Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
(ННГАСУ)

Учебное пособие по математике для обучающихся по направлению «Строительство»

Приложения дифференциального исчисления

Нижний Новгород
ННГАСУ
2015

УДК 517.9

Учебное пособие по математике для обучающихся по направлению «Строительство». [Текст]: учебное пособие для обучающихся / Нижегор. гос. архитектур.- строит. ун-т; сост. Е.А.Бондарь, Т.А.Пушкова, П.В. Столбов – Н.Новгород: ННГАСУ, 2015.- с.

Учебное пособие по математике предназначено для обучающихся на первом курсе очной формы по направлению «Строительство». Данное пособие содержит краткий теоретический материал, сопровождающийся многочисленными примерами и задачами разного уровня сложности, а также индивидуальные задания для расчетно-графической работы обучающихся по разделу «Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной».

Составители: Е.А.Бондарь, Т.А.Пушкова, П.В. Столбов.

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса очной формы, обучающихся по направлению подготовки «Строительство».

Учебное пособие посвящено приложениям дифференциального исчисления – одному из разделов математики, который имеет широкое применение в различных областях знаний.

Цель данного учебного пособия состоит в том, чтобы способствовать лучшему усвоению теории, развитию математического и логического мышления у обучающихся, привитию им навыков решения задач, пониманию их физической сущности.

В первой части пособия рассматривается применение дифференциального исчисления к приближенным вычислениям значений функции в точке, во второй – правило Лопиталя для раскрытия различных типов неопределенностей, в третьей – применение дифференциального исчисления к исследованию функций одного переменного и построению их графиков, в четвертой – нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке.

В каждой части кратко приводится теоретический материал, который иллюстрируется разнообразными примерами и задачами разного уровня сложности, а также в каждом из четырех разделов предложены по тридцать вариантов заданий для выполнения расчетно-графической работы обучающимися.

При создании пособия авторы использовали некоторые методические приемы и задачи из литературы, список которой приведен в конце пособия.

Авторы будут признательны за любые отзывы, пожелания и критические замечания, которые можно присылать по адресу электронной почты k_vm@nngasu.ru.

Применение производной к вычислению приближенного значения функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то есть имеет конечную производную в этой точке

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Если $f'(x_0) \neq 0$, то $\alpha \cdot \Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $f'(x_0) \cdot \Delta x$. Поэтому первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$ называют главной частью приращения функции Δy или дифференциалом функции. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем $f'(x_0) \cdot \Delta x.$, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx. Учитывая, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, получаем формулу для вычисления приближенного значения функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить приближенное значение выражения $\sqrt[3]{8{,}24}$.

<u>Решение.</u> Требуется вычислить приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8{,}24$. Тогда $x_0 = 8$ и $\Delta x = x - x_0 = 8{,}24 - 8 = 0{,}24$. Чтобы воспользоваться формулой (1), вычислим $f(x_0)$ и $f'(x_0)$:

$f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2,$

$f'(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}.$

Отсюда по формуле (1) получаем $\sqrt[3]{8,24} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0,24 = 2,02$.

Результат вычисления на калькуляторе $\sqrt[3]{8,24} \approx 2,019803$.

<u>Пример 2.</u> Вычислить приближенное значение выражения $\ln\frac{3,03}{2,97}$.

<u>Решение.</u> Требуется вычислить приближенное значение функции $f(x) = \ln\frac{3+x}{3-x}$ при $x = 0,03$. Тогда $x_0 = 0$ и $\Delta x = x - x_0 = 0,03 - 0 = 0,03$. Чтобы воспользоваться формулой (1), вычислим $f(x_0)$ и $f'(x_0)$:

$$f(x_0) = \ln\frac{3}{3} = \ln 1 = 0,$$

$$f'(x) = \frac{3-x}{3+x} \cdot \frac{1\cdot(3-x) - (-1)\cdot(3+x)}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{6}{3\cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда по формуле (1) получаем $\ln\frac{3,03}{2,97} \approx 0 + \frac{2}{3} \cdot 0,03 = 0,02$.

Результат вычисления на калькуляторе $\ln\frac{3,03}{2,97} \approx 0,020001$.

<u>Пример 3.</u> Вычислить приближенное значение выражения $\frac{1}{\cos 59^\circ}$.

<u>Решение.</u> Найдем приближенное значение функции $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ при $x = 59^\circ = 60^\circ - 1^\circ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}$. Тогда $x_0 = \frac{\pi}{3}$ и $\Delta x = x - x_0 = -\frac{\pi}{180}$. Чтобы воспользоваться формулой (1), вычислим $f(x_0)$ и $f'(x_0)$:

$$f(x_0) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{0,5} = 2,$$

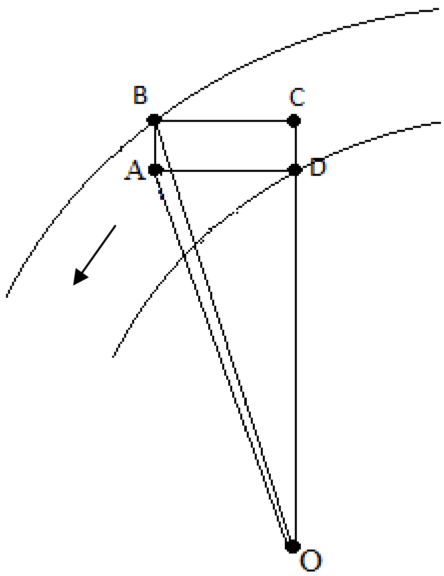
$$f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}} \cdot (-\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{0,5^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$ Отсюда по формуле (1) получаем $\frac{1}{\cos 59^\circ} \approx 2 + 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 1,94$, где $\pi \approx 3,14$, $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Результат вычисления на калькуляторе $\frac{1}{\cos 59^\circ} \approx 1,941604$.

Пример 4. Шар радиуса 20 см был нагрет, отчего его радиус увеличился на 0,01см. На сколько приближенно увеличится объем шара?

Решение. Объем шара вычисляется по формуле $V(r)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$, тогда изменение объема шара можно будет вычислить с помощью формулы $\Delta V(r_0)\approx V'(r_0)\cdot\Delta r$. Здесь $r_0=20$см, $\Delta r=0{,}01$см. Тогда $V'(r)=4\pi r^2 \Rightarrow V'(r_0)=4\pi\cdot 20^2=1600\pi$, значит, объем шара увеличится на $\Delta V(r_0)\approx 1600\pi\cdot 0{,}01=16\pi\ см^3$.

Пример 5. Автомобиль, проходящий поворот, занимает на проезжей части большую ширину, чем на прямолинейном участке дороги. Найдите необходимое уширение однополосной дороги на повороте радиуса r (r - радиус внешнего края дороги) для автомобиля, продольная база (расстояние между осями) которого равна l.



Решение. На повороте все четыре колеса автомобиля катятся по дугам концентрических окружностей (см. рисунок), причем заднее внутреннее колесо D описывает окружность наименьшего, а переднее наружное B – наибольшего радиусов. Поэтому ширина дорожной полосы на повороте $h=OB-OD$, а искомое уширение

$$\Delta h=h-CD=OB-OC=r-r\sqrt{1-\left(\frac{l}{r}\right)^2}.$$

Величина $\dfrac{l}{r}$ довольно мала при больших r. Поэтому для вычисления значения $\sqrt{1-\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}$ можно воспользоваться формулой (1), где $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$,

$\Delta x=-\left(\dfrac{l}{r}\right)^2$; $\sqrt{1-\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}\approx 1-\dfrac{l^2}{2r^2}$.

Получили формулу $\Delta h=\dfrac{l^2}{2r}$, которая используется на практике.

<u>Задание № 1</u>

С помощью дифференциала вычислить приближенно значение числового выражения $(\pi\approx 3{,}14)$.

вариант		вариант	
1.	$\dfrac{\cos 46^\circ}{\sin 44^\circ}$	16.	$\dfrac{\sin 44^\circ}{\sin 46^\circ}$
2.	$arctg\sqrt{0{,}97}$	17.	$arctg(1-\cos 89^\circ)$
3.	$\ln\left(e^2+0{,}2\right)$	18.	$arctg(0{,}96)^9$
4.	$\ln tg 46^\circ$	19.	$\ln\left(7-\sqrt{35{,}9}\right)$
5.	$\sqrt[3]{7+1{,}02^2}$	20.	$\sqrt{24+e^{0{,}03}}$
6.	$arctg(1{,}03)^2$	21.	$\ln\left(1+\cos 88^\circ\right)$
7.	$\ln\left(\dfrac{3{,}02}{2{,}98}\right)$	22.	$\ln\sqrt{\dfrac{1}{0{,}98}}$
8.	$arctg\dfrac{4{,}01}{3{,}99}$	23.	$\dfrac{1}{\ln 0{,}99}$
9.	$\sqrt[5]{\cos 89^\circ+32}$	24.	$\ln(e-0{,}03^2)$

10.	$(1-\ln 0{,}98)^2$	25.	$\left(5-\sqrt{1{,}02}\right)^2$
11.	$e^{2-\sqrt{3{,}98}}$	26.	$e^{\sin 2^\circ}$
12.	$arctge^{0{,}01}$	27.	$\sqrt[3]{tg\,44^\circ}$
13.	$\sqrt[3]{\cos 1^\circ}$	28.	$\arcsin\left(2{,}5-\sqrt[3]{8{,}03}\right)$
14.	$arcctg\sqrt[3]{1{,}02}$	29.	$arctg\left(3-\sqrt{4{,}02}\right)$
15.	$\dfrac{1}{\ln(e-0{,}01)}$	30.	$\dfrac{1}{4-\sqrt[4]{15{,}97}}$

<u>Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей</u>

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, который основан на применении производных.

