Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Кафедра теоретической механики

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 4. Центр масс. Мощность и работа. Кинетическая энергия

Методические указания
для подготовки к интернет–тестированию по теоретической механике для студентов направлений «Строительство» и «Теплоэнергетика»

Нижний Новгород
ННГАСУ
2011

УДК 531.1

Интернет-тестирование по теоретической механике. Выпуск 4. Центр масс. Мощность и работа. Кинетическая энергия. Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике для студентов направлений «Строительство» и «Теплоэнергетика». Н.Новгород: ННГАСУ, 2011

Методические указания содержат основные теоретические положения и примеры решения типовых задач по рассматриваемым темам, предлагавшихся для решения в процессе интернет - тестирования.

Настоящие методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям «Строительство» и «Теплоэнергетика»

Составители: Г.А. Маковкин, А.С. Аистов, А.С. Баранова,
Т.Е. Круглова, И.С. Куликов, Е.А. Никитина,
О.И. Орехова, С.Г. Юдников, Г.А. Лупанова

ЦЕНТР МАСС

Центр масс механической системы

Массой механической системы называется сумма масс ее точек:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k \ .$$

Центром масс механической системы называется геометрическая точка *C*, радиус-вектор которой определяется по формуле:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k$$

Центр масс иногда называют центром инерции.

Формулы для координат центра масс, аналогичны формулам для определения координат центра тяжести:

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k \ , \qquad y_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k \ , \qquad z_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k$$

Центр масс более общее понятие, чем центр тяжести, поскольку сохраняет смысл даже при отсутствии сил тяжести.

Если массы материальных точек постоянны, то дифференцированием $\vec{r}_C$

получим выражение для скорости центра масс:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \ ,$$

и затем выражение для ускорения центра масс системы:

$$\vec{a}_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k$$

Теорема о движении центра масс механической системы

ТЕОРЕМА

Произведение массы системы на ускорение центра масс равно главному вектору внешних сил, действующих на точки системы:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e$$

или в проекциях на оси

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e \\ m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e \\ m\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e \end{cases}$$

То есть, **центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.**

Внутренние силы не могут изменить движение центра масс.

<u>Сохранение движения центра масс</u>

<u>(следствия из теоремы о движении центра масс)</u>

Следствие 1:

Если главный вектор внешних сил механической системы все время равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Если $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = 0$, то из теоремы получаем, что $\vec{a}_C = 0$, откуда $\vec{v}_C = const$.

Следствие 2:

Если сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось постоянна.

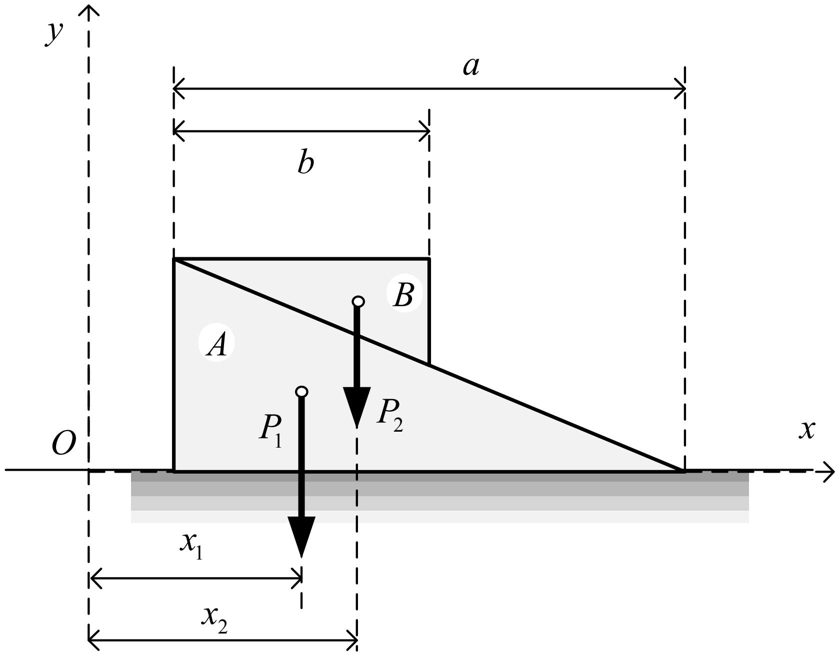
Если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то из теоремы получаем, что $\ddot{x}_C = 0$. Отсюда следует, что $\dot{x}_C = const$ (центр масс движется по оси x равномерно или покоится: $v_{Cx} = const$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1.

На неподвижную однородную призму *A*, лежащую на горизонтальной плоскости, положили однородную призму *B*. Ширина основания призмы *A* равна *a=10 м*. Ширина основания призмы *B* равна *b=2 м*.

Пренебрегая трением, определить смещение призмы *A* после того, как призма *B* опустится по призме *A*. Принять, что масса призмы *B* втрое меньше массы призмы *A*.



Варианты ответов.

1. 3 м влево	2. 2 м влево	3. 1м вправо	4. 2м вправо

Решение.

Введем неподвижную систему координат *Oxy*. В этой системе координат обозначим за x_1 и x_2 координаты центров масс призм *A* и *B* в начальный момент времени (см. рис.). Смещение по горизонтали, призмы *A* обозначим *S*.

