

В.Н. Неймарк, Г.П. Опалёва,
В.В. Петров, Л.С. Сенниковская

Сборник задач и упражнений по математике

Часть 1

Учебное пособие

Нижний Новгород
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

В.Н. Неймарк, Г.П. Опалёва,
В.В. Петров, Л.С. Сенниковская

Сборник задач и упражнений по математике
Часть 1

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2016

ББК 22.1 (Я 7)
Ш 51
УДК 51 (075)

Рецензенты:

И.Н. Цветкова – канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой информатики и информационных технологий Нижегородского института управления – филиала РАНХиГС при президенте РФ.

С.Ю. Литвинчук – канд. физ.-мат. наук, доцент, ученый секретарь НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Неймарк В.Н. Сборник задач и упражнений по математике. [Текст]: учеб. пос. для вузов. Ч.1. / В.Н. Неймарк, Г.П. Опалёва, В.В. Петров, Л.С. Сенниковская; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2016. – 104с. ISBN 978-5-528-00070-1

Сборник задач и упражнений в двух частях составлен преподавателями кафедры математики Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета для студентов технических специальностей. Первая часть включает в себя задачи и упражнения по линейной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислениям функции одной переменной и дифференциальному исчислению функций нескольких переменных.

ББК 22.1 (Я 7)

ISBN 978-5-528-00070-1

© В.Н. Неймарк, Г.П. Опалёва,
В.В. Петров, Л.С. Сенниковская, 2016
© ННГАСУ, 2016

Содержание:

Введение	6
Глава 1. Линейная алгебра	7
§ 1. Матрицы. Действия с матрицами	7
§ 2. Определители матриц	9
§ 3. Обратная матрица. Ранг матрицы	10
§ 4. Решение систем линейных уравнений	12
Глава 2. Векторная алгебра	14
§ 1. Векторы и действия над ними	14
§ 2. Скалярное произведение	17
§ 3. Векторное произведение	18
§ 4. Смешанное произведение	19
Глава 3. Прямая и плоскость	21
§ 1. Прямая линия на плоскости	21
§ 2. Плоскость	24
§ 3. Прямая в пространстве	26
§ 4. Прямая в пространстве и плоскость	30
Глава 4. Кривые и поверхности второго порядка	33
§ 1. Окружность	33
§ 2. Эллипс	33
§ 3. Гипербола	35
§ 4. Парабола	37
§ 5. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду	39
§ 6. Кривые в полярной системе координат	40
§ 7. Поверхности второго порядка	40
Глава 5. Введение в анализ	42
§ 1. Общие свойства функций	42
§ 2. Числовые последовательности и их пределы	45
§ 3. Функции непрерывного аргумента. Предел функции в точке	47

§ 4. Сравнение бесконечно малых	50
§ 5. Непрерывность функции. Точки разрыва	51
Глава 6. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	52
§ 1. Производная функция	52
§ 2. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях	56
§ 3. Применение производной в геометрии и физике	57
§ 4. Правило Лопиталья для вычисления пределов	59
§ 5. Исследование функций и построение графиков	60
§ 6. Наименьшее и наибольшее значения	66
Глава 7. Неопределённый интеграл	67
§ 1. Непосредственное интегрирование	67
§ 2. Интегрирование путём подведения под знак дифференциала и методом подстановки	68
§ 3. Интегрирование по частям	69
§ 4. Интегрирование рациональных функций	70
§ 5. Интегрирование тригонометрических функций	71
§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций	71
§ 7. Смешанные примеры	71
Глава 8. Определённый интеграл	73
§ 1. Непосредственное вычисление определённого интеграла и подведение функции под знак дифференциала	73
§ 2. Замена переменной в определённом интеграле	73
§ 3. Интегрирование по частям в определённом интеграле	74
§ 4. Несобственные интегралы	74
§ 5. Приложения определённого интеграла	75
Глава 9. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	79
§ 1. Область определения функции	79
§ 2. Линии уровня функции нескольких переменных	79

§ 3. Частные производные	79
§ 4. Производные от функций, заданных неявно	81
§ 5. Дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала в приближенных вычислениях	81
§ 6. Градиент функции многих переменных. Производная функции по направлению	83
§ 7. Касательная плоскость и нормальная прямая	85
§ 8. Экстремумы функции многих переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области	85
Ответы	88
Список литературы	104

Введение

Предлагаемый сборник задач и упражнений составлен преподавателями кафедры математики Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета (ННГАСУ) для студентов технических специальностей в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования. В качестве теоретической основы для решения задач студентам предлагается использовать лекционный курс, написанный преподавателями этой же кафедры ННГАСУ « 64 лекции по математике » (авторы В. П. Важдаев, М.М. Коган, М.И. Лиогонький, Л.А. Протасова).

Задачник состоит из двух частей, включающих темы, которые рассматриваются на первом и втором курсах направления «Строительство». В нём содержатся упражнения различного уровня сложности. Кроме известных примеров из классических сборников (см. список литературы), предлагаются также задачи и упражнения составленные авторами.

Главы 2, 3, 8 подготовлены старшим преподавателем В.Н. Неймарк, главы 1,4–старшим преподавателем Г.П. Опалёвой, главы 5, 7–канд.физ-мат.наук В.В. Петровым, главы 6,9–старшим преподавателем Л.С. Сенниковской.

Авторы благодарят всех сотрудников кафедры математики ННГАСУ за ряд замечаний, способствовавших улучшению содержания задачника, и будут признательны пользователям за любые пожелания и критические замечания.

Глава 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Матрицы. Действия с матрицами

1.1. Зная матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, найти матрицу X , удовлетворяющую условиям:

1) $X - 2B = 0$; 2) $A + 5X = 0$; 3) $A + B - 3X = 0$; 4) $3A - \frac{1}{2}X = B$.

1.2. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

существуют ли произведения

- 1) AB ; 2) BA ; 3) AC ; 4) CA ;
5) BC ; 6) CB ; 7) DA ; 8) AD ;
9) ABC ; 10) BAD ; 11) CBA ; 12) ACB ?

1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

- 1) AB ; 2) C^2 ; 3) $(AC)^2$; 4) CA^2 ;
5) $(A+C)^2$; 6) $(A-2C)^2$; 7) $(A+C)^2 B$; 8) ACB .

В задачах **1.4–1.7** найти элементы c_{32} и c_{13} матрицы $C = A \cdot B$, если:

1.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$1.5. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.7. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

В задачах **1.8–1.15** вычислить произведения матриц.

$$1.8. \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad 1.9. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1.11. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1.13. \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. \quad \begin{pmatrix} a & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}, \quad 1.15. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

В нижеследующих задачах **1.16–1.23** вычислить произведения матриц $A \cdot A^T$.

$$1.16. \quad A = (3 \quad 2 \quad 1), \quad 1.17. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 1.18. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.19. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 1.20. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.21. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.22. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.23. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Определители матриц

В задачах 1.24–1.29 вычислить определители матриц.

$$1.24. \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.25. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}. \quad 1.26. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$1.27. \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{pmatrix}. \quad 1.28. \begin{pmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{pmatrix}. \quad 1.29. \begin{pmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Решить следующие уравнения:

$$1.30. \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.31. \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.32. \begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.33. \begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x-2 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.34. \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.35. \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{13} и a_{32} определителей следующих матриц:

$$1.36. \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1.37. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.38. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В задачах **1.39–1.44** вычислить определители матриц разложением по элементам какой-нибудь строки (столбцу) или с помощью «правила треугольников»:

$$1.39. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}. \quad 1.40. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.41. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.42. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.43. \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \sin \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.44. \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Решить нижеследующие уравнения:

$$1.45. \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.46. \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.47. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.48. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1. \quad 1.49. \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0. \quad 1.50. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3. Обратная матрица. Ранг матрицы

В задачах **1.51–1.58** найти матрицу, обратную к данной матрице, и сделать проверку:

$$1.51. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1.52. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.53. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.54. \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.55. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.56. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 1.57. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad 1.58. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.59. Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу X , если:

1) $X = (A - B^2) \cdot 2C^{-1}$; 2) $X = (B - C^2) \cdot 2A^{-1}$; 3) $X = (C - A^2) \cdot 7B^{-1}$;

4) $X = 2C^{-1} + A \cdot B - C$; 5) $X = 2A^{-1} + B \cdot C - A$; 6) $X = 7B^{-1} + C \cdot A - B$;

7) $X = C - A^2 + 7B^{-1}$; 8) $X = B^2 - 2C^{-1} + A$; 9) $X = (2C^{-1} + C) \cdot A \cdot B$.

Методом окаймляющих миноров в задачах **1.60–1.66** вычислить ранг матрицы:

1.60. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. **1.61.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. **1.62.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **1.63.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.64. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. **1.65.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. **1.66.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 11 & 5 & 8 \\ 15 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

В задачах **1.67–1.69** найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

1.67. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$. **1.68.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **1.69.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.70. При каких значениях λ матрица $\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный 1?

1.71. При каких значениях λ ранг матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ равен 2?

1.72. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ при различных значениях параметра λ .

§ 4. Решение систем линейных уравнений

По правилу Крамера решить системы уравнений **1.73–1.81** и сделать проверку:

$$\mathbf{1.73.} \begin{cases} 2x - y - 4z = 3, \\ x + 4y + z = -3, \\ 3x - 2y + 5z = 5. \end{cases} \quad \mathbf{1.74.} \begin{cases} 2x + y + z = 8, \\ x + y + 2z = 6, \\ 3x + 3y - z = 11. \end{cases} \quad \mathbf{1.75.} \begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ 2x + 3y - z = 5, \\ 3x + 7y + z = 10. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.76.} \begin{cases} 2x + y + 2z = 2, \\ 2x - 3y + z = -1, \\ x + y - 2z = -8. \end{cases} \quad \mathbf{1.77.} \begin{cases} 2x + y + 2z = 2, \\ x + y + 4z = 10, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases} \quad \mathbf{1.78.} \begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ 3x - 5y + z = 3, \\ 4x + y - 3z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.79.} \begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x + 5y - 3z = -2, \\ x - 5y + 2z = 6. \end{cases} \quad \mathbf{1.80.} \begin{cases} 3x - y + 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 3, \\ x + 5y - 4z = 7. \end{cases} \quad \mathbf{1.81.} \begin{cases} x - y - z = 1, \\ x - 2y - z = 2, \\ 2x + 3y = 0,5. \end{cases}$$

В задачах **1.82–1.90** решить системы уравнений матричным способом и сделать проверку:

$$\mathbf{1.82.} \begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x + 3y - 3z = 7, \\ x - 4y - z = -2. \end{cases} \quad \mathbf{1.83.} \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y = 3, \\ 3x - y + 5z = 4. \end{cases} \quad \mathbf{1.84.} \begin{cases} 3x - 3y + z = 1, \\ 2x - 4y + 3z = -1, \\ 3x - y + 5z = 9. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.85.} \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 2, \\ 5y - 2z = 5. \end{cases} \quad \mathbf{1.86.} \begin{cases} 2x + y + 2z = 4, \\ x - y + 5z = 6, \\ 3x + y - 4z = -1. \end{cases} \quad \mathbf{1.87.} \begin{cases} x + y - 4z = -8, \\ 2x - y + z = 5, \\ x - 4y = 5. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.88.} \begin{cases} 2x - 2y - z = -3, \\ x + 2y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases} \\
 \mathbf{1.89.} \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 4, \\ 2x + 3y - z = -1, \\ 5x + 4y + 4z = 4. \end{cases} \\
 \mathbf{1.90.} \begin{cases} x + y - z = 5, \\ y - x + z = -1, \\ 4y - x - z = 7. \end{cases}
 \end{array}$$

Методом Гаусса решить системы уравнений **1.91–1.99** и сделать проверку:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.91.} \begin{cases} x + y - z = 5, \\ x - y + z = 1, \\ 4x - y - z = 10. \end{cases} \\
 \mathbf{1.92.} \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4, \\ 3x + 2y - z = -1, \\ 4x + 5y + 4z = 4. \end{cases} \\
 \mathbf{1.93.} \begin{cases} x + 2y + z = 5, \\ 3x - 5y + 3z = 4, \\ 2x + 7y - z = 10. \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.94.} \begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ x - y + 3z = 5, \\ 3x - 2y + 4z = 5. \end{cases} \\
 \mathbf{1.95.} \begin{cases} 2x - 2y + z = 6, \\ x - y = 2, \\ 3x + 5z = 13. \end{cases} \\
 \mathbf{1.96.} \begin{cases} 3x - y + 4z = 5, \\ 2x + 3y = -3, \\ 4x - y + z = 2. \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.97.} \begin{cases} 2x + 2y + z = 0, \\ x - 3y + 3z = 5, \\ 3x - y + 4z = 5. \end{cases} \\
 \mathbf{1.98.} \begin{cases} x - 3y + 3z = 1, \\ 3x - 4y + 2z = -1, \\ 5x - y + 3z = 9. \end{cases} \\
 \mathbf{1.99.} \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4, \\ x + y - 4z = -2, \\ 3x - 2y + 2z = 3. \end{cases}
 \end{array}$$

В задачах **1.100–1.110** исследовать системы линейных уравнений и в случае их совместности найти решения:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.100.} \begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases} \\
 \mathbf{1.101.} \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases} \\
 \mathbf{1.102.} \begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.103.} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases} \\
 \mathbf{1.104.} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases} \\
 \mathbf{1.105.} \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.106.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases} \\
 \mathbf{1.107.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -6. \end{cases}
 \end{array}$$

$$1.108. \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases} \quad 1.109. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

$$1.110. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.111. \text{ При каких значениях } a \text{ и } b \text{ система уравнений } \begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

1) имеет единственное решение; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечно много решений ?

В задачах **1.112–1.117** решить однородные системы уравнений:

$$1.112. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.113. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.114. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.115. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.116. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.117. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Глава 2 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Векторы и действия над ними

2.1. Вычислить длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

2.2. Даны две координаты вектора $x = 4$ и $y = -12$. Определить третью координату z при условии, что $|\vec{a}| = 13$.

2.3. Определить координаты точки N , с которой совпадает концевая точка вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, если его начальная точка совпадает с точкой $M(1; 2; -3)$.

2.4. Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найти координаты векторов \vec{AB} и \vec{BA} .

2.5. Даны неколлинеарные векторы \vec{a} и \vec{b} . Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = \vec{a} - 2\sqrt{3}\vec{b}$ и $\vec{d} = -\sqrt{3}\vec{a} + 6\vec{b}$?

2.6. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны и $\vec{AB} = \frac{\alpha}{2}\vec{a}$, $\vec{BC} = 4(\beta \cdot \vec{a} - \vec{b})$, $\vec{CD} = -4\beta \cdot \vec{b}$, $\vec{DA} = \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$. Найти числа α и β и доказать коллинеарность векторов \vec{BC} и \vec{DA} .

2.7. $ABCDEFK$ – правильный шестиугольник, причём $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. Выразить через \vec{a} и \vec{b} векторы \vec{CD} , \vec{DE} , \vec{EK} , \vec{KA} , \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{AE} .

2.8. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы \vec{BC} и \vec{DC} через \vec{AK} и \vec{AL} .

2.9. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, которые составляет вектор с осями координат. Вычислить проекции вектора на координатные оси.

2.10. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{12; -15; -16\}$.

2.11. Найти координаты вектора \vec{a} , образующего с тремя векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ равные острые углы, при условии, что $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

2.12. Как должны быть связаны ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы имело место соотношение: 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $a_x / |\vec{a}| = b_x / |\vec{b}|$?

2.13. Построить вектор $\vec{r} = \vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$, определить его длину и направление (проверить по формуле $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

2.14. Радиус-вектор \vec{r} точки M составляет с осью OX угол 45° , а с осью OY – угол 60° . Длина его $|\vec{r}| = 6$. Определить координаты точки M , если её координата z отрицательна, и выразить вектор $\vec{OM} = \vec{r}$ через орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

2.15. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Построить вектор $\vec{AB} = \vec{u}$, его проекции на оси координат и определить длину и направление вектора. Построить углы вектора \vec{u} с осями координат.

2.16. Построить параллелограмм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ и определить длины его диагоналей.

- 2.17.** Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$. Найти его четвертую вершину D .
- 2.18.** Даны вершины треугольника: $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$ и $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведённой из вершины A .
- 2.19.** Даны вершины треугольника $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$. Найти длину средней линии треугольника, которая параллельна стороне BC .
- 2.20.** Установить, в каких случаях тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор \bar{c} как линейную комбинацию векторов \bar{a} и \bar{b} :
- 1) $\bar{a} = \{5; 2; 1\}$, $\bar{b} = \{-1; 4; 2\}$, $\bar{c} = \{-1; -1; 6\}$;
 - 2) $\bar{a} = \{6; 4; 2\}$, $\bar{b} = \{-9; 6; 3\}$, $\bar{c} = \{-3; 6; 3\}$;
 - 3) $\bar{a} = \{6; -18; 12\}$, $\bar{b} = \{-8; 24; -16\}$, $\bar{c} = \{8; 7; 3\}$.
- 2.21.** Даны: $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$ и $|\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Вычислить $|\bar{a} - \bar{b}|$.
- 2.22.** Проверить коллинеарность векторов $\bar{a} = \{2; -1; 3\}$ и $\bar{b} = \{-6; 3; -9\}$. Установить, какой из них длиннее и во сколько раз? Как они направлены – в одну или в противоположные стороны?
- 2.23.** Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны.
- 2.24.** Проверить, что четыре точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ служат вершинами трапеции.
- 2.25.** На оси OY найти точку M , равноудалённую от точек $A(1; -4; 7)$ и $B(5; 6; -5)$.
- 2.26.** На оси OX найти точку M , расстояние от которой до точки $A(3; -3)$ равно 5.
- 2.27.** Три силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Найти величину равнодействующей силы \bar{F} , если известны величины этих сил: $|\bar{F}_1| = 2$, $|\bar{F}_2| = 10$, $|\bar{F}_3| = 11$.

§ 2. Скалярное произведение

- 2.28.** Векторы \bar{a} и \bar{b} образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 3$ и $|\bar{b}| = 4$, вычислить: 1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) \bar{a}^2 ; 3) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; 4) $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$.
- 2.29.** Найти длину вектора $\bar{a} = 2\bar{b} - 3\bar{c}$, если $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 5$ и угол между векторами \bar{b} и \bar{c} равен 60° .

- 2.30.** Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{3; 4; 7\}$ и $\bar{b} = \{2; -5; 2\}$.
- 2.31.** Определить угол между векторами $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$.
- 2.32.** Определить углы треугольника с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.
- 2.33.** Даны векторы $\bar{a} = \{4; -2; -4\}$ и $\bar{b} = \{6; -3; 2\}$. Вычислить скалярное произведение векторов $2\bar{a} - 3\bar{b}$ и $\bar{a} + 2\bar{b}$.
- 2.34.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 6\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$.
- 2.35.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, если заданы три его вершины: $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$ и $C(-3; 3; -3)$.
- 2.36.** Вычислить $(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$.
- 2.37.** Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}$, где \bar{m} и \bar{n} — единичные векторы с углом 120° между ними. Найти $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{m}})$ и $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{n}})$.
- 2.38.** Какому условию должны удовлетворять векторы \bar{a} и \bar{b} , чтобы вектор $\bar{a} + \bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a} - \bar{b}$?
- 2.39.** Даны единичные векторы \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} , удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a} = \bar{0}$.
- 2.40.** Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $(\bar{a} + \alpha \cdot \bar{b})$ и $(\bar{a} - \alpha \cdot \bar{b})$ будут взаимно перпендикулярны.
- 2.41.** Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$. Определить $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$ и $\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}$.
- 2.42.** Даны три вектора: $\bar{a} = \{1; -3; 4\}$, $\bar{b} = \{3; -4; 2\}$ и $\bar{c} = \{-1; 1; 4\}$. Вычислить $\text{пр}_{\bar{b} + \bar{c}} \bar{a}$.
- 2.43.** Найти проекцию вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ на ось, составляющую с осями координат равные острые углы.
- 2.44.** Даны вершины четырёхугольника: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.
- 2.45.** Сила, определяемая вектором $\bar{R} = \bar{i} - 8\bar{j} - 7\bar{k}$, разложена по трём направлениям, одно из которых задано вектором $\bar{a} = \{2; 2; 1\}$. Найти составляющую силы \bar{R} в направлении вектора \bar{a} .
- 2.46.** Найти координаты вектора \bar{x} , если $\bar{x} \cdot \bar{a} = 1$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = 2$, $\bar{x} \cdot \bar{c} = 3$, где

$$\bar{a} = \{2; 1; 1\}, \quad \bar{b} = \{0; 4; 2\}, \quad \bar{c} = \{10; 1; 3\}.$$

§ 3. Векторное произведение

2.47. Определить и построить вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} , если:

$$1) \bar{a} = 3\bar{i}, \bar{b} = 2\bar{k}; \quad 2) \bar{a} = \bar{i} + \bar{j}, \bar{b} = \bar{i} - \bar{j}; \quad 3) \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}, \bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}.$$

2.48. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.

2.49. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a} = 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$ и вычислить его площадь и длины его высот.

2.50. Раскрыть скобки и упростить выражения:

$$1) \bar{i} \times (\bar{j} + \bar{k}) - \bar{j} \times (\bar{j} + \bar{k}) + \bar{k} \times (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k});$$

$$2) (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{b} + (\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a};$$

$$3) (2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} - \bar{a}) + (\bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} + \bar{b});$$

$$4) 2\bar{i} \cdot (\bar{j} \times \bar{k}) + 3\bar{j} \cdot (\bar{i} \times \bar{k}) + 4\bar{k} \cdot (\bar{i} \times \bar{j}).$$

2.51. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a} = \{2; -2; 1\}$ и $\bar{b} = \{2; 3; 6\}$.

2.52. Найти единичный вектор \bar{e} , перпендикулярный вектору $\bar{a} = \{1; 4; 3\}$ и оси абсцисс.

2.53. Вектор \bar{x} , перпендикулярный векторам $\bar{a} = \{4; -2; -3\}$ и $\bar{b} = \{0; 1; 3\}$, образует с осью OY тупой угол. Зная, что $|\bar{x}| = 26$, найти его координаты.

2.54. Вектор \bar{m} , перпендикулярный оси OZ и вектору $\bar{a} = \{8; -15; 3\}$, образует с осью OX острый угол. Зная, что $|\bar{m}| = 51$, найти его координаты.

2.55. Найти вектор \bar{x} , зная, что он перпендикулярен векторам $\bar{a} = \{2; -3; 1\}$ и $\bar{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $\bar{x} \cdot \{\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}\} = 10$.

2.56. Доказать, что $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = 2(\bar{a} \times \bar{b})$, и выяснить геометрическое значение этого тождества.

2.57. Построить векторы $\bar{a} = 3\bar{k} - 2\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Вычислить модуль вектора \bar{c} и площадь треугольника, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} .

2.58. Дан треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$ и $C(6; 2; 0)$. Вычислить длину его высоты, опущенной на сторону AC .

- 2.59.** Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
- 2.60.** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где \vec{m} и \vec{n} – единичные векторы, образующие угол 30° .
- 2.61.** Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Вычислить $(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
- 2.62.** Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Найти координаты вектора $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.
- 2.63.** Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- 2.64.** Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?
- 2.65.** Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке $O(0; 2; 1)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(-1; 2; 3)$.
- 2.66.** Дана сила $\vec{F} = \{3; 4; -2\}$. Точка её приложения $A(2; -1; 3)$. Найти момент силы относительно точки $O(0; 0; 0)$ и направление момента сил.
- 2.67.** Три силы $\vec{F}_1 = \{2; 4; 6\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -2; 3\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 1; -7\}$ приложены к точке $A(3; -4; 8)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4; -2; 6)$.

§ 4. Смешанное произведение

- 2.68.** Построить параллелепипед на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет связка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?
- 2.69.** Построить пирамиду с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$ и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
- 2.70.** Показать, что точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(5; 0; 6)$ лежат в одной плоскости.
- 2.71.** Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны. Разложить вектор \vec{c} по векторам \vec{a} и \vec{b} .
- 2.72.** Доказать, что для любых заданных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

2.73. При каком значении α векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \alpha \vec{k}$, $\vec{b} = \{0; 1; 0\}$ и $\vec{c} = \{3; 0; 1\}$ компланарны?