<u>Теорема (Правило Лопиталя).</u> Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi'(x)\neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, т. е. частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке x_0 представляет собой неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, если передел в правой части этого равенства существует.

<u>Замечание 1.</u> Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке x_0 также есть неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям теоремы, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д.

Замечание 2. Правило Лопиталя справедливо и в том случае, когда $x \to \infty$.

Замечание 3. В случае неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$ или $[\infty - \infty]$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя. Если же имеем неопределенности вида $[0^0]$ или $[\infty^0]$ или $[1^\infty]$, то следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 0}(e^x - x - 1) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \sin^2 3x = 0$ и функции $f(x) = e^x - x - 1$ и $\varphi(x) = \sin^2 3x$ дифференцируемы, то можно применить правило Лопиталя

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(\sin^2 3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3\sin 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(3\sin 6x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{18\cos 6x} = \frac{1}{18}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{tgx}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(x - \dfrac{\pi}{2}) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty$, имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x) = \ln(x - \dfrac{\pi}{2})$ и $\varphi(x) = tgx$ дифференцируемы в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (кроме самой этой точки), следовательно, можно применить правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{tgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(x-\frac{\pi}{2}))'}{(tgx)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 x)'}{(x-\frac{\pi}{2})'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos x\cdot\sin x}{1} = 0 .$$

<u>Пример 3.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(tgx\cdot\ln x)$.

<u>*Решение.*</u> Так как $\lim\limits_{x\to 0} tgx = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$, следовательно, имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}(tgx\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/tgx} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(-2\sin^2 x)'}{x'} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{1} = 0 .$$

<u>Пример 4.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

<u>*Решение.*</u> В данном случае имеем неопределенность вида $[\infty^0]$. Прологарифмируем заданную функцию: $y = (ctgx)^{\sin x}$

$$\ln y = \ln(ctgx)^{\sin x} = \sin x\cdot\ln ctgx$$

Далее рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}(\sin x\cdot\ln ctgx) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln ctgx}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln ctgx)'}{(1/\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{ctgx\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 .$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = 0$, то есть $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0} y\right) = 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x} = 1$.

Применение правила Лопиталя при вычислении предела часто приводит к громоздким выражениям. В этом случае целесообразно представить предел в виде произведения нескольких пределов.

<u>Пример 5.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\dfrac{x}{\cos x}}{e^{x^2}-e^{-x^2}}$.

<u>Решение.</u> В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\dfrac{x}{\cos x}}{e^{x^2}-e^{-x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{x}{\cos x}}{e^{-x^2}\cdot(e^{2x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\cos x\cdot e^{-x^2}\cdot(e^{2x^2}-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot e^{-x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{e^{2x^2}-1}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{e^{2x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(e^{2x^2}-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^{2x^2}\cdot 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4e^{2x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{x'}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0\,.$$

<u>Задание №2</u>

Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

Вариант		
1	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 5x)}$
2	$a)\ \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ctg(x-1)}{\ln(1-x)}$

3	а) $\lim\limits_{x\to 3+0} \sqrt[5]{x-3}\cdot\ln(x^2-5x+6)$	б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$
4	а) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$
5	а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$
6	а) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-arctgx}{2x^3}$
7	а) $\lim\limits_{x\to 1-0} (1-x)\cdot\ln(1-x)$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{tgx}-1}{tgx-x}$
8	а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x}{x-\frac{\pi}{4}}$	б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$
9	а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-ctgx\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$
10	а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{\cos x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
11	а) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x\cdot\ln(x-1)$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$
12	а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg\,2x}$	б) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{\ln(2-x)}{ctg\,\frac{\pi x}{2}}$
13	а) $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot(\ln(2+x)-\ln(x+1))$	б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{tg^2 2x}$
14	а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$	б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$

15	$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{2}{x}\right)^{x}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$
16	$a)\ \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+tg^{2}x}{x\cdot\sin x}$
17	$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$
18	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
19	$a)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{\sin 2x}$
20	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^{2}}-1}$
21	$a)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(2-\frac{x}{2}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^{x}+3x^{2}}{arctgx-\sin x-\frac{x^{3}}{6}}$
22	$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\pi-2\mathrm{arctg}x}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+5x-e^{5x}}{\sin^{2}4x}$
23	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 5x^{2}\right)^{\frac{1}{x^{3}}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{tgx-\sin x}$
24	$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^{2}+2}{2x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x^{2}}+3\right)}{1-2x^{2}}$
25	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(e^{x}+1\right)-2\left(e^{x}-1\right)}{x^{3}}$

26	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot ctgx-1}{x^2}$
27	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{ctg^2x}$	$б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\mathrm{arctgx}^2-\pi}$
28	$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^x\right)}{\ln(3-x)}$
29	$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 3x}}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$
30	$a)\ \lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(\mathrm{e}^x-1\right)}}$	$б)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\sin\frac{\pi x}{2}}{\sin^2(x-1)}$

Применение производной к исследованию функций и построению их графиков

Производная – мощный инструмент для исследования числовых функций. С помощью производных первого и второго порядка изучаются общие свойства функций. Пользуясь результатами этого изучения, можно составить ясное представление о характере функции и построить ее график.

1) Точки экстремума и участки монотонности функции

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на интервале $(a;b)$, если для любых точек $x_1,\ x_2\in(a;b)$ таких, что $x_1<x_2$, имеет место неравенство: $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и для любого $x \in (a;b)$: $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $y = f(x)$, если:

1) функция $y = f(x)$ определена в некоторой ε - окрестности точки x_0;

2) для любого $x \neq x_0$ из ε- окрестности точки x_0 справедливо неравенство: $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ (см. рис. 1 и 2).

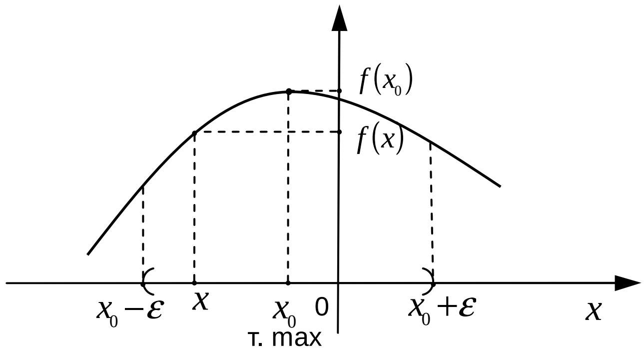


Рис. 1

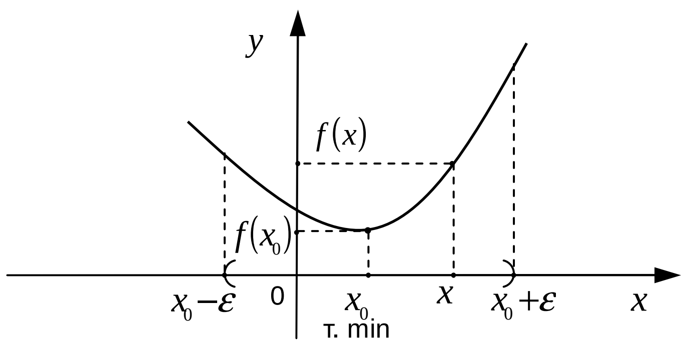


Рис.2

Точки максимума и ***минимума*** функции называются ***точками экстремума*** функции.

<u>Теорема.</u> (Необходимое условие экстремума). Если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке либо $f'(x_0) = 0$, либо производная не существует.

Точки, в которых производная равна нулю либо не существует, называются ***критическими***.

<u>Теорема.</u> (Достаточные условия экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема слева и справа от критической точки x_0, и при этом ее первая производная меняет знак с минуса на плюс (с плюса на минус) при переходе через точку x_0, то x_0 – точка минимума (максимума) функции $y = f(x)$.

<u>Теорема.</u> (Достаточные условия экстремума). Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ функция имеет минимум.

<u>Пример 1</u>. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

<u>Решение.</u> Областью определения D данной функции y является вся числовая ось R, кроме точки $x = 1$, то есть $D = R \setminus \{1\}$.

Находим первую производную

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} =$$

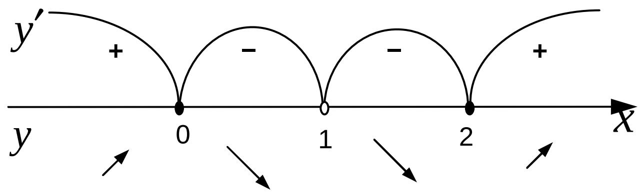
$$= \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Используя необходимые условия экстремума, находим критические точки:

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$ или $x(x-2) = 0$, откуда $x_1 = 0$ или $x_2 = 2$.

y' не существует $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$, откуда $x_3 = 1$.