Смещение в процессе движения верхней призмы *B* относительно нижней призмы *A* будет равно *(a-b)*. Тогда смещение верхней призмы относительно неподвижной системы координат составит *S+(a-b)*.

В конечный момент времени координаты центров масс призм А и В будут соответственно равны

$$x_1' = x_1 + S, \qquad x_2' = x_2 + S + (a - b).$$

В данной задаче имеем механическую систему, состоящую из двух тел: однородных призм *A* и *B*. Внешними силами, приложенными к системе являются силы тяжести: P_1 и P_2 и реакция гладкой поверхности основания призмы *A*, направленная по вертикали (на рисунке не показана). Все эти внешние силы вертикальны, поэтому сумма их проекций на горизонтальную ось равна нулю.

В соответствии со следствием 2 из теоремы о движении центра масс делаем вывод: поскольку сумма проекций внешних сил на ось *x* равна нулю , то

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \text{, то } \dot{x}_C = const.$$

Поскольку в начальном состоянии система покоится, то $x_C = const.$

Запишем выражение для определения положения центра масс в начальном положении системы:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2}{P_1 + P_2}.$$

Запишем выражение для определения положения центра масс в конечном положении системы с учетом изменения начальных координат точек приложения сил P_1 и P_2:

$$x_C = \frac{x_1' m_1 + x_2' m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1' P_1 + x_2' P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\left(x_1 + S\right) P_1 + \left(x_2 + S + (a-b)\right) P_2}{P_1 + P_2}.$$

Так как знаменатели в этих выражениях равны, то приравняем числители дробей:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 = \left(x_1 + S\right) P_1 + \left(x_2 + S + (a-b)\right) P_2,$$

Упрощая полученное равенство, получим:

$$\left(P_1 + P_2\right) S + P_2 \left(a - b\right) = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно неизвестной переменной *S*, получим

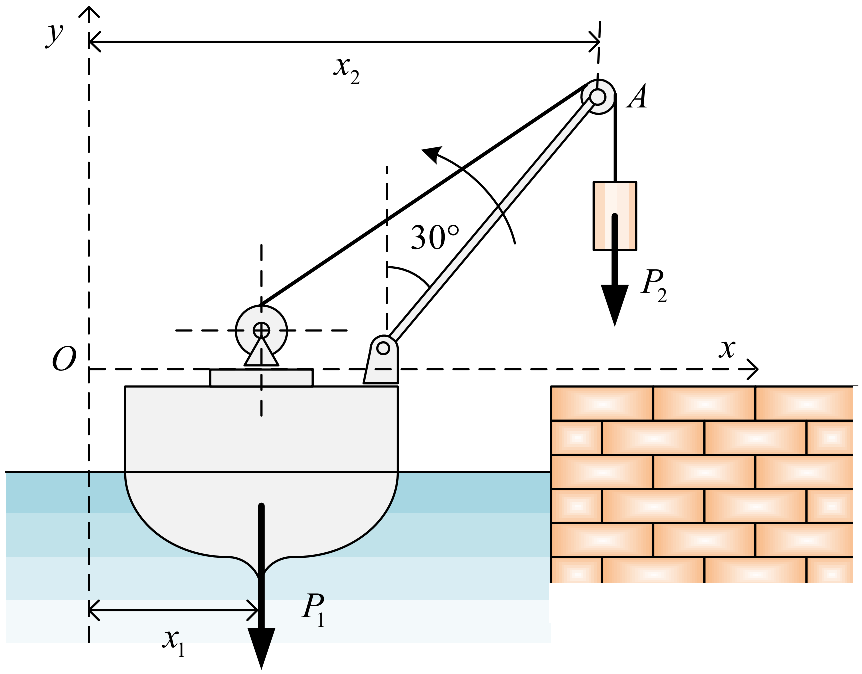
$$S = \frac{-P_2 \ (a-b)}{\left(P_1 + P_2\right)} = \frac{-P_2 \cdot (10-2)}{4P_2} = -2\,(м).$$

Ответ: 2. S = 2 м влево.

ЗАДАЧА 2.

Определить перемещение S плавучего крана, поднимающего груз весом P_1=2*т*, при повороте стрелы крана на 30^0 до вертикального положения (см. рис.).

Вес крана P_2=20*т*; длина стрелы l =8 *м*. Сопротивлением воды пренебречь.



Варианты ответов.

1. 0.24 *м*	2. 0.36 *м*	3. - 0.48 *м*	4. 0.12 *м*

Решение .

В данной задаче имеем механическую систему, состоящую из двух тел: плавучего крана и груза. Внешними силами, приложенными к системе являются вес крана P_1, вес груза P_2 и давление воды, направленное снизу вверх (на рисунке не показано). Все эти внешние силы вертикальны, поэтому сумма их проекций на горизонтальную ось равна нулю.

В соответствии со следствием 2 из теоремы о движении центра масс делаем вывод: поскольку сумма проекций внешних сил на ось x равна нулю , то

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \text{, то } \dot{x}_C = const.$$

Поскольку в начальном состоянии система покоится, то $\dot{x}_C = 0$,

и следовательно, центр тяжести системы по оси x не перемещается, то есть $x_C = const.$

Введем неподвижную систему координат Oxy (см. рис.).

