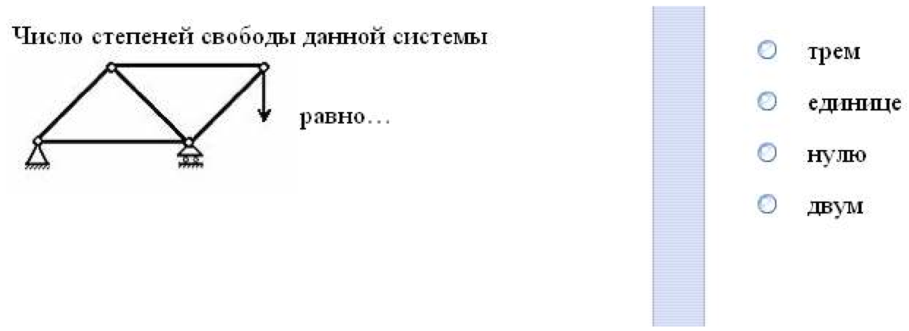
Решение

Спроектируем силу на плоскость перпендикулярную указанной оси. Умножив модуль полученной проекции на плечо, получим модуль момента. Знак момента укажем, руководствуясь правилом правого винта.

$$M_Z = +Fa\sin\alpha.$$

Ответ: Верным является четвертый ответ.

ЗАДАЧА 5



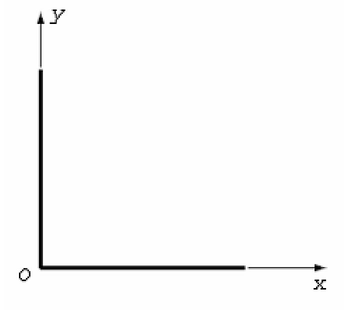
Решение

Система, изображенная на рисунке, представляет собой геометрически неизменяемую ферму (диск), которая закреплена на опорах неподвижно. Любые формы движения для нее невозможны.

Ответ: Верным является третий ответ.

ЗАДАЧА 6

Два одинаковых однородных стержня длиной L соединены концами под прямым углом.



Абсцисса центра тяжести C полученной фигуры ...

- $x_c = L/2$
- $x_c = L/4$
- $x_c = L/3$
- $x_c = L/6$

Решение

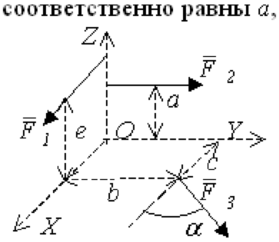
Координату x_C центра тяжести ломаного стержня определим по формуле:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i} = \frac{x_1 L_1 + x_2 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0 \cdot L + \frac{L}{2} \cdot L}{L + L} = \frac{L}{4}.$$

Ответ: Верным является второй ответ.

ЗАДАЧА 7

Две силы F_1, F_2, изображенные на рисунке, параллельные соответственно координатным осям OX и OY, пересекают ось OZ. Сила F_3 находится в плоскости OXY и составляет с осью OX угол α. Расстояния на рисунке заданы и соответственно равны a, b, c и e.



Проекция главного момента системы сил, изображенных на рисунке, на ось Z равна ...

- $M_Z(\bar{F}) = cF_3 \cos\alpha - bF_3 \sin\alpha$
- $M_Z(\bar{F}) = bF_3 \sin\alpha + cF_3 \cos\alpha$
- $M_Z(\bar{F}) = cF_3 \sin\alpha - bF_3 \cos\alpha$
- $M_Z(\bar{F}) = -bF_3 \sin\alpha + cF_3 \cos\alpha$