Используем достаточные условия экстремума. Наносим три критические точки $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$ на область определения D функции y. Они разбивают область D на четыре интервала. Определяем знак функции y' в каждом интервале.



Так как $x_1 = 0 \in D$ и при переходе через эту точку y' меняет знак плюс на минус, то $x_1 = 0$ – точка максимума функции y.

Так как $x_2 = 2 \in D$ и при переходе через эту точку y' меняет знак минус на плюс, то $x_2 = 2$ – точка минимума функции y.

Так как при любом $x \in (-\infty;0)$ или $x \in (2;+\infty)$ $y' > 0$, то в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$ функция y монотонно возрастает.

Так как при любом $x \in (0;1)$ или $x \in (1;2)$ $y' < 0$, то в интервалах $(0;1)$ и $(1;2)$ функция y монотонно убывает.

<u>Пример 2</u>. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

<u>*Решение.*</u> Областью определения D данной функции y является вся числовая ось R.

Находим первую производную

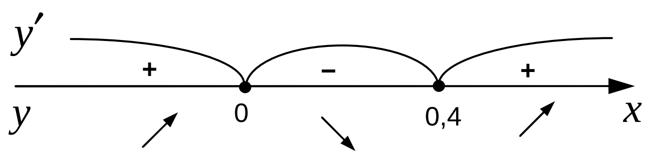
$$y' = \left((x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)' = 1\cdot\sqrt[3]{x^2} + (x-1)\cdot\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{3x+2x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

Находим критические точки:

$y' = 0 \Leftrightarrow 5x - 2 = 0$, откуда $x_1 = 0{,}4$.

y' не существует $\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{x} = 0$, откуда $x_2 = 0$.

Наносим критические точки $x_1 = 0{,}4$; $x_2 = 0$ на область определения D функции y. Они разбивают область D на три интервала. Определяем знак функции y' в каждом интервале.



Так как $x_1 = 0 \in D$ и при переходе через эту точку y' меняет знак плюс на минус, то $x_1 = 0$ – точка максимума функции y.

Так как $x_2 = 0{,}4 \in D$ и при переходе через эту точку y' меняет знак минус на плюс, то $x_2 = 0{,}4$ – точка минимума функции y.

Так как при любом $x \in (-\infty;0)$ или $x \in (0{,}4;+\infty)$ имеет место $y' > 0$, то в интервалах $(-\infty;0)$ и $(0{,}4;+\infty)$ функция y монотонно возрастает.

Так как при любом $x \in (0;0{,}4)$ выполняется $y' < 0$, то в интервале $(0;0{,}4)$ функция y монотонно убывает.

2) Точки перегиба и участки выпуклости графика функции

График дифференцируемой на $(a;b)$ функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке x этого интервала (см. рис. 3).

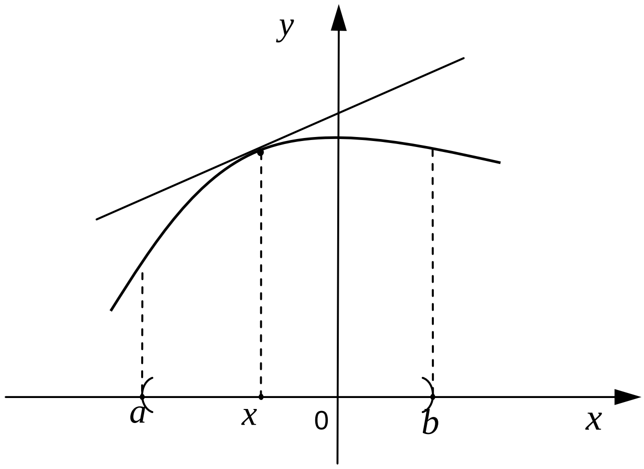


Рис. 3

График дифференцируемой на $(a;b)$ функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** в интервале $(a;b)$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке x этого интервала (см. рис. 4).

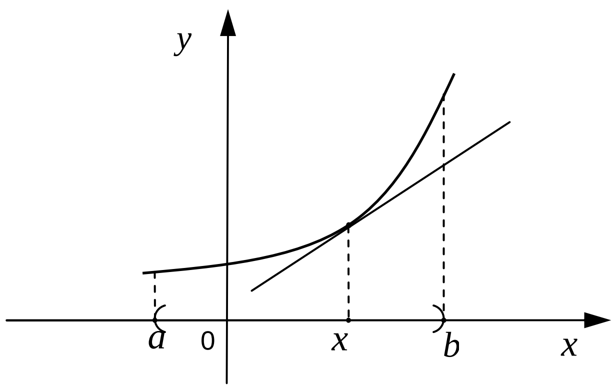


Рис. 4

***<u>Теорема.</u>* (Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции).** Если $f''(x)<0$ в интервале $(a;b)$, то график функции $y=f(x)$ является выпуклым вверх в этом интервале; если же $f''(x)>0$, то в интервале $(a;b)$ график функции $y=f(x)$ – выпуклый вниз.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$. Точку $(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называют ***точкой перегиба*** этого графика, если существует такая ε – окрестность точки x_0 оси Ox, в границах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости (см. рис. 5).

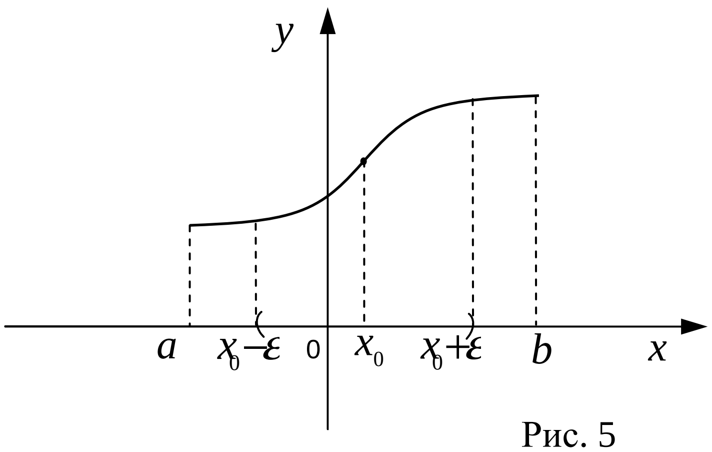


Рис. 5

<u>Теорема.</u> ***(Необходимое условие перегиба функции).*** Если x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$, то вторая производная функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

<u>Теорема.</u> ***(Достаточное условие перегиба функции).*** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в ε– окрестности точки x_0, имеет в точке x_0 конечную или бесконечную определенного знака производную $f''(x_0)$, а функция $f''(x)$ определена в ε– окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0, и меняет знак при переходе через эту точку, то x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции $y = \frac{9 \cdot \sqrt[3]{x^{11}}}{88} - \frac{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}{10}$.

Решение. Область определения D данной функции есть множество всех действительных чисел R, то есть $D = R$.

Находим:

$$y' = \frac{9}{88} \cdot \frac{11}{3} \cdot x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}};$$

$$y'' = (y')' = x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}.$$

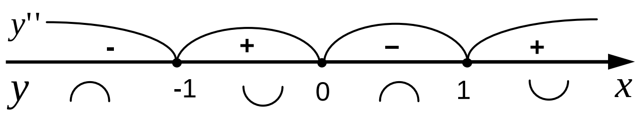
Используя необходимое условие перегиба, находим:

$y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \pm 1$,

y'' не существует, если $\sqrt[3]{x} = 0$, откуда $x = 0$.

Используем достаточные условия перегиба:

Отметим точки $x = \pm 1$, $x = 0$ на области D и определим знаки y'' слева и справа от каждой точки.



Так как $x = 0 \in D$ и при переходе через эту точку y'' меняет знак, то $x = 0$ – точка перегиба данной функции. Аналогично, точки $x = \pm 1$ тоже являются точками перегиба графика функции.

График функции выпуклый вниз на интервалах $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

График функции выпуклый вверх на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции $y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

Решение. Найдем область определения D данной функции:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 .$$

Находим:

$$y' = 1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} ;$$

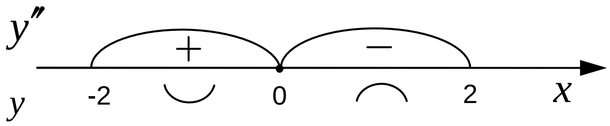
$$y'' = \left(y'\right)' = \frac{-4x \cdot \sqrt{4 - x^2} - (4 - 2x^2) \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 6)}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 6) = 0$, откуда $x = 0 \in D$, $x = \pm\sqrt{6} \notin D$

y'' не существует, если $\sqrt{(4 - x^2)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \in D$.

Используем достаточные условия перегиба:

Отметим точки $x = \pm 2,\ x = 0$ на области D и определим знаки y'' слева и справа от каждой точки.



Точка $x = 0$ является точкой перегиба графика функции.

График функции выпуклый вниз на интервале $(-2;0)$.

График функции выпуклый вверх на интервале $(0;2)$.

3) Асимптоты графика функции

Прямую L называют ***асимптотой графика функции*** $y = f(x)$, если расстояние d от точки $M(x;y)$ кривой $y = f(x)$ до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (см. рис. 6).