2.74. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

2.75. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

2.76. Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ и $D(-5; -4; 8)$. Найти длину высоты, которая опущена из вершины D .

2.77. Найти объём треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

2.78. Объём тетраэдра $V = 5$. Три его вершины находятся в следующих точках: $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$ и $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси OY .

2.79. Дана пирамида с вершинами в следующих точках: $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(-2; 4; 1)$, $A_3(7; 6; 3)$, $A_4(4; -3; 1)$.

Найти:

- 1) длины рёбер A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 ; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
- 3) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3 ; 4) объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
- 5) длину высоты пирамиды на грань $A_1A_2A_3$.

Глава 3 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Прямая линия на плоскости

3.1. Построить прямые:

- 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $4x - 3y + 24 = 0$; 3) $3x - 5y - 2 = 0$; 4) $5x + 2y - 1 = 0$;
- 5) $2x + 5y = 10$; 6) $3x + 4y = 0$; 7) $5x - 2 = 0$; 8) $2y + 5 = 0$; 9) $-2x = 0$.

3.2. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок $b = 3$ и образующей с положительным направлением оси OX угол $\alpha = 30^\circ$.

3.3. Уравнения прямых привести к виду в отрезках на осях. Прямые построить.

- 1) $2x + 3y = 6$; 2) $3x - 2y = 4$; 3) $3y - 4x = 12$; 4) $y = 6 - 4x$.

3.4. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси OX отрезок длиной 3 ед., а на оси OY отрезок длиной 4 ед. Выполнить построение.

3.5. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и через точку $(-2; 3)$. Прямую построить.

3.6. Даны точки $O(0; 0)$ и $A(-3; 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0; 2)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

3.7. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ соответственно в точках A и B . Построить вектор \overline{AB} , определить его длину и проекции на оси координат.

3.8. Прямые $x = -1$ и $x = 3$ пересекают прямую $y = 2x + 1$ соответственно в точках A и B . Определить длину вектора \overline{AB} и его проекции на оси координат.

3.9. Изобразить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

1) $y < 2 - x, x > -2, y > -2;$

2) $y > 2 - x, x < 4, y < 0;$

3) $x/4 + y/2 \leq 1, y \geq x + 2, x \geq -4;$

4) $-2 - x < y < 2 + x, -2 < x < 4.$

3.10. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0, 2x + 5y + 19 = 0$

3.11. Стороны треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $AB: 4x + 3y - 5 = 0, BC: x - 3y + 10 = 0, AC: x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

Примечание. Здесь и в дальнейшем под уравнением сторон мы будем понимать уравнения прямых, на которых лежат стороны.

3.12. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2; 1)$:

1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.

3.13. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4), B(-1; 3)$ и $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.

3.14. Даны середины сторон треугольника $M_1(2; 1), M_2(5; 3), M_3(3; -4)$. Составить уравнения его сторон.

3.15. Даны вершины треугольника $A(2; 1), B(-1; -1), C(3; 2)$. Составить уравнения его высот.

3.16. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B .

3.17. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника и второй диагонали.

3.18. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника и его диагоналей.

3.19. Найти проекцию точки $M(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

3.20. Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

3.21. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3; 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7; 3)$ и $B(11; -15)$.

3.22. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

3.23. Найти точку M_1 , симметричную точке $M_2(5; 3)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; 4)$ и $B(-1; -2)$.

3.24. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

- 1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$; 4) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$.

3.25. Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y - b = 0$:

- 1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.

3.26. Определить, при каком значении a три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

3.27. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

3.28. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв. ед.

3.29. Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

3.30. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ и одна из его вершин $A(-2; 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

3.31. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(-5; 1)$, $M_2(3; 7)$.

3.32. Доказать, что прямая $2x - 3y + 6 = 0$ не пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(-2; -3)$, $M_2(1; -2)$.

3.33. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$; 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;

3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$; 4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

3.34. Доказать, что прямая $5x - 2y - 1 = 0$ параллельна прямым $5x - 2y + 7 = 0$ и $5x - 2y - 9 = 0$ и делит расстояние между ними пополам.

3.35. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$.

3.36. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ и делит пополам отрезок, ограниченный точками $M(5; -6)$ и $N(-1; -4)$.

§ 2. Плоскость

3.37. Найти точки пересечения плоскости $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ с осями координат. Плоскость построить.

3.38. Построить плоскости:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$; 2) $4x + 3y - z = 0$; 3) $2x + 3z = 6$; 4) $2y - 3z = 12$;

5) $2y - 3x = 4$; 6) $2x - 5z = 0$; 7) $3x + 2y = 0$; 8) $y - z = 0$; 9) $2z - 7 = 0$;

10) $3y + 5 = 0$; 11) $3x + 6 = 0$; 12) $-2z = 0$; 13) $3y = 0$; 14) $x = 0$.

3.39. Дано уравнение плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Написать для нее уравнение в отрезках. Плоскость построить.

3.40. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отрезки одинаковой величины. Плоскость построить.

3.41. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликата отрезки одинаковой длины. Плоскость построить.

3.42. Плоскость проходит через точку $M(6; -10; 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$, а на оси аппликата отрезок $c = 2$. Составить для этой плоскости уравнение в отрезках. Плоскость построить.

3.43. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и перпендикулярной вектору \overline{OM} .

3.44. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ и $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ и $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$ и $2x - 6z - 7 = 0$.

3.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 4; -5)$ параллельно плоскости $2x - 3y + 2z - 10 = 0$.

3.46. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

3.47. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

3.48. Даны две точки $M(3; -1; 2)$ и $N(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору \overline{MN} .

3.49. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.

3.50. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; -1; 3)$ и $N(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

3.51. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(0; 0; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - y - z = 0$ и $2y = x$.

3.52. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

3.53. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0, \quad x + 9y - 3z + 2 = 0;$

2) $2x + 3y - z - 3 = 0, \quad x - y - z + 5 = 0;$

3) $2x - 5y + z = 0, \quad x + 2z - 3 = 0;$

4) $x + y + z = 1, \quad 2x - 3y + z - 7 = 0.$

3.54. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно двум плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

3.55. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -1; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x - z + 1 = 0$ и параллельно вектору $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.

3.56. Установить, что три плоскости $x - 2y + z - 7 = 0, \quad 2x + y - z + 2 = 0$ и $x - 3y + 2z - 11 = 0$ имеют одну общую точку. Вычислить ее координаты.

3.57. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$ параллельно оси Ox ;

2) точки $M_1(3; 1; 0)$ и $M_2(1; 3; 0)$ параллельно оси Oz ;

3) точки $M_1(3; 0; 3)$ и $M_2(5; 0; 0)$ параллельно оси Oy .

3.58. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -4; 3)$ и через 1) ось Ox ; 2) ось Oy ; 3) ось Oz .

3.59. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $M(2; -3; 3)$ параллельно плоскости XOY ;

2) точку $N(1; -2; 4)$ параллельно плоскости XOZ ;

3) точку $P(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости YOZ .

3.60. Вычислить расстояние d точки M от плоскости в каждом из следующих случаев:

1) $M(-2; -4; 3), \quad 2x - y + 2z + 3 = 0;$ 2) $M(2; -1; -1), \quad 16x - 12y + 15z = 0;$

3) $M(1; 2; -3), \quad 5y + 4 = 0;$ 4) $M(3; -6; 7), \quad 4x - 3z - 1 = 0.$

3.61. Вычислить расстояние d от точки $P(-1; 1; -2)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1; -1; 1), \quad M_2(-2; 1; 3), \quad M_3(4; -5; -2).$

3.62. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между двумя параллельными плоскостями:

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$ и $x - 2y - 2z - 6 = 0;$

2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.

3.63. На оси OY найти точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстоянии $d = 4$.

3.64. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точки $M(1; -2; 0)$ и от плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

3.65. На оси OX найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$.

§ 3. Прямая в пространстве

3.66. Построить прямые: 1) $\begin{cases} y = 3, \\ z = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2, \\ z = x + 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4, \\ z = y. \end{cases}$ Определить их направляющие векторы.

3.67. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; 3; 0)$ параллельно вектору $\vec{u} = \{-1; 1; 1\}$. Найти след прямой на плоскости YOZ .

3.68. Построить прямые $\begin{cases} x = z + 5, \\ y = 4 - 2z. \end{cases}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и найти их следы на плоскостях XOY и XOZ .

3.69. Составить канонические уравнения прямых, проходящих через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси OX ;

4) оси OY ; 5) прямой $\begin{cases} 2x - 5y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$ 6) прямой $\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = -2t + 3, \\ z = 5t + 2. \end{cases}$

3.70. Составить канонические уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

1) $(1; -2; 1)$ и $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$ и $(1; 0; -3)$;

3) $(2; -1; -3)$ и $(2; -1; 5)$; 4) $(4; 4; 4)$ и $(-4; 4; -2)$.

3.71. Составить параметрические уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

1) $(3; -1; 2)$ и $(2; 1; 1)$; 2) $(1; 1; -2)$ и $(3; -1; 0)$;

3) $(2; -1; -3)$ и $(2; -1; 5)$; 4) $(2; -1; -1)$ и $(2; 1; 1)$.

3.72. Написать уравнения траектории точки $M(x; y; z)$, которая, выйдя из точки $A(4; -3; 1)$, движется со скоростью $V(2; 3; 1)$.

3.73. Через точки $M_1(-6; 6; 5)$ и $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

3.74. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$, $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

3.75. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(2; 6; -2)$. Найти направляющие косинусы прямой.

3.76. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 3; -5)$ параллельно прямой
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

3.77. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 4; -1)$ параллельно прямой
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ y = 2z + 1. \end{cases}$$

3.78. Составить канонические уравнения следующих прямых:

1)
$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} x = 0, \\ 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$
 3)
$$\begin{cases} y - 3 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

3.79. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1)
$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

3.80. Проверить, будут ли данные прямые параллельны:

1)
$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$
 и
$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$
 и
$$\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7. \end{cases}$$
 и
$$\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

3.81. Показать, что прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} y = x + 1, \\ z = 1 - x. \end{cases}$

3.82. Доказать перпендикулярность прямых:

$$1) \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

3.83. Найти острый угол между прямыми: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

3.84. Найти тупой угол между прямыми $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 0, \\ z = -t + 3. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 0, \\ z = t - 3. \end{cases}$

3.85. Определить косинус угла между прямыми:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

3.86. Определить угол между прямыми: $\begin{cases} x = 2z - 1, \\ y = -2z + 1 \end{cases}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$.

3.87. Найти угол между прямыми: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

3.88. Доказать, что прямые, заданные уравнениями $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x = t + 5, \\ y = -4t - 1, \\ z = t - 4, \end{cases} \quad \text{пересекаются.}$$

3.89. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются?

3.90. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M(1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

3.91. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(a; b; c)$:

1) параллельно оси OZ ; 2) перпендикулярно к оси OZ .

3.92. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

Указание. Направляющий вектор каждой из прямых можно определить как векторное произведение нормальных векторов плоскостей $\vec{P} = [\vec{N} \times \vec{N}_1]$.

3.93. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; -8; 4)$ на ось OZ .

Указание. Искомая прямая проходит ещё через точку $(0; 0; 4)$.

3.94. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; -3; 5)$ на ось OY .

3.95. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

§ 4. Прямая и плоскость в пространстве

3.96. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

3.97. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; -1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

3.98. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$

3.99. Найти угол прямой $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ с плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

3.100. Доказать, что прямая $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

3.101. Показать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{5}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{3}$ — лежит в этой плоскости.

3.102. Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

3.103. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

3.104. При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$?

3.105. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и точку $(3; 4; 0)$.

3.106. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

3.107. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

3.108. Найти точку пересечения:

1) прямой $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = 1 - t \end{cases}$ с плоскостью $3x - 2y + z - 3 = 0$;

2) прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$;

3) прямой $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ z = -3y - 3 \end{cases}$ с плоскостью $A(0; 0; 4)$.

3.109. Прямая проходит через точки $A(0; 0; 4)$ и $B(2; 2; 0)$. Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью $x + y - z = 0$ и угол между ними.

3.110. Найти проекцию точки $M(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z - 23 = 0$.

3.111. Найти проекцию точки $M(2; -1; 3)$ на прямую $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t + 2. \end{cases}$

3.112. Составить уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ на плоскость $x + y + z - 5 = 0$.

3.113. Найти точку M , симметричную точке $N(4; 1; 6)$ относительно прямой $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

3.114. Найти точку P , симметричную точке $Q(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

3.115. Показать, что прямые $\begin{cases} x = z - 2, \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, в которой они расположены.

3.116. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ и $\begin{cases} x = 3z - 4, \\ y = z + 2 \end{cases}$ пересекаются, и найти точку их пересечения.

3.117. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(1; 0; -1)$ на прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.

3.118. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$

3.119. Найти проекцию точки $M(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

3.120. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = -t - 2, \end{cases} \text{ параллельно прямой } \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

3.121. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

3.122. Вычислить расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих трёх случаев:

1) $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$;

2) $\begin{cases} x = 2t - 4, \\ y = -t + 4, \\ z = -2t - 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4t - 5, \\ y = -3t + 5, \\ z = -5t + 5; \end{cases}$

3) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x = 6t + 9, \\ y = -2t, \\ z = -t + 2. \end{cases}$

Глава 4 КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1 Окружность

4.1. Дана точка $A(-4; 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA .

4.2. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2; 1)$.

4.3. Составить уравнение окружности, зная, что точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из её диаметров.

4.4. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ и $C(1; -1)$.

4.5. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$. Построить кривую.

4.6. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $y = -x$ и через точку $A(4; 4)$.

4.7. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси OY в начале координат и пересекает ось OX в точке $(6; 0)$.

4.8. Построить кривые:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, 2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$, 3) $x^2 + y^2 - 8x = 0$,

4) $x^2 + y^2 + 4y = 0$, 5) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$, 6) $x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0$.

4.9. Показать, что точка $A(3; 0)$ лежит внутри окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, и написать уравнение хорды, делящейся в точке A пополам.

4.10. Написать уравнения окружностей радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 1 = 0$ в точке $M(3; 1)$.

§ 2 Эллипс

4.11. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(-2; 0)$ и $F_2(2; 0)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 6.

4.12. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(0; -1)$ и $F_2(0; 1)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 4.

4.13. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его полуоси равны пяти и двум.

4.14. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что его полуоси равны семи и двум.

4.15. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

4.16. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2 \cdot c = 8$.

4.17. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Построить его и найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет.

4.18. Эллипс касается оси абсцисс в точке $(3; 0)$ и оси ординат в точке $(0; -4)$. Написать уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

4.19. Эллипс с центром в начале координат и симметричный относительно осей координат, проходит через точку $M(2; 2)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Составить уравнение эллипса.

4.20. Составить уравнение эллипса, если точки $F_1(-1; 0)$ и $F_2(1; 0)$ являются его фокусами, а длина большой оси равна 4.

4.21. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой полуосей.

4.22. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого расстояния от одного из фокусов до концов большой оси равны 5 и 1.

4.23. Определить траекторию точек $M(x; y)$, расстояния которых до точки $A(0; 1)$ в два раза меньше расстояний до прямой $y - 4 = 0$.

4.24. Определить траекторию точки M , которая при своем движении остаётся втрое ближе к точке $A(1; 0)$, чем к прямой $x = 9$.

4.25. Найти расстояние от левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ до центра окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$.

4.26. Найти общие точки эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его «верхней» вершине.

4.27. Написать уравнение окружности, центр которой находится в правом фокусе эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, а радиус окружности равен расстоянию между фокусами этого эллипса.

4.28. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, 2) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$, 3) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$,

4) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$. Кривые построить.

4.29. Построить кривые:

1) $x^2 + 5y^2 = 15$, 2) $9x^2 + 25y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;

4) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; 5) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

§ 3 Гипербола

4.30. Пользуясь определением гиперболы, составить её уравнение, если известно, что точки $F_1(-2;0)$ и $F_2(2;0)$ являются фокусами гиперболы, а длина большой оси равна 2.

4.31. Пользуясь определением гиперболы, составить её уравнение, если известно, что точки $F_1(0;-3)$ и $F_2(0;3)$ являются фокусами гиперболы, а длина большой оси равна 4.

4.32. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

4.33. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

4.34. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

4.35. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \sqrt{2}$. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

4.36. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет $\varepsilon = 1,4$. Найти уравнение гиперболы.

4.37. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно 14, а расстояние между вершинами равно 12.

4.38. Найти эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

4.39. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если дана точка $M(4,5; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$.

4.40. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет $\varepsilon = 1,5$.

4.41. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

4.42. Определить область расположения кривых и построить их:

1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$; 3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$; 4) $x = \frac{2}{5}\sqrt{y^2 + 25}$.

4.43. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния от одной из ее вершин до фокусов равны 9 и 1.

4.44. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 - 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

4.45. Определить траекторию точки M , которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8; 0)$, чем от прямой $x = -2$.

4.46. Найти каноническое уравнение гиперболы, асимптотами которой являются прямые $y = \pm x$, а фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.

4.47. Найти расстояния от центра окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ до асимптот гиперболы $x^2 - y^2 = 9$.

4.48. Найти эксцентриситет равнобочной гиперболы.

§ 4 Парабола

4.49. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси OX , с вершиной в начале координат и проходящей через точку $A(-3; -3)$.

4.50. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через начало координат, если ее директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$.

4.51. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = -12x$.

4.52. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$ и построить кривую.

4.53. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси OY , с вершиной в начале координат и проходящей через точку $A(-2; 4)$.

4.54. Через фокус параболы $y^2 = 12x$ проведена хорда, перпендикулярная к её оси. Найти длину хорды.

4.55. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $5x - 3y + 12 = 0$ с осью:

1) ординат; 2) абсцисс.

- 4.56.** Составить уравнение множества точек, одинаково удалённых от точки $F(2; 0)$ и от прямой $y=2$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.
- 4.57.** Составить уравнение множества точек, одинаково удалённых от начала координат и от прямой $x=-4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.
- 4.58.** Камень, брошенный под углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м. от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.
- 4.59.** Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 16 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 48 м. от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 6 м от точки бросания?
- 4.60.** Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг её оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?
- 4.61.** Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии 0,5 м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью OX на расстоянии 0,75 м от точки O .
- 4.62.** Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(7; 2)$ и директриса $x-5=0$.
- 4.63.** Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(4; 3)$ и директриса $y+1=0$.
- 4.64.** Написать уравнение параболы и её директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y=x$ и окружности $x^2+y^2+6x=0$ и симметрична относительно оси абсцисс. Построить прямую, окружность и параболу.
- 4.65.** Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси абсцисс параболой $y=3-2x-x^2$. Построить обе кривые.
- 4.66.** Составить уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2=-6x$ и касающейся её директрисы.
- 4.67.** Написать уравнение окружности с центром в фокусе параболы $y^2=-4x$ и радиусом, равным фокусному расстоянию гиперболы $7x^2-9y^2=63$.

4.68. Построить кривые, найдя дополнительные точки пересечения с осями координат:

1) $3y = 9 - x^2$; 2) $y^2 = 9 - 3x$; 3) $y^2 = 4 + x$; 4) $x^2 = 4 + 2y$.

4.69. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями и построить эти кривые:

1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{-x}$; 3) $y = -3\sqrt{-2x}$; 4) $y = -2\sqrt{x}$; 5) $x = -\sqrt{3y}$;
6) $x = 4\sqrt{-y}$; 7) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$; 8) $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$; 9) $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$.

4.70. Составить уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = -6x$ и касающейся ее директрисы.

4.71. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси OY . Построить окружность, прямую и параболу.

4.72. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси OX . Построить окружность, прямую и параболу.

§ 5. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

В задачах **4.73–4.103** построить кривые. Там, где необходимо, преобразовать уравнения кривых параллельным переносом осей координат. Построить новые и старые оси координат.

4.73. $4x^2 + 3y^2 = 24$.

4.74. $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$.

4.75. $4x^2 - 3y^2 + 60 = 0$.

4.76. $x^2 + 4x + 8y - 12 = 0$.

4.77. $2x^2 + y^2 + 4x + 8 = 0$.

4.78. $2x - 3 - xy + 4y = 0$.

4.79. $8x^2 - 9y + 11 = 0$.

4.80. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$.

4.81. $x + 2xy - 3y = 4$.

4.82. $x^2 + 2x + 3y = 0$.

4.83. $x^2 + 3y^2 + 2x = 0$.

4.84. $x^2 - 2y^2 - 4y - 2 = 0$.

4.85. $x^2 + 2x + 5y - 10 = 0$.

4.86. $3x^2 + 10y^2 + 2 = 0$.

4.87. $3x + xy - 3y - 2 = 0$.

4.88. $x^2 - x - y + 2 = 0$.

4.89. $x^2 + 3y^2 + 2x = 0.$

4.90. $y^2 - x^2 + 6y + 5 = 0.$

4.91. $y^2 - 2x - 2y + 7 = 0.$

4.92. $3x^2 + 5y^2 = 0.$

4.93. $xy - 0,5y = 2x - 3.$

4.94. $y^2 - 2x + 4y = 0.$

4.95. $x - 2 + 3xy - 3y = 0.$

4.96. $x^2 + 9y + 4 = 0.$

4.97. $x^2 - 4y^2 = 0.$

4.98. $16x^2 + 9y^2 + 90y + 81 = 0.$

4.99. $x^2 - 8x - 2y + 16 = 0.$

4.100. $x^2 - y^2 + 2x - 6y - 8 = 0.$

4.101. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0.$

4.102. $36x^2 + 4y^2 - 72x - 40y = 41.$

4.103. $y^2 - 8x - 2y + 16 = 0.$

В задачах **4.104–4.107** преобразовать уравнения кривых поворотом системы координат. Построить новые и старые оси координат и кривые:

4.104. $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0.$

4.105. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0.$

4.106. $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0.$

4.107. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0.$

§ 6. Кривые в полярной системе координат

В задачах **4.108–4.116** преобразовать к полярным координатам уравнения линий и построить их:

4.108. $x^2 + y^2 = 4.$

4.109. $x^2 - y^2 = 9.$

4.110. $x + y = 4.$

4.111. $x = 2.$

4.112. $y = 3.$

4.113. $x^2 + y^2 - 6x = 0.$

4.114. $x^2 + y^2 - 8y = 0.$

4.115. $y^2 = 4x.$

4.116. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

В задачах **4.117–4.134** преобразовать уравнения линий к декартовым координатам и построить их:

4.117. $\rho \cos \varphi = 4.$

4.118. $\rho = 8 \sin \varphi.$

4.119. $\rho \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}.$

4.120. $\rho = \frac{3}{\sin \varphi}.$

4.121. $\rho = 6(\sin \varphi - \cos \varphi).$

4.122. $\rho = 2(\sin \varphi + \cos \varphi).$

4.123. $\rho = 2(1 + \sin \varphi).$

4.124. $\rho = 3(1 - \sin \varphi).$

$$4.125. \rho = 4 \cos^2 \varphi.$$

$$4.126. \rho = 4 \cos 2\varphi.$$

$$4.127. \rho = 4 \sin 2\varphi.$$

$$4.128. \rho = 4 \sin 3\varphi.$$

$$4.129. \rho = 2(1 + \cos \varphi).$$

$$4.130. \rho = 2(1 - \cos \varphi).$$

$$4.131. \rho = 2 - \sin \varphi.$$

$$4.132. \rho = 3 \cos 3\varphi.$$

$$4.133. \rho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

$$4.134. \rho = 4 \cos \varphi.$$

§ 7. Поверхности второго порядка

В задачах **4.135–4.161** назвать и построить поверхности:

$$4.135. y = z^2 - 2z. \quad 4.136. z = -9 + y^2. \quad 4.137. y = -\sqrt{2x}.$$

$$4.138. y = \sqrt{1 - x^2}. \quad 4.139. xy - x = 2. \quad 4.140. y = -\sqrt{9 - x}.$$

$$4.141. x = 1 - y^2. \quad 4.142. y = -\sqrt{x^2 - 2x}. \quad 4.143. z = -9 + y^2.$$

$$4.144. y^2 + z^2 = -3z. \quad 4.145. y + 1 = \frac{4}{x - 3}. \quad 4.146. x^2 + 3y = 8x - 7.$$

$$4.147. 4x^2 = z^2 - 2z. \quad 4.148. 3z^2 + 4y^2 = 12. \quad 4.149. z^2 = 2y + y^2.$$

$$4.150. z - 3 = x^2 + 5y^2. \quad 4.151. x^2 + y^2 + 4z = 0. \quad 4.152. 4y^2 + 9z^2 - 36x = 0.$$

$$4.153. 36x - y^2 - 9z^2 = 0. \quad 4.154. x + 2 = 3y^2 + z^2. \quad 4.155. \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0.$$

$$4.156. 2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 36. \quad 4.157. 4x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0.$$

$$4.158. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0. \quad 4.159. x^2 + y^2 + 2y + z^2 = 0.$$

$$4.160. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 0. \quad 4.161. z - 3 = x^2 + 5y^2.$$