Запишем выражение для определения положения центра масс в начальном положении системы:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2}{P_1 + P_2}.$$

Запишем выражение для определения положения центра масс в конечном положении системы с учетом изменения начальных координат точек приложения сил P_1 и P_2:

$$x_C = \frac{x_1' m_1 + x_2' m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1' P_1 + x_2' P_2}{P_1 + P_2} = \frac{(x_1 + S) P_1 + (x_2 + S - l \cdot \sin 30°) P_2}{P_1 + P_2}.$$

Так как знаменатели в этих выражениях равны, то приравняем числители дробей:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 = (x_1 + S) P_1 + (x_2 + S - l \cdot \sin 30°) P_2,$$

Упрощая полученное равенство, получим:

$$(P_1 + P_2) S - P_2 \; l \cdot \sin 30° = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно неизвестной переменной S, получим

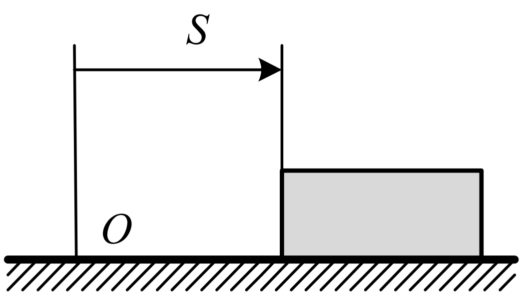
$$S = \frac{P_2 \; l \cdot \sin 30°}{(P_1 + P_2)} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 0.5}{22} = 0.36(м).$$

Ответ: 2. S = 0.36 *м*

ЗАДАЧА 3.

Тело массой $m = 2$ *кг* движется по горизонтальным направляющим согласно закону $s = 2t^2 + 1$.

Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на тело.



Варианты ответов.

1. 5	2. 10	3. 8	4. 16

Решение.

Из формулировки теоремы о движении центра масс

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = \vec{R}^e$$

следует справедливость равенства соответствующих модулей:

$$ma_C = R^e$$

Вычислив ускорение центра масс по формуле

$$a_C = \ddot{s} = 4\frac{ì}{ñ^2},$$

определим затем модуль главного вектора внешних сил:

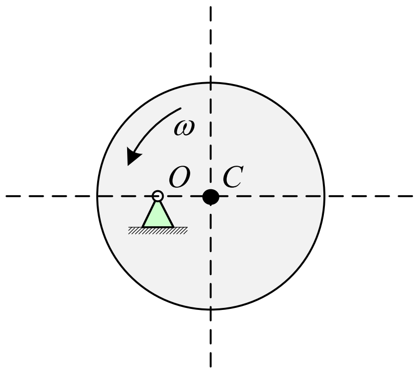
$$R^e = ma_C = 2 \cdot 4 = 8(\frac{кг \cdot м}{c^2}) = 8(H).$$

Ответ: 3. $R^e = 8H$.

ЗАДАЧА 4.

Диск массой m = 20 *кг* (см. рис.) вращается равномерно вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω = 10 *рад/с*.

Определить модуль главного вектора внешних сил, приложенных к диску, если его центр тяжести удален от оси вращения на расстояние *OC* = 5 *см*.



Варианты ответов.

1. 50 Н	2. 10 Н	3. 20 Н	4. 100 Н

Решение.

В процессе движения цент массы диска движется по окружности, центром которой является точка *O*. По условию задачи вращение является равномерным и, следовательно, касательное ускорение точки *C* будет равно нулю, поскольку равно нулю угловое ускорение:

$$a_{Ñ}^{\tau} = \varepsilon \cdot Î\ Ñ = 0,$$

Нормальное ускорение точки C найдем по формуле

$$a_C^n = \omega^2 \cdot OC = 10^2 \cdot 5 = 500\,(\frac{см}{с^2}) = 5(\frac{м}{с^2}).$$

Поскольку модуль касательного ускорения центра масс равен нулю, то полное ускорение равно нормальному ускорению.

Воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$m\vec{a}_C = \vec{R}^e.$$

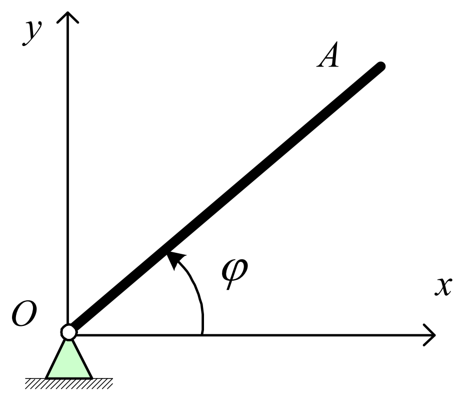
Приравнивая соответствующие модули, получим, что

$$R^e = ma_C = 20 \cdot 5\,(\frac{кг \cdot м}{с^2}) = 100\,(Н).$$

<u>Ответ:</u> 4. $R^e = 100$ *Н*.

<u>ЗАДАЧА 5.</u>

Однородный прямолинейный стержень *OA* вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку *O*, в соответствии с уравнением $\varphi = \pi t^2/2$.



Установить направление главного вектора внешних сил, действующих на стержень при $t = 0$.