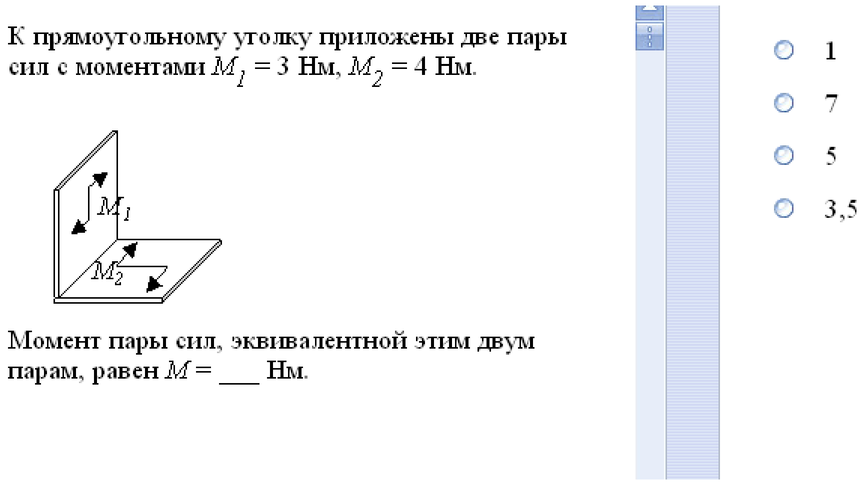
Решение

Проекция главного момента системы сил на ось Z равна сумме моментов сил системы относительно этой оси. Моменты первой и второй сил равны нулю, поскольку их линии действия пересекают ось (равны нулю плечи). Для вычисления момента третьей силы можно использовать теорему Вариньона о моменте равнодействующей, разбив силу F_3 на составляющие по осям x и y. Модули полученных составляющих умножим на соответствующие плечи, выбрав знаки произведений в соответствии с правилом правого винта:

$$\mathbf{M}_z = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = M_z\left(\vec{F}_1\right) + M_z\left(\vec{F}_2\right) + M_z\left(\vec{F}_3\right) = 0 + 0 + cF_3 \sin\alpha - bF_3 \cos\alpha .$$

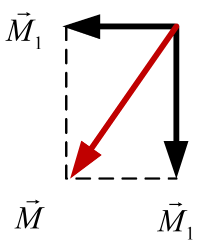
<u>Ответ:</u> Верным является третий ответ.

<u>ЗАДАЧА 8</u>



<u>Решение</u>

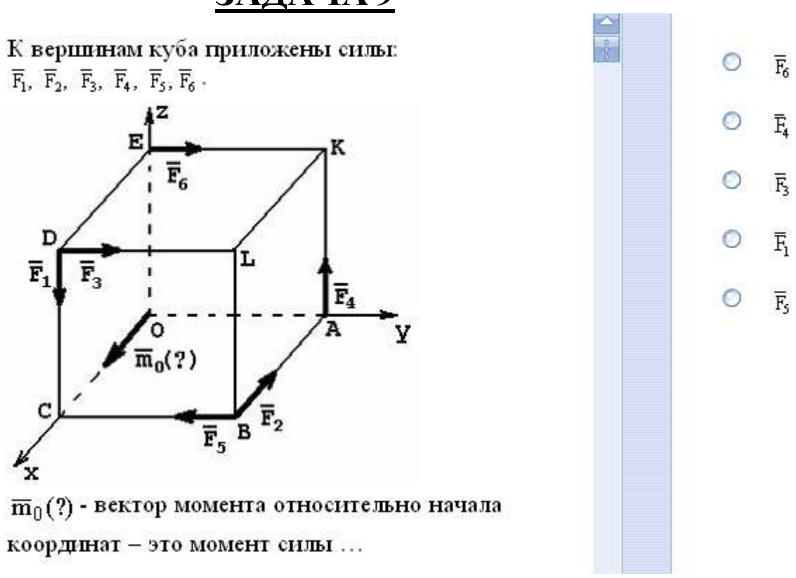
Вектора моментов пар M_1 и M_2 направлены перпендикулярно плоскостям, в которых расположены пары, а направление моментов определяется правилом правого винта. Таким образом, результирующий вектор-момент геометрически совпадает с диагональю прямоугольника, стороны которого равны 3 Нм и 4 Нм. Модуль этого момента равен



$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,Нм$

<u>Ответ:</u> Верным является третий ответ.

<u>ЗАДАЧА 9</u>



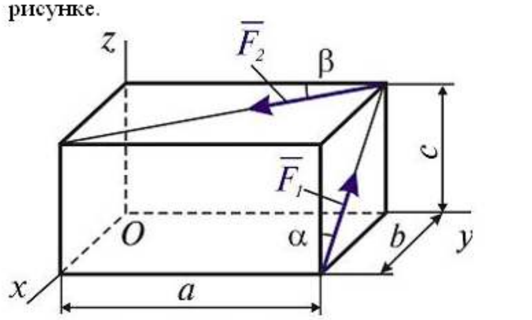
Решение

Вектор-момент перпендикулярен плоскости, в которой лежат точка О и вектора $\vec{F}_4$ и $\vec{F}_6$. Однако, в соответствии с правилом правого винта, направление вектор момента силы $\vec{F}_6$ не будет совпадать с направлением показанного на рисунке вектора $\vec{m}_0$. Следовательно вектор-момент $\vec{m}_0$ является моментом силы $\vec{F}_4$.