В задачах **4.162–4.182** построить тело, ограниченное следующими поверхностями:

$$4.162. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 3, \\ z = 0. \end{cases} \quad 4.163. \begin{cases} z = 4 - y^2, \\ y = \frac{x^2}{2}, \\ z = 0. \end{cases} \quad 4.164. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ 2z = y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc}
4.165. \begin{cases} z = 4 - x^2, \\ 4x + y = 4, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} & 4.166. \begin{cases} z = \frac{y^2}{2}, \\ 2x + 3y = 12, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} & 4.167. \begin{cases} z = 4x^2 + 2y^2 + 1, \\ x + y = 3, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \\
4.168. \begin{cases} y = 2x, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} & 4.169. \begin{cases} y = x^2, \\ z = x^2 + y^2, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases} & 4.170. \begin{cases} y^2 = \frac{x}{2}, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \\ z = 0. \end{cases} \\
4.171. \begin{cases} x + y = 6, \\ y = \sqrt{3x}, \\ z = 4y, \\ z = 0. \end{cases} & 4.172. \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = x, \\ y = -x, \\ x = 1, \\ z = 0. \end{cases} & 4.173. \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ y + x = 2, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ z = 0. \end{cases} \\
4.174. \begin{cases} x = y^2, \\ z = 1 - x, \\ z = 0. \end{cases} & 4.175. \begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1, \\ y = x^2, \\ z = 0. \end{cases} & 4.176. \begin{cases} z = (x - 1)^2, \\ y = \frac{x}{2}, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \\
4.177. \begin{cases} z = \sqrt{y}, \\ y = 3x, \\ x = 2, \\ z = 0. \end{cases} & 4.178. \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2\sqrt{x}, \\ x + z = 1, \\ z = 0. \end{cases} & 4.179. \begin{cases} z = 4 - y^2, \\ y + x = 2, \\ y = x, \\ x = 0, \\ z = 0. \end{cases} \\
4.180. \begin{cases} x = 4 + y^2, \\ y = 3z, \\ x = 6, \\ z = 0. \end{cases} & 4.181. \begin{cases} z = 2x^2 + y^2, \\ y + x = 2, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ z = 0. \end{cases} & 4.182. \begin{cases} z = 4 - x^2, \\ y + x = 2, \\ y = 2x, \\ x = 0, \\ z = 0. \end{cases}
\end{array}$$

Глава 5 ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Общие свойства функций

В задачах **5.1–5.20** найти область определения функций:

$$5.1. y = \sqrt{9 - x^2}. \quad 5.2. y = \sqrt[3]{4 - x^2}. \quad 5.3. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$5.4. y = \frac{1}{x^3 - x}. \quad 5.5. y = \sqrt{1 - |x|}. \quad 5.6. y = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}.$$

$$5.7. y = \frac{1}{\sqrt{x + |x|}}. \quad 5.8. y = \log_2(4x - 4 - x^2). \quad 5.9. y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}.$$

$$5.10. y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}). \quad 5.11. y = \frac{x-3}{\cos 2x}. \quad 5.12. y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}.$$

$$5.13. y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}. \quad 5.14. y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right). \quad 5.15. y = \operatorname{arctg}(x+1).$$

$$5.16. y = \lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 16)). \quad 5.17. y = \arcsin \ln x. \quad 5.18. y = \arccos\left(\frac{1-2x}{4}\right).$$

$$5.19. y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}. \quad 5.20. y = \ln \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[4]{x+5}.$$

В задачах **5.21–5.26** найти, при каких целых x определены функции:

$$5.21. y = \sqrt{-x} + \frac{x}{\sqrt{2+x}}. \quad 5.22. y = \log_{0,5}(x+6) - \sqrt{-2x-10}.$$

$$5.23. y = \sqrt{16-2x} \cdot \ln(x-5). \quad 5.24. y = 3^{-\sqrt{2x-16}} + \sqrt{9-x}.$$

$$5.25. y = \frac{\sqrt[4]{4+3x-x^2}}{x-3}. \quad 5.26. y = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{\log_3(x-2)}.$$

В задачах **5.27–5.37** найти множество значений функций:

$$5.27. y = |x-2| - 3. \quad 5.28. y = \sqrt{5-x^2}. \quad 5.29. y = \frac{1}{x+2}.$$

$$5.30. y = 2 + 2x - x^2. \quad 5.31. y = 4 + 4x + x^2. \quad 5.32. y = |x^2 - x - 6|.$$

$$5.33. y = 2^{x^2+4x-12}. \quad 5.34. y = 4^{-\sqrt{x^2+x}}. \quad 5.35. y = \log_2(x-3).$$

$$5.36. y = 2 - 4 \sin x. \quad 5.37. y = \begin{cases} x+2 & x \in [0;3], \\ x^2+10x-16 & x \in (3;8]. \end{cases}$$

Определить, какие из функций **5.38–5.52** будут чётными, нечётными или функциями общего вида:

$$5.38. y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}. \quad 5.39. y = x^2 + \cos 3x. \quad 5.40. y = x^2 + x \cdot \sin 2x.$$

$$5.41. y = x^2 + x \cdot \cos x. \quad 5.42. y = |x| - 4. \quad 5.43. y = |x-1| - 4.$$

$$5.44. y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}. \quad 5.45. y = x^3 \cdot \ln(x^2+3). \quad 5.46. y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$5.47. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad 5.48. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad 5.49. y = |x| + 7e^{x^2}.$$

$$5.50. y = \frac{x}{a^x - 1}. \quad 5.51. y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}. \quad 5.52. y = \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

5.53. Какова будет функция $f(x)$, если она определена на всей числовой оси и для любых x_1 и x_2 , удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 = 0$, выполняется равенство: 1) $f(x_1) + f(x_2) = 0$; 2) $f(x_1) - f(x_2) = 0$?

В задачах **5.54–5.65** найти наименьший положительный период функции:

$$5.54. y = \sin 2x. \quad 5.55. y = \cos \frac{x}{3}. \quad 5.56. y = \sin \frac{3}{2}x.$$

$$5.57. y = \sin x + \cos x. \quad 5.58. y = \operatorname{tg} 4x. \quad 5.59. y = \operatorname{ctg} \frac{2}{5}x.$$

$$5.60. y = |\cos 2x|. \quad 5.61. y = \cos^2 3x. \quad 5.62. y = \sin\left(\frac{4}{3}x - 2\right).$$

$$5.63. y = \sin 2x + \cos 3x. \quad 5.64. y = \sin \frac{5}{3}x + \operatorname{tg} 2x \quad 5.65. y = \lg \cos 2x.$$

5.66. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Что можно сказать об этой функции, если для любых x_1 и x_2 найдется такое число $\varepsilon > 0$, что из условия $|x_2 - x_1| = \varepsilon$ будет следовать, что $f(x_1) - f(x_2) = 0$?

В задачах **5.67–5.81** найти функцию, обратную данной:

$$5.67. y = 3x. \quad 5.68. y = 2 - 3x. \quad 5.69. y = x^2 - 4 \quad (x \geq 0).$$

$$5.70. y = x^2 - 4x \quad (x \leq 2). \quad 5.71. y = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2). \quad 5.72. y = \frac{-3}{x}.$$

5.73. $y = \frac{1}{2-x}$.

5.74. $y = \sqrt[3]{x^2} \ (x \leq 0)$.

5.75. $y = \sqrt[3]{x+4}$.

5.76. $y = \sqrt{x^3}$.

5.77. $y = 5^{x+2}$.

5.78. $y = 2 + \log_3(x+4)$.

5.79. $y = \frac{2^x}{1+2^x}$.

5.80. $y = 3 \sin 2x, \ -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

5.81. $y = \log_x 2$.

В задачах 5.82–5.126 построить графики функций:

5.82. $y = x^2$.

5.83. $y = -2x^2$.

5.84. $y = 1 - x^2$.

5.85. $y = x^2 + 2x + 1$.

5.86. $y = 3 - 2x - x^2$.

5.87. $y = 2x^2 - x$.

5.88. $y = 4x - x^2$.

5.89. $y = 2x^2 + 3x - 1$.

5.90. $y = \sqrt{x}$.

5.91. $y = \sqrt{-x}$.

5.92. $y = \sqrt{x-1}$.

5.93. $y = \sqrt{x-1} + 2$.

5.94. $y = -|x|$.

5.95. $y = |x+1|$.

5.96. $y = 2 + |x+1|$.

5.97. $y = \frac{|x|}{x}$.

5.98. $y = x|x|$.

5.99. $y = (x+2) + |x|$.

5.100. $y = ||x-1| - 2|$.

5.101. $y = \frac{2}{x}$.

5.102. $y = \frac{-3}{x}$.

5.103. $y = \frac{x+1}{x}$.

5.104. $y = \frac{1-x}{x}$.

5.105. $y = \frac{2}{x+1}$.

5.106. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

5.107. $y = \frac{2}{|x|}$.

5.108. $y = \frac{1}{|x-2|}$.

5.109. $y = 2^x$.

5.110. $y = 2^{-x}$.

5.111. $y = 2^{-2x}$.

5.112. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$.

5.113. $y = 4^{x+1}$.

5.114. $y = e^{-x^2}$.

5.115. $y = a^{x-2}$.

5.116. $y = 1 - 2^x$.

5.117. $y = \sin x$.

5.118. $y = \sin 2x$.

5.119. $y = 2 \sin \frac{x}{2}$.

5.120. $y = 1 + \sin x$.

5.121. $y = |\sin x|$.

5.122. $y = \sin x + |\sin x|$.

5.123. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

5.124. $y = \sin|x|$.

5.125. $y = \cos \frac{x}{3}$.

5.126. $y = 4 \cos 3x$.

§ 2. Числовые последовательности и их пределы

В задачах **5.127–5.141** записать вид общего члена a_n последовательности $\{a_n\}$ по виду её первых трёх членов:

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{5.127.} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots & \mathbf{5.128.} & 1, -1, 1, -1, \dots & \mathbf{5.129.} & 3, 5, 7, 9, \dots \\
 \mathbf{5.130.} & \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots & \mathbf{5.131.} & 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots & \mathbf{5.132.} & \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \dots \\
 \mathbf{5.133.} & -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots & \mathbf{5.134.} & \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots & \mathbf{5.135.} & \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots \\
 \mathbf{5.136.} & \ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots & \mathbf{5.137.} & \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{8}, \dots & \mathbf{5.138.} & \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \dots \\
 \mathbf{5.139.} & \frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{7!}, \dots & \mathbf{5.140.} & \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^3, \dots & \mathbf{5.141.} & \frac{1}{2!}, \frac{3}{4!}, \frac{5}{6!}, \dots
 \end{array}$$

В задачах **5.142–5.150** записать общий член последовательностей и выяснить, какие из данных ниже последовательностей являются ограниченными снизу, ограниченными сверху, просто ограниченными или неограниченными:

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{5.142.} & 2, 4, 6, \dots & \mathbf{5.143.} & -1, 2, -3, 4, \dots & \mathbf{5.144.} & \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \\
 \mathbf{5.145.} & 1, -1, 1, -1, \dots & \mathbf{5.146.} & \sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots & \mathbf{5.147.} & \ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots \\
 \mathbf{5.148.} & \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \dots & \mathbf{5.149.} & 2, \frac{4}{3!}, \frac{6}{5!}, \dots & \mathbf{5.150.} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots
 \end{array}$$

В задачах **5.151–5.159** определить, какие из данных ниже последовательностей являются возрастающими, неубывающими, убывающими, невозрастающими:

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{5.151.} & 1, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{13}, \dots & \mathbf{5.152.} & \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots & \mathbf{5.153.} & 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots \\
 \mathbf{5.154.} & 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots & \mathbf{5.155.} & 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots & \mathbf{5.156.} & \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 4}, \dots \\
 \mathbf{5.157.} & \cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \dots & \mathbf{5.158.} & \frac{1}{2!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{8!}, \dots & \mathbf{5.159.} & \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \dots
 \end{array}$$

5.160. Пользуясь определением предела последовательности, показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots$ имеет пределом число 1.

5.161. Пользуясь определением предела последовательности, показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ имеет пределом число 0.

5.162. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что число 2 не является пределом последовательности с общим членом $a_n = \frac{2n+1}{4n+1}$ при $n \rightarrow \infty$.

5.163. Существует ли предел последовательностей $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ (если да, то найти его), где:

$$1) a_n = 1 + (-1)^n; \quad 2) a_n = (-1)^n(2n+1); \quad 3) a_n = n \cdot \sin \frac{\pi n}{2};$$

$$4) a_n = \frac{\cos \pi n}{\ln n}; \quad 5) a_n = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

В задачах **5.164–5.194** вычислить пределы числовых последовательностей:

$$5.164. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2}. \quad 5.165. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+99}{n^2}. \quad 5.166. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}.$$

$$5.167. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}. \quad 5.168. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right). \quad 5.169. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 10n^2 + 1}{100n^2 + 2n}.$$

$$5.170. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}. \quad 5.171. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}.$$

$$5.172. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}. \quad 5.173. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+n!}{(n+3)!}.$$

$$5.174. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot (1+2+\dots+n). \quad 5.175. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}).$$

$$5.176. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+3} - n. \quad 5.177. \lim_{n \leftarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n} - n).$$

$$5.178. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3}{2^n + 3}. \quad 5.179. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} - 3}{\frac{1}{2^n} + 3}. \quad 5.180. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

$$5.181. \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\sin 3\alpha_n}{\alpha_n}. \quad 5.182. \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n}. \quad 5.183. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n} \right)^n.$$

$$\begin{array}{lll}
5.184. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n & 5.185. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^n & 5.186. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \\
5.187. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n & 5.188. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{n}{2}} & 5.189. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n \\
5.190. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n} & 5.191. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} & 5.192. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2} \\
5.193. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+3} & 5.194. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n \cdot (2n+2)}\right) &
\end{array}$$

§ 3. Функции непрерывного аргумента. Предел функции в точке

Пусть функция определена на всей числовой прямой. Какому условию она удовлетворяет, если:

5.195. Для любого числа M найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $|x| > N$, выполняется неравенство $f(x) > M$?

5.196. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $x < N$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$?

5.197. Для любого числа M найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $x > N$, выполняется неравенство $f(x) < M$?

5.198. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$?

5.199. Для любого числа $M > 0$ найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $x > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$?

5.200. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого числа $\delta > 0$ из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$?

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки a . Какой вывод можно сделать, если:

5.201. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$?

5.202. Для любого числа M существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $f(x) < M$?

5.203. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| < \varepsilon$?

5.204. Для любого числа M существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $f(x) > M$?

В задачах **5.205–5.227** вычислить пределы:

$$\mathbf{5.205.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}. \quad \mathbf{5.206.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - 5}. \quad \mathbf{5.207.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^4 + 2x}.$$

$$\mathbf{5.208.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{4 - \frac{3}{x^2}}. \quad \mathbf{5.209.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x + 2}. \quad \mathbf{5.210.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right).$$

$$\mathbf{5.211.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}. \quad \mathbf{5.212.} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}. \quad \mathbf{5.213.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}.$$

$$\mathbf{5.214.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}. \quad \mathbf{5.215.} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}. \quad \mathbf{5.216.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$\mathbf{5.217.} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right). \quad \mathbf{5.218.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}. \quad \mathbf{5.219.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}.$$

$$\mathbf{5.220.} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}. \quad \mathbf{5.221.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{16 + x^2} - 4}. \quad \mathbf{5.222.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$\mathbf{5.223.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2}. \quad \mathbf{5.224.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}. \quad \mathbf{5.225.} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}).$$

$$\mathbf{5.226.} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x). \quad \mathbf{5.227.} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}).$$

$$\mathbf{5.228.} \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

В задачах **5.229–5.251** вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

$$\mathbf{5.229.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}. \quad \mathbf{5.230.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 5x}. \quad \mathbf{5.231.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}.$$

$$5.232. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin 4x}}{x}.$$

$$5.233. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$5.234. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}.$$

$$5.235. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3}.$$

$$5.236. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$5.237. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

$$5.238. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}.$$

$$5.239. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}.$$

$$5.240. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg}(x-3)}{x^2 - 9}.$$

$$5.241. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{5x}.$$

$$5.242. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$5.243. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$$

$$5.244. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$5.245. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$5.246. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$5.247. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}.$$

$$5.248. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}.$$

$$5.249. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot (\sqrt{1+x} - 1)}.$$

$$5.250. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$5.251. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x - 1}.$$

Вычислить пределы 5.252–5.272, применяя второй замечательный предел:

$$5.252. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$5.253. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$5.254. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}.$$

$$5.255. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x}.$$

$$5.256. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1+x}.$$

$$5.257. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}.$$

$$5.258. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{2x}.$$

$$5.259. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x.$$

$$5.260. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}.$$

$$5.261. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

$$5.262. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^x.$$

$$5.263. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2}.$$

$$5.264. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$5.265. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}.$$

$$5.266. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}.$$

$$5.267. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}.$$

$$5.268. \lim_{x \rightarrow \infty} \{x \cdot (\ln(x+a) - \ln x)\}.$$

$$5.269. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$5.270. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}. \quad 5.271. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\frac{x}{2}}}{\sin 2x}. \quad 5.272. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

5.273. Первоначальный вклад в банк – A_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Найти размер вклада через t лет при непрерывном начислении процентов.

Указание. Найти размер вклада A_n через t лет при начислении процентов по вкладу n раз в году и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

5.274. Дан правильный треугольник со стороной a . Из трёх высот этого треугольника строится новый правильный треугольник и так n раз. Найти предел суммы площадей всех треугольников при $n \rightarrow \infty$.

5.275. В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг опять вписан квадрат и так n раз. Найти предел суммы площадей всех кругов и площадей всех квадратов при $n \rightarrow \infty$.

§ 4. Сравнение бесконечно малых

В задачах **5.276–5.287** определить порядок малости функции $\beta(x)$ относительно x при $x \rightarrow 0$:

$$5.276. \beta(x) = 1 - \cos x. \quad 5.277. \beta(x) = x^3 + 100x^2. \quad 5.278. \beta(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}.$$

$$5.279. \beta(x) = \frac{x \cdot (x+1)}{1 + \sqrt{x}}. \quad 5.280. \beta(x) = \sin x - \operatorname{tg} x. \quad 5.281. \beta(x) = 3 \sin^3 x - x^4.$$

$$5.282. \beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1. \quad 5.283. \beta(x) = e^{\sin x} - 1. \quad 5.284. \beta(x) = e^{x^2} - \cos x.$$

$$5.285. \beta(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}). \quad 5.286. \beta(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}.$$

$$5.287. \beta(x) = \arcsin x.$$

5.288. При $x \rightarrow 1$ функции $y = \frac{1-x}{1+x}$ и $y = 1 - \sqrt{x}$ бесконечно малые. Какая из них более высокого порядка малости?

5.289. Убедиться в том, что при $x \rightarrow 1$ бесконечно малые $1-x$ и $1 - \sqrt[3]{x}$ будут одного порядка малости. Будут ли они эквивалентны?

5.290. Доказать, что при $x \rightarrow 0$:

$$1) \sin mx \approx mx; \quad 2) \operatorname{tg} mx \approx mx; \quad 3) \sqrt[3]{1+x} - 1 \approx \frac{1}{3}x; \quad 4) \ln(1+x) \approx x.$$

5.291. Какой из функций $x^2, \frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{2}, x^3, \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$ эквивалентна бесконечно малая $\ln\sqrt{1+x^3}$?

5.292. Какой из функций $2x^2, x^3, x^2, 2x^3, 3x$ при $x \rightarrow 0$ эквивалентна бесконечно малая $\operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{tg} x$?

5.293. Исходя из эквивалентности при $x \rightarrow 0$ функций $\sqrt{1+x} - 1$ и $\frac{1}{2}x$ вычислить приближённо $\sqrt{105}$.

§ 5. Непрерывность функции. Точки разрыва

Найти точки разрыва и построить графики функций:

5.294. $y = \frac{3}{x}$.

5.295. $y = \operatorname{tg} x$.

5.296. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

5.297. $y = \frac{x+1}{|x+1|}$.

5.298. $y = x + \frac{x-1}{|x-1|}$.

5.299. $y = 2 - \frac{|x|}{x}$.

5.300. $y = \frac{x^3 + x}{2|x|}$.

5.301. $y = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$.

В задачах **5.302–5.304** найти точки разрыва функций:

5.302. $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$.

5.303. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$.

5.304. $y = 3^{\frac{x}{x+3}}$.

В задачах **5.305–5.306** построить графики функций и указать точки разрыва. Какие из условий непрерывности в них выполнены и какие не выполнены?