<u>Варианты ответов.</u>

1. влево	2. вниз	3. вверх	4. вправо

<u>Решение.</u>

Дифференцируя закон вращения, получим сначала выражение угловой скорости:

$$\omega = \dot{\varphi} = \pi t,$$

а затем выражение углового ускорения:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \pi = const.$$

При $t=0$ кинематические параметры будут равны:

$$\varphi = 0, \qquad \omega = 0, \qquad \varepsilon = \pi.$$

Видно, что при $t=0$ стержень занимает горизонтальное положение $(\varphi = 0)$.

Найдем модуль касательного и нормального ускорений:

$$a_{\tilde{N}}^{\tau} = \varepsilon \cdot \hat{I}\,\tilde{N} = \pi \cdot OC, \qquad a_C^n = \omega^2 \cdot OC = 0.$$

Поскольку модуль нормального ускорения центра масс равен нулю, то полное ускорение равно касательному ускорению.

Из теоремы о движении центра масс

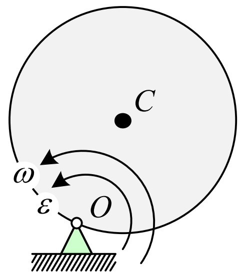
$$m\vec{a}_C = \vec{R}^e$$

следует, что главный вектор внешних сил направлен в том же направлении, что и полное ускорение, то есть вертикально вверх (перпендикулярно отрезку ОС в положительном направлении вращения).

<u>Ответ:</u> 3. Главный вектор внешних сил направлен вверх.

<u>ЗАДАЧА 6.</u>

Однородный диск радиуса $r = 0.2$ *м* и массы $M = 30$ *кг* вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска и (см. рис.) отстоящей от его центра C на расстояние $OC = r$.



Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на диск в момент времени, когда угловая скорость диска $\omega = 1$ *рад/с*, а его угловое ускорение $\varepsilon = 4\sqrt{5}$ *рад/с*^{2}.

<u>Варианты ответов:</u>

1. 18	2. 54	3. 12	4. $4\sqrt{5}$

<u>Решение.</u>

В данной задаче однородный диск вращается относительно оси O, перпендикулярной плоскости диска. Центр масс находится в точке C, которая движется по окружности.

При этом касательное ускорение точки C направлено перпендикулярно отрезку OC и равно

$$a_C^\tau = \varepsilon \cdot OC = 4\sqrt{5} \cdot 0.2\,(\frac{м}{с^2}),$$

а нормальное ускорение точки C направлено от точки C к точке O и равно

$$a_C^n = \omega^2 \cdot OC = 1^2 \cdot 0.2\,(\frac{м}{с^2}).$$

Модуль полного ускорения будет равен:

$$a_C = \sqrt{\left(a_C^\tau\right)^2 + \left(a_C^n\right)^2} = 0.2 \cdot \sqrt{16 \cdot 5 + 1} = 0.2 \cdot 9 = 1.8(\frac{м}{с^2}),$$

По теореме о движении центра масс получим значение модуля главного вектора внешних сил:

$$R^e = ma_c = 30 \cdot 1.8 = 54\ H$$

<u>Ответ:</u> 2. $R^e = 54\ H$.

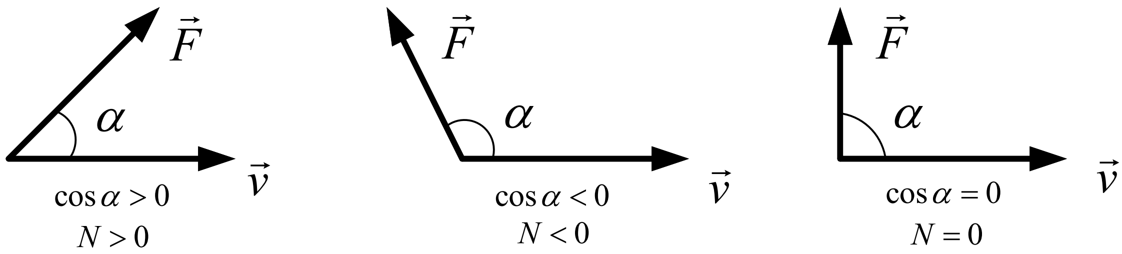
МОЩНОСТЬ И РАБОТА СИЛ

Определение мощности и работы силы

Мощностью силы называется величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\ v\ \cos\left(\vec{F}, \vec{v}\right).$$

Мощность может быть как положительной, так и отрицательной.



Размерность мощности $[N] = [F][v] = Н \cdot м / с = Вт.$

Работой силы за некоторый промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ называется величина, равная интегралу от мощности силы по времени:

$$A = \int_0^t N\,dt \text{ и, следовательно, } N = \frac{dA}{dt}$$

Если мощность постоянна, то $A = N\,\Delta t$.

Размерность работы $[A] = [N][t] = Вт \cdot с = \frac{Н \cdot м \cdot с}{с} = Н \cdot м$.

Вычисление работы при различных способах описания движения

1. **Закон движения задан в векторной форме:**

$$A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

При $\vec{F} = const$

$$A = \vec{F} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

2. **Закон движения задан в аналитической форме:**

Мощность, в этом случае, вычисляется по формуле

$$N = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}\ .$$

Работу получаем путем интегрирования мощности:

$$A = \int_{M_0}^{M} \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \right).$$

3. **Закон движения задан в естественной форме:**

При разложении силы по естественному базису мощность имеет только составляющая силы, направленная по касательной к траектории.