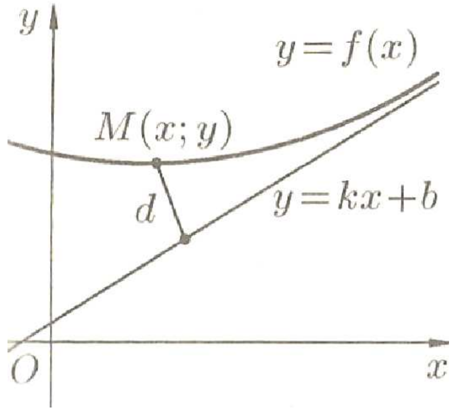


Рис. 6

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = x_0$ является ***вертикальной*** асимптотой кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

Как правило, точки x_0 находятся среди точек разрыва второго рода.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной*** асимптотой кривой $y = f(x)$, если одновременно существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Если же хотя бы один из вышеприведенных пределов не существует или равен бесконечности, то наклонных асимптот график функции $y = f(x)$ не имеет.

В случае, когда $k = 0$, наклонная асимптота $y = b$ становится ***горизонтальной*** асимптотой кривой $y = f(x)$.

Пример 1. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. Данная функция определена в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$.

Рассмотрим граничную точку области определения $x=-1$. Поскольку $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=\left[\dfrac{-1}{+0}\right]=-\infty$, то прямая $x=-1$ есть вертикальная асимптота данной кривой.

Наклонные асимптоты находим в виде уравнения прямой $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=-1.$$

Следовательно, существует наклонная асимптота $y=\dfrac{1}{2}x-1$. Таким образом, кривая $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ имеет одну вертикальную асимптоту $x=-1$ и одну наклонную $y=\dfrac{1}{2}x-1$ (см. рис. 7).

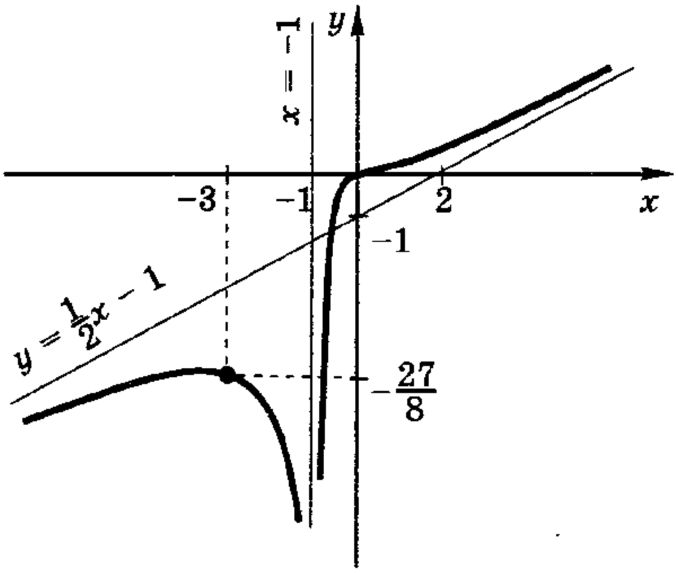


Рис. 7

<u>Пример 2.</u> Найти асимптоты кривой $y = x \cdot arctgx$.

<u>Решение.</u> Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, вертикальных асимптот эта кривая не имеет.

Найдем наклонные асимптоты этой кривой:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot arctgx}{x} = \lim_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2},$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot arctgx - \frac{\pi}{2}\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(arctgx - \frac{\pi}{2}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(arctgx - \frac{\pi}{2})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(-x^2)'}{(1+x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x} = -1,$$

следовательно, $y = \frac{\pi}{2}\cdot x - 1$ наклонная асимптота кривой $y = x\cdot arctgx$ при $x \to +\infty$.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot arctgx}{x} = \lim_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2},$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot arctgx+\frac{\pi}{2}\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{arctgx+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{(arctgx+\frac{\pi}{2})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{(-x^2)'}{(1+x^2)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{2x} = -1,$$

следовательно, $y = -\frac{\pi}{2}\cdot x - 1$ наклонная асимптота кривой $y = x\cdot arctgx$ при $x\to-\infty$.

Таким образом, график функции $y = x\cdot arctgx$ имеет только две наклонные асимптоты $y = \frac{\pi}{2}\cdot x - 1$ при $x\to+\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}\cdot x - 1$ при $x\to-\infty$ (см. рис. 8)·

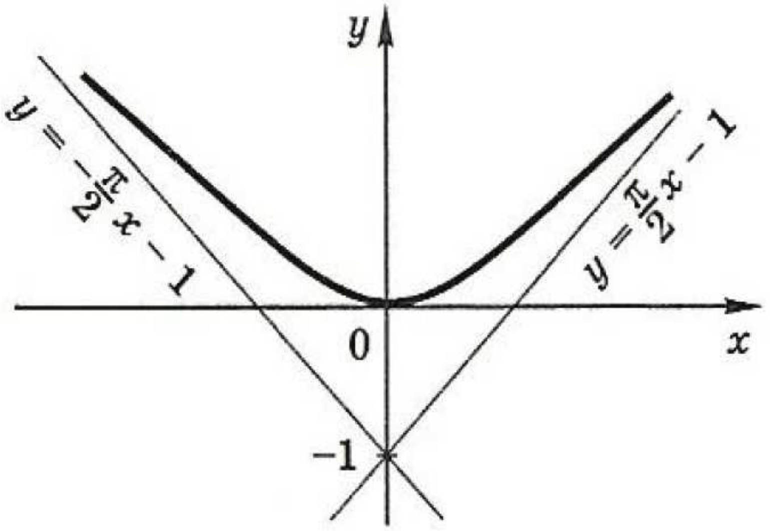


Рис. 8

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на непрерывность, указать промежутки непрерывности функции.
3. Найти нули функции и интервалы знакопостоянства, а также точку пересечения с осью Oy.
4. Исследовать функцию на симметрию и периодичность.
5. Найти асимптоты.
6. Исследовать функцию на монотонность и точки экстремума.
7. Указать интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
8. Если этой информации недостаточно, то дополнительно найти некоторые точки графика.
9. Построить график функции.

Рассмотрим примеры исследования функции и построения её графика.

Пример 1. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ и построить её график.

Исследование

1. Областью определения D данной функции y является вся числовая ось R, кроме точек $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$ (в которых знаменатель обращается в 0), то есть $D = R \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

2. Исследуем функцию на непрерывность. Данная функция является элементарной, следовательно, она непрерывна в своей области определения.

3. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x=0$, тогда $y=0$. Значит кривая пересекает ось Oy в точке $O(0,0)$. Эта же точка является точкой пересечения с осью Ox, так как при $y = 0$

получаем, что $x=0$. Находим интервалы знакопостоянства функции

$$f(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{x^2-3}>0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3}<x<0, \quad x>\sqrt{3}.$$

Аналогично $f(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-\sqrt{3}, \quad 0<x<\sqrt{3}$.

4. Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность. Данная функция является нечетной, так как область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения $y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=\frac{-x^3}{x^2-3}=-y(x).$ Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат.

5. Асимптоты

a) Находим вертикальные асимптоты. Рассмотрим граничные точки области определения $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=-\sqrt{3}$. Поскольку

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty,$$

то прямые $x=-\sqrt{3}, \quad x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

b) Выясним наличие наклонных и горизонтальных асимптот:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-3}=1 \quad (k=1 \text{ при } x\to+\infty \text{ и при } x\to-\infty),$$

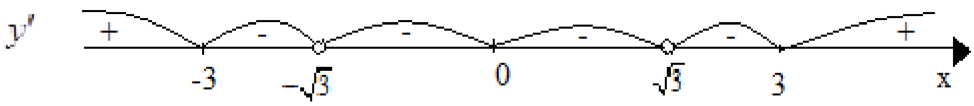
$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0.$$

Значит, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Горизонтальных асимптот график не имеет.

6. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)' = \frac{3x^2(x^2-3)-2x\cdot x^3}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}.$$

Первая производная не существует в точках $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ (т.е. в точках, в которых не существует и сама функция) и обращается в нуль, когда $x^2(x^2-9)=0$, откуда $x_3=-3$, $x_4=0$, $x_5=3$. Все полученные точки разбивают числовую ось на шесть интервалов, в которых производная не меняет знак. Поэтому, выбирая в каждом из полученных интервалов произвольную точку, определяем знак производной в них.

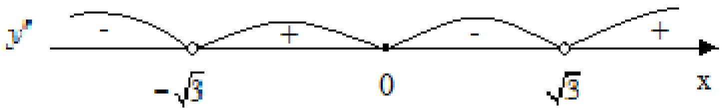


Видим, что на интервалах $(-3,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},3)$ первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает; на интервалах $(-\infty,-3)$, $(3,+\infty)$ первая производная положительна и данная функция возрастает. При переходе через точку $x=-3$ первая производная меняет свой знак с плюса на минус, поэтому $x=-3$ является точкой максимума, а при переходе через точку $x=3$ первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому $x=3$ – точка минимума. Вычислим значения функции в этих точках: $y(3)=\dfrac{3^3}{3^2-3}=\dfrac{9}{2}$, $y(-3)=\dfrac{(-3)^3}{(-3)^2-3}=-\dfrac{9}{2}$.