5.305. $y = \begin{cases} 2 & \text{при } x = 0; \pm 2, \\ 4 - x^2 & \text{при } 0 < |x| < 2, \\ 4 & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$

5.306. $y = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } x \neq 2, \\ 0 & \text{при } x = 2. \end{cases}$

5.307. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2}{2x + \pi} & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}, \\ e^{\operatorname{ctg} x} & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{1 - \ln x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

При каком значении a функции непрерывны на всей числовой оси:

$$5.308. f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{при } x \neq 2, \\ a & \text{при } x = 2. \end{cases} \quad 5.309. f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \leq 1, \\ ax^2 - 2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная функция

В задачах **6.1–6.9**, пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

6.1. $y = 3x + 5.$

6.2. $y = x^2 - 2x.$

6.3. $y = x^3.$

6.4. $y = \sqrt{x}.$

6.5. $y = \frac{1}{x}.$

6.6. $y = \frac{1}{x^2}.$

6.7. $y = \sin x.$

6.8. $y = \ln x.$

6.9. $y = \cos x.$

В задачах **6.10–6.27**, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

6.10. $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{x} + 3.$

6.11. $y = \frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{\sqrt{x^3}}{x}.$

6.12. $y = \frac{1}{3-x}.$

6.13. $s = \frac{2t^4}{t^2 + 3t + 1}.$

6.14. $y = \frac{5}{\sin x} + \frac{\ln x}{x^2}.$

6.15. $y = \frac{x}{3 - \cos x} - \frac{x^3}{\sqrt{7}}.$

6.16. $y = x^2(\sqrt{x} + \operatorname{tg} x).$

6.17. $y = x^3 \cdot 3^x + \operatorname{ctg} 3.$

6.18. $y = e^x \cdot \arcsin x.$

6.19. $y = 10^x \cdot \log_7 x.$

6.20. $y = x \cdot (\log_5 x - 1).$

6.21. $y = \frac{3x^2 + \operatorname{ctg} x}{1 - \sqrt[3]{x}}.$

6.22. $y = \frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}.$

6.23. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x}.$

6.24. $y = \frac{\arccos x}{\ln x}.$

$$6.25. y = \frac{2^x - 2}{\arcsin x}. \quad 6.26. y = \frac{\arccos x}{e^x + 3^x}. \quad 6.27. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log_2 x}.$$

В задачах 6.28–6.69 найти производные сложных функций:

$$6.28. y = \sin 4x. \quad 6.29. y = \operatorname{tg}^4 x. \quad 6.30. y = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$6.31. y = 5 \cdot \sqrt[5]{4x + 3}. \quad 6.32. y = \sqrt{1 + 4x - x^2}. \quad 6.33. y = \sqrt[4]{(x^2 - 1)^5}.$$

$$6.34. y = \sqrt[3]{2x^3 + 1} + \sqrt[4]{3}. \quad 6.35. y = x \cdot \sqrt{1 + 5x} + \sqrt{\ln 2}. \quad 6.36. y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2}.$$

$$6.37. y = \frac{2}{\sqrt{1 + x + x^3}}. \quad 6.38. y = 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{6}}. \quad 6.39. y = \sqrt[3]{(1 + \sin^2 x)^5}.$$

$$6.40. y = \frac{1 - x^3}{\operatorname{arctg} e^{2x}}. \quad 6.41. y = \frac{\operatorname{In} \sin 3x}{\operatorname{In} \cos 4x}. \quad 6.42. y = \frac{x}{\cos^3 e^{2x}}.$$

$$6.43. y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{In} \sin 3x}. \quad 6.44. y = e^{\frac{1}{\ln x}}. \quad 6.45. y = x^2 \cdot 10^{\frac{1}{x}}.$$

$$6.46. y = x^9 \cdot 9^{\frac{x}{\ln x}}. \quad 6.47. y = 2^{x^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{4}{x}. \quad 6.48. y = x^3 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2}{3x^2}.$$

$$6.49. y = \frac{1}{\cos^6 \frac{x}{e^2}}. \quad 6.50. y = \frac{1}{\arccos^4 2x}. \quad 6.51. y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}.$$

$$6.52. y = \sqrt{\arcsin 2^x}. \quad 6.53. y = \sqrt{x + \sqrt{x}}. \quad 6.54. y = 2 \cdot \sqrt[3]{x^5 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}}.$$

$$6.55. y = \ln \left(\frac{2}{x^3} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \quad 6.56. y = \ln \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} \right). \quad 6.57. y = \ln^2 (3\sqrt{9 - 5x}).$$

$$6.58. y = \arccos \sqrt{1 - x^2}. \quad 6.59. y = \operatorname{arctg}^3 2^x. \quad 6.60. y = 3^x \operatorname{arctg} \sin x.$$

$$6.61. y = e^{x^2 \operatorname{ctg} \frac{4}{3x}}. \quad 6.62. y = 2^{x\sqrt{x-1}}. \quad 6.63. y = 5^{-x^2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}.$$

$$6.64. y = \arcsin \left(\operatorname{tg} \frac{2x^2}{3} \right). \quad 6.65. y = \arccos \frac{2x^2}{1 + x^4}. \quad 6.66. y = \left(\operatorname{arctg} \frac{3-x}{x-5} \right)^2.$$

$$6.67. y = \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad 6.68. y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}}. \quad 6.69. y = \log_6 \frac{1 - e^{-x}}{e^x}.$$

В задачах 6.70–6.81 найти производные неявно заданных функций:

$$\begin{array}{lll}
6.70. \quad xy = y^3 - 2x^2. & 6.71. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. & 6.72. \quad x^2 - 5y^2 + 4xy - 1 = 0. \\
6.73. \quad y = 1 + xe^y. & 6.74. \quad x^2 + e^{xy} = y^2. & 6.75. \quad y = \sin x + \cos(x - y). \\
6.76. \quad x + y = e^x + e^y. & 6.77. \quad \ln y = \arcsin \frac{x}{y}. & 6.78. \quad \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0. \\
6.79. \quad x^2 - y^2 = 2^{xy}. & 6.80. \quad y = \cos(2x + y). & 6.81. \quad \sin(x \cdot y) = x.
\end{array}$$

В задачах **6.82–6.85** найти производные неявно заданных функций в указанных точках:

$$\begin{array}{ll}
6.82. \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ в точке } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right). & 6.83. \quad x = y + \sin y \text{ в точке } (0; 0). \\
6.84. \quad x^2 + xy + y^2 = 3 \text{ в точке } (0; -\sqrt{3}). & 6.85. \quad (x - 1)y = ye^y - xe^x \text{ в точке } (1; 1).
\end{array}$$

В задачах **6.86–6.94** найти производные функций, используя метод логарифмического дифференцирования:

$$\begin{array}{lll}
6.86. \quad y = x^x. & 6.87. \quad y = (\sin x)^{\cos x}. & 6.88. \quad y = x^{\ln x}. \\
6.89. \quad y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x. & 6.90. \quad y = (x^2 + 1)^{\sin x}. & 6.91. \quad y = x^{\arcsin x}. \\
6.92. \quad y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. & 6.93. \quad y = x\sqrt{\arcsin \frac{x}{3}}. & 6.94. \quad y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.
\end{array}$$

В задачах **6.95–6.106** найти производные функций, заданных параметрически :

$$\begin{array}{lll}
6.95. \quad \begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases} & 6.96. \quad \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases} & 6.97. \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \\
6.98. \quad \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases} & 6.99. \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} & 6.100. \quad \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases} \\
6.101. \quad \begin{cases} x = \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1}, \\ y = \frac{3at^2}{t^2 + 1}. \end{cases} & 6.102. \quad \begin{cases} x = \sin \frac{t}{2}, \\ y = \cos t. \end{cases} & 6.103. \quad \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}
\end{array}$$

$$6.104. \begin{cases} x = \frac{2}{3}\sqrt{t} + 1, \\ y = \sqrt{t} \cdot e^{\sqrt{t}}. \end{cases} \quad 6.105. \begin{cases} x = \sin t - t, \\ y = \cos t - t. \end{cases} \quad 6.106. \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

В задачах **6.107–6.122** найти производные указанного порядка от заданных функций:

$$6.107. y = x^3 + 2x^2 - 4x, \quad y''' = ?$$

$$6.108. y = \ln x, \quad y^{(4)} = ?$$

$$6.109. y = x^5, \quad y^{(5)} = ?$$

$$6.110. y = \sin^2 x, \quad y^{(6)} = ?$$

$$6.111. y = e^{x^2}, \quad y''' = ?$$

$$6.112. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad y'' = ?$$

$$6.113. y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x, \quad y'' = ?$$

$$6.114. x^3 - 3xy + y^3 = 0, \quad y'' = ?$$

$$6.115. y = \operatorname{tg}(x + y), \quad y'' = ?$$

$$6.116. xy = e^{x+y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$6.117. s = 1 + te^s, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = ?$$

$$6.118. \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3, \end{cases} \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = ?$$

$$6.119. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = ?$$

$$6.120. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$6.121. \begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi), \end{cases} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$6.122. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2), \end{cases} \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = ?$$

§ 2. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях

В задачах **6.123–6.125** найти приращение функции Δf и её дифференциал df (используя определение дифференциала):

$$6.123. f(x) = x^3 \quad \text{в точке } x = 0, \text{ если } \Delta x = 0,3.$$

$$6.124. f(x) = 6x^2 + x \quad \text{в точке } x = 1, \text{ если } \Delta x = 0,01.$$

$$6.125. f(x) = x^2 - 2x \quad \text{в точке } x = 3, \text{ если } \Delta x = -0,01.$$

В задачах **6.126–6.127** найти приращение функции и её дифференциал (используя формулу $dy = y'dx$):

$$6.126. y = \sqrt{x} \quad \text{в точке } x = 4, \text{ если } \Delta x = 0,41.$$

6.127. $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ в точке $x = 9$, если $\Delta x = -0,01$.

В задачах **6.128–6.151** найти дифференциалы следующих функций:

6.128. $y = 2 \sin x$. **6.129.** $s = \frac{gt^2}{2}$. **6.130.** $s = a \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$.

6.131. $v = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. **6.132.** $\rho = a \cos^2 2\varphi$. **6.133.** $y = x^2 \cdot 10^{\frac{1}{x}}$.

6.134. $y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2}$. **6.135.** $y = 2^{\sin x}$. **6.136.** $y = 10^{x \cdot \arcsin x}$.

6.137. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$. **6.138.** $y = e^{\frac{1}{x}} \cdot \log_5 x$. **6.139.** $y = x^9 \cdot 9^{\frac{x}{\ln x}}$.

6.140. $y = 3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2^{2x}}$. **6.141.** $y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. **6.142.** $y = \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{x}$.

6.143. $y = \frac{1}{\sin^3 2x}$. **6.144.** $y = \frac{1}{\operatorname{arctg}^3 5x}$. **6.145.** $y = \log_6 \frac{1 - e^{-x}}{e^x}$.

6.146. $y = \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **6.147.** $y = 4^{\ln \sin 2x}$. **6.148.** $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-5}{x+5}$.

6.149. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$. **6.150.** $y = x^2 \cdot \sin \sqrt{x}$. **6.151.** $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

6.152. Вычислить $f(1,05)$, если $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$.

6.153. Вычислить приближенно:

1) $\sqrt{70}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{17}$; 4) $\sqrt[3]{7,98}$;

5) $\sqrt[4]{15,8}$; 6) $(1,11)^9$; 7) $(0,98)^8$; 8) $e^{0,1}$;

9) $e^{-0,03}$; 10) $\ln 0,984$; 11) $\operatorname{tg} 45^\circ 30'$; 12) $\operatorname{tg} 44^\circ$;

13) $\operatorname{tg} 46^\circ$; 14) $\sin 1,55$; 15) $\arcsin 0,54$; 16) $\operatorname{arctg} 0,96$.

§ 3. Применение производной в геометрии и физике

В задачах **6.154–6.167** написать уравнения касательной и нормали к кривым в заданной точке:

6.154. $f(x) = x^2 + 4x - 3$, точка $(1; 2)$.

6.155. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, точка $(1; -4)$.

6.156. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

6.157. $y = \sqrt[3]{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 9$.

6.158. $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = e$.

6.159. $y = 2x - \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

6.160. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ в точке пересечения кривой с осью OX .

6.161. $y = \arccos 3x$ в точке пересечения кривой с осью OY .

6.162. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ в начале координат.

6.163. $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точке пересечения этой кривой с параболой $y = 2x^2$.

6.164. $y^4 = 3x^3$ в точке $(3; 3)$.

6.165. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке $(1; 1)$.

6.166. $x^4 + 2y^3 - 3xy = 0$ в точке $(1; 1)$.

6.167. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ в точке $M(-9; -8)$.

6.168. Написать уравнение касательной к кривой $y = x \ln x$ в точке, в которой нормаль к этой кривой параллельна прямой $2x - 2y + 3 = 0$.

В задачах **6.169–6.172** написать уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически:

6.169. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке с координатами $(4; 8)$.

6.170. $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t = 0$.

6.171. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t \end{cases}$ при $t = 0$.

6.172. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{2}$.

6.173. Написать уравнения касательных к кривой $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, которые перпендикулярны прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

6.174. В какой точке касательная к кривой $y^2 = x^3$ перпендикулярна прямой $4x - 3y + 2 = 0$?

6.175. На линии $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

6.176. На кривой $y = x^3$ найти точку, в которой касательная параллельна биссектрисе первого координатного угла.

6.177. Найти углы, под которыми пересекаются данные линии:

1) $y = x^2$ и $y = x^3$; 2) $y = x^2$ и $y = kx$; 3) $x^2 + y^2 = 4$ и $x + 2y = 2$.

6.178. Точка движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 + t - 1$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (s дается в метрах, t — в секундах).

6.179. Точка совершает колебательное движение по оси абсцисс по закону $x = \cos \omega t$. Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x ?

6.180. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t = 0$, определяется формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$. Найти силу тока в конце десятой секунды.

§ 4. Правило Лопиталя для вычисления пределов

В задачах 6.181–6.198 вычислить пределы, раскрыв неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$:

6.181. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

6.182. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

6.183. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^9 - 1}$.

6.184. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

6.185. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$.

6.186. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

$$6.187. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

$$6.188. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$6.189. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$6.190. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}.$$

$$6.191. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$6.192. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}.$$

$$6.193. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}.$$

$$6.194. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}.$$

$$6.195. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$6.196. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}.$$

$$6.197. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 5x - e^{5x}}{\sin^2 4x}.$$

$$6.198. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}.$$

В задачах **6.199–6.209** вычислить пределы, раскрыв неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$:

$$6.199. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}, 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

$$6.200. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

$$6.201. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$6.202. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 16}{x^4 + 3x^2 + 8}.$$

$$6.203. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$6.204. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

$$6.205. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 5x}{\ln \sin 2x}.$$

$$6.206. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

$$6.207. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[100]{x}}.$$

$$6.208. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}.$$

$$6.209. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg}(x-1)}{\ln(1-x)}.$$

В задачах **6.210–6.224** вычислить пределы, раскрыв неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ сведением их к неопределенностям $\left[\frac{0}{0} \right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ путем алгебраических преобразований:

$$6.210. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$6.211. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$6.212. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x.$$

$$6.213. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$6.214. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right).$$

$$6.215. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$6.216. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$6.217. \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

$$6.218. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

$$6.219. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\cos x}. \quad 6.220. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x. \quad 6.221. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln x}.$$

$$6.222. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}. \quad 6.223. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}. \quad 6.224. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

§ 5. Исследование функций и построение графиков

В задачах 6.225–6.233 определить интервалы монотонности следующих функций:

$$6.225. y = x^2. \quad 6.226. y = x^3 + 2x - 5. \quad 6.227. y = 1 - x + 2x^4.$$

$$6.228. y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x. \quad 6.229. y = \frac{1}{x-2}. \quad 6.230. y = x \ln x.$$

$$6.231. y = 2x^2 - \ln x. \quad 6.232. y = x^2 e^{-x}. \quad 6.233. y = x + \cos x.$$

В задачах 6.234–6.242 исследовать функцию на экстремум:

$$6.234. y = x^3. \quad 6.235. y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3. \quad 6.236. y = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

$$6.237. y = \frac{1 - \ln x}{x}. \quad 6.238. y = x\sqrt{2 - x^2}. \quad 6.239. y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$6.240. y = x^{\frac{2}{3}} - x. \quad 6.241. y = \frac{\ln^2 x}{x}. \quad 6.242. y = x - \operatorname{arctg} x.$$

В задачах 6.243–6.251 найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функций:

$$6.243. y = x^3 + 1. \quad 6.244. y = \sqrt[3]{x^2}. \quad 6.245. y = \sin x.$$

$$6.246. y = 4 - \sqrt[3]{x+2}. \quad 6.247. y = \frac{x-1}{x+1}. \quad 6.248. y = \frac{(x^2-1) \cdot (x-2)}{x}.$$

$$6.249. y = \frac{1}{x^2 + 1}. \quad 6.250. y = \ln(1 + x^2). \quad 6.251. y = e^{-x^2}.$$

В задачах 6.252–6.260 найти асимптоты линий:

$$6.252. y = \frac{1}{x-2}. \quad 6.253. y = \frac{2x}{x-1}. \quad 6.254. y = x + \frac{1}{x}.$$

$$6.255. \quad y = \frac{4 - x^2}{2x - 1}. \quad 6.256. \quad y = \frac{x^2}{x + 1}. \quad 6.257. \quad y = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

$$6.258. \quad y = \ln(x - 1). \quad 6.259. \quad y = -e^{\frac{1}{x}}. \quad 6.260. \quad y = xe^x.$$

В задачах **6.261–6.264** выяснить вид графика функции, если известно, что в интервале $(a; b)$:

$$6.261. \quad y > 0, y' > 0, y'' < 0. \quad 6.262. \quad y > 0, y' < 0, y'' > 0.$$

$$6.263. \quad y > 0, y' < 0, y'' < 0. \quad 6.264. \quad y < 0, y' > 0, y'' > 0.$$

В задачах **6.265–6.273** построить фрагмент графика функции в окрестности заданной точки x_0 :

$$6.265. \quad x_0 = 2, y(x_0) = 3, y'(x_0) = \frac{1}{2}, y''(x_0) > 0.$$

$$6.266. \quad x_0 = -1, y(x_0) = 2, y'(x_0) = 0, y''(x_0) > 0.$$

$$6.267. \quad x_0 = 2, y(x_0) = 1, y'(x_0) = 3, y''(x_0) < 0.$$

$$6.268. \quad x_0 = 3, y(x_0) = 4, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0, y''(x_0 - 0) > 0, y''(x_0 + 0) < 0.$$

$$6.269. \quad x_0 = 4, y(x_0) = 4, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0, y''(x_0 - 0) < 0, y''(x_0 + 0) < 0.$$

$$6.270. \quad x_0 = 4, y(x_0) = -2, y'(x_0) = \frac{3}{5}, y''(x_0) = 0, y''(x_0 - 0) < 0, y''(x_0 + 0) > 0.$$

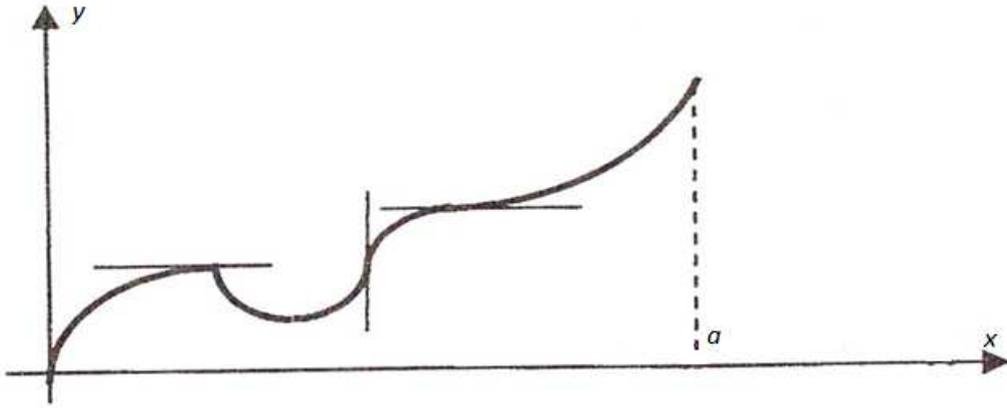
$$6.271. \quad x_0 = 2, y(x_0) = -4, y'(x_0) = 2, y''(x_0) > 0.$$

$$6.272. \quad x_0 = 3, y(x_0) = 4, y'(x_0 - 0) = \frac{1}{3}, y'(x_0 + 0) = -\frac{3}{2}, \quad y''(x_0 - 0) < 0, \\ y''(x_0 + 0) > 0.$$

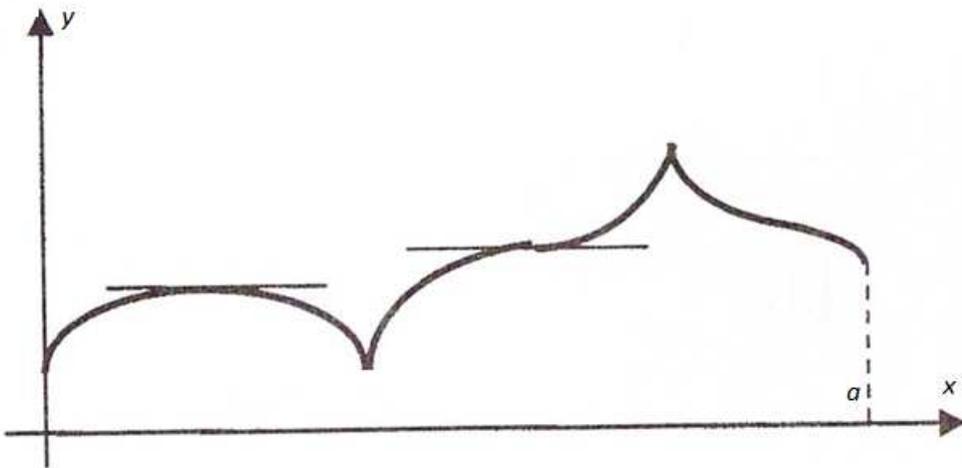
$$6.273. \quad x_0 = 2, y(x_0) = 3, y'(x_0 - 0) = -1, y'(x_0 + 0) = 1, \quad y''(x_0 - 0) > 0, \\ y''(x_0 + 0) < 0.$$

В задачах **6.274–6.283** по графику функции построить эскиз возможного графика производной функции:

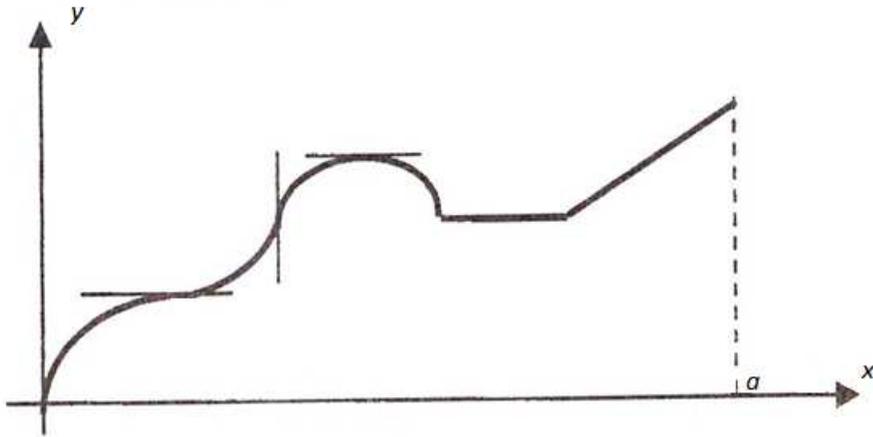
6.274.



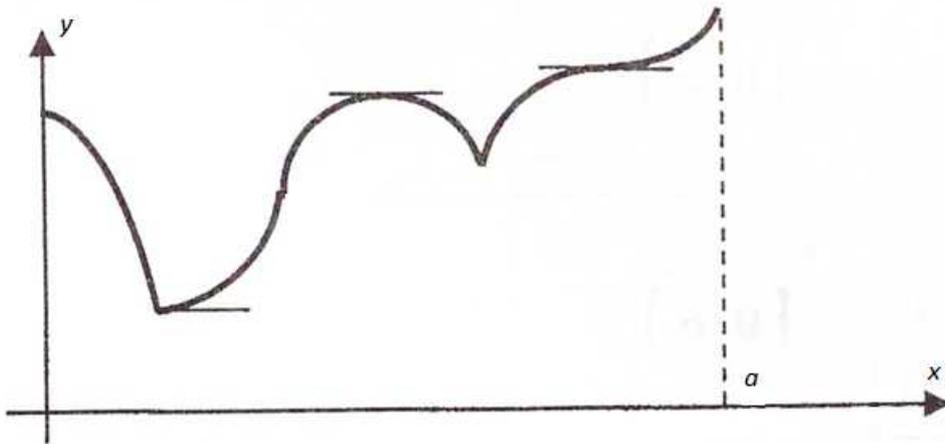
6.275.



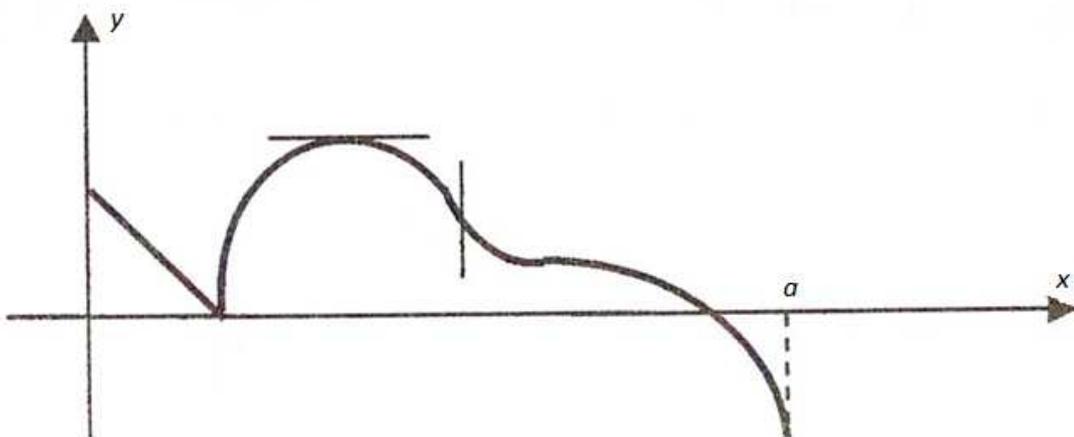
6.276.



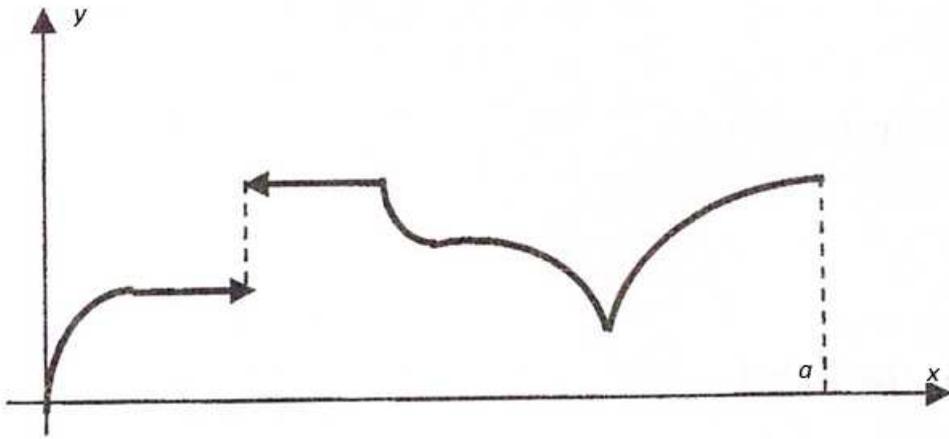
6.277.