Тогда путем интегрирования мощности получаем, что работа равна

$$A = \int_0^S F_\tau\, ds.$$

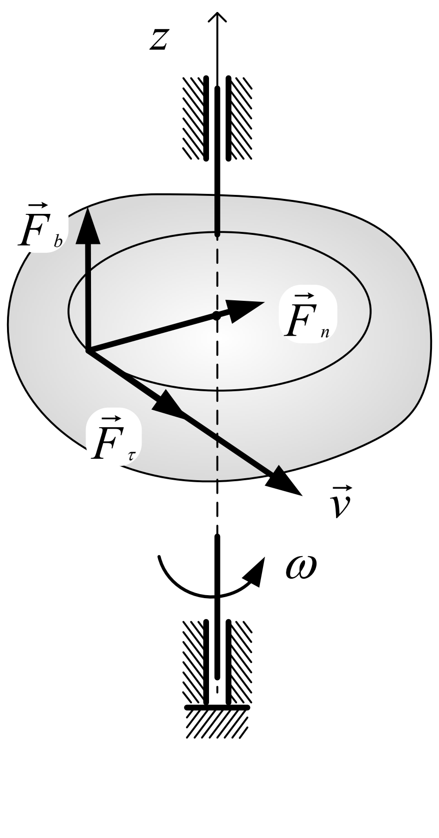
Когда $F_\tau = const$, получаем, что

$$A = F_\tau s.$$

<u>Частные случаи вычисления мощности и работы</u>

Работа силы, действующей на вращающееся тело:

Мощность силы равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость тела:



$$N = \pm m_z(\vec{F})\omega.$$

Знак '+' соответствует случаю разгоняющей силы, а '-' — тормозящей силы.

Если на тело действует не сила, а пара сил с вращающим моментом *M*, то его мощность определяется аналогично:

$$N = \pm M\omega.$$

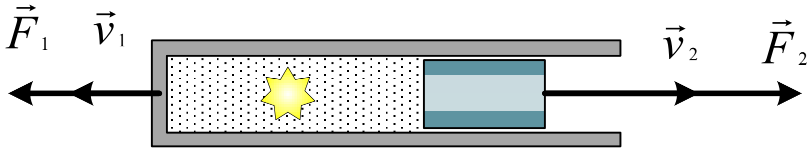
Полная работа момента получится путем интегрирования:

$$A = \pm \int_0^{\varphi} M\, d\varphi.$$

При $M = const$ получаем, что $A = \pm M\varphi$.

Мощность и работа внутренних сил

Суммарная мощность внутренних сил может быть не равна нулю. Например, при выстреле из орудия $N = N_1 + N_2 > 0$, так как направления скоростей совпадают с направлением сил (см. рис.).



Но можно указать ряд случаев, когда внутренние силы не работают, и использовать этот факт при решении задач.

1. Суммы мощностей и работ внутренних сил в абсолютно твердом теле равны нулю.
2. Можно показать, что не работают внутренние силы в нерастяжимой, абсолютно гибкой нити.

Механические системы, в которых суммарная мощность и работа внутренних сил равна нулю называют неизменяемыми.

Признаки неизменяемых механических систем:

1. ***Они должны состоять из абсолютно твердых тел и абсолютно гибких нерастяжимых нитей.***
2. ***При взаимодействии тел системы должно отсутствовать взаимное проскальзывание.***

В примере с орудием нарушены оба признака: газ расширяется, снаряд проскальзывает по стволу.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Кинетическая энергия

Кинетической энергией материальной точки называется величина, равная половине произведения массы точки на квадрат скорости:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий ее точек

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_k^{\ 2}$$

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по аналогичной формуле с той разницей, что сумма заменяется интегралом:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \ v^2 dm,$$

где m ─ масса бесконечно малого объема тела, а v ─ его скорость.

Примечания:

- Кинетическая энергия не может быть отрицательной;
- Кинетическая энергия (так же как и скорость) зависит от выбора системы отсчета.
- Размерность кинетической энергии ─ джоуль: $[T] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}$.

Вычисление кинетической энергии при различных формах движения

1. **Поступательное движение тела**

   При поступательном движении тела его кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2$$

2. **Вращательное движение тела**

   При вращении тела относительно некоторой оси z его кинетическая энергия равна $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$.

3. Плоскопараллельное движение тела

При плоском движении тела кинетическая энергия вычисляется с помощью теоремы Кенига:

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии поступательной части движения и кинетической энергии системы в ее относительном движении относительно центра масс.

Кинетическая энергия поступательной части движения равна $\frac{1}{2}mv_C^2$.

Относительное движение тела относительно центра масс является вращательным, поэтому его кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}I_{z\text{C}}\omega^2$.

В результате получаем, что

$$T_{пл} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{zC}\omega^2,$$

где v_C – скорость центра массы тела, а I_{zC} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр массы тела перпендикулярно оси вращения.

<u>Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме</u>

ТЕОРЕМА

Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех действующих в системе сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k$$

или, после разделения мощностей внешних и внутренних сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k^e + \sum_{k=0}^{n} N_k^i$$

Для неизменяемых систем, у которых внутренние силы не работают, получим:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k^e$$

<u>Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме</u>

ТЕОРЕМА

Изменение кинетической энергии механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме работ всех действующих в системе сил:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

или, выделяя отдельно работы внешних и внутренних сил:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$$

где T — начальное, а T_0 — конечное значение кинетической энергии .