Ответ: Верным является второй ответ.

ЗАДАЧА 10

В вершинах прямоугольного параллелепипеда приложены силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, как указано на рисунке.



Установите соответствие между проекциями на координатные оси главного момента $\overline{M}_O$ относительно центра O системы сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ и выражениями в списке ответов.

- ☐ $F_1 a \sin\alpha - F_2 a \sin\beta$
- ☐ $F_1 a \cos\alpha + F_2 c \cos\beta$
- ☐ $-F_1 b \cos\alpha + F_2 c \sin\beta$

Решение

Проекции главного момента $\vec{\mathbf{M}}_O$ относительно центра О на координатные оси, как известно, можно получить, просуммировав моменты всех сил системы относительно этих координатных осей:

$$\mathbf{M}_X = \sum_{i=1}^{n} M_X\left(\vec{F}_i\right). \qquad \mathbf{M}_Y = \sum_{i=1}^{n} M_Y\left(\vec{F}_i\right). \qquad \mathbf{M}_Z = \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\vec{F}_i\right).$$

Чтобы вычислить момент силы относительно оси z, надо:

1. Спроектировать силу $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси.
2. Найти модуль момента, для чего следует перемножить модуль проекции силы F_{xy} на ее плечо h_{xy} относительно точки пересечения оси с плоскостью.
3. Выбрать знак в соответствии с правилом правого винта.

Вычислим три проекции главного момента:

$$\mathbf{M}_X = \sum_{i=1}^{n} M_X\left(\vec{F}_i\right) = +F_1 \cos\alpha \cdot a + F_2 \cos\beta \cdot c.$$

$$\mathbf{M}_Y = \sum_{i=1}^{n} M_Y\left(\vec{F}_i\right) = -F_1 \cos\alpha \cdot b + F_2 \sin\beta \cdot c.$$

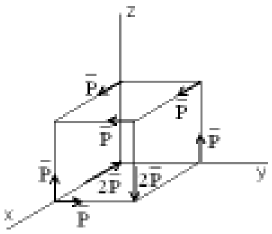
$$\mathbf{M}_Z = \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\vec{F}_i\right) = +F_1 \sin\alpha \cdot a - F_2 \sin\beta \cdot a.$$

Ответ: Значение проекции главного момента на ось x приведено во второй строке ответа, на ось y – в третьей строке ответа, на ось z – в первой строке ответа.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 11

Задание оценивается в 1 балл



Система сил, приложенная к кубу, может быть приведена к простейшему виду. Её можно привести:

- к паре сил относительно оси x $\left(M_x \neq 0;\ M_y = M_z = \overline{R} = 0\right)$
- к главному моменту $\left(\overline{M}_o \neq 0;\ \overline{R} = 0\right)$
- к главному вектору и главному моменту $\left(\overline{R} \neq 0; \overline{M}_0 \neq 0\right)$
- к динаме $\left(\overline{R} \perp \overline{M}_o\right)$
- к равнодействующей $\left(\overline{R} \neq 0,\ \overline{M}_o = 0\right)$
- система находится в равновесии $\left(\overline{R} = 0;\ \overline{M}_0 = 0\right)$

Решение

Найдем проекции на координатные оси главного вектора:

$$\mathbf{R_x} = \sum_{i=1}^{n} X_i = P + P - 2P = 0, \qquad \mathbf{R_y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i = P - P = 0, \qquad \mathbf{R_z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i = P + P - 2P = 0.$$

Модуль главного вектора также равен нулю (3-й, 4-й и 5-й ответы неверны).

Найдем проекции на координатные оси главного момента:

$$\mathbf{M}_X = \sum_{i=1}^{n} M_X\left(\vec{F}_i\right) = +Pa + Pa - 2Pa = 0,$$

$$\mathbf{M}_Y = \sum_{i=1}^{n} M_Y\left(\vec{F}_i\right) = Pa + Pa - Pa + 2Pa = 3Pa,$$

$$\mathbf{M}_Z = \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\vec{F}_i\right) = -Pa - Pa + Pa = -Pa.$$

Модуль главного момента не равен нулю (6-й ответ неверен). При этом результирующая пара не дает момента относительно оси x (1-й ответ неверен).