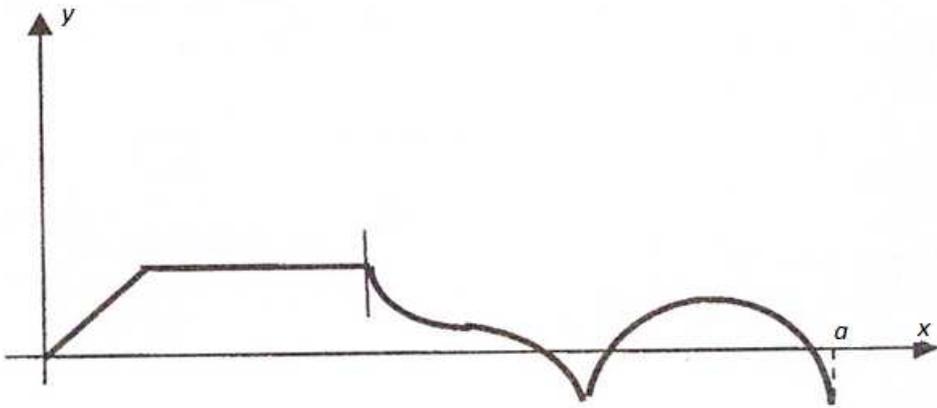
6.278.



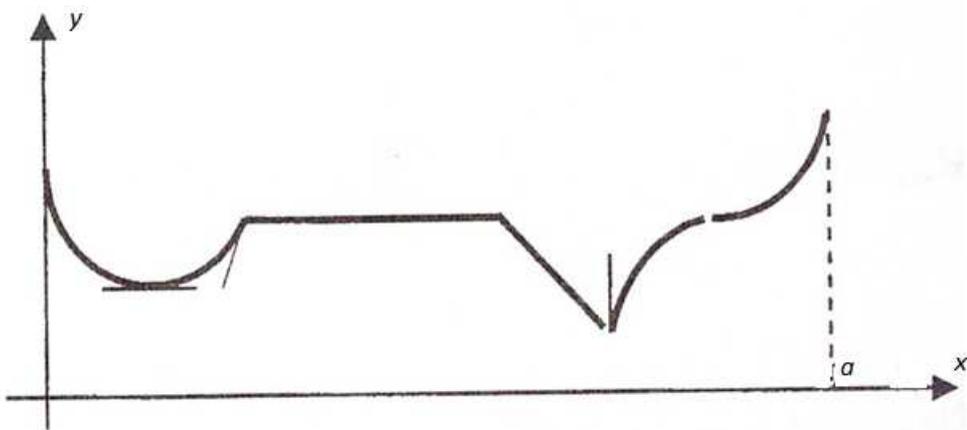
6.279.



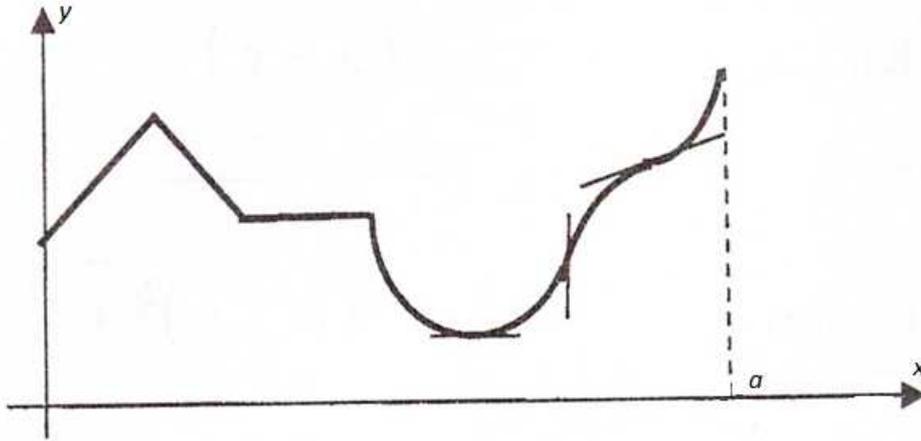
6.280.



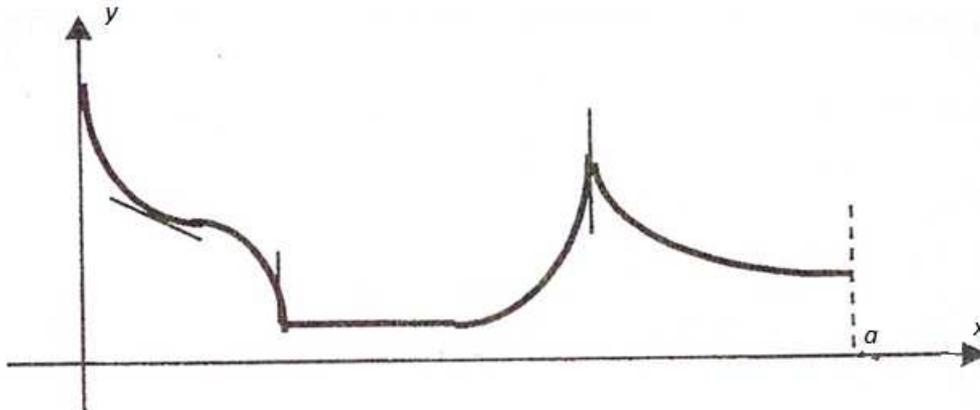
6.281.



6.282.



6.283.



В задачах 6.284–6.309 исследовать функции и построить их графики:

6.284. $y = 3x - x^3$. 6.285. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. 6.286. $y = x \cdot (2 - x^2)$.

6.287. $y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$. 6.288. $y = (x + 1) \cdot (x - 2)^2$. 6.289. $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$.

6.290. $y = \frac{2}{1 - x^2}$. 6.291. $y = \frac{x^2}{x + 1}$. 6.292. $y = x + \frac{4}{x^2}$.

6.293. $y = \frac{4 - x^4}{x^3 - 2}$. 6.294. $y = \frac{4 - x^2}{2x - 1}$. 6.295. $y = \frac{x^2}{1 + x^3}$.

6.296. $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$. 6.297. $y = \frac{x - 1}{4 - x^2}$. 6.298. $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$.

$$\begin{array}{lll}
6.299. & y = \frac{1}{1 - \sqrt{1-x}}. & 6.300. & y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x. & 6.301. & y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}. \\
6.302. & y = \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}. & 6.303. & y = x \cdot \sqrt{1-x^2}. & 6.304. & y = \sqrt[3]{1-x^3}. \\
6.305. & y = \ln(4-x^2). & 6.306. & y = x \cdot \ln x. & 6.307. & y = x \cdot \ln^3 x. \\
6.308. & y = \frac{\ln x}{x}. & 6.309. & y = \ln \frac{x}{x-1}. & 6.310. & y = \frac{1 - \ln x}{x}. \\
6.311. & y = x \cdot e^x. & 6.312. & y = \frac{e^x}{x}. & 6.313. & y = \frac{e^x}{x^2}. \\
6.314. & y = \frac{x^2 + x}{e^x}. & 6.315. & y = x^3 e^{-x}. & 6.316. & y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \\
6.317. & y = 4^{x^2 + 2x}. & 6.318. & y = x^x. & 6.319. & y = \ln(1 - e^{-x}).
\end{array}$$

§ 6. Наименьшее и наибольшее значения

В задачах **6.320–6.327** найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

$$\begin{array}{ll}
6.320. & y = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}, \quad [-2; 0]. \\
6.321. & y = \frac{(x-1)^3}{2x^2}, \quad [0,25; 3]. \\
6.322. & y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad [-1; 3]. \\
6.323. & y = x + 2\sqrt{-x}, \quad [-4; 0]. \\
6.324. & y = x^2 \ln x, \quad [e^{-2}; e]. \\
6.325. & y = e^{2x-x^2}, \quad [-2; 2]. \\
6.326. & y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x, \quad \left[0; \frac{\pi}{3}\right]. \\
6.327. & y = x - \ln(x+1), \quad \left[-\frac{1}{2}; 2\right].
\end{array}$$

6.328. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

6.329. Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трёх сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертая примыкала к стене. Для этого имеется a погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

6.330. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует повесить электрическую лампочку, чтобы освещённость края стола была

наибольшая? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

6.331. Найти такой цилиндр, который бы имел наибольший объем при данной полной поверхности S .

6.332. Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объемом V и с наименьшей полной поверхностью.

6.333. В прямоугольном листе картона длиной 48 см. и шириной 30 см. вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?

6.334. К реке шириной a метров построен под прямым углом канал шириной b метров. Суда какой максимальной длины могут входить в этот канал?

6.335. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ часть курса, а забывает at -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса:

1) $k = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{49}$; 2) $k = 1$, $a = \frac{1}{36}$; 3) $k = 2$, $a = \frac{1}{18}$.

Глава 7 НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Непосредственное интегрирование

В задачах **7.1–7.24** вычислить интегралы

7.1. $\int \frac{x-3}{x^2} dx.$

7.2. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx.$

7.3. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

7.4. $\int \frac{x+4}{2\sqrt{x}} dx.$

7.5. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$

7.6. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

7.7. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx.$

7.8. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx.$

7.9. $\int \frac{1+2x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx.$

7.10. $\int \frac{(1+x)^2}{x \cdot (1+x^2)} dx.$

7.11. $\int \frac{1}{x^2+27} dx.$

7.12. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$

$$\begin{array}{lll}
7.13. \int \frac{1}{x^2 - 7} dx. & 7.14. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}. & 7.15. \int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} \\
7.16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}. & 7.17. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx. & 7.18. \int \operatorname{tg}^2 x dx. \\
7.19. \int \operatorname{ctg}^2 x dx. & 7.20. \int \frac{\sin^2 x + 3}{\sin^2 x} dx. & 7.21. \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx. \\
7.22. \int 3^x e^x dx. & 7.23. \int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx. & 7.24. \int \frac{x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.
\end{array}$$

7.25. Будет ли функция $-\frac{1}{2} \cos(2x+1) + 2$ первообразной для функции $\sin(2x+1)$?

7.26. Пусть $F(x)$ первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ и $F(1) = \frac{\pi}{2}$.
Найти $F(-2)$.

§ 2. Интегрирование путём подведения под знак дифференциала и методом подстановки

В задачах 7.27–7.65 вычислить интегралы

$$\begin{array}{lll}
7.27. \int \frac{d(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}. & 7.28. \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}. & 7.29. \int (2 + 3x)^7 dx. \\
7.30. \int \sqrt{2 + 3x} dx. & 7.31. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x}}. & 7.32. \int \sqrt[5]{3 + 5x} dx. \\
7.33. \int \frac{x}{x^2 - 3} dx. & 7.34. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx. & 7.35. \int \frac{1 - 3x}{3 + 2x} dx. \\
7.36. \int \frac{2x + 3}{2x + 1} dx. & 7.37. \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx. & 7.38. \int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx. \\
7.39. \int \frac{6x - 5}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}} dx. & 7.40. \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx. & 7.41. \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx. \\
7.42. \int \frac{dx}{x \ln x}. & 7.43. \int e^{3x} dx. & 7.44. \int e^{-x} dx. \\
7.45. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. & 7.46. \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx. & 7.47. \int \frac{e^x}{\sqrt{9 - e^{2x}}} dx.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
7.48. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx. & 7.49. \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx. & 7.50. \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx. \\
7.51. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx. & 7.52. \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx. & 7.53. \int \cos^5 x \cdot \sin 2x dx. \\
7.54. \int x \cdot \sin(1 - x^2) dx. & 7.55. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx. & 7.56. \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx. \\
7.57. \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx. & 7.58. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx. & 7.59. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (2x + 3)^2}}. \\
7.60. \int \frac{dx}{\arccos^2 x \cdot \sqrt{1 - x^2}}. & 7.61. \int \frac{3x + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx. & 7.62. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}. \\
7.63. \int \frac{dx}{4x - 3 - x^2}. & 7.64. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}. & 7.65. \int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}.
\end{array}$$

§ 3. Интегрирование по частям

В задачах 7.66–7.92 вычислить интегралы

$$\begin{array}{lll}
7.66. \int x \cdot \sin x dx. & 7.67. \int x \cdot \cos 2x dx. & 7.68. \int (5x + 6) \cdot \sin 3x dx. \\
7.69. \int \frac{x}{e^x} dx. & 7.70. \int (3 - x) \cdot e^{2x} dx. & 7.71. \int x \cdot 2^{-x} dx. \\
7.72. \int \frac{x}{\sin^2 x} dx. & 7.73. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. & 7.74. \int \frac{x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx. \\
7.75. \int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x} dx. & 7.76. \int \ln x dx. & 7.77. \int x \cdot \ln(x - 1) dx. \\
7.78. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx. & 7.79. \int \frac{\ln x}{x^3} dx. & 7.80. \int x \cdot \ln(x^2 + 1) dx. \\
7.81. \int \arcsin x dx. & 7.82. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x}} dx. & 7.83. \int \operatorname{arctg} x dx. \\
7.84. \int x \operatorname{arctg} x dx. & 7.85. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. & 7.86. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx. \\
7.87. \int x^2 \sin x dx. & 7.88. \int \ln^2 x dx. & 7.89. \int x^2 \cdot e^{-x} dx. \\
7.90. \int x^2 \cdot 2^x dx. & 7.91. \int e^x \sin x dx. & 7.92. \int e^x \cos x dx.
\end{array}$$

7.93. Вычислить разность $F(2) - F(1)$, если $F(x)$ – первообразная для функции $x \ln x$.

7.94. Вычислить разность $F(2\pi) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $F(x)$ – первообразная для функции $(x + 6)\cos 3x$.

§ 4. Интегрирование рациональных функций

В задачах **7.95–7.115** вычислить интегралы

7.95. $\int \frac{x}{x+2} dx.$

7.96. $\int \frac{x^2}{x-3} dx.$

7.97. $\int \frac{x^4}{x^2-2} dx.$

7.98. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}.$

7.99. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}.$

7.100. $\int \frac{(x-4)dx}{(x-2) \cdot (x-3)}.$

7.101. $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+x-2}.$

7.102. $\int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}.$

7.103. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx.$

7.104. $\int \frac{x^3-1}{x^3-x} dx.$

7.105. $\int \frac{dx}{x \cdot (x+1)^2}.$

7.106. $\int \frac{x+2}{x^3+x} dx.$

7.107. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x} dx.$

7.108. $\int \frac{x^2+x+1}{x^4-x} dx.$

7.109. $\int \frac{x+1}{x^4-x^2} dx.$

7.110. $\int \frac{dx}{x \cdot (x^2+1)}.$

7.111. $\int \frac{dx}{x^3-1}.$

7.112. $\int \frac{x dx}{x^3-1}.$

7.113. $\int \frac{x-2}{x^4-1} dx.$

7.114. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2+x} dx.$

7.115. $\int \frac{x^2+4}{x^4+x^3+4x^2+4x} dx.$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

В задачах **7.116–7.133** вычислить интегралы.

7.116. $\int \sin 3x \cdot \sin 7x dx.$

7.117. $\int \sin 2x \cdot \cos 6x dx.$

7.118. $\int \cos \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{2} dx.$

7.119. $\int \sin^3 x dx.$

7.120. $\int \cos^5 x dx.$

7.121. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$

7.122. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$

7.123. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

7.124. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

7.125. $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

7.126. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

7.127. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

$$\begin{array}{lll}
7.128. \int \cos^4 x dx. & 7.129. \int \frac{dx}{3 \sin x}. & 7.130. \int \frac{dx}{5 \cos 2x}. \\
7.131. \int \frac{dx}{5 \cos x + 3}. & 7.132. \int \frac{dx}{1 + \sin x}. & 7.133. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.
\end{array}$$

§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

В задачах 7.134–7.150 вычислить интегралы.

$$\begin{array}{lll}
7.134. \int x \cdot \sqrt{x+5} dx. & 7.135. \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx. & 7.136. \int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx. \\
7.137. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx. & 7.138. \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx. & 7.139. \int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx. \\
7.140. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx. & 7.141. \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x-1}} dx. & 7.142. \int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx. \\
7.143. \int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} dx. & 7.144. \int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x^2}} dx. & 7.145. \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x-2}} dx. \\
7.146. \int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} dx. & 7.147. \int \sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x})^3 dx. & 7.148. \int \sqrt{9-x^2} dx. \\
7.149. \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} dx. & 7.150. \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} dx.
\end{array}$$

§ 7. Смешанные задания

7.151. Найти ту первообразную от функции $\frac{1}{2}x$, которая принимает значение 3 при $x=2$.

7.152. График первообразной $F(x)$ для функции $\frac{x+3}{(x-4) \cdot \sqrt{x-4}}$ проходит через точку $A(5; 0)$. Найти $F(8)$.

В задачах 7.153–7.196 вычислить интегралы.

$$\begin{array}{lll}
7.153. \int (x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x} dx. & 7.154. \int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-6x^5} dx. & 7.155. \int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}} dx. \\
7.156. \int \frac{(2x+3)dx}{x^2-4}. & 7.157. \int \frac{dx}{1+9x^2}. & 7.158. \int \frac{dx}{2x^2+9}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
7.159. \int \frac{xdx}{x^4 + 1} & 7.160. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4} & 7.161. \int e^x \cdot \sqrt{1 - e^x} dx. \\
7.162. \int \frac{dx}{e^x \cdot \sqrt{1 - e^{-2x}}} & 7.163. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{3 - \ln^2 x}} & 7.164. \int \frac{\ln x dx}{x \cdot (1 - \ln^2 x)}. \\
7.165. \int \frac{\sqrt{1 - x} dx}{x} & 7.166. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (1 - x)} & 7.167. \int x^3 \cdot \sqrt[5]{1 - 5x^4} dx. \\
7.168. \int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x}} dx & 7.169. \int \sqrt{\frac{\arccos x}{1 - x^2}} dx & 7.170. \int \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx}{x^3}. \\
7.171. \int x \cdot \sin^2 x dx & 7.172. \int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx & 7.173. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2}. \\
7.174. \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} dx & 7.175. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx & 7.176. \int \frac{\sin 2x}{5 - \cos 2x} dx. \\
7.177. \int \sin x \cdot \cos 3x dx & 7.178. \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx & 7.179. \int \cos 5x \cdot \cos x dx. \\
7.180. \int \frac{\ln x}{x^3} dx & 7.181. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}} dx & 7.182. \int \sqrt{\frac{\ln x}{x^2}} dx. \\
7.183. \int \frac{2^x}{\sqrt{1 + 2^x}} dx & 7.184. \int \frac{1 + \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx & 7.185. \int \frac{2^x}{1 + 4^x} dx. \\
7.186. \int \frac{x^2}{\sqrt{8x^3 + 27}} dx & 7.187. \int \frac{x}{(2 + x^2)^3} dx & 7.188. \int \frac{\ln^2 x + 2}{x} dx. \\
7.189. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (1 + x)} & 7.190. \int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx & 7.191. \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \\
7.192. \int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx & 7.193. \int \operatorname{tg}^2 4x dx & 7.194. \int \frac{\sin 5x}{5 + \cos 5x} dx. \\
7.195. \int \frac{dx}{e^x \cdot (3 + e^{-x})} & 7.196. \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}} & 7.198. \int \frac{x - 1}{\sqrt{2x - 1}} dx. \\
7.199. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} & 7.200. \int \frac{x - 2}{\sqrt{2x - x^2}} dx & 7.201. \int \operatorname{tg}^7 x dx
\end{array}$$

Глава 8

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Непосредственное вычисление определённого интеграла и подведение функции под знак дифференциала

В задачах **8.1–8.12** вычислить интегралы.

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{8.1.} & \int_2^3 5x^2 dx. & \mathbf{8.2.} & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}. & \mathbf{8.3.} & \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx. & \mathbf{8.4.} & \int_0^4 x e^{-x^2} dx. \\
 \mathbf{8.5.} & \int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}. & \mathbf{8.6.} & \int_1^5 \frac{dx}{3x-2}. & \mathbf{8.7.} & \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}. & \mathbf{8.8.} & \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}. \\
 \mathbf{8.9.} & \int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}. & \mathbf{8.10.} & \int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx. & \mathbf{8.11.} & \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x}. & \mathbf{8.12.} & \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}.
 \end{array}$$

§ 2. Замена переменной в определённом интеграле

В задачах **8.13–8.24** вычислить интегралы.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{8.13.} & \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx. & \mathbf{8.14.} & \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx. & \mathbf{8.15.} & \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}. \\
 \mathbf{8.16.} & \int_0^{13} \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{2x+1}} dx. & \mathbf{8.17.} & \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}. & \mathbf{8.18.} & \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx. \\
 \mathbf{8.19.} & \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}. & \mathbf{8.20.} & \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx. & \mathbf{8.21.} & \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}. \\
 \mathbf{8.22.} & \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx. & \mathbf{8.23.} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 \operatorname{tg} x - 7) dx}{\cos^2 x - 9 \sin^2 x}. & \mathbf{8.24.} & \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx.
 \end{array}$$

§ 3. Интегрирование по частям в определённом интеграле

В задачах **8.25–8.36** вычислить интегралы

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{8.25.} & \int_0^1 x e^{-x} dx. & \mathbf{8.26.} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx. & \mathbf{8.27.} & \int_0^{\pi} (\pi-x) \sin x dx. \\
 \mathbf{8.28.} & \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx. & \mathbf{8.29.} & \int_1^e \frac{\ln x dx}{x^3}. & \mathbf{8.30.} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.
 \end{array}$$

$$8.31. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 3x}.$$

$$8.32. \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx.$$

$$8.33. \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$8.34. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$$

$$8.35. \int_1^2 x^2 2^{-x} dx.$$

$$8.36. \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx.$$

§ 4. Несобственные интегралы

В задачах 8.37–8.54 вычислить интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода) или установить их расходимость:

$$8.37. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$8.38. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$8.39. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$8.40. \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^5}.$$

$$8.41. \int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{x^5} dx.$$

$$8.42. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}.$$

$$8.43. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

$$8.44. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

$$8.45. \int_2^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}.$$

$$8.46. \int_0^{\infty} e^{-4x} dx.$$

$$8.47. \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx.$$

$$8.48. \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$8.49. \int_0^{\infty} e^{-x^3} x^2 dx.$$

$$8.50. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{x^2+1}.$$

$$8.51. \int_1^{\infty} \frac{dx}{e x \sqrt{\ln^3 x}}.$$

$$8.52. \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}.$$

$$8.53. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$8.54. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

В задачах 8.55–8.63 вычислить интегралы от разрывных функций (2 рода) или установить их расходимость:

$$8.55. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$8.56. \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$8.57. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$8.58. \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$8.59. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}.$$

$$8.60. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$8.61. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$8.62. \int_{-1}^0 \frac{e^x dx}{x^3}.$$

$$8.63. \int_0^1 \frac{e^x dx}{x^2}.$$

§ 5. Приложения определённого интеграла

В задачах **8.64–8.81** вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$8.64. \begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = x + 1. \end{cases}$$

$$8.65. \begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y - x = 0. \end{cases}$$

$$8.66. \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3 - x^2. \end{cases}$$

$$8.67. \begin{cases} y - \sin x = 0, \\ y = \frac{2}{\pi}x. \end{cases}$$

$$8.68. \begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = x + 1. \end{cases}$$

$$8.69. \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2\sqrt{2x}. \end{cases}$$

$$8.70. \begin{cases} y = x^2, \\ y + x^2 = 2x. \end{cases}$$

$$8.71. \begin{cases} y = \cos x, \\ x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$8.72. \begin{cases} y = \sqrt{x^3}, \\ x = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$8.73. \begin{cases} y = \operatorname{tg} x, \\ x = \frac{\pi}{3}, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$8.74. \begin{cases} y = x^3, \\ x = 2, \\ y = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$8.75. \begin{cases} y = 2^{-x}, \\ x - 2 = 0, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

$$8.76. \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \sqrt{4-3x}, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$8.77. \begin{cases} y + x^2 = 3x, \\ x = 0, \\ y = 6 - 2x. \end{cases}$$

$$8.78. \begin{cases} y = e^{2x}, \\ x = 3, \\ y = e^{-2x}. \end{cases}$$

$$8.79. \begin{cases} y = x^2, \\ \lg x + \lg y = 0, \\ y = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

$$8.80. \begin{cases} y = (x-1)^2, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ x = 5. \end{cases}$$

$$8.81. \begin{cases} y = 4x - x^2, \\ x = 0, \\ y = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

В задачах **8.82–8.93** вычислить площади фигур, ограниченных линиями в полярных координатах ($\rho > 0$):

8.82. $\rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

8.83. $\rho = 2\cos\varphi.$

8.84. $\rho = 2\sin\varphi.$

8.85. $\rho = 2\cos 2\varphi.$

8.86. $\rho = 2\sin 2\varphi.$

8.87. $\rho = 4\cos 3\varphi.$

8.88. $\rho = 1 + \sin\varphi.$

8.89. $\rho = 2(1 - \sin\varphi).$

8.90. $\rho = \sqrt{2}(1 + \cos\varphi).$

8.91. $\rho = \sqrt{2}(1 + \sin\varphi).$

8.92. $\rho^2 = 2\cos\varphi.$

8.93. $\rho^2 = 2\sin\varphi.$

В задачах **8.94–8.102** вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

8.94.
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$$

8.95.
$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$$

8.96.
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$$

8.97.
$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$$

8.98. Астроидой
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

8.99. Одной аркой циклоиды
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = t - \cos t \end{cases}$$
 и осью Ox .