7. Чтобы определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба, вычислим вторую производную

$$y'' = \left(\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}\right)' = \frac{(4x^3-18x)(x^2-3)^2 - x^2(x^2-9)2(x^2-3)2x}{(x^2-3)^4} = \frac{6x(x^2-3)(x^2+9)}{(x^2-3)^4} = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.$$

Вторая производная не существует в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ (как и сама функция) и обращается в нуль при $x=0$. Получившиеся точки разбивают числовую ось на четыре интервала. Методом интервалов определяем знак второй производной на каждом из получившихся интервалов:



Имеем: на интервалах $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3})$ вторая производная отрицательна, следовательно, здесь функция выпукла вверх, а на $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},+\infty)$ вторая производная положительна и данная функция выпукла вниз. При переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет свой знак, поэтому $x=0$ является абсциссой точки перегиба. Так как $y(0)=0$, то точка $O(0,0)$ является точкой перегиба графика функции.

8. Возьмем дополнительные точки $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$; $(2,8)$ $\left(4,4\frac{12}{13}\right)$.

9. Построим график исследуемой функции.

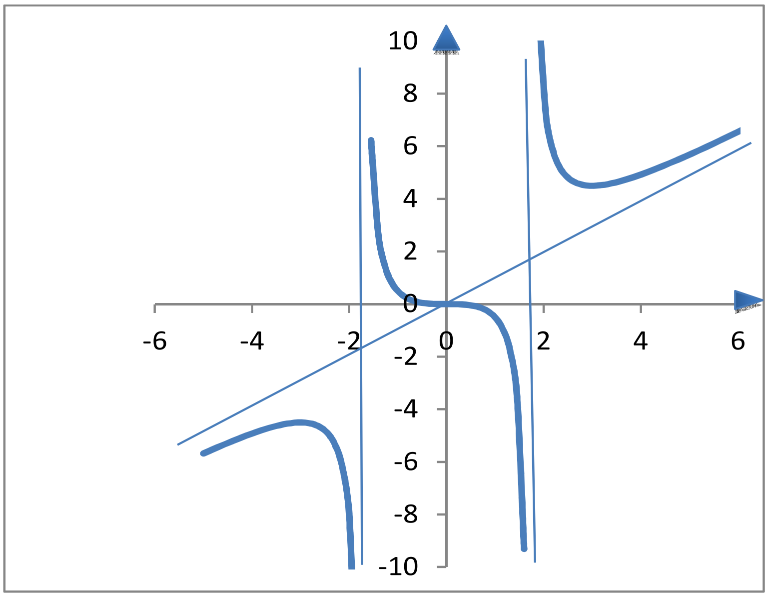


Рис. 9

__Пример 2.__ Провести полное исследование функции $y=(x-1)e^{1-x}$ и построить её график.

__Исследование__

1. Областью определения D данной функции y является вся числовая ось R.

2. Функция непрерывна для всех x.

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Решая уравнение $(x-1)e^{1-x}=0,$ находим точку пересечения кривой с осью Ox: $x=1$. С осью Oy график пересекается при $x=0$, откуда $y=f(0)=-e,$ т.е. $(0,-e)$ – точка пересечения с осью Oy.

4. Функция $y=(x-1)e^{1-x}$ не является периодической. Исследуем вопрос о четности. Имеем: $y(-x)=(-x-1)e^{1-(-x)}=-(x+1)e^{1+x}$. Мы заключаем, что, $y(-x)\neq \pm y(x)$, т.е. данная функция общего вида.

5. Асимптоты

а) Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна при всех действительных значениях x.

b) Найдем наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1-x}=1\cdot 0=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)'}{\left(e^{x-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$.

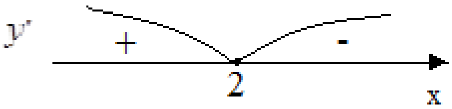
$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1-x}=1\cdot(+\infty)=+\infty,$$

значит, при $x\to-\infty$ горизонтальных асимптот нет.

6. Исследуем функцию на экстремум и промежутки монотонности.

$$y'=\left((x-1)e^{1-x}\right)'=e^{1-x}-(x-1)e^{1-x}=(2-x)e^{1-x}.$$

Определим критические точки функции: решаем уравнение $y'=0,$ т.е. $(2-x)e^{1-x}=0 \;\Rightarrow\; (2-x)=0 \;\Rightarrow x=2.$ Таким образом, имеется одна критическая точка $x=2$. Получившаяся точка делит область определения функции на промежутки $(-\infty,2),\ (2,+\infty).$ Определяем знак первой производной на каждом из получившихся интервалов:

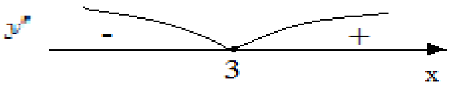


Отсюда видно, что при $x<2$ функция возрастает, а при $x>2$ убывает. Функция имеет максимум в точке $x=2$, значение функции в этой точке равно $y(2)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,37$.

7. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y''

$$y''=\left((2-x)e^{1-x}\right)'=-e^{1-x}-(2-x)e^{1-x}=(x-3)e^{1-x}.$$

Приравниваем y'' к нулю: $(x-3)e^{1-x}=0 \Rightarrow (x-3)=0 \Rightarrow x=3$. Вычисляем знак второй производной на получившихся интервалах $(-\infty,3)$, $(3,+\infty)$.



Имеем: $y''>0$ на $(3,+\infty)$, следовательно данная функция выпукла вниз на этом интервале; $y''<0$ на $(-\infty,3)$, поэтому функция выпукла вверх на этом интервале. При $x=3$ получаем точку перегиба, ордината которой $y(3)=\frac{2}{e^2}\approx 0,27$.

8.Учитывая накопленную информацию, строим график функции.

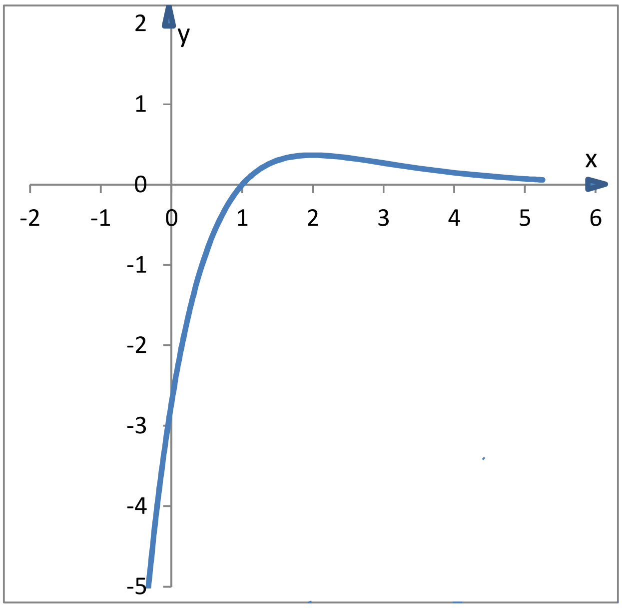


Рис. 10

<u>Пример 3.</u> Провести полное исследование функции $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ и построить её график.

<u>Исследование</u>

1. Областью определения D данной функции y является вся числовая ось R.

2. Функция непрерывна на всей области определения.

3. Для нахождения точек пересечения с осью Ox возьмем $y=0$, тогда

$$\sqrt[3]{6x^2-x^3}=0; \quad 6x^2-x^3=0; \quad x^2(6-x)=0.$$

Отсюда $x_{1,2}=0,\ \ x_3=6,$ значит кривая пересекает ось Ox в точках $O(0,0)$ и $A(6,0)$. Чтобы определить точки пересечения графика с осью Oy полагаем $x=0,$ тогда $y=0,$ т.е. $O(0,0)$ является также точкой пересечения с осью Oy. Функция положительна при $x<6$ и отрицательна при $x>6.$

4. Функция не является периодической. Определим, нельзя ли отнести данную функцию к классу четных или нечетных функций. Поскольку $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x),$ то функция не является ни четной, ни нечетной.

5. Асимптоты

a) Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

b) Исследуем график на наличие наклонных и горизонтальных асимптот:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x)=$$

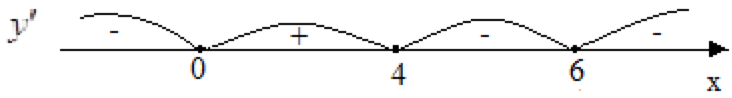
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x\right)\left(\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2\right)}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2}=2$$

Следовательно, прямая $y=-x+2$ является наклонной асимптотой кривой $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$. Горизонтальных асимптот график не имеет.

6. Теперь определим интервалы возрастания и убывания функции и её экстремумы.

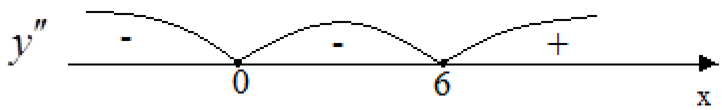
$$y' = \frac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}.$$

Приравнивая к нулю производную, находим стационарную точку $x_1 = 4$. В точках $x_2 = 0$ и $x_3 = 6$ производная не существует (заметим, что сама функция $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ в этих точках существует).