Ответ: Верным является второй ответ.

ЗАДАЧА 12

Задание оценивается в 1 балл

Можно ли силу в 1 Н разложить на две силы по 100 Н?

- да, если угол между ними равен 10°
- нет
- да, если угол между ними равен 150°
- да, если угол между ними равен $179^\circ 26'$
- да, если угол между ними равен $0^\circ 34'$

Решение

Как известно, система из двух сил, приложенных в одной точке, имеет равнодействующую, равную их векторной сумме, и приложенную в той же точке.
Модуль этой равнодействующей можно определить с помощью теоремы косинусов по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}\ .$$

где φ – угол меду исходными векторами.
Пусть, некая сила, модуль которой равен R, является равнодействующей двух приложенных в одной точке сил, модули которых равны P.
Тогда

$$R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P\cdot P\cos\varphi} \quad \text{или} \quad 1^2 = 100^2 + 100^2 + 2\cdot 100^2\cos\varphi.$$

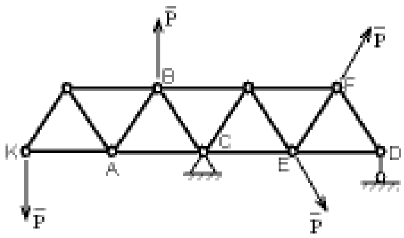
Отсюда следует, что

$$\cos\varphi = -\frac{19999}{20000} = -0.99995, \ \textit{и следовательно} \ \ \varphi = 179^\circ 26'$$

Ответ: Верным является четвертый ответ.

ЗАДАЧА 13

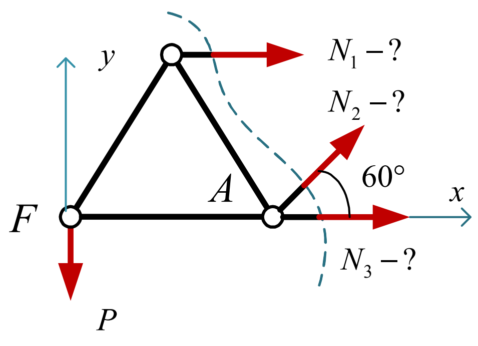
Задание оценивается в 1 балл



Стержни плоской фермы соединены таким образом, что образуют равносторонние треугольники. Усилие в стержне АВ равно:

- P
- $\frac{2\sqrt{3}}{3}P$
- $-\frac{2\sqrt{3}}{3}P$
- 0
- $\frac{\sqrt{3}}{2}P$

Решение



Рассечем три стержня фермы так, как показано на рисунке. Отбросим правую часть фермы, заменив ее действие неизвестными силами, возникающими в стержнях. Будем считать, что все три стержня растянуты.

Оставшаяся в рассмотрении часть конструкции (так же как и вся конструкция в целом) должна находиться в равновесии.

Как известно, условие равновесия произвольной плоской системы сил включает в себя три уравнения:

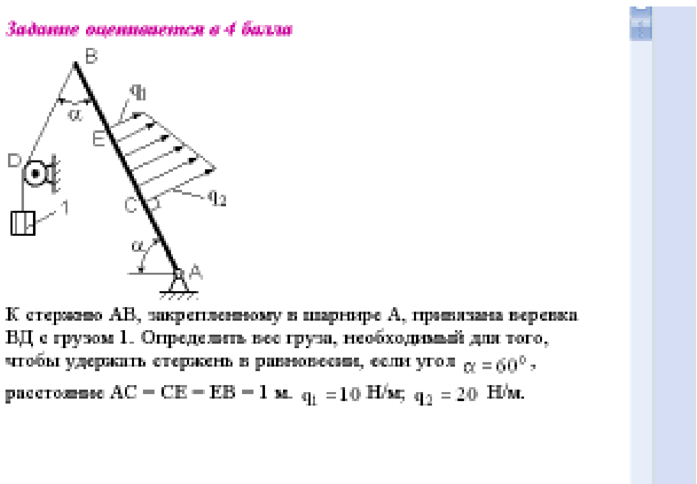
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Искомую силу N_2 легко найти из второго уравнения этой системы:

$$N_2 \sin 60° - P = 0, \quad \textit{откуда} \quad N_2 = \frac{P}{\sin 60°} = \frac{2P\sqrt{3}}{3}.$$

<u>Ответ:</u> Верным является второй ответ.