8.100. Первой аркой циклоиды
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = t - \cos t \end{cases}$$
 и прямой $y = \frac{1}{2}$ ($0 < x < 2\pi$).

8.101.
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases} \quad (y \geq 3).$$

8.102.
$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad (x \geq 1).$$

В задачах **8.103–8.111** вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

8.103.
$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

8.104.
$$\begin{cases} y = \frac{2}{\pi}x, \\ y - \sin t = 0. \end{cases}$$

8.105.
$$\begin{cases} y = \frac{9}{2\pi^2}x^2, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

$$8.106. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \quad (x > 0), \\ y = \frac{3}{2}x. \end{cases} \quad 8.107. \begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 4x - 2x^2. \end{cases} \quad 8.108. \begin{cases} y = ax - x^2 \quad a > 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$8.109. \begin{cases} y = \ln x, \\ y = 2, \\ x = 2. \end{cases} \quad 8.110. \begin{cases} xy = 4, \\ x = 1, \\ x = 4, \\ y = 0. \end{cases} \quad 8.111. \begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x = \sqrt{y - 2}, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

В задачах **8.112–8.123** вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигур, ограниченных линиями:

$$8.112. \begin{cases} y^2 = 4 - x, \\ x = 0. \end{cases} \quad 8.113. \begin{cases} y = x^3, \\ y = 0, \\ x = 2. \end{cases} \quad 8.114. \begin{cases} y^2 = x^3, \\ y = 0 \quad (y > 0), \\ x = 1. \end{cases}$$

$$8.115. \begin{cases} y = (x - 1)^2, \\ y = 0, \\ x = 2. \end{cases} \quad 8.116. \begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 2 - x, \\ x = 0. \end{cases} \quad 8.117. \begin{cases} y = \arcsin x, \\ y = \arccos x, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$8.118. \begin{cases} y = \sin x, \\ y = 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad 8.119. \begin{cases} x + y = 2, \\ y = x, \\ y = 0. \end{cases} \quad 8.120. \begin{cases} x + y = 2, \\ y = x, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$8.121. \begin{cases} y = e^x, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{cases} \quad 8.122. \begin{cases} y = \sqrt{x - 1}, \\ y = 0, \\ y = 1, \\ x = 0,5. \end{cases} \quad 8.123. \begin{cases} y^2 = x - 2, \\ y = 0, \\ y = 1, \\ y = x^3. \end{cases}$$

В задачах **8.124–8.132** вычислить длины дуг кривых:

8.124. $y = \sqrt{2 - x^2}$ от точки $B(-1; 1)$ до точки $A(1; 1)$.

8.125. $y = x^2 - 2$ между точками пересечения кривой с осью Ox .

8.126. $y = e^x$ между точками, для которых $x = 0$ и $x = 1$.

8.127. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (цепная линия) между точками с абсциссами $x = -1$ и $x = 0$.

8.128. Циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$

8.129. Астроиды $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$

8.130. Эвольвенты окружности $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - \cos t), \end{cases} \quad \text{от } t_1 = 0 \text{ до } t_2 = \pi.$

8.131. Кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos \varphi).$

8.132. Окружности $\rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi$ между точками, для которых $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Глава 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Область определения функции

В задачах 9.1–9.12 найти и изобразить на координатной плоскости xOy области определения функций:

9.1. $z = \frac{x+2y}{x-y}.$

9.2. $z = \frac{1}{x^2 - y^2}.$

9.3. $z = \frac{1}{x^2 + 4y^2 - 4}.$

9.4. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y}.$ 9.5. $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}.$ 9.6. $z = \ln x + \sqrt{y}.$

9.7. $z = \frac{1}{x-2} - \ln(x \cdot y).$

9.8. $z = \frac{\ln(x^2 \cdot y)}{\sqrt{y-x}}.$

9.9. $z = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{y}.$

9.10. $z = y + \arcsin(x+2).$

9.11. $z = \frac{1+y^2}{\sin x}.$

9.12. $z = \ln(y^2 - 4x + 8).$

§ 2. Линии уровня функции нескольких переменных

В задачах 9.13–9.24 написать уравнения линий уровня функции $z = f(x; y)$ и построить их:

9.13. $z = \sqrt{y-x^2}.$

9.14. $z = \frac{x}{y}.$

9.15. $z = \frac{y-x^2}{x^2}.$

9.16. $z = x^2 \cdot y + y.$

$$9.17. z = \frac{y}{x}. \quad 9.18. z = x \cdot \sqrt{y-1}. \quad 9.19. z = x \cdot y + y. \quad 9.20. z = \sqrt{x} - y.$$

$$9.21. z = y^2 - x. \quad 9.22. z = \frac{y}{x^3}. \quad 9.23. z = \frac{x^2}{y^2}. \quad 9.24. z = \frac{2y}{x}.$$

§ 3. Частные производные

В задачах 9.25–9.42 найти частные производные первого порядка :

$$9.25. z = x - y. \quad 9.26. z = x^2 + 3x \cdot y - y^3. \quad 9.27. z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}.$$

$$9.28. z = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}. \quad 9.29. z = x \cdot \operatorname{tg}(y+1). \quad 9.30. z = \frac{2y}{\sin x}.$$

$$9.31. z = x \cdot \ln y + \arcsin y. \quad 9.32. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad 9.33. z = x^y.$$

$$9.34. z = y^{\sin x}. \quad 9.35. z = (5x^3 \cdot y^2 + 1)^4. \quad 9.36. z = e^{\frac{y}{x}}.$$

$$9.37. z = x \cdot \ln \frac{y}{x}. \quad 9.38. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}). \quad 9.39. u = x \cdot y \cdot z.$$

$$9.40. u = x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z. \quad 9.41. u = x^{\frac{y}{z}}. \quad 9.42. u = x^{y^z}.$$

В задачах 9.43–9.48 найти производные второго порядка z''_{xx} , z''_{yy} , z''_{xy} :

$$9.43. z = x^3 + x \cdot y^2 - 5x \cdot y^3. \quad 9.44. z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}.$$

$$9.45. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}). \quad 9.46. z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$9.47. z = y^{\ln x}. \quad 9.48. z = \arcsin(xy).$$

В задачах 9.49–9.52 найти смешанные производные указанного порядка от заданных функций:

$$9.49. \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \text{ от } z = \sin(x \cdot y). \quad 9.50. \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \text{ от } z = e^{xy^2}.$$

$$9.51. \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \quad \text{от} \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}. \quad 9.52. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{от} \quad u = e^{xyz}.$$

В задачах **9.53–9.62** показать, что функция удовлетворяет заданному уравнению:

$$9.53. z = x \cdot \ln \frac{y}{x}, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z. \quad 9.54. z = 2e^{-x} \cdot \sin 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$9.55. z = \ln(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad 9.56. z = \sin(x - 2y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$9.57. z = \ln(e^x + e^y), \quad z''_{xx} \cdot z''_{yy} = (z''_{xy})^2. \quad 9.58. u = \frac{1}{x - y}, \quad u''_{xx} + u''_{yy} + 2u''_{xy} = 0.$$

$$9.59. z = \frac{y}{y^2 - 9x^2}, \quad z''_{xx} = 9z''_{yy}. \quad 9.60. z = x^2 \cdot \sin 2y, \quad z''_{xx} + \frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{x^2} \cdot z''_{yy} = 0.$$

$$9.61. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x + y)}{x - y}. \quad 9.62. z = 2^{x^2} \cdot y^3, \quad z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y.$$

§ 4. Производные от функций, заданных неявно

В задачах **9.63–9.68** найти производные $\frac{dy}{dx}$ от заданных функций:

$$9.63. x^3 \cdot y - y^3 \cdot x = a^4. \quad 9.64. x \cdot e^y + y \cdot e^x - e^{yx} = 0. \quad 9.65. x \cdot y - \ln y = a.$$

$$9.66. \cos(x + y) + x^3 \cdot y^2 = 1. \quad 9.67. \sqrt[3]{x^3 + y^3} = y^2. \quad 9.68. x^y = y^x.$$

В задачах **9.69.–9.76.** найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от ниже-
следующих функций:

$$9.69. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$9.70. x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4z = 0.$$

$$9.71. x^2 + y^2 + z^2 + 2x \cdot z = 1.$$

$$9.72. z^3 + 3x \cdot y \cdot z = a^3.$$

$$9.73. e^z - x \cdot y \cdot z = 0.$$

$$9.74. e^z = \cos x \cdot \cos y.$$

$$9.75. \sin(x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z) = x \cdot y \cdot z.$$

$$9.76. \sqrt{x \cdot z} = \ln(x \cdot y \cdot z).$$

§ 5. Дифференциал функции нескольких переменных.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

9.77. Найти частные дифференциалы первого порядка и полный дифференциал для функций:

1) $z = \frac{x}{y}$;

2) $z = e^{yx}$;

3) $z = x \cdot \sin xy$;

4) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

5) $u = x^{yz}$;

6) $u = x - \frac{yz}{x} + \sqrt{x + y + z}$.

9.78. Для функции $z = \sqrt[3]{x + y^2}$ вычислить частный дифференциал $d_y z$ при $x = 2$, $y = 5$, $\Delta y = 0,01$.

9.79. Для функции $z = \sqrt{\ln(x \cdot y)}$ вычислить частный дифференциал $d_x z$ при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,016$.

9.80. Для функции $z = e^{yx}$ найти значение полного дифференциала dz при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0,15$, $\Delta y = 0,1$.

9.81. С помощью дифференциала найти приближенное значение приращения функции в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1) $z = x^2 + 11y^2 - 20xy$, $M_0(11; 1)$, если $\Delta x = 0,11$, $\Delta y = -0,02$;

2) $z = 2x^2 + 3y^2 - 5xy$ при переходе от точки $M_0(9; 3)$ к точке $M_1(9,02; 2,96)$.

9.82. С помощью дифференциала найти приближенное значение числового выражения:

1) $(1,08)^{3,96}$;

2) $\sqrt{3,98} \cdot (1,03)^{3,98}$;

3) $\sqrt{\sin^2 0,05 + 8e^{0,015}}$;

4) $\sqrt{1,04^{1,99} + 3,02}$;

5) $22 \cdot (2,94)^2 + 9 \cdot 2,94 \cdot 1,07$;

6) $\sqrt{3,02^2 + 3,98^2}$;

7) $\sqrt[3]{4,97^2 + 1,06^2 + 1}$;

8) $\ln(0,11^3 + 1,03^3)$;

9) $\frac{2,03^2}{\sqrt{2,03^3 + 1,05^3 + 7}}$;

10) $\frac{5,03}{\sqrt{5,03^3 + 1,96^3}}$;

11) $\operatorname{arccctg}\left(\frac{5,01}{4,98}\right)$;

12) $(2,95^3 + 2,03^2 + 1)^{1/5}$.

9.83. Высота конуса $H = 10$ см., радиус основания $R = 5$ см. Как изменится объём конуса при увеличении высоты на 2 мм. и уменьшении радиуса на 2 мм?

9.84. Одна сторона прямоугольника $a = 6$ дм., другая $b = 8$ дм.. Как изменится диагональ прямоугольника, если a уменьшить на 4 см., а b укоротить на 1 см.?

§ 6. Градиент функции многих переменных.

Производная функции по направлению

9.85. Для функции $z = x^2 - 2x \cdot y + 3y - 1$ найти проекции градиента в точке $(1; 2)$. Вектор $\overline{\text{grad } z}$ построить.

9.86. Для функции $z = 4 - x^2 - y^2$ построить линию уровня и градиент в точке $A(1; 2)$.

9.87. Для функции $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$ построить линию уровня, градиент функции в точке $A(1; 2)$ и найти модуль градиента.

9.88. Для функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ найти $\overline{\text{grad } u}$ и $|\overline{\text{grad } u}|$.

9.89. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $A(1; 1; 1)$ в направлении $\vec{l} = \{\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ\}$.

9.90. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2 \cdot y + 3x \cdot y^2 + 1$ в точке $N(3; 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M(6; 5)$.

9.91. Для функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ найти градиент и производную по направлению вектора \vec{a} :

1) $z = -3x^2 + 2y$, $M_0(1; -3)$, $\vec{a} = \{6; 8\}$;

2) $z = \ln(3x + 2y)$, $M_0(-1; 2)$, $\vec{a} = \{-3; -4\}$;

3) $z = \arctg \frac{y}{x}$, $M_0(1; 1)$, $\vec{a} = \{-5; 12\}$;

- 4) $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $M_0(1;-2)$, $\bar{a} = \{1; 2\}$;
 5) $z = x \cdot y^3 + x^3 \cdot y$, $M_0(1; 3)$, $\bar{a} = \{2; -1\}$;
 6) $z = x^2 \cdot \cos y$, $M_0\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$, $\bar{a} = \{5; -12\}$;
 7) $z = \sin(\pi \cdot x \cdot y)$, $M_0(1; 1)$, $\bar{a} = \{1; -1\}$;
 8) $z = \ln(x + y^2)$, $M_0(3; 4)$, $\bar{a} = \{6; -8\}$;
 9) $z = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 1}$, $M_0(0; 1)$, $\bar{a} = \{-1; -1\}$.

9.92. Найти производную по направлению наиболее быстрого роста функции в точке $M_0(x_0, y_0)$:

- 1) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(1; 1)$; 2) $z = \ln(5x - 4y)$, $M_0(2; 1)$;
 3) $z = \operatorname{arctg}(x \cdot y)$, $M_0(1; 1)$; 4) $z = \sqrt[3]{x + 7y}$, $M_0(1; 1)$;
 5) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $M_0(1; 2)$; 6) $z = e^{x^2 + y^2}$, $M_0(2; 1)$.

9.93. Найти наибольшую крутизну подъёма поверхности:

- 1) $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $(6; 4; \ln 100)$; 2) $z = x^y$ в точке $(2; 2; 4)$.

9.94. Каково направление наибольшего изменения в начале координат функции $u = x \cdot \sin z - y \cdot \cos z$?

9.95. Найти точку, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}$.

9.96. Найти производную функции $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в направлении её градиента.

§ 7. Касательная плоскость и нормальная прямая

9.97. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ (или $z = f(x; y)$) в точке $M_0(x, y, z)$:

1) $x^2 + y^2 + z - 8 = 0$, $M_0(1; 2; 3)$; 2) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2; 2; 3)$;

3) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1; 0; 0)$; 4) $z = 3x^2 + y + 1$, $M_0(1; -1; 3)$;

5) $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$, $M_0(1; 0; 2)$; 6) $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $M_0(1; 2; 4)$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$, $M_0(1; 2; 2)$.

9.98. Составить уравнение нормальной прямой к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ (или $z = f(x; y)$) в точке $M_0(x, y, z)$:

1) $y^2 + z - 3 = 0$, $M_0(-2; 1; 2)$; 2) $z = 1 + x^2 + 2y^2$, $M_0(1; 1; 4)$;

3) $x^2 + 5y^2 + z^2 = 10$, $M_0(1; -1; 2)$; 4) $z = x^2 + y^2 - 6$, $M_0(2; 1; -1)$;

5) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 6$, $M_0(1; -1; 1)$; 6) $z = 3x^4 - xy + y^3$, $M_0(1; 2; 9)$;

7) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + yx + yz - 2xz + 16 = 0$, $M_0(1; 2; 3)$.

§ 8. Экстремумы функции многих переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

В задачах **9.99–9.112** найти экстремумы функции:

9.99. $z = -x^2 - 4y^2 - 8y - 4$.

9.100. $z = e^{-7x^2 - 12y^2}$.

9.101. $z = x^2 + 3y^2 + 2x + 1$.

9.102. $z = x^2 + 2y^2 - 4y + 4x + 2$.

9.103. $z = x^2 - xy + y^2 - y - 2x$.

9.104. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

9.105. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

9.106. $z = e^{\frac{y}{y+x^2}}$.

$$9.107. \quad z = x^2 - y^2 - xy + 9x - 6y + 20.$$

$$9.108. \quad z = 1 - x^2 - y^2 - xy + 6x.$$

$$9.109. \quad z = 9 - 9x^2 - 20y^2 + 162x + 2y.$$

$$9.110. \quad z = x^3 - 6x \cdot y + 8y^3 + 1.$$

$$9.111. \quad z = x^3 - 3x \cdot y + y^3.$$

$$9.112. \quad z = 2x^3 + x \cdot y^2 + 5x^2 + y^2.$$

В задачах **9.113–9.121** найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D :

$$9.113. \quad z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

$$9.114. \quad z = xy + x^2 - 2, \quad D: \begin{cases} y \leq 0, \\ y \geq 4x^2 - 4. \end{cases}$$

$$9.115. \quad z = 4xy + 4x^2 - y^2 - 8y, \quad D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 2x, \\ y \leq 2. \end{cases}$$

$$9.116. \quad z = 2xy + x^2 - y^2 + 4x, \quad D: \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ y \geq -x - 2. \end{cases}$$

$$9.117. \quad z = -3xy + 5x^2 + y^2, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

$$9.118. \quad z = -xy + 0.5x^2, \quad D: \begin{cases} y \leq 8, \\ y \geq 2x^2. \end{cases}$$

$$9.119. \quad z = -xy + 3x + y, \quad D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 4, \\ y \geq x. \end{cases}$$

$$9.120. \quad z = xy - 3x - 2y, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

$$9.121. \quad z = xy + x^2 - 3x - y, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.4. 5 и 8. **1.6.** 4 и 7. **1.8.** $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 47 & -8 \end{pmatrix}$. **1.9.** $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. **1.13.** $\begin{pmatrix} 17 & 37 \\ -19 & -16 \end{pmatrix}$.

1.16. (14). **1.19.** $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$. **1.22.** $\begin{pmatrix} 14 & -10 & -13 \\ -10 & 25 & 0 \\ -13 & 0 & 53 \end{pmatrix}$. **1.30.** $x = 12$.

1.32. Нет решений. **1.33.** $x_1 = 2$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{3}$. **1.36.** 29 и 0.

1.37. -1 и 6. **1.41.** -2. **1.43.** $\sin 2\alpha$. **1.46.** $x_1 = -10$, $x_2 = 2$.

1.59. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} -16 & -13 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. **1.62.** 2. **1.63.** 2. **1.64.** 2. **1.66.** 3. **1.68.** 2. **1.69.** 2.

1.73. (1; -1; 0). **1.75.** (1; 1; 0). **1.78.** (1; 0; 0). **1.79.** (2; 0; 2). **1.80.** (1; 2; 1).

1.81. (1,75; -1; 1,75). **1.82.** (2; 1; 0). **1.83.** (0; 1; 1). **1.84.** (2; 2; 1).

1.85. (2; 1; 0). **1.86.** (1; 0; 1). **1.87.** (1; -1; 2) **1.88.** (-1; 2; -3).

1.89. (0; 0; 1). **1.90.** (3; 2; 0). **1.91.** (3; 2; 0). **1.92.** (0; 0; 1). **1.93.** (2; 1; 1).

1.94. (-1; 0; 2). **1.95.** (1; -1; 2). **1.96.** (0; -1; 1). **1.97.** (-1; 0; 2).

1.98. (1; 2; 2). **1.99.** (1; 1; 1). **1.100.** $\begin{cases} x = 2z - 1, \\ y = z + 1. \end{cases}$ **1.101.**

Несовместная. **1.103.** $\begin{cases} x = \frac{5}{3}z + \frac{2}{3}, \\ y = -\frac{7}{3}z + \frac{5}{3}. \end{cases}$ **1.104.** Несовместная. **1.108.** (-2; 3).

1.110. (1; 1; 1). **1.111.** 1) $a \neq -3$; 2) $a = -3$, $b \neq \frac{1}{3}$; 3) $a = -3$, $b = \frac{1}{3}$.

1.112. (0; 0; 0). **1.113.** $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$ **1.114.** $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_3. \end{cases}$

$$1.115. \begin{cases} x_2 = -x_1 + x_4, \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad 1.116. \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_3, \\ x_2 = \frac{5}{4}x_3 + x_4. \end{cases} \quad 117. \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Глава 2

- 2.1. $|\bar{a}| = 7$. 2.2. $z = \pm 3$. 2.3. $(4; 1; 1)$. 2.5. Да. 2.6. $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.
- 2.8. $\overline{BC} = \frac{4}{3}\overline{AL} - \frac{2}{3}\overline{AK}, \overline{DC} = \frac{4}{3}\overline{AK} - \frac{2}{3}\overline{AL}$. 2.9. $x = \sqrt{2}, y = 1, z = -1$.
- 2.10. $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \cos \beta = -\frac{3}{5}, \cos \gamma = -\frac{16}{25}$. 2.11. $\{2; 2; 2\}$. 2.12. 1) $\bar{a} \perp \bar{b}$;
2) $\bar{a} \parallel \bar{b}$. 2.13. $|\bar{r}| = 7, \cos \alpha = \frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{3}{7}, \cos \gamma = \frac{6}{7}$. 2.14. $M(3\sqrt{2}; 3; -3)$,
 $\bar{r} = 3(\sqrt{2}\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$. 2.15. $\bar{u} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}, |\bar{u}| = 7, \cos \alpha = \frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{-6}{7},$
 $\cos \gamma = \frac{3}{7}$. 2.16. $\sqrt{6}$ и $3\sqrt{2}$. 2.17. $(9; -5; 6)$. 2.18. 7. 2.19. $\sqrt{\frac{19}{2}}$.
- 2.20. 1) Линейно независимые; 2) $\bar{c} = \frac{\bar{a}}{2} + \frac{2}{3}\bar{b}$; 3) Линейно зависимые, но вектор \bar{c} неколлинеарен коллинеарным векторам \bar{a} и \bar{b} . 2.21. 22.
- 2.22. $\bar{b} = -3\bar{a}$. 2.23. $\alpha = 4, \beta = -1$. 2.25. $M(0; 1; 0)$. 2.26. $M_1(7; 0)$ и $M_2(-1; 0)$. 2.27. $|\bar{F}| = 15$. 2.28. 1) -6 ; 2) 9 ; 3) 13 ; 4) -61 . 2.30. 0.
- 2.31. $\alpha = 135^\circ$. 2.32. $\angle B = \angle C = 45^\circ$. 2.33. -200 . 2.34. $\arccos \frac{5}{\sqrt{133}}$.
- 2.35. $\arccos \frac{43}{25\sqrt{13}}$. 2.36. 2. 2.37. $\cos(\bar{a} \bar{m}) = \frac{5}{2\sqrt{7}}, \cos(\bar{a} \bar{n}) = -\frac{2}{\sqrt{7}}$.
- 2.38. $|\bar{a}| = |\bar{b}|$. 2.39. $-\frac{3}{2}$. 2.40. $\alpha = \pm \frac{3}{5}$. 2.41. $np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}, np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.
- 2.42. $np_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a} = 5$. 2.43. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2.45. -7 . 2.46. $\{1; 2; -3\}$. 2.47. 1) $-6\bar{j}$,
 $S = 6$; 2) $-2\bar{k}, S = 2$; 3) $6\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}, S = 2\sqrt{22}$. 2.48. $S = 24,5$.
- 2.49. $S = \sqrt{21}, h = \sqrt{4,2}$. 2.50. 1) $\bar{k} - 2\bar{i}$; 2) $2\bar{a} \times \bar{c}$; 3) $\bar{a} \times \bar{c}$; 4) 2.
- 2.51. $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. 2.52. $\left\{0; \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right\}, \left\{0; -\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\}$. 2.53. $\{-6; -24; 8\}$.
- 2.54. $\{45; 24; 0\}$. 2.55. $\{7; 5; 1\}$. 2.57. $|c| = 3\sqrt{17}; S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

- 2.58.** $h = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. **2.59.** $S = \sqrt{6}$, $d_1 = d_2 = \sqrt{5}$. **2.60.** $S = 1,5$. **2.61.** 30.
2.62. $\{20; 4; 28\}$. **2.63.** 16. **2.64.** $\bar{a} \parallel \bar{b}$. **2.65.** $\{-8; -9; -4\}$.
2.66. $\{-10; 13; 11\}$, $\cos \alpha = -\frac{10}{\sqrt{390}}$, $\cos \beta = \frac{13}{\sqrt{390}}$, $\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{390}}$. **2.67.** 15,
 $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$. **2.68.** $V = 51$, тройка левая. **2.69.** $V = 14$,
 $S = 6\sqrt{3}$, $h = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. **2.71.** $\bar{c} = 5\bar{a} + \bar{b}$. **2.72.** $(\bar{b} + \bar{c}) - (\bar{c} - \bar{a}) = \bar{a} + \bar{b}$.
2.73. $\alpha = \frac{1}{3}$. **2.74.** 24. **2.75.** -7. **2.76.** 11. **2.77.** $V = 12,5$. **2.78.** $(0; 8; 0)$
и $(0; -7; 0)$. **2.79.** 1) $\sqrt{17}$, $2\sqrt{13}$, $2\sqrt{19}$; 2) 14; 3) $\varphi = \arccos(-\frac{5}{\sqrt{221}})$;
4) $V = 22$, 5) $\frac{33}{7}$.