Из рисунка видим, что при $x < 0$ и $x > 4$ функция убывает, а при $0 < x < 4$ возрастает. Точка $x = 0$ является точкой минимума с «острием» (так как производная в этой точке не существует), а точка $x = 4$ есть «обычная» точка максимума. Найдем ординаты точек максимума и минимума: $y(0) = 0,\quad y(4) = 2\sqrt[3]{4}.$ При переходе через точку $x = 6$ первая производная не меняет свой знак, следовательно, в точке $x = 6$ экстремума нет.

7. Определим точки перегиба и области выпуклости и вогнутости кривой. Вторая производная $y'' = \left(\dfrac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}\right)' = \dfrac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}}$ в нуль не обращается ни в одной точке; в точках $x = 0$ и $x = 6$ она не определена (сама функция в этих точках определена). Исследуем знак второй производной вблизи этих точек.



Так как $y'' < 0$ слева и справа от $x = 0$, то кривая выпукла вверх слева и справа от точки с абсциссой $x = 0$, и, следовательно, точка $O(0,0)$ не является точкой перегиба. Поскольку слева от $x = 6$ имеем $y'' < 0$, т.е. здесь кривая выпукла вверх, а при $x > 6$ имеем $y'' > 0$, т.е. здесь она выпукла вниз;

поэтому точка $A(6,0)$ является точкой перегиба.

Строим график функции.

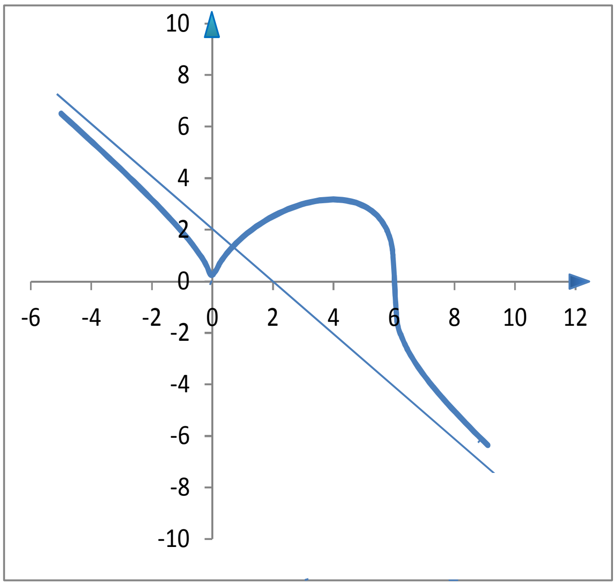


Рис. 11

<u>Пример 4</u>. Провести полное исследование функции $y = x^2 \ln x$ и построить её график.

<u>Исследование</u>

1. Областью определения данной функции y является $D = (0, +\infty)$.

2. Функция непрерывна при $x > 0$.

3. Ось ординат график функции не пересекает, так как функция определена при $x > 0$. С осью абсцисс график пересекается при $y = 0$, откуда $x^2 \ln x = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$, т.е. $(1,0)$ – точка пересечения с осью Ox. Находим интервалы знакопостоянства функции. Поскольку $x^2 > 0$, при любом действительном x, то $y > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $y < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

4. Функция не является периодической. Поскольку область ее определения несимметрична относительно начала координат, то функция не является ни четной, ни нечетной.

5. Асимптоты

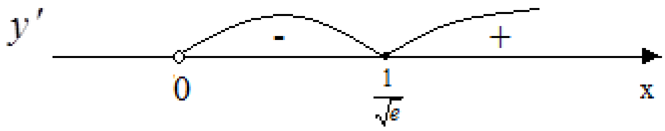
a) Так как $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{(\ln x)'}{(1/x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1/x}{-2/x^3}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-x^2}{2}=0,$

следовательно, вертикальных асимптот нет.

b) Поскольку $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$, то график не имеет ни горизонтальной, ни наклонной асимптоты.

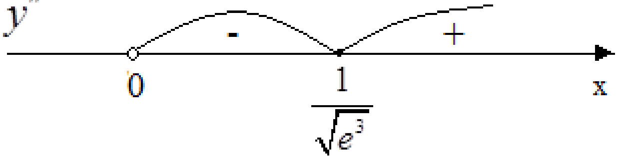
6. Чтобы найти точки экстремума, вычислим первую производную $y'=2x\ln x+x.$

$y'=0\Leftrightarrow 2x\ln x+x=0\Rightarrow x_1=0\notin D,\ \ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}6\in D$



При $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ имеем $f'(x)<0$, значит функция на промежутке $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ убывает, а при $x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ имеем $f'(x)>0$, поэтому на интервале $(\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$ функция возрастает. Следовательно, $x=e^{-\frac{1}{2}}$ – точка минимума нашей функции. В этой точке $y=-\dfrac{1}{2e}\approx -0{,}18.$

7. Интервалы выпуклости и точки перегиба. Мы имеем $y''=\left(2x\ln x+x\right)'=2\ln x+3.$ Решая уравнение $2\ln x+3=0,$ находим корень $x=\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\approx 0{,}23\in D$



Видим, что $y''(x)<0$ при $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$ и $y''(x)>0$ при $x>\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$, то график функции будет выпуклым вверх на интервале $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$ и выпуклым вниз на интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty\right)$. Точка $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ является точкой перегиба, значение функции в этой точке $y = -\frac{3}{2e^4} \approx -0,07$.

8. Строим график исследуемой функции.

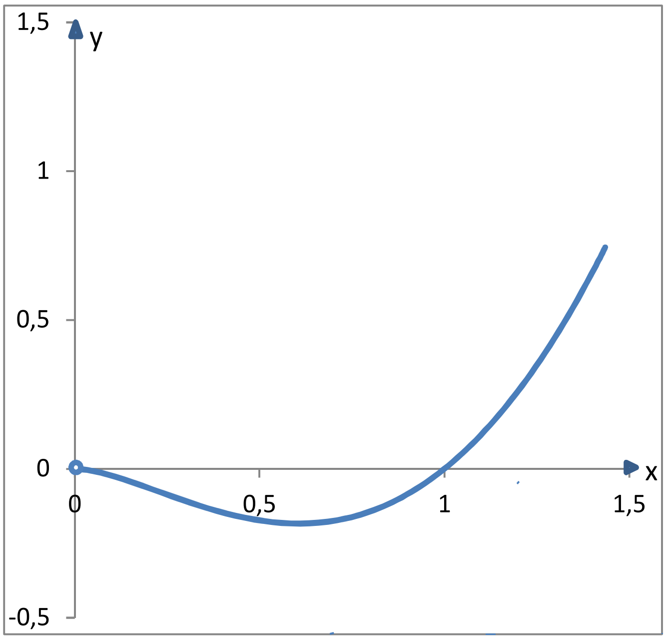


Рис. 12

Рассмотрим более сложные примеры.

<u>Пример 5</u>. Провести полное исследование функции $y = \frac{1}{1+x^2} e^{\frac{1}{1-x^2}}$ и построить её график.

<u>Исследование</u>

1. Область определения D функции – вся числовая ось, за исключением точек $x = -1$ и $x = 1$, т.е. $D = R \setminus \{\pm 1\}$.

2. Данная функция непрерывна всюду, кроме точек $x = -1$ и $x = 1$.

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Так как $y > 0$ при всех x, следовательно график расположен выше оси Ox. С осью Oy график пересекается при $x = 0$, откуда $y = f(0) = e$, т.е. $(0, e)$ – точка

пересечения с осью Oy.

4. Функция не является периодической. Область ее определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется: $y(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}e^{\frac{1}{1-(-x)^2}}=\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}=y(x).$

Поэтому функция $y(x)$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат, а исследование достаточно провести только для $x \geq 0$.

5. Асимптоты

a) Поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0,$ то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x=-1$ также является вертикальной асимптотой.

b) Найдем наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0\cdot 1=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$ (тоже и при $x\to-\infty$).