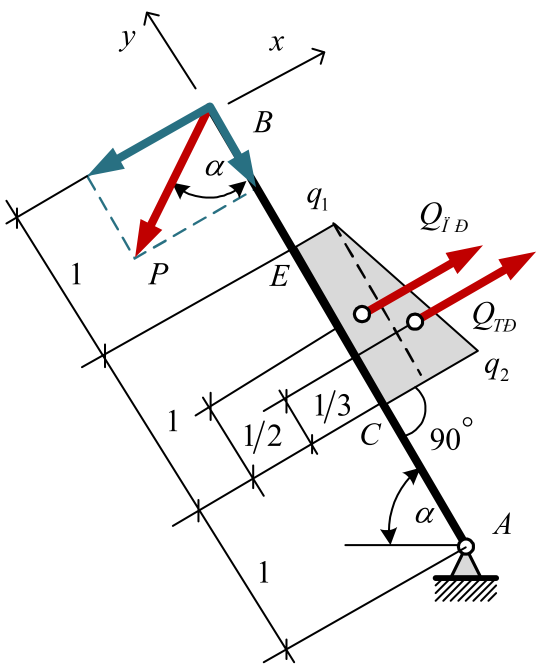
<u>ЗАДАЧА 14</u>


Задание оценивается в 4 балла

К стержню АВ, закрепленному в шарнире А, привязана веревка ВД с грузом 1. Определить вес груза, необходимый для того, чтобы удержать стержень в равновесии, если угол $\alpha = 60^0$, расстояние АС = СЕ = ЕВ = 1 м. $q_1 = 10$ Н/м; $q_2 = 20$ Н/м.

- 5,77
- 14,44
- 11,55
- 8,34
- 8,66

<u>Решение</u>



Для определения веса груза P составим уравнение равновесия в виде $\sum M_A(F)=0$:

$$P \cdot \sin\alpha \cdot 3 - Q_{\text{ПР}} \cdot \frac{3}{2} - Q_{\text{ТР}} \cdot \frac{4}{3} = 0,$$

где $Q_{\text{ПР}}$ и $Q_{\text{ТР}}$ – равнодействующие прямоугольной и треугольной составляющих распределенной нагрузки:

$$Q_{\text{ПР}} = q_1 \cdot 1\text{м} = 10 \text{ Н},$$

$$Q_{\text{ТР}} = \frac{1}{2} \cdot (q_2 - q_1) \cdot 1\text{м} = 5 \text{ Н}.$$

Учитывая, что $\alpha = 60^0$, получим следующее уравнение:

$$P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 - 10 \cdot \frac{3}{2} - 5 \cdot \frac{4}{3} = 0,$$

решая которое, получим:

$$P = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{30}{2} + \frac{20}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{130}{6} = \frac{130}{9\sqrt{3}} \approx 8.34 \text{ Н}.$$

Ответ: Верным является четвертый ответ.

ЗАДАЧА 15

Задание оценивается в 1 балл

Укажите верные (ое) утверждения (е).

Равнодействующая и уравновешивающая силы …

Укажите не менее двух вариантов ответа

- [ ] это одно и тоже
- [ ] нет верного ответа
- [x] направлены в одну сторону
- [x] равны по модулю
- [ ] действуют вдоль одной линии действия
- [ ] направлены в противоположные стороны
- [ ] направлены под углом друг к другу
- [ ] не равны по модулю

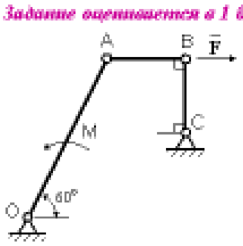
Решение

Равнодействующая и уравновешивающая силы образуют уравновешенную систему сил, поэтому по аксиоме о равновесии двух сил они равны по модулю, действуют вдоль одной линии действия и направлены в противоположные стороны.

Ответ: Верными являются четвертое, пятое и шестое суждения.