Глава 3

- 3.6.** $y = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$, $y = 4$, $4x - 3y = 0$, $x = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$.
3.7. $|\overline{AB}| = 10$; $np_x \overline{AB} = 8$; $np_y \overline{AB} = 6$. **3.8.** $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$; $np_x \overline{AB} = 4$;
 $np_y \overline{AB} = 8$. **3.10.** $(3; -5)$. **3.12.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$.
3.13. $7x + 6y + 33 = 0$; $5x - 2y - 33 = 0$; $x + 4y - 11 = 0$. **3.14.** $2x - 3y - 18 = 0$;
 $7x - 2y - 12 = 0$; $5x + y - 28 = 0$. **3.15.** $4x + 3y - 11 = 0$; $x + y + 2 = 0$;
 $3x + 2y - 13 = 0$. **3.16.** $4x + y - 3 = 0$. **3.17.** $2x - 5y + 3 = 0$; $2x - 5y - 26 = 0$;
 $7x - 3y - 33 = 0$. **3.19.** $(-2; -1)$. **3.20.** $(11; -11)$. **3.21.** $11x - y - 28 = 0$;
 $x + y - 8 = 0$. **3.22.** $(-12; 5)$. **3.23.** $(-3; -1)$. **3.25.** 1) $a \neq 3$; 2) $a = 3, b \neq 2$;
3) $a = 3, b = 2$. **3.26.** $a = -7$. **3.27.** $S = 6e\varrho^2$. **3.28.** $3x - 2y - 12 = 0$;
 $3x - 8y + 24 = 0$. **3.29.** $S = 5e\varrho^2$. **3.30.** $S = 6e\varrho^2$. **3.35.** $74x + 13y + 39 = 0$.
3.36. $x - y - 7 = 0$. **3.37.** $(12; 0; 0)$; $(0; -8; 0)$; $(0; 0; -6)$. **3.39.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} +$
 $+\frac{z}{-2} = 1$. **3.40.** $x + y + z + 5 = 0$. **3.41.** $2x - 21y + 2z + 88 = 0$; $2x - 21y +$
 $+ 2z + 88 = 0$. **3.43.** $x - 2y + 3z - 14 = 0$. **3.45.** $2x - 3y + 2z + 16 = 0$.
3.46. $5x - 3y + 2z = 0$. **3.47.** $2x - 3z - 27 = 0$. **3.48.** $x - y - 3z + 2 = 0$.

- 3.49.** $x+4y+7z+16=0$. **3.50.** $x-y-z=0$. **3.51.** $2x+y+z=0$.
3.52. $3x+3y+z-8=0$. **3.54.** $7x-y-5z=0$. **3.55.** $2x+3y+4z-5=0$.
3.56. $(1;-2;2)$. **3.57.** 1) $2y-3z+7=0$; 2) $x-y-2=0$; 3) $2x-3z+3=0$.
3.58. 1) $3y+4z=0$; 2) $3x-2z=0$; 3) $2x+y=0$. **3.59.** 1) $z-3=0$;
2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$. **3.60.** 1) $d=3$; 2) $d=\frac{29}{25}$; 3) $d=\frac{14}{5}$; 4) $d=2$.
3.61. $d=4$. **3.62.** 1) $d=2$; 2) $d=3,5$. **3.63.** $(0;7;0)$ и $(0;-5;0)$.
3.64. $(0;0;-2)$ и $\left(0;0;-6\frac{4}{13}\right)$. **3.65.** $(2;0;0)$ и $\left(\frac{11}{43};0;0\right)$.
3.67. $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$. **3.69.** 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$;
3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}$; 5) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{3}$; 6) $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{5}$.
3.70. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 3) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{8}$.
3.71. 1) $\begin{cases} x=t+2, \\ y=-2t+1, \\ z=t+1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=8t-3. \end{cases}$ **3.72.** $\begin{cases} x=2t+4, \\ y=3t-3, \\ z=t+1. \end{cases}$ **3.74.** $\begin{cases} x=5t+4, \\ y=-11t-7, \\ z=-2. \end{cases}$
3.76. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$. **3.77.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{1}$. **3.78.** 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$;
2) $\frac{x}{0}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$; 3) $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+1}{0}$. **3.79.** 1) $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-7t, \\ z=-19t-2. \end{cases}$
2) $\begin{cases} x=t, \\ y=-3t+5, \\ z=-5t+4. \end{cases}$ **3.83.** 60° . **3.84.** 135° . **3.85.** $\pm\frac{4}{21}$. **3.87.** $\arccos\frac{11}{26}$.
3.89. $l=3$. **3.90.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$. **3.94.** $\begin{cases} 3x+2y=0, \\ z=4. \end{cases}$ **3.96.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.
3.97. $2x-3y-4z-1=0$. **3.98.** $x+z+1=0$. **3.103.** $m=-3$.
3.104. $c=-2$. **3.105.** $x-2y+z+5=0$. **3.106.** $8x-5y+z-11=0$.
3.107. $x+2y-2z=1$. **3.108.** 1) $(5;5;-2)$; 2) $(6;4;5)$; 3) $(2;-3;6)$.

- 3.110. $(1; 4; -7)$. 3.111. $(3; -2; 4)$. 3.112. $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$
- 3.113. $(2; -3; 2)$. 3.114. $(2; -3; 2)$. 3.115. $x + 2y - 5z = 0$. 3.116. $(-1; 3; 1)$.
- 3.117. $\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{1}$. 3.118. $x + 2y + 3z = 0$. 3.119. $(2; -3; -5)$.
- 3.120. $13x - 14y + 11z + 51 = 0$. 3.121. $x - 8y - 13z + 9 = 0$. 3.122. 1) 13;
2) 3; 3) 7.

Глава 4

- 4.2. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. 4.4 $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$.
- 4.6. $x^2 + y^2 - 8y = 0$. 4.7. $(x-3)^2 + y^2 = 9$. 4.9. $x + y = 3$. 4.10. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$. 4.11. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. 4.12. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. 4.13. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- 4.14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$. 4.15. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. 4.16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.
- 4.18. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$. 4.19. $\frac{7x^2}{92} + \frac{16y^2}{92} = 1$ и $\frac{16x^2}{92} + \frac{7y^2}{92} = 1$.
- 4.20. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 4.21. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. 4.23. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. 4.25. $\sqrt{41}$. 4.26. $(0; -1)$;
 $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$. 4.27. $(x-3)^2 + y^2 = 36$. 4.30. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.
- 4.31. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$. 4.34. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$. 4.35. $x^2 - y^2 = 1$. 4.37. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$.
- 4.39. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$. 4.40. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 4.41. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.
- 4.43. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 4.44. $(0; 0)$; $(6; 2\sqrt{3})$; $(6; -2\sqrt{3})$. 4.45. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$.
- 4.46. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$. 4.47. $\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.48. $\sqrt{2}$. 4.49. $y^2 = -3x$.
- 4.53. $y = x^2$. 4.54. 12. 4.56. $y = x - \frac{x^2}{4}$. 4.58. $p = -\frac{8}{3}$. 4.59. 7 м.
- 4.60. 40 см. 4.61. 3 м. 4.62. $(y-2)^2 = 4(x-6)$. 4.63. $(x-4)^2 = 8(y-1)$.

4.64. $y^2 = -3x$; $x = \frac{3}{4}$ **4.65.** $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

Глава 5

- 5.1.** $x \in [-3; 3]$. **5.2.** $x \in (-\infty; \infty)$. **5.3.** $x \neq 1; x \neq 2$. **5.4.** $x \neq 0; x \neq \pm 1$.
- 5.5.** $x \in [-1; 1]$. **5.6.** Пустое множество. **5.7.** $x \in (0; \infty)$. **5.8.** Пустое множество. **5.9.** $x \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$. **5.10.** $x \in (4; 6)$. **5.11.** $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$. **5.12.** $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$; $n \in Z$. **5.13.** $x \in [-2; 0) \cup (0; 1)$.
- 5.14.** $x \in [0; 4]$. **5.15.** $x \in (-\infty; \infty)$. **5.16.** $x \in (2; 3)$. **5.17.** $x \in \left[\frac{1}{e}; e \right]$.
- 5.18.** $x \in [-1.5; 2.5]$. **5.19.** $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$. **5.20.** $x \in (4; 5) \cup (6; \infty)$.
- 5.21.** $\{-1; 0\}$. **5.22.** $x = -5$. **5.23.** $\{6; 7; 8\}$. **5.24.** $\{8; 9\}$.
- 5.25.** $\{-1; 0; 1; 2; 4\}$. **5.26.** $\{4\}$. **5.27.** $y \in [-3; \infty)$. **5.28.** $y \in [0; \sqrt{5}]$.
- 5.29.** $y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. **5.30.** $y \in (-\infty; 3]$. **5.31.** $y \in [0; \infty)$.
- 5.32.** $y \in [0; \infty)$. **5.33.** $y \in [2^{-16}; \infty)$. **5.34.** $y \in (0; 1]$. **5.35.** $y \in (-\infty; \infty)$.
- 5.36.** $y \in [-2; 6]$. **5.37.** $y \in [2; 5] \cup (23; 128]$. **5.38.** Нечётная. **5.39.** Чётная. **5.40.** Чётная. **5.41.** Общего вида. **5.42.** Чётная. **5.43.** Общего вида. **5.44.** Чётная. **5.45.** Нечётная. **5.46.** Чётная. **5.47.** Чётная. **5.48.** Нечётная. **5.49.** Чётная. **5.50.** Общего вида. **5.51.** Нечётная. **5.52.** Нечётная. **5.53(1)** Нечётная. **5.53(2)** Чётная. **5.54.** π . **5.55.** 6π .
- 5.56.** $\frac{4}{3}\pi$. **5.57.** 2π . **5.58.** $\frac{\pi}{4}$. **5.59.** $\frac{5}{2}\pi$. **5.60.** $\frac{\pi}{2}$. **5.61.** $\frac{\pi}{3}$. **5.62.** $\frac{3}{2}\pi$.
- 5.63.** 2π . **5.64.** 6π . **5.65.** π . **5.66.** Периодическая. **5.67.** $y = \frac{x}{3}$.
- 5.68.** $y = \frac{x-2}{3}$. **5.69.** $y = \sqrt{x+4}$. **5.71.** $y = 2 + \sqrt{x-1}$. **5.74.** $y = -x\sqrt{x}$.
- 5.77.** $y = -2 + \log_5 x$. **5.78.** $y = -4 + 3^{x-2}$. **5.79.** $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.
- 5.80.** $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3}$. **5.81.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$. **5.127.** $\frac{1}{n+1}$, $n \in N$. **5.128.** $(-1)^{n+1}$, $n \in N$.
- 5.131.** $\frac{1}{n^2}$, $n \in N$. **5.132.** $\frac{2n+1}{2^n}$, $n \in N$. **5.137.** $\sin \frac{\pi}{2^n}$, $n \in N$.

- 5.140. $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, $n \in N$. 5.142. $2n$, $n \in N$, ограничена снизу.
- 5.143. $(-1)^{n+1}n$, $n \in N$, не ограничена. 5.144. $\frac{n}{n+1}$, $n \in N$, ограничена.
- 5.145. $(-1)^{n+1}$, $n \in N$, ограничена. 5.146. $\sin n$, $n \in N$, ограничена.
- 5.147. $\ln(n+1)$, $n \in N$, ограничена снизу. 5.148. $\frac{n}{3^n}$, $n \in N$, ограничена.
- 5.149. $\frac{2n}{(2n-1)!}$, $n \in N$, ограничена. 5.150. $\frac{1}{2^n}$, $n \in N$, ограничена.
- 5.151. Убывающая. 5.152. Возрастающая. 5.153. Невозрастающая.
- 5.154. Убывающая. 5.155. Неубывающая. 5.156. Убывающая.
- 5.157. Возрастающая. 5.158. Убывающая. 5.159. Возрастающая.
- 5.163. 1) Предел не существует; 2) предел не существует; 3) предел не существует; 4) 0; 5) 1. 5.164. 1. 5.165. 0. 5.166. Предел не существует.
- 5.167. 1. 5.168. 1. 5.169. ∞ . 5.170. 0. 5.171. 1. 5.172. 0.
- 5.173. 0. 5.174. 0,5. 5.175. 0. 5.176. -3. 5.177. 1,5. 5.178. 1. 5.179. -5.
- 5.180. -1. 5.181. 3. 5.182. 0,5. 5.183. e^{-5} . 5.184. e^2 . 5.185. $e^{-\frac{1}{4}}$. 5.186. e^{-2} .
- 5.187. e^{-2} . 5.188. $e^{\frac{3}{2}}$. 5.189. e^{-1} . 5.190. e^{-2} . 5.191. 1. 5.192. 0. 5.193. e^{-1} .
- 5.194. 0,25. 5.195. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. 5.196. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. 5.197. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- 5.198. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. 5.199. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. 5.200. $f(x) = A$. 5.201. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.
- 5.202. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. 5.203. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. 5.204. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. 5.205. 1.
- 5.206. ∞ . 5.207. 0. 5.208. 0,25. 5.209. -0,5. 5.210. 0,75. 5.211. 1.
- 5.212. 1,5. 5.213. -0,5. 5.214. $\frac{4}{3}$. 5.215. $\frac{1}{6}$. 5.216. ∞ . 5.217. -1. 5.218. 0.
- 5.219. ∞ . 5.220. $\frac{1}{4}$. 5.221. 4. 5.222. 3. 5.223. $\frac{1}{3}$. 5.224. $\frac{3}{2}$. 5.225. 0.
- 5.226. ∞ , при $x \rightarrow -\infty$ и 2, при $x \rightarrow +\infty$. 5.227. $\frac{5}{2}$. 5.228. 0. 5.229. 4.
- 5.230. $\frac{2}{5}$. 5.231. 9. 5.232. ∞ . 5.233. ∞ . 5.234. 2. 5.235. 3. 5.236. 0,5.

- 5.237.** 0,25. **5.238.** $\frac{2}{3}$. **5.239.** ∞ . **5.240.** $\frac{1}{6}$. **5.241.** $\frac{2}{5}$. **5.242.** 1.
5.243. $8\sqrt{2}$. **5.244.** $-\frac{3}{2}$. **5.245.** 0. **5.246.** 1. **5.247.** $\frac{1}{2}$. **5.248.** 2. **5.249.** 1.
5.250. $\frac{2}{\pi}$. **5.251.** 0. **5.252.** $\frac{1}{e}$. **5.253.** 1. **5.254.** e . **5.255.** $\frac{1}{e}$. **5.256.** e .
5.257. e^6 . **5.258.** e^6 . **5.259.** ∞ . **5.260.** e^6 . **5.261.** e^2 . **5.262.** 1. **5.263.** ∞ .
5.264. e . **5.265.** \sqrt{e} . **5.266.** a . **5.267.** $\frac{1}{a}$. **5.268.** a . **5.269.** $\frac{1}{e}$. **5.270.** 2.
5.271. $\frac{3}{4}$. **5.272.** -0,5. **5.273.** $A_0 e^{pt}$. **5.274.** $2a^2$. **5.275.** $2\pi R^2$ и $4R^2$.
5.294. $x=0$, точка разрыва 2-го рода. **5.295.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, точки
 разрыва 2-го рода. **5.296.** $x = \pm 1$, точки разрыва 2-го рода. **5.297.** $x = -1$,
 точка разрыва 1-го рода. **5.298.** $x = 1$, точка разрыва 1-го рода.
5.299. $x = 0$, точка разрыва 1-го рода. **5.300.** $x = 0$, точка разрыва 1-го ро-
 да. **5.301.** $x = 0$, разрыв 2-го рода, $x = \pm 2$, разрывы 2-го рода. **5.302.** $x = 0$.
5.303. $x = 2$. **5.304.** $x = -2$. **5.308.** $a = 0$. **5.309.** $a = 2$.

Глава 6

- 6.34.** $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}$. **6.35.** $\frac{1+7,5x}{\sqrt{1+5x}}$. **6.36.** $\frac{24,5-x^2}{\sqrt{49-x^2}}$. **6.37.** $-\frac{1+3x^2}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}$.
6.44. $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \cdot \ln^2 x}$. **6.53.** $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. **6.58.** $\frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1-x^2}}$.
6.66. $-\frac{2 \operatorname{arctg} \frac{3-x}{x-5}}{x^2-8x+17}$. **6.70.** $\frac{4x+y}{3y^2-x}$. **6.73.** $\frac{e^y}{2-y}$. **6.78.** $\frac{y}{x}$. **6.83.** $\frac{1}{2}$.
6.85. $\frac{1+2e}{2e}$. **6.88.** $2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$. **6.92.** $-x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \left[\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{x(1-x^2)}\right]$
6.97. $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$. **6.100.** $\frac{1-\sin 2t}{\cos 2t}$. **6.104.** $\frac{3}{2} e^{\sqrt{t}} (1+\sqrt{t})$. **6.110.** $32 \cos 2x$.
6.112. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **6.120.** $4t^2$. **6.122.** $-\frac{\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$. **6.124.** $\Delta y = 0,1306$; $dy = 0,13$.

6.129. $dS = gt dt$. **6.140.** $dy = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2 \ln 2}{2^{2x}}\right) dx$. **6.145.** $dy = \frac{(2 - e^x) dx}{(e^x - 1) \ln 6}$.

6.155. $3x - y - 7 = 0$; $x + 3y + 11 = 0$. **6.160.** $x - 2y - 1 = 0$; $2x + y - 2 = 0$.

6.163. $7x - y - 5 = 0$; $x + 7y - 15 = 0$. **6.164.** $3x - 4y + 3 = 0$; $4x + 3y + 21 = 0$.

6.167. $x - y + 1 = 0$; $x + y + 17 = 0$. **6.168.** $x + y + \frac{1}{e^2} = 0$. **6.170.** $x + 2y -$

$-4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$. **6.172.** $x + y = \frac{\pi}{2}$, $x - y + 2 = \frac{\pi}{2}$. **6.173.** $2x - y \pm 1 = 0$.

6.177. 1) 0 , $\arctg \frac{1}{7}$; 2) $\arctg k$, $\arctg \frac{k}{1 + 2k^2}$; 3) $\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2}$, $\arctg 2$.

6.178. $v_0 = 1 \frac{M}{c}$; $v_1 = 7 \frac{M}{c}$; $v_2 = 13 \frac{M}{c}$; $a_0 = a_1 = a_2 = 6 \frac{M}{c^2}$. **6.179.** $t = \frac{\pi}{\omega} k$,

$k \in Z$; $x = \pm 1$. **6.180.** 43 ампера. **6.183.** $\frac{7}{9}$. **6.184.** $\frac{3}{2}$. **6.185.** 0.

6.186. $\frac{1}{2}$. **6.190.** 3. **6.191.** $\frac{1}{3}$. **6.197.** $-\frac{25}{32}$. **6.199.** 1) ∞ ; 2) 0. **6.200.** 0.

6.202. 0. **6.203.** 3. **6.204.** ∞ . **6.207.** 0. **6.208.** 0. **6.209.** ∞ . **6.210.** 2.

6.213. 1. **6.216.** $\frac{1}{6}$. **6.219.** 1. **6.222.** 1. **6.228.** На $(-\infty, -1)$ и $(0, \infty)$ функ-

ция возрастает, на $(-1; 0)$ — убывает. **6.232.** На $(-\infty, 0)$ и $(2, \infty)$ функция

убывает, на $(0; 2)$ — возрастает. **6.237.** $y_{\min} = -\frac{1}{e^2}$ при $x = e^2$.

6.238. $y_{\min} = -1$ при $x = -1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 1$. **6.242.** Точек экстремума нет.

6.244. Функция выпукла вверх. **6.248.** На $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ и $(0, \infty)$ —

выпукла вниз, на $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ — выпукла вверх, $P(-\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{2} - 1)$ — точка перегиба.

6.250. На $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ — выпукла вверх, на $(-1, 1)$ — выпукла вниз,

$P(\pm 1; \ln 2)$ — точки перегиба. **6.255.** $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. **6.260.** $y = 0$ при

$x \rightarrow -\infty$. **6.287.** Функция определена на всей числовой оси, чётная; $y_{\min} = -1$

при $x = 0$; точки перегиба — $P_{1,2}\left(\pm 1; -\frac{64}{125}\right)$, $P_{3,4}\left(\pm \sqrt{5}; 0\right)$; асимптот нет.

6.288. Функция определена на всей числовой оси; $y_{\min} = 0$ при $x = 2$,

$y_{\max} = 4$ при $x = 0$; $P(1;2)$ – точка перегиба; асимптот нет. **6.291.** Функция определена на всей числовой оси, кроме $x = -1$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = -4$ при $x = -2$; точек перегиба нет; асимптоты $x = -1$, $y = x - 1$.

6.292. Функция определена на всей числовой оси, кроме $x = 0$; $y_{\min} = 3$

при $x = 2$; точек перегиба нет; асимптоты: $x = 0$, $y = 0$. **6.296.** Функция

определена на всей числовой оси, кроме $x = \pm 2$, нечётная; $y_{\min} = 6\sqrt{3}$ при $x = 2\sqrt{3}$, $y_{\max} = -6\sqrt{3}$ при $x = -2\sqrt{3}$; $P(0;0)$ – точка перегиба; асимптоты:

$x = \pm 2$, $y = 2x$. **6.298.** Функция определена на всей числовой оси, кроме

$x = 0$; $y_{\min} = 3$ при $x = -1$; $P(-\sqrt[3]{2,5} \approx -1,35; -2,7)$ – точка перегиба; асимптоты: $x = 0$, $y = 0$. **6.300.** Функция определена на всей числовой оси;

$y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = 1$ при $x = -1$; точек перегиба нет; асимптот нет.

6.303. Область определения – промежуток $-1 \leq x \leq 1$, нечётная; $y_{\min} = -0,5$

при $x = -0,7$; $y_{\max} = 0,5$ при $x = 0,7$; $P(0;0)$ – точка перегиба; асимптот

нет. **6.304.** Функция определена на всей числовой оси; экстремумов нет;

$P_1(0;1)$, $P_2(1;0)$ – точки перегиба; асимптота: $y = -x$. **6.306.** Функция

определена при $x > 0$; $y_{\min} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$ при $x = e$; точек перегиба нет;

асимптот нет. **6.308.** Функция определена при $x > 0$; $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0,37$

при $x = e$; $P\left(e^{3/2} \approx 4,48; \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0,33\right)$ – точка перегиба; асимптоты:

$x = 0$, $y = 0$. **6.312.** Функция определена всюду, кроме $x = 0$; $y_{\min} = e$

при $x = 1$; точек перегиба нет; асимптоты $x = 0$, $y = 0$. **6.320.** $y_{\text{наим.}} = \frac{1}{4}$ при

$x = -1$, $y_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = 0$. **6.326.** $y_{\text{наим.}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{наиб.}} = 1$ при

$x = \frac{\pi}{4}$. **6.327.** $y_{\text{наим.}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{наиб.}} = 2 - \ln 3$ при $x = 2$. **6.328.** $\frac{18}{\pi + 4}$.