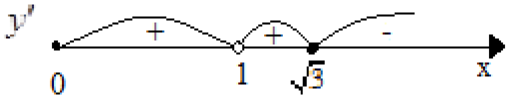
6. Исследуем функцию на экстремум и промежутки монотонности.

$$y'=\left(\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}\right)'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}+\frac{2x}{(1-x^2)^2(1+x^2)}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{2x^3(3-x^2)}{(1-x^2)^2(1+x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}$$

$$\frac{2x^3(3-x^2)}{(1-x^2)^2(1+x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^3(3-x^2)=0 \quad\Rightarrow x_1=0,\ x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\sqrt{3}.$$

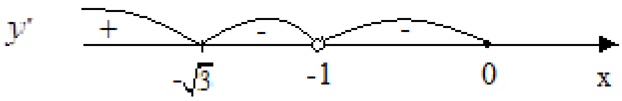
Кроме того, первая производная не существует в точках $x_1=-1,\quad x_2=1.$

Рассмотрим часть области определения при $x\geq 0$



Отсюда видно, что на интервалах $(0,1)$, $(1,\sqrt{3})$ функция возрастает, а на интервале $(\sqrt{3},+\infty)$ убывает. Функция имеет максимум в точке $x=\sqrt{3}$, значение функции в этой точке равно $y(\sqrt{3})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4e}\approx 0{,}15.$

Так как функция четная, то при $x<0$ имеем:



Значит, $x=0$ – точка минимума, $y_{\min}=y(0)=e.$

7. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

$$y''=\left(\frac{2x^3(3-x^2)}{(1-x^2)^2(1+x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}\right)'=2x^2\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}\frac{2x^4(3-x^2)^2+(1-x^2)(9+x^2+7x^4-x^6)}{(1-x^2)^4(1+x^2)^2}.$$

Замечаем, что знак второй производной зависит от знака многочлена $h(x)=2x^4(3-x^2)^2+(1-x^2)(9+x^2+7x^4-x^6)$. Убеждаемся, что $h(x)>0$ при $-1<x<1$, а значит и $y''>0$, следовательно, данная функция выпукла вниз на интервале $(-1,1)$. Далее, рассмотрим промежуток $\left[1,\sqrt{3}\right]$. Имеем: $h(1)=18>0$, $h(\sqrt{3})=-96<0$, значит функция $h(x)$ на концах отрезка $\left[1,\sqrt{3}\right]$ принимает значения разных знаков, поэтому $h(x)$, следовательно, и $y''(x)$, хотя бы в одной точке из интервала $\left(1,\sqrt{3}\right)$ обращается в нуль, а функция $y(x)$ имеет точку перегиба. Так как $y''(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, значит для достаточно большого x, $(x>\sqrt{3})$ выполняется $y''(x)>0$ и на интервале $(\sqrt{3},+\infty)$ $y''(x)$ также имеет хотя бы один нуль, а график функции имеет точку перегиба.

8.Учитывая накопленную информацию, строим график функции при

$x \geq 0$, а затем симметрично отражаем его относительно оси Oy.

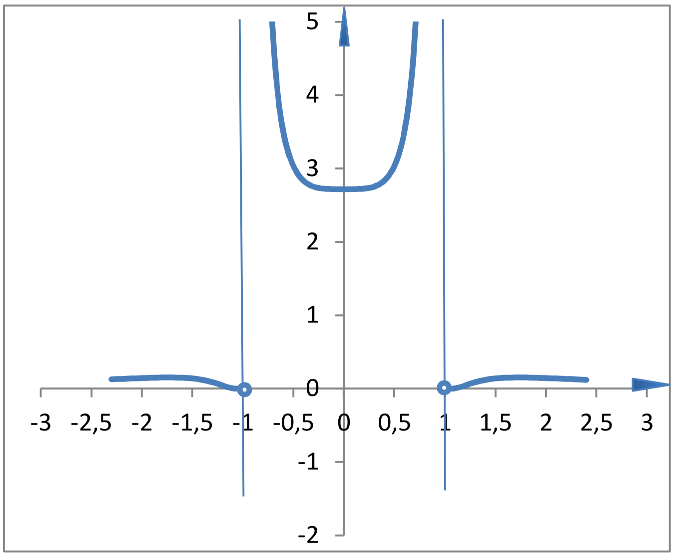


Рис. 13

Пример 6. Провести полное исследование функции $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ и построить её график.

Исследование

1. Чтобы найти область определения функции $f(x)$, решим неравенство $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$. Так как при всех x имеем $|2x| \leq 1+x^2$, то функция всюду определена.

2. Функция непрерывна для всех x.

3. При $x=0$ имеем $y=0$. Других точек пересечения с осями координат график не имеет.

4. Функция непериодическая. Так как

$y(-x) = \arcsin\dfrac{-2x}{1+(-x)^2} = -\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = -y(x)$, то функция является нечетной, а значит её график достаточно построить при $x > 0$.

5. Асимптоты

a) Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

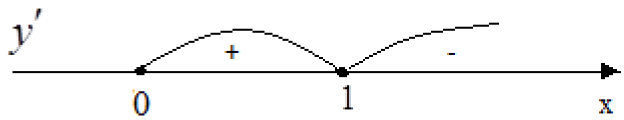
b) Мы имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0$, поэтому горизонтальной асимптотой является ось Ox.

6. Исследуем функцию на экстремум и промежутки монотонности. Найдем производную

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}=$$

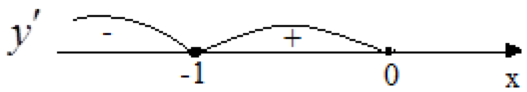
$$=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & -1<x<1,\\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|>1.\end{cases}$$

Видим, что в точках $x=1$ и $x=-1$ производная не определена. Рассмотрим часть области определения при $x\ge 0$



Имеем, что функция возрастает на интервале $(0,1)$, а убывает на интервале $(1,+\infty)$. Следовательно, в точке $x=1$ функция имеет пикообразный максимум, значение функции в этой точке равно $y(1)=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$.

Так как функция нечетная, то при $x<0$ имеем:



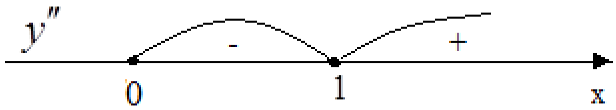
Поэтому, при $x=-1$ имеем пикообразный минимум, $y(-1)=-\arcsin 1=-\dfrac{\pi}{2}$.

7. Определим точки перегиба и области выпуклости и вогнутости кривой.

Находим:

$$y''=\begin{cases}\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}, & -1<x<1,\\ \dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}, & |x|>1.\end{cases}$$

Ясно, что $y''(x)$ обращается в нуль при $x=0$ и не существует при $x=\pm 1$.



Видим, что на промежутке $(0,1)$ график функции является выпуклым вверх, а на луче $x>1$ он является выпуклым вниз. Точка $x=0$ является точкой перегиба.

8. График функции изображен на рисунке 14.

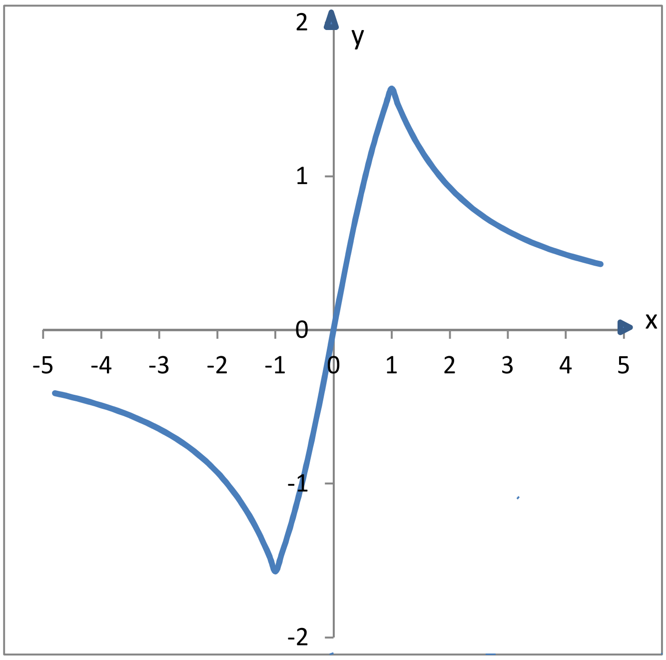


Рис. 14

<u>Задание № 3.</u> Исследовать функции и построить их графики.

вариант	$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$	$y = f_3(x)$
1	$y = \dfrac{x^2}{x+1}$	$y = e^{\frac{1}{2-x}}$	$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$
2	$y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$	$y = x - \ln(x+1)$	$y = \dfrac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$
3	$y = \dfrac{4-x^2}{2x-1}$	$y = \ln\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$	$y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

4	$y=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$y=2(x+1)-3\cdot\sqrt[3]{(x+1}$
5	$y=\dfrac{x^3}{x+1}$	$y=\left(2+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$	$y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$
6	$y=\dfrac{x^2}{x-4}$	$y=x\cdot e^{2x-1}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$
7	$y=x+\dfrac{4}{x^2}$	$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x$	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
8	$y=\dfrac{x}{1+x^3}$	$y=\left(e^{2x}-1\right)^{-1}$	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}}$
9	$y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	$y=x^2e^{\frac{1}{x}}$	$y=\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$
10	$y=\dfrac{x^2}{x-2}$	$y=\dfrac{e^x}{x+1}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}-1}$
11	$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$	$y=x^3e^{-x}$	$y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$
12	$y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$	$y=1+\dfrac{\ln x}{x}$	$y=x\cdot\sqrt{1-x}$
13	$y=x-\dfrac{8}{x^4}$	$y=\dfrac{1+\ln x}{x}$	$y=x\sqrt{4-x^2}$
14	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	$y=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$	$y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$
15	$y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$	$y=x^2e^{-x^2}$	$y=x\sqrt{4-x^2}$
16	$y=\dfrac{1}{x^2-4}$	$y=\dfrac{1-\ln x}{x}$	$y=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}$