ЗАДАЧА 16

Задание оценивается в 1 балл

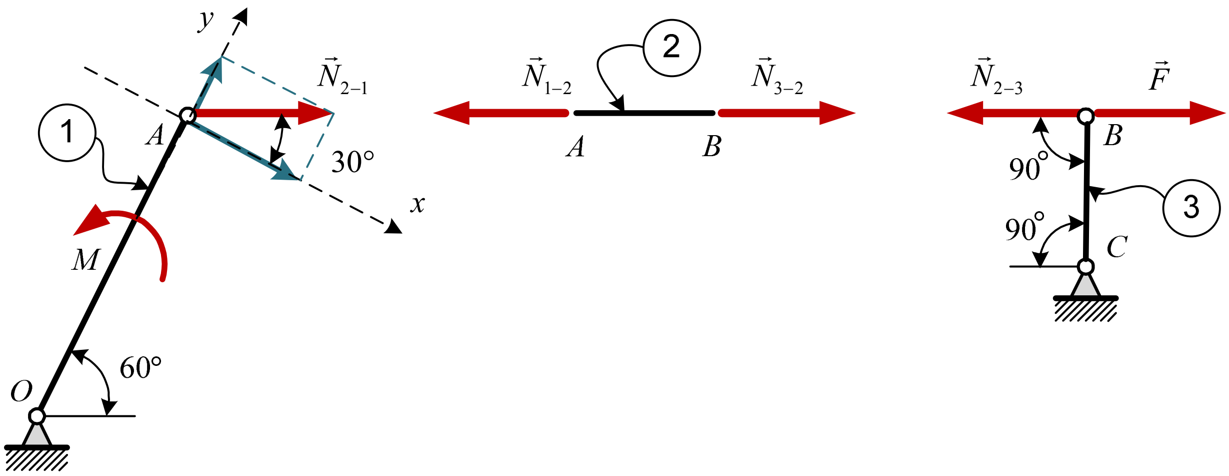


Механизм находится в равновесии под действием силы F и пары сил с моментом M, OA=r , BC=a. Правильным соотношением между силой и моментом является …

- ○ $M = F \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ○ $M = \frac{F \cdot a}{2}$
- ○ $M = \frac{F \cdot r}{2}$
- ○ $M = F \cdot r$
- ○ $M = F \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение

Разобьем механизм на три диска: 1, 2 и 3, между которыми возникают силы взаимодействия в шарнирах A и B. Эти силы взаимодействия $\vec{N}_{1-2}$, $\vec{N}_{2-1}$, $\vec{N}_{2-3}$, $\vec{N}_{3-2}$ направлены вдоль диска AB, поскольку он представляет собой стержень с шарнирами по концам (здесь $\vec{N}_{i-j}$, означает силу, с которой диск с номером i действует на диск с номером j).



Линия действия реакции R_c пройдет по линии соединяющей шарниры C и B, так как тело BC представляет собой стержень с шарнирами по концам. В этом случае, из уравнения $\sum X_i = 0$, составленного для 3-го диска следует, что $N_{2-3} = F$.

Из аксиомы о равновесии двух сил и аксиомы о взаимодействии двух тел следует, что силы взаимодействия в шарнирах A и B равны по модулю, то есть $N_{1-2} = N_{2-1} = N_{2-3} = N_{3-2}$. Отсюда следует, что сила N_{2-1} по модулю тоже будет равна F.

Так как механизм находится в равновесии, для определения соотношения между моментом и силой составим для первого диска уравнение равновесия вида $\sum M_o(F)=0$:

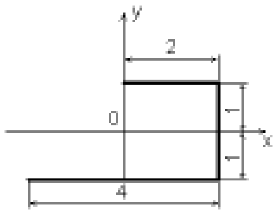
$$M - N_{2-1} \cdot \cos 30° \cdot OA = 0 \quad \text{или} \qquad M - F\frac{\sqrt{3}}{2}r = 0.$$

Из этого уравнения видно, что для равновесия необходимо следующее соотношение между моментом и силой: $\quad M = F\, r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: Верным является первый ответ.

ЗАДАЧА 17

Задание оценивается в 1 балл



Координата x центра тяжести линейного профиля, представленного на рисунке, равна …

- 1,25
- 1,5
- 0,25
- 1
- 0,75
- 0
- 0,5

Решение

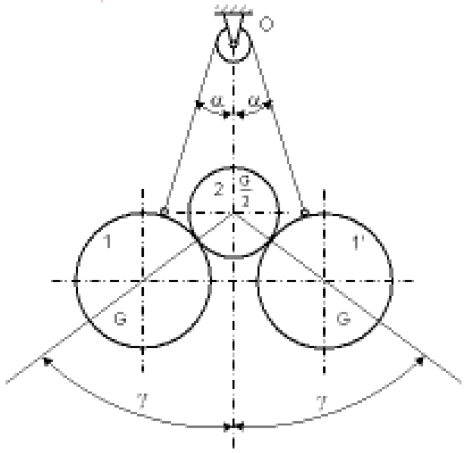
Координату x_C центра тяжести ломаного стержня определим по формуле:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i} = \frac{x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{2 + 2 + 4} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

Ответ: Верным является пятый ответ.