Для неизменяемых систем $\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0\right)$ можно записать:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>ЗАДАЧА 1.</u>

Твердое тело движется поступательно под действием известной силы. Из перечисленных характеристик движущегося тела

A. масса,

B. скорость центра масс,

C. ускорение центра масс,

D. сила, приложенная в центре масс.

Для определения кинетической энергии тела необходимы …

<u>Варианты ответов.</u>

1. A и B	2. A и D	3. A и C	4. A, B и D

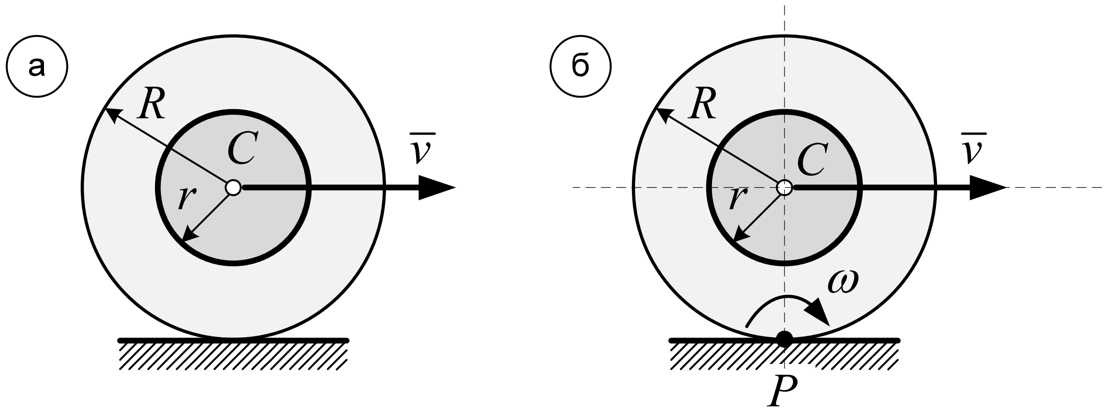
Решение.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно, равна $T = \frac{1}{2}mv^2$, где m - его масса, v - скорость поступательного движения. Так как $v = v_C$, то правильный ответ будет А и В.

Ответ: 1. А и В.

ЗАДАЧА 2.

Ступенчатое колесо радиуса R, масса которого m равномерно распределена по окружности радиуса r, катится по прямолинейному горизонтальному рельсу без проскальзывания, касаясь рельса ободом радиуса $R = 2r$, имея в точке C скорость $\bar{v}$.



Чему равна кинетическая энергия тела?

Варианты ответов.

1. $\frac{3}{8}mv^2$	2. $\frac{5}{8}mv^2$	3. $\frac{3}{4}mv^2$	4. $\frac{5}{4}mv^2$

Решение.

Так как колесо совершает плоскопараллельное движение, то его кинетическая энергия вычисляется по формуле:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2, \qquad (1)$$

где ω — угловая скорость колеса, $v_C = v$ — скорость центра масс,

I_C — момент инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс (точку C), который равен

$$I_C = mr^2. \qquad (2)$$

Учитывая, что колесо катится без проскальзывания и, следовательно, точка Р является для него мгновенным центром скоростей, то

$$\omega = v_C/CP = v/R. \qquad (3)$$

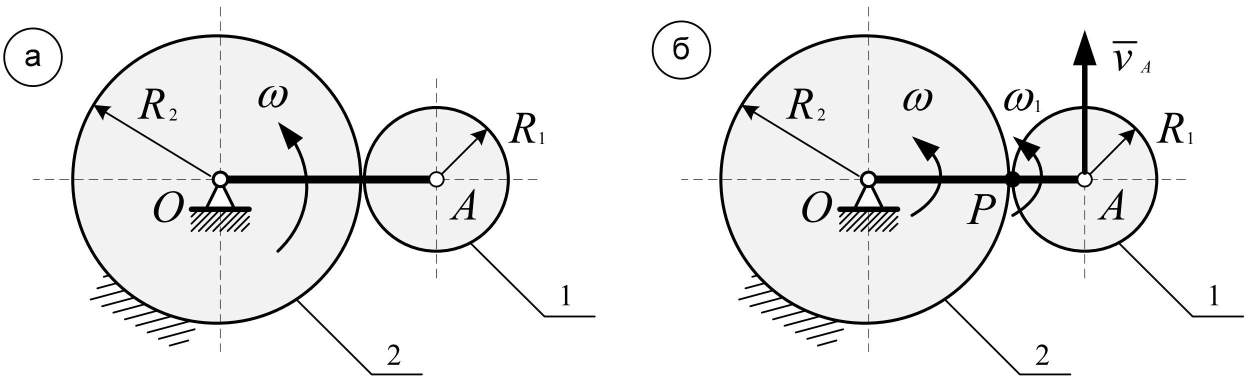
Подставляя в формулу (1) выражения (2) и (3), получим, кинетическая энергия колеса равна

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{4r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = \frac{5}{8}mv^2 .$$

<u>**Ответ:**</u> $2. T = \frac{5}{8}mv^2.$

<u>ЗАДАЧА 3.</u>

В планетарном механизме с внешним зацеплением водило ОА, вращающееся вокруг неподвижной оси О с угловой скоростью ω, приводит в движение зубчатое колесо массой m, катящееся по неподвижному колесу 2.