17	$y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$	$y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$	$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$
18	$y=x^2+\dfrac{2}{x}$	$y=\ln\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$	$y=\sqrt{8x^2-x^4}$
19	$y=\dfrac{x^3+3}{x+1}$	$y=e^{\frac{1}{x-3}}$	$y=3\cdot\sqrt[3]{x^2}-2x$
20	$y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$	$y=x\ln^3 x$	$y=\sqrt[3]{1-x^2}$
21	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	$y=\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{-x}$	$y=x\sqrt{x+3}$
22	$y=\dfrac{x^2-3}{x+2}$	$y=\dfrac{x}{\ln x}$	$y=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$
23	$y=\dfrac{4x^2}{x-1}$	$y=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$	$y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
24	$y=\dfrac{2x+1}{x^2}$	$y=x\cdot\ln^2 x$	$y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$
25	$y=\dfrac{x^3}{x-1}$	$y=e^{\frac{1}{x+1}}$	$y=\sqrt[3]{1-x^3}$
26	$y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$	$y=\ln(1+x^3)$	$y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$
27	$y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$	$y=e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^3}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$
28	$y=\dfrac{2(x^2+1)}{1-x^2}$	$y=\dfrac{2x}{\ln x}$	$y=(1-x)\cdot\sqrt[3]{x^2}$
29	$y=\dfrac{x+3}{(x+2)^2}$	$y=(x-1)\cdot e^{3x+1}$	$y=x-\sqrt[3]{x^2}$
30	$y=\dfrac{1}{x(x-2)}$	$y=\dfrac{3x}{2}\ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right)$	$y=x-\sqrt[3]{x^3+1}$

Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке

Великий русский математик П.Л.Чебышев в работе «Черчение географических карт» писал, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды. С такими задачами приходится иметь дело представителям самых разных специальностей – инженеры-технологи стремятся так организовать производство, чтобы на имеющемся станочном парке сделать как можно больше продукции, конструкторы ломают голову, стремясь сделать наилегчайший прибор на космическом корабле, экономисты стараются так спланировать прикрепление заводов к источникам сырья, чтобы транспортные расходы оказались наименьшими.

Но не только людям приходится решать подобные задачи. Бессознательно с ними справляются и некоторые виды насекомых и других живых существ. Например, форма ячеек пчелиных сот такова, что при заданном объеме на них идет наименьшее количество воска. И хотя пчелы не изучали высшую математику, неумолимый естественный отбор привел к тому, что выжили лишь пчелы, тратившие меньше всего усилий на строительство сот.

Пчелам помогает решать свои задачи инстинкт. Человек же отличается от них тем, что ему на помощь приходит разум. Математикам удалось разработать методы решения задач на наибольшее и наименьшее значения, или, как их еще называют, задач на ***оптимизацию*** (от латинского «оптимум» – наилучший).

<u>Примерный план решения задач на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке</u> таков:

1. Выбрать независимое переменное и установить область его изменения.
2. Выразить исследуемую величину через аргумент.
3. Найти стационарные точки и точки, в которых исследуемая функция не имеет производной. Из числа последних точек исключить точки несуществования функции.
4. Вычислить значения функции в найденных точках и на концах отрезка изменения аргумента и выбрать из этих значений наибольшее или наименьшее.

<u>Пример 1</u>. (Задача Дидоны)

Легенда об основании Карфагена гласит, что когда финикийский корабль пристал к берегу, местные жители согласились продать прибывшим столько земли, сколько можно огородить ее одной бычьей шкурой. Но хитрая финикийская царица Дидона разрезала эту шкуру на ремешки, связала их и огородила полученным ремнем большой участок земли, примыкавший к побережью.

Будем для простоты считать, что берег моря был прямоугольным, а участок земли имел форму прямоугольника. Тогда надо найти прямоуголь-

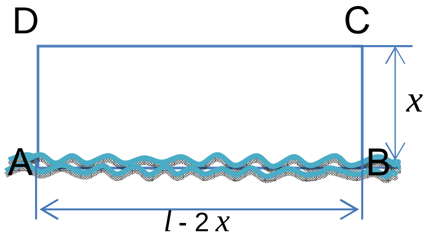


Рис. 1

ник наибольшей площади, ограниченный с одной стороны морем, а с трех других сторон ремнем заданной длины l. Выберем в качестве аргумента x длину отрезка BC. Тогда длина отрезка $AB = (l - 2x)$, и поэтому площадь прямоугольника равна $S = x(l - 2x)$. Эта функция определена и непрерывна на отрезке $\left[0,\ \frac{l}{2}\right]$.

Производная функции S равна $l-4x$ и обращается в нуль лишь при $x=\frac{1}{4}$. Значение функции $S\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{l}{4}\cdot\left(l-\frac{l}{2}\right)=\frac{l^2}{8}$ и ее значения на концах отрезка $S(0)$ и $S\left(\frac{l}{2}\right)$ равны нулю, следовательно, найденное значение $S\left(\frac{l}{4}\right)$ будет наибольшим значением функции. Значит сторона ВС должна иметь длину $\frac{l}{4}$, а сторона АВ – длину $\frac{l}{2}$, т.е. прямоугольник является половиной квадрата, примыкающей длинной стороной к морю.

Пример 2. В пункте *A* находится месторождение сырья. Расстояние от пункта *A* до ближайшей точки *B* на железной дороге равно 200 км (см. рис. 2).

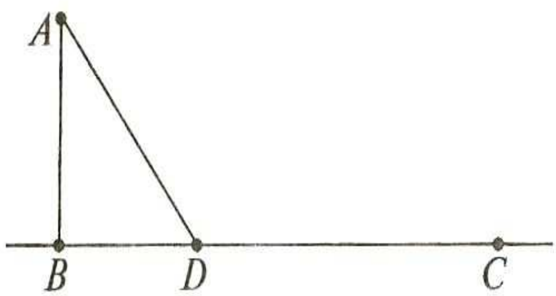


Рис. 2

Железная дорога проходит через город *C*, в котором расположен завод по переработке упомянутого сырья. Расстояние от *B* до *C* равно 1000 км. Для доставки сырья на завод строится шоссе *AD*, соединяющее месторождение с железной дорогой. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. На каком расстоянии от *A* должен находиться пункт *D*, чтобы общая стоимость перевозок сырья с месторождения *A* в город *C* по маршруту *ADC* была минимальной?

Решение. Введем обозначения *BD* = *x*, тогда *DC*=1000-*x*. Пусть *p* денежных единиц стоит перевозка одной единицы груза по железной дороге. Тогда перевозка одной единицы груза по шоссе стоит *2p* денежных единиц. Из треугольника *ABD* по теореме Пифагора получаем: $AD=\sqrt{x^2+200^2}$. Стоимость перевозки одной единицы груза по маршруту *ADC* составляет

$$s(x) = 2p \cdot \sqrt{x^2+200^2} + p \cdot (1000-x).$$

Из практических соображений ясно, что необходимо найти наименьшее значение этой функции на отрезке [0; 1000]. Находим производную функции $s(x)$: $s'(x) = \frac{2px}{\sqrt{x^2+200^2}} - p$. Ищем критические точки, приравнивая $s'(x)$ к нулю, точек, в которых производная не существует - нет:

$$\frac{2px}{\sqrt{x^2+200^2}} - p = 0,$$

$$\frac{2px - p\sqrt{x^2+200^2}}{\sqrt{x^2+200^2}} = 0,$$

$$2x = \sqrt{x^2+200^2},$$

$$3x^2 = 200^2,$$

$$x = \pm\frac{200}{\sqrt{3}}.$$

Далее рассматриваем только $x = \frac{200}{\sqrt{3}}$, так как $x = -\frac{200}{\sqrt{3}} \notin [0;\ 1000]$.

Находим значения $s(x)$ на концах отрезка [0; 1000] и в точке $x = \frac{200}{\sqrt{3}}$ и сравниваем найденные значения:

$s(0) = 1400\,p$,

$s(1000) = 2p\sqrt{1040000} \approx 2039\,p$,

$s\left(\frac{200}{\sqrt{3}}\right) \approx 1346\,p$.

Итак, наименьшее значение функции $s(x)$ на [0; 1000] достигается в точке $x=\dfrac{200}{\sqrt{3}}$. Следовательно, AD=$\sqrt{\left(\dfrac{200}{\sqrt{3}}\right)^2+200^2}=200\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{400}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, пункт D должен находиться на расстоянии $\dfrac{400}{\sqrt{3}}$ км от пункта A, чтобы общая стоимость перевозок сырья с месторождения A в город C по маршруту ADC была минимальной.

Замечание. Вышеизложенный алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке не применим для нахождения наименьшего и наибольшего значения функции на интервале. В этом случае при решении такого типа задач могут помочь следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет единственную точку экстремума на $(a;b)$, а именно, точку минимума $x=x_0$, то свое наименьшее значение на $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает в этой точке $x=x_0$, а наибольшего значения функция $f(x)$ на $(a;b)$ не имеет.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет единственную точку экстремума на $(a;b)$, а именно, точку максимума $x=x_0$, то свое наибольшее значение на $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает в этой точке $x=x_0$, а наименьшего значения функция $f(x)$ на $(a;b)$ не имеет.

Пример 3. В конус с радиусом 4 дм и высотой 6 дм вписан цилиндр наибольшего объема. Найти высоту и радиус основания цилиндра.

Решение.

Введем обозначения: x - высота цилиндра, y - радиус основания цилиндра, вписанного в конус.

Рассмотрим ΔABC - осевое сечение конуса (см. рис. 3). Здесь OA – высота конуса, прямоугольник $DEHF$ – осевое сечение цилиндра. Из подобия треугольников $\