6.329. Отношение длины к ширине равно 2. **6.330.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **6.331.** $\frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

6.332. $h = 2R$, где h – высота, R – радиус основания. **6.333.** 6 см.

6.334. $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **6.335.** 3) 4 дня.

Глава 7

7.1. $\ln|x| + \frac{3}{x} + C$. **7.2.** $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$. **7.3.** $\frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + C$.

7.4. $\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$. **7.5.** $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$. **7.6.** $\frac{6x \cdot \sqrt[6]{x}}{7} - \frac{4x \cdot \sqrt[3]{x}}{3} + C$.

7.7. $\frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C$. **7.8.** $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C$. **7.9.** $-\frac{1}{x} +$

$+\operatorname{arctg} x + C$. **7.10.** $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$. **7.11.** $\frac{1}{\sqrt{27}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{27}} + C$. **7.12.** $x -$

$-\operatorname{arctg} x + C$. **7.13.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} + C$. **7.14.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C$.

7.15. $\ln|x + \sqrt{4 + x^2}| + C$. **7.16.** $\ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$. **7.17.** $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$.

7.18. $\operatorname{tg} x - x + C$. **7.19.** $-\operatorname{ctg} x - x + C$. **7.20.** $x - 3\operatorname{ctg} x + C$. **7.21.** $e^x + \operatorname{tg} x + C$.

7.22. $\frac{3^x \cdot e^x}{\ln 3 + 1} + C$. **7.23.** $-\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C$. **7.24.** $e^x + \ln|x| + C$.

7.27. $2\sqrt{x^2 + 1} + C$. **7.29.** $\frac{1}{24}(2 + 3x)^8 + C$. **7.30.** $\frac{2}{9}(2 + 3x)^{3/2} + C$.

7.31. $\frac{2}{3}\sqrt{2 + 3x} + C$. **7.32.** $\frac{1}{6}(3 + 5x)^{6/5} + C$. **7.33.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 3| + C$.

7.34. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C$. **7.35.** $\frac{11}{4}\ln|3 + 2x| - \frac{3}{2}x + C$. **7.36.** $x + \ln|2x + 1| + C$.

7.37. $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + \operatorname{arctg} x + C$. **7.38.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C$. **7.39.** $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} + C$.

7.40. $2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$. **7.41.** $\frac{2\ln x \cdot \sqrt{\ln x}}{3} + C$. **7.42.** $\ln|\ln x| + C$.

7.43. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. **7.44.** $-e^{-x} + C$. **7.45.** $2e^{\sqrt{x}} + C$. **7.46.** $\ln(e^x + 1) + C$.

- 7.47.** $\arcsin \frac{e^x}{3} + C$. **7.48.** $\frac{1}{\cos x} + C$. **7.49.** $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C$. **7.50.** $e^{\sin x} + C$.
7.51. $-\ln(\cos^2 x) + C$. **7.52.** $\sqrt[3]{\sin x} + C$. **7.53.** $-\frac{2\cos^7 x}{7} + C$.
7.54. $\frac{1}{2}\cos(1-x^2) + C$. **7.55.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$. **7.56.** $-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} x} + C$.
7.57. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + C$. **7.58.** $\frac{3}{4}\arcsin x \cdot \sqrt[3]{\arcsin x} + C$. **7.59.** $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x+3}{2} + C$.
7.60. $\frac{1}{\arccos x} + C$. **7.61.** $-3\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$. **7.62.** $\operatorname{arctg}(x+1) + C$.
7.63. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right| + C$. **7.64.** $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$. **7.65.** $\ln|x+2+\sqrt{4x+x^2}| + C$.
7.66. $\sin x - x \cos x + C$. **7.67.** $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **7.68.** $\frac{5}{9}\sin 3x -$
 $-\frac{1}{3}(5x+6) \cdot \cos 3x + C$. **7.69.** $C - e^{-x} \cdot (x+1)$. **7.70.** $e^{2x} \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{2}x\right) + C$.
7.71. $-\frac{x \ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2} + C$. **7.72.** $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$. **7.73.** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$.
7.74. $-\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$. **7.75.** $\frac{x}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. **7.76.** $x \cdot \ln x - x + C$.
7.77. $\frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1)\right) + C$. **7.78.** $2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C$.
7.79. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$. **7.80.** $x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$.
7.81. $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ **7.82.** $2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$.
7.83. $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. **7.84.** $\frac{1}{2}(x^2+1) \cdot \operatorname{arcctg} x + \frac{x}{2} + C$.
7.85. $2\sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln|x+1| + C$. **7.86.** $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}) + C$.
7.87. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$. **7.88.** $x \cdot (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$.
7.89. $C - e^{-x}(2 + 2x + x^2)$. **7.90.** $2^x \left(\frac{x^2}{\ln 2} - \frac{2x}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2}\right) + C$.
7.91. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$. **7.92.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$. **7.93.** $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}
7.94. \quad & \frac{2}{9}. & 7.95. \quad & x - 2\ln|x+2| + C. & 7.96. \quad & \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-3| + C. \\
7.97. \quad & \frac{x^3}{3} + 2x + \sqrt{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C. & 7.98. \quad & \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C. & 7.99. \quad & \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| + C. \\
7.100. \quad & \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right| + C. & 7.101. \quad & \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right| + C. & 7.102. \quad & \frac{1}{10}\ln|2x+1| + \frac{2}{5}\ln|x-2| + C. \\
7.103. \quad & \ln\left|\frac{x^3(x-1)}{x+1}\right| + C. & 7.104. \quad & x + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C. & 7.105. \quad & \frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C. \\
7.106. \quad & \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \operatorname{arctg} x + C. & 7.107. \quad & x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C. & 7.108. \quad & \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C. \\
7.109. \quad & \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C. & 7.110. \quad & \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C. & 7.111. \quad & \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right| - \\
& - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. & 7.113. \quad & \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x+1)^3}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\right| + \frac{5}{4}\operatorname{arctg} x + C. \\
7.114. \quad & 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{3}{x+1} + C. & 7.115. \quad & \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C. & 7.116. \quad & \frac{1}{8}\sin 4x - \\
& - \frac{1}{20}\sin 10x + C. & 7.117. \quad & \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{16}\cos 8x + C. & 7.118. \quad & 3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + C. \\
7.119. \quad & -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C. & 7.120. \quad & \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x + C. \\
7.121. \quad & \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C. & 7.122. \quad & C - \frac{1}{\sin x} - \sin x. & 7.123. \quad & -2\sqrt{\cos x} + \\
& + \frac{2}{5}\cos^2 x \cdot \sqrt{\cos x} + C. & 7.124. \quad & C - \frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x|. & 7.125. \quad & \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + \\
& + x + C. & 7.126. \quad & \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C. & 7.127. \quad & \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C. & 7.128. \quad & \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \\
& + \frac{1}{16}\sin 4x + C & 7.129. \quad & \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. & 7.130. \quad & \frac{1}{10}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \\
7.131. \quad & \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right| + C. & 7.132. \quad & -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + C. & 7.133. \quad & \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + C. \\
7.134. \quad & (x+5)\cdot\sqrt{x+5}\cdot\left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{3}\right) + C. & 7.135. \quad & 2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + C.
\end{aligned}$$

7.137. $x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C.$ **7.139.** $2\sqrt{x+2} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right| + C.$

7.142. $\frac{2}{15}(3x^2 + 4x + 8) \cdot \sqrt{x-1} + C.$ **7.143.** $2(\sqrt[4]{x} + 1)^2 + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.$

7.144. $3\ln|\sqrt[3]{x} + 1| + C.$ **7.146.** $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5} + C.$

7.148. $\frac{9}{2}\left(\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{9} \cdot \sqrt{9-x^2}\right) + C.$ **7.149.** $\arccos \frac{1}{x} + C.$ **7.150.** $-\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) + C.$

7.151. $y = \frac{1}{4}x^2 + 2.$ **7.152.** $\ln 2 + \frac{21}{8}.$

7.153. $\frac{1}{3}(x^2 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x} + C.$ **7.154.** $-\frac{2}{75}(1 - 6x^5) \cdot \sqrt[4]{1 - 6x^5} + C.$

7.156. $\ln|x^2 - 4| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$ **7.157.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C.$ **7.159.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$

7.160. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C.$ **7.161.** $-\frac{2}{3}(1 - e^x) \cdot \sqrt{1 - e^x} + C.$ **7.162.** $-\arcsin e^{-x} + C.$

7.163. $\arcsin \frac{\ln x}{\sqrt{3}} + C.$ **7.164.** $-\frac{1}{2}\ln|1 - \ln^2 x| + C.$ **7.165.** $2\sqrt{1-x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + C.$

7.166. $\arcsin(2x-1) + C.$ **7.167.** $-\frac{1}{24}(1 - 5x^4) \cdot \sqrt[5]{1 - 5x^4} + C.$

7.168. $\frac{2}{3}(1-x) \cdot \sqrt{1-x} + C.$ **7.169.** $\frac{2}{3}\arccos x \cdot \sqrt{\arccos x} + C.$ **7.170.** $\frac{1}{2}\cos \frac{1}{x^2} + C.$

7.171. $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x) + C.$ **7.172.** $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C.$

7.173. $-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$ **7.174.** $\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| + C.$

7.175. $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| + C.$ **7.176.** $\frac{1}{2}\ln(5 - \cos 2x) + C.$

7.177. $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$ **7.178.** $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$

7.179. $\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$ **7.180.** $C - \frac{2\ln x + 1}{4x^2}.$ **7.181.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

7.182. $\frac{2}{3}\ln x \cdot \sqrt{\ln x} + C.$ **7.183.** $\frac{2\sqrt{1+2^x}}{\ln 2} + C.$ **7.184.** $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$

7.185. $\frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arctg} 2^x + C.$ **7.186.** $\frac{1}{12} \sqrt{8x^3 + 27} + C.$ **7.187.** $-\frac{1}{4(2+x^2)^2} + C.$
7.188. $\frac{\ln^3 x}{3} + 2 \ln x + C.$ **7.189.** $\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}| + C.$ **7.190.** $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + C.$
7.191. $2 \sin \sqrt{x} + C.$ **7.192.** $\frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$ **7.193.** $\frac{\operatorname{tg} 4x}{4} - x + C.$
7.194. $-\frac{1}{5} \ln(5 + \cos 5x) + C.$ **7.195.** $-\ln(3 + e^{-x}) + C.$ **7.196.** $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$
7.197. $\frac{1}{3} \sqrt{2x-1}(x-2) + C.$ **7.198.** $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$ **7.199.** $\sqrt{2x-x^2} -$
 $-\arcsin(x-1) + C.$ **7.200.** $\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{2 \cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.$

Глава 8

8.3. $4e.$ **8.4.** $-\frac{1}{2}(e^{-16} - 1).$ **8.5.** $\frac{8}{3}.$ **8.6.** $\frac{1}{3} \ln 13.$ **8.7.** $\frac{2}{9}.$ **8.8.** $\ln \frac{4}{3}.$
8.10. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{8}.$ **8.11.** $\frac{1}{3}.$ **8.12.** $2.$ **8.13.** $4 - 2 \ln 3.$ **8.16.** $39,3.$
8.17. $3 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$ **8.18.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$ **8.19.** $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{6}}.$ **8.20.** $2 - \frac{\pi}{2}.$ **8.21.** $\ln 1,5.$
8.22. $\frac{4}{5} (2\sqrt[4]{2} - 1).$ **8.23.** $-\frac{3}{2} \ln 2.$ **8.26.** $\frac{\pi}{2} - 2.$ **8.28.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$ **8.29.** $\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right).$
8.30. $\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$ **8.32.** $\frac{e^2 - 5}{4e^2}.$ **8.34.** $1.$ **8.36.** $2e - 1.$ **8.37.** $1.$ **8.38.** Расходится.
8.39. Расходится. **8.40.** $\frac{1}{4}.$ **8.41.** $\frac{3}{4}.$ **8.42.** Расходится. **8.43.** $\pi.$
8.44. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$ **8.45.** Расходится. **8.46.** $\frac{1}{4}.$ **8.47.** $\frac{1}{4}.$ **8.48.** $\frac{2}{e}.$
8.49. $\frac{1}{3}.$ **8.50.** $\frac{\pi \sqrt{2\pi}}{6}.$ **8.51.** $2.$ **8.52.** $1.$ **8.53.** $1.$ **8.54.** $\pi.$ **8.55.** $\frac{\pi}{2}.$
8.56. $\frac{8}{3}.$ **8.57.** $-1.$ **8.58.** Расходится. **8.59.** Расходится. **8.60.** Расходится.
8.61. $6.$ **8.62.** $-\frac{2}{e}.$ **8.63.** Расходится. **8.64.** $\frac{4}{3}.$ **8.65.** $4,5.$ **8.66.** $\frac{8}{3}.$
8.67. $2 - \frac{\pi}{2}.$ **8.68.** $4,5.$ **8.69.** $\frac{8}{3}.$ **8.70.** $\frac{1}{3}.$ **8.71.** $2 - \frac{\pi}{2}.$ **8.72.** $\frac{36\sqrt{3}}{5}.$

8.73. $\ln 2$. **8.74.** $3,75 - \ln 2$. **8.75.** $3\left(1 - \frac{1}{4\ln 2}\right)$. **8.76.** $\frac{8}{9}$. **8.77.** $\frac{14}{3}$.
8.78. $\frac{1}{2}(e^6 + e^{-6} - 2)$. **8.79.** $\frac{1}{3} + \ln 2$. **8.80.** $\frac{65}{3}$. **8.81.** $\frac{14}{3} - 2\sqrt{3}$. **8.82.**
 $12\pi^3$. **8.83.** π . **8.84.** π . **8.85.** $\frac{\pi}{4}$. **8.86.** 2π . **8.87.** 4π . **8.88.** $\frac{3\pi}{2}$.
8.89. 6π . **8.90.** 3π . **8.91.** 3π . **8.92.** 2 . **8.93.** 2 . **8.94.** 9π . **8.95.** 4π .
8.96. 8π . **8.97.** 6π . **8.98.** $\frac{3\pi}{8}$. **8.99.** 3π . **8.100.** $4\pi - 3\sqrt{3}$. **8.101.** $\frac{4}{3}\pi + \frac{5\sqrt{3}}{4}$.
8.102. 8π . **8.103.** $\frac{16\pi}{15}$. **8.104.** $\frac{\pi^2}{12}$. **8.105.** $\frac{\pi}{20}(6\pi + 5\sqrt{3})$. **8.106.** $\frac{19\pi}{48}$.
8.107. $\frac{48\pi}{15}$. **8.108.** $\frac{\pi a^5}{30}$. **8.109.** $2\pi(\ln 2 - 1)^2$. **8.110.** 12π . **8.111.** 5π .
8.112. $\frac{512\pi}{15}$. **8.113.** $\frac{64\pi}{5}$. **8.114.** $\frac{4\pi}{7}$. **8.115.** $\frac{7\pi}{6}$. **8.116.** $\frac{\pi}{2}$. **8.117.** $\frac{\pi}{2}$.
8.118. $\frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8)$. **8.124.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **8.125.** $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
8.126. $\sqrt{1+e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+e^2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{1+e^2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)}$. **8.127.** $\frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$. **8.128.** 12 .
8.129. 3 . **8.130.** $\frac{R\pi^2}{2}$. **8.131.** 24 . **8.132.** $\frac{3\pi}{2}$.

Глава № 9

9.1. Вся плоскость за исключением точек на прямой $y = x$ ($D: y \neq x$).

9.4. Часть плоскости, находящаяся в треугольнике $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1. \end{cases}$ **9.10.** Часть

плоскости, лежащая в полосе $-3 \leq x \leq -1$. **9.12.** $y^2 > 4x - 8$. **9.13.** $y = x^2 + c^2$.

9.15. $y = x^2(c+1)$, $x \neq 0$. **9.23.** $y = \pm \frac{x}{c}$, $c > 0$, $y \neq 0$. **9.32.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$. **9.33.** $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. **9.34.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y^{\sin x} \ln y \cdot \cos x$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot y^{\sin x - 1}. \quad \mathbf{9.41.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z} - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right).$$

$$\mathbf{9.46.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad \mathbf{9.50.} \quad 2y^3(2+xy^2)e^{-xy^2}.$$

$$\mathbf{9.52.} \quad (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1) \cdot e^{-xyz}. \quad \mathbf{9.64.} \quad \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}. \quad \mathbf{9.68.} \quad \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

$$\mathbf{9.71.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x+z}. \quad \mathbf{9.72.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yx}{z^2 + xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{zx}{z^2 + xy}.$$

$$\mathbf{9.75.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(xy+xz+yz)(y+z) - yz}{\cos(xy+xz+yz)(x+y) - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(xy+xz+yz)(x+z) - xz}{\cos(xy+xz+yz)(x+y) - xy}.$$

$$\mathbf{9.77.} \quad 1) \quad d_x z = \frac{dx}{y}, \quad d_y z = -\frac{xdy}{y^2}, \quad dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}; \quad 5) \quad d_x u = y \cdot z \cdot x^{yz-1} dx,$$

$$d_y u = z \cdot x^{yz} \cdot \ln x dy, \quad d_z u = y \cdot x^{yz} \cdot \ln x dz, \quad du = y \cdot z \cdot x^{yz-1} dx + z \cdot x^{yz} \cdot \ln x dy +$$

$$x^{yz} \cdot y \cdot \ln x dz.$$

$$\mathbf{9.78.} \quad \frac{1}{270}.$$

$$\mathbf{9.81.} \quad 1) \quad 4, 18.$$

$$\mathbf{9.85.} \quad \{-2; 1\}.$$

$$\mathbf{9.87.} \quad \overline{\text{grad } z} = -0.32\bar{i} - 0.64\bar{j}, \quad |\overline{\text{grad } z}| = 0.32\sqrt{5}. \quad \mathbf{9.89.} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = 2 + \sqrt{2}. \quad \mathbf{9.90.} \quad 0.$$

$$\mathbf{9.91.} \quad 1) \quad \overline{\text{grad } z} = -6\bar{i} + 2\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = 2; \quad 6) \quad \overline{\text{grad } z} = -\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{12}{13}; \quad 9) \quad \overline{\text{grad } z} = \frac{1}{2}\bar{i},$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \quad \mathbf{9.92.} \quad 4) \quad \frac{5\sqrt{2}}{12}; \quad 5) \quad \sqrt{\frac{5}{12}}. \quad \mathbf{9.93.} \quad 1) \quad \text{tg } \varphi \approx 0.342, \quad \varphi \approx 18^\circ 52';$$

$$2) \quad \text{tg } \varphi \approx 4.87, \quad \varphi \approx 78^\circ 24'. \quad \mathbf{9.94.} \quad -\bar{j}. \quad \mathbf{9.95.} \quad \left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \text{ и } \left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right).$$

$$\mathbf{9.96.} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad \mathbf{9.97.} \quad 1) \quad 2x + 4y + z - 13 = 0; \quad 4) \quad 6x + y - z - 2 = 0;$$

$$6) \quad x + 2y - 5 = 0. \quad \mathbf{9.98.} \quad 1) \quad \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}; \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1};$$

$$6) \quad \frac{x-1}{10} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-9}{-1}. \quad \mathbf{9.99.} \quad z_{\max} = 0 \text{ в точке } (0; -1). \quad \mathbf{9.100.} \quad z_{\max} = 1$$

$$\text{в точке } (0; 0). \quad \mathbf{9.101.} \quad z_{\min} = 0 \text{ в точке } (-1; 0). \quad \mathbf{9.102.} \quad z_{\min} = -4 \text{ в точке}$$

$$(-2; 1). \quad \mathbf{9.103.} \quad z_{\min} = -\frac{7}{3} \text{ в точке } \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right). \quad \mathbf{9.104.} \quad z_{\max} = 12 \text{ в точке}$$

$$(4; 4). \quad \mathbf{9.105.} \quad z_{\max} = 8 \text{ в точке } (2; -2). \quad \mathbf{9.106.} \quad z_{\min} = -\frac{2}{e} \text{ в точке } (0; -2).$$

- 9.107.** Экстремумов нет. **9.108.** $z_{\max} = 13$ в точке $(4; -2)$. **9.109.** $z_{\max} = 738,05$ в точке $(9; 0,05)$. **9.110.** $z_{\min} = 0$ в точке $(1; 0,5)$. **9.111.** $z_{\min} = -1$ в точке $(1; 1)$. **9.112.** $z_{\min} = 0$ в точке $(0; 0)$, $z_{\max} = \frac{125}{27}$ в точке $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$.
- 9.113.** $z_{\text{наим.}} = -28$ в точке $(0; 2)$, $z_{\text{наиб.}} = \frac{4}{3}$ в точке $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- 9.114.** $z_{\text{наим.}} = -\frac{13}{4}$ в точке $(0,5; -3)$, $z_{\text{наиб.}} = -\frac{2}{27}$ в точке $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right)$.
- 9.115.** $z_{\text{наим.}} = -20$ в точке $(0; -2)$, $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точке $(0; 0)$.
- 9.116.** $z_{\text{наим.}} = -4$ в точках $(0; -2)$ и $(-2; 0)$, $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точке $(0; 0)$.
- 9.117.** $z_{\text{наиб.}} = 9$ в точках $(-1; 1)$ и $(1; -1)$, $z_{\text{наим.}} = 0$ в точке $(0; 0)$.
- 9.118.** $z_{\text{наим.}} = -14$ в точке $(2; 8)$, $z_{\text{наиб.}} = 18$ в точке $(-2; 8)$. **9.119.** $z_{\text{наим.}} = 0$ в точках $(0; 0)$ и $(4; 4)$, $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точках $(2; 2)$ и $(0; 4)$.
- 9.120.** $z_{\text{наим.}} = -12$ в точке $(4; 0)$, $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точке $(0; 0)$.
- 9.121.** $z_{\text{наим.}} = -3$ в точке $(0; 3)$, $z_{\text{наиб.}} = 1$ в точке $(2; 3)$.

Список литературы

1. Бугров, Я. С. Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов–на–Дону : Феникс, 2007. – 350 с.
2. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – Санкт-Петербург : Профессия, 2003. – 200 с.
3. Цубербиллер, О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 336 с.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Электронный ресурс]. В 2 ч. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – Москва : Оникс 21 век, 2003. – 720 с. – Режим доступа : <http://vipbook.info/nauka-i-ucheba/matematika/190523-danko-pe-popov-ag-vyssshaya-matematika-v-uprazhneniyah-i-zadachah-chasti-12-6-e-izdanie.html>.
5. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – Москва : Физматлит, 2004. – 336 с.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие / под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – Москва : ИНФРА-М, 2008. – 575 с.
7. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Айрис–пресс, 2003. – 576 с.
8. Шипачёв, В. С. Задачник по высшей математике / В. С. Шипачёв. – Москва : Высш. шк., 2003. – 304 с.
9. Берман, Г. С. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. С. Берман. – Санкт-Петербург : Профессия, 2001. – 432с.
10. Основы дифференциального исчисления / Ю. М. Нейман, Т. М. Королёва, Н. А. Кувекина [и др.]. – Москва : Центр тестирования МО РФ, 2002. – 23 с.
11. Основы интегрального исчисления / Ю. М. Нейман, Т. М. Королёва, Н. А. Кувекина [и др.]. – Москва : Центр тестирования МО РФ, 2002. – 23 с.
12. Мазова, Р. Х. Аналитическая геометрия для технических ВУЗов : учеб. пособие / Р. Х. Мазова, В. Н. Неймарк. – Нижний Новгород : Нижегород. гос. техн. ун-т, 2014. – 127 с.

Неймарк Валерия Николаевна
Опалёва Галина Павловна
Петров Владислав Викторович
Сенниковская Людмила Семёновна

Сборник задач и упражнений по математике

Часть 1

Учебное пособие

Редактор
Т.Л. Батаева

Подписано в печать Формат 60x90 1/8 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 6,4. Усл. печ. л. 6,7. Тираж 500 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет» 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65