Если колесо 1 – однородный диск, то чему равна его кинетическая энергия?

<u>**Варианты ответов.**</u>

1. $\frac{3}{4}m(R_1 + R_2)^2\omega^2$
2. $\frac{3}{8}m(R_1 + R_2)^2\omega^2$
3. $\frac{3}{2}m(R_1 + R_2)^2\omega^2$
4. $m(R_1 + R_2)^2\omega^2$
5. $\frac{1}{2}m(R_1 + R_2)^2\omega^2$

Решение.

Колесо 1 совершает плоскопараллельное движение и его кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_1^2, \tag{1}$$

Так как колесо 2 неподвижно, то т. P является мгновенным центром скоростей колеса 1.

Таким образом,

$$v_A = \omega(R_1 + R_2). \tag{2}$$

В этом случае угловую скорость колеса 1 можно определить по формуле:

$$\omega_1 = v_A / AP = \omega(R_1 + R_2)/R_1. \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в выражение (1) и получим, что

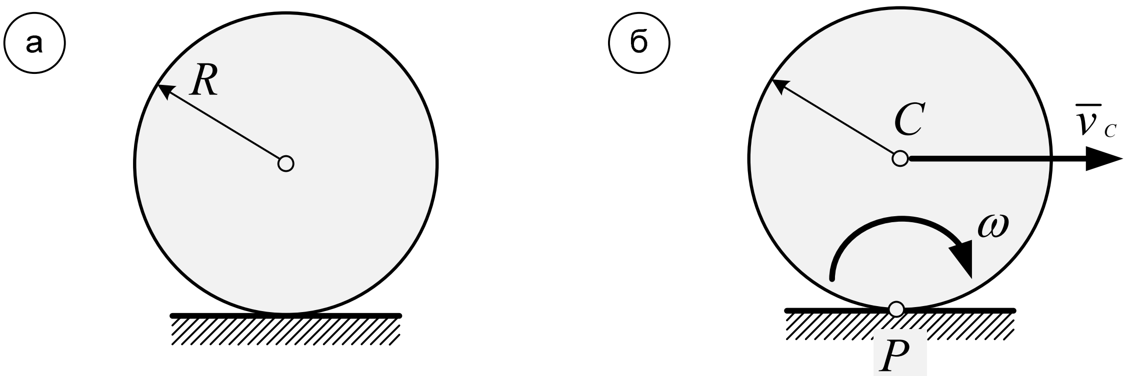
$$T = \frac{1}{2} m\omega^2 (R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{4} m\, R_1^2\, \frac{\omega^2 (R_1+R_2)^2}{R_1^2} = \frac{3}{4} m\omega^2 (R_1 + R_2)^2.$$

Ответ: 1. $T = \frac{3}{4} m\omega^2 (R_1 + R_2)^2$.

ЗАДАЧА 4.

Колесо радиуса R, масса которого m равномерно распределена по ободу колеса, катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания, имея скорость центра масс v.

Определить кинетическую энергию колеса.



Варианты ответов.

1. $2mv^2$	2. mv^2	3. $\frac{3}{2} mv^2$	4. $\frac{1}{2} mv^2$

Решение.

Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке соприкосновения колеса и рельса (точка P).

Скорость центра колеса $v_C = v$ в соответствии с условиями задачи.

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

Учитывая, что осевой момент инерции колеса равен $I_C = mR^2$,

а угловая скорость колеса равна $\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v}{R}$,

определим величину кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = m v^2.$$

Ответ: $2.\ T = mv^2$.

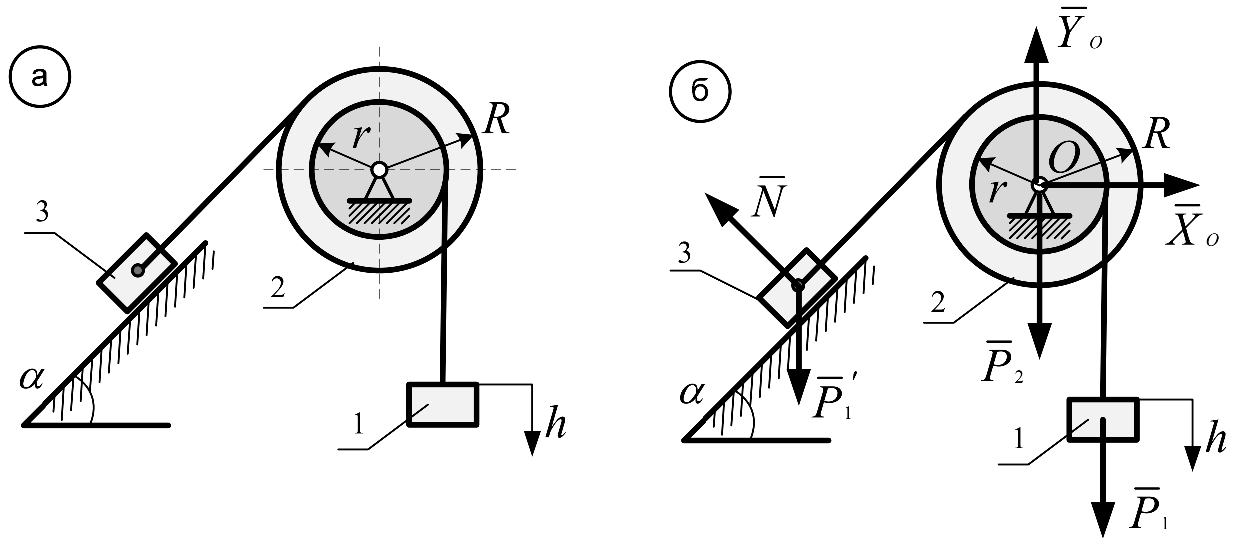
ЗАДАЧА 5.