ЗАДАЧА 18

Задание оценивается в 6 баллов

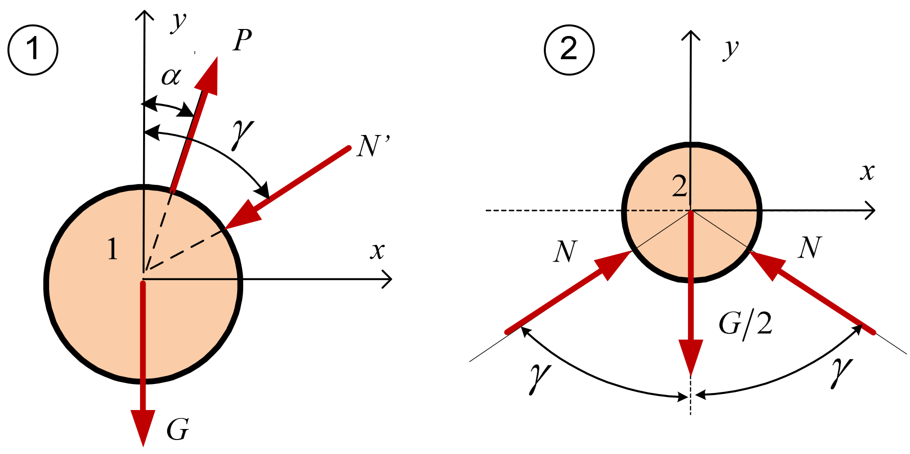


К концам нерастяжимой ленты, перекинутой через невесомый блок О, прикреплены два цилиндра весом G каждый. Цилиндры удерживают лежащий на них третий цилиндр весом $\frac{G}{2}$. Угол между ветвями ленты составляет $2\alpha = 40^\circ$. Укажите величину угла γ − угла между плоскостями, образованными центральными продольными осями цилиндров 1 и 2 и 1' и 2.

- 60°
- 70°
- $73^\circ 10'$
- $64^\circ 30'$
- $61^\circ 12'$

Решение

Рассмотрим цилиндры 1 и 2 по отдельности.



Силы взаимодействия между цилиндрами, обозначенные на рисунках 1 и 2 как N и N', наклонены к вертикали под неизвестным углом γ.

Каждый из цилиндров, как это видно из рисунков, загружен плоской сходящейся системой сил.

Для равновесия каждой из этих систем, как известно, должны выполняться два уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо сформировать систему из четырех уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sum X_i^{(1)} = 0 & (1) \\ \sum Y_i^{(1)} = 0 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} \sum X_i^{(2)} = 0 & (3) \\ \sum Y_i^{(2)} = 0 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

Третье из этих уравнений выполняется тождественно в силу симметрии системы сил, приложенной ко второму цилиндру. В оставшиеся три уравнения входят три неизвестные величины: силы N и P и угол γ.

Сформируем уравнения (1), (2) и (4):

$$\begin{cases} +P\sin\alpha - N\ \sin\gamma = 0 & (1) \\ +P\cos\alpha - \ N\cos\gamma - G = 0 & (2) \\ +2N\cos\gamma - \frac{G}{2} = 0 & (4) \end{cases}$$

Удваивая слагаемые уравнения (2) и складывая уравнение (2) с уравнением (4), получим: $2P\cos\alpha = 2.5\ G$,

откуда следует, что $P = 1.25\ G/\cos\alpha$.

Подставляя полученное выражение в уравнения (1) и (2), получим следующую систему:

$$\begin{cases} N\sin\gamma = \frac{5}{4}G\ tg\ \alpha \\ N\cos\gamma = \frac{1}{4}G. \end{cases}$$

Возводя эти уравнения в квадрат, и складывая их, получим:

$$N^2 = \frac{1}{16}G^2(25\ tg^2\ \alpha + 1),$$

откуда $N = \frac{1}{4}G\sqrt{25\ tg^2\ \alpha + 1}.$

Из уравнения (4) выразим неизвестный угол:

$$\cos\gamma = \frac{G}{4N} = \frac{G}{4}\cdot\frac{4}{G}\cdot\frac{1}{\sqrt{25\ tg^2\ \alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{25\ tg^2\ \alpha+1}}.$$

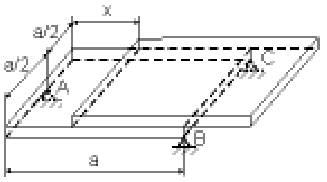
Учитывая, что $tg\ 20° \cong 0.3640$, получим значение $\cos\gamma = 0.4816$.