Система состоит из тел 1, 2 и 3, связанных между собой посредством нерастяжимых нитей. Проскальзывание нерастяжимых нитей отсутствует, силой трения пренебрегаем.

Блок 2 состоит из двух ступеней разных радиусов $R = 1.5r$, массы всех тел одинаковы и равны $m = 3$ кг, угол $\alpha = 30^0$.

Движение начинается из положения покоя и при перемещении груза на величину h (м) система имеет кинетическую энергию $T = 1.8g\ \left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}\right)$.

Найти величину перемещения h.



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ.

1. 2.4;	2. 1.8;	3. 1.2;	4. 1.6;

РЕШЕНИЕ.

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \qquad (1)$$

Начальная кинетическая энергия равна нулю, то есть $T_0 = 0$, так как в начальный момент времени система неподвижна.

Сумма работ внутренних сил равна нулю, так как тела, образующие систему, абсолютно твердые, а нити – нерастяжимые.

То есть $\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0.$

Следовательно, уравнение (1) примет вид: $T_1 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e.$ (2)

Вычислим работу внешних сил.

К внешним силам относятся: силы тяжести: $\overline{P}_1,\ \overline{P'}_1,\ \overline{P}_2$, реакция плоскости $\overline{N}$, реакции шарнира *O*: $\overline{X}_O, \overline{Y}_O$.

$$A(\overline{N}) = A(\overline{X}_O) = A(\overline{Y}_O) = A(\overline{P}_2) = 0,$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 \cdot h = mgh = 3gh,$$

$$A(\overline{P'}_1) = -P'_1 \cdot h \cdot \frac{R}{r} \cdot \sin 30^0 = -mgh \cdot \frac{R}{r} \cdot \sin 30^0 = mgh \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = -2.25gh.$$

Составим уравнение (2):

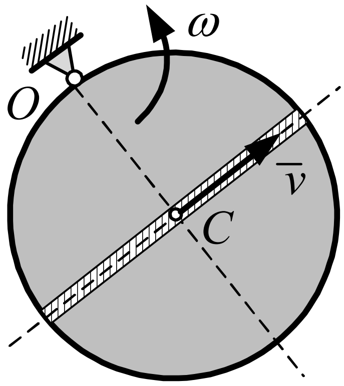
$$1.8g = 3gh - 2.25gh, \qquad 1.8g = 0.75gh,$$

Откуда получаем, что $h = \frac{1.8g}{0.75g} = 2.4(\text{м})$.

Ответ: 1. h = 2.4 м.

ЗАДАЧА 6.

Диск радиуса R и массой m, которая равномерно распределена по тонкому стержню, проходящему через центр С, вращается относительно оси, проходящей через точку O, лежащую на ободе, перпендикулярно плоскости диска, имея в т. С скорость $\overline{v}$.



Определить кинетическую энергию вращающегося диска.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ.

1. $\frac{4}{3}mv^2$	2. $\frac{3}{2}mv^2$	3. $\frac{2}{3}mv^2$	4. $\frac{3}{4}mv^2$

РЕШЕНИЕ.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси равна:

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

где I_O - момент инерции тела относительно оси вращения.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс (точку C в данном случае) равен: $I_C = \frac{1}{12}ml^2$, где l - длина стержня.

Поскольку $l = 2R$ и $I_C = \frac{1}{12}ml^2$, то по теореме Гюйгенса-Штайнера можно определить момент инерции относительно оси вращения, проходящей через точку O: $I_O = I_C + m \cdot OC^2 = \frac{1}{3}mR^2 + mR^2 = \frac{4}{3}mR^2$.

Зная эту величину, можно определить кинетическую энергия диска:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} mR^2 \cdot \omega^2 = \frac{2}{3} mR^2 \omega^2.$$

При вращательном движении угловая скорость находится по формуле

$$\omega = v/OC = v/R.$$

Тогда кинетическую энергию диска можно выразить через его массу и скорость точки *C*:

$$T = \frac{2}{3} mR^2 \omega^2 = \frac{2}{3} mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{2}{3} mv^2.$$

Ответ: 3. $T = \frac{2}{3} mv^2$.

Маковкин Георгий Анатольевич
Аистов Анатолий Сергеевич
Куликов Игорь Сергеевич
Юдников Сергей Георгиевич
Баранова Алла Сергеевна
Никитина Елена Александровна
Круглова Татьяна Евгеньевна
Орехова Ольга Ивановна
Лупанова Галия Алексеевна

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 4. Центр масс. Мощность и работа. Кинетическая энергия

Методические указания
для подготовки к интернет – тестированию по теоретической механике
для студентов направлений «Строительство» и «Теплоэнергетика»

Подписано к печати . Формат 60х90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная
Уч.изд.л.1,0. Усл.печ.л. 1,6 Тираж 200 экз. Заказ №

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.