Найдем неизвестный угол, который будет равен $\gamma \cong 61.21° \cong 61°12'$.

Ответ: Верным является пятый ответ.

ЗАДАЧА 19

Задание оценивается в 6 баллов



Однородная квадратная плита лежит на трех точечных опорах (острых выступах) A, B, C. На какое расстояние x от края относительно неё должна быть сдвинута другая такая же плита, положенная сверху, чтобы нагрузки на все опоры были одинаковыми?

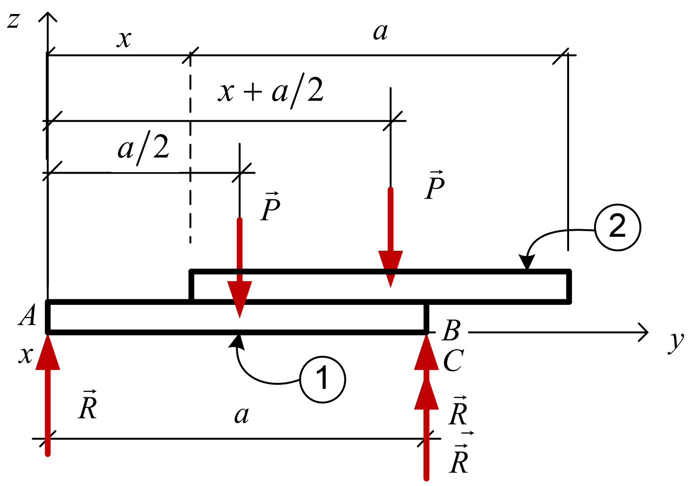
- 0
- a
- 0,33a
- 0,5a
- 0,25a

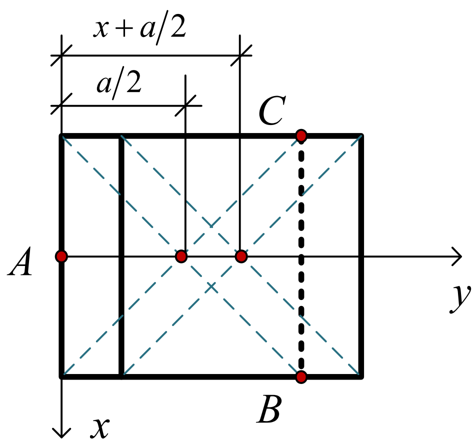
Решение

Примем, что все три реакции равны по модулю. Вес каждой из плит обозначим P. Модули реакций (неизвестные) обозначим *R*.

Условие равновесия пространственной системы параллельных сил включает в себя три следующих уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right)=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right)=0.$$





Если выбрать систему координат, поместив ее начало в точку A, как это показано на рисунке, то третье уравнение в силу симметрии системы обратится в тождество. Из первого уравнения получим:

$$3R-2P=0,\quad \textit{откуда}\qquad R=\frac{2}{3}P.$$

Учитывая, что координаты «*y*» центра тяжести первой (нижней) плиты равна $y_1 = a/2$, а второй – $y_2 = x+a/2$, сформируем второе уравнение системы:

$$2R\cdot a-P\cdot\frac{a}{2}-P\cdot\left(x+\frac{a}{2}\right)=0,\quad \textit{откуда}\quad \frac{4}{3}Pa-Pa-Px=0.$$

Выражая из уравнения неизвестную величину *x*, получим, что $x = a/3$.

Ответ: Верным является третий ответ.

Маковкин Георгий Анатольевич
Аистов Анатолий Сергеевич
Куликов Игорь Сергеевич
Юдников Сергей Георгиевич
Баранова Алла Сергеевна
Никитина Елена Александровна
Круглова Татьяна Евгеньевна
Орехова Ольга Ивановна
Лупанова Галия Алексеевна

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 1. Статика

Методические указания
для подготовки к интернет – тестированию по теоретической механике
для студентов направлений «Строительство» и «Теплоэнергетика»

Подписано к печати. Формат 60х90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная
Уч.изд.л.1,0. Усл.печ.л 1,6 Тираж 200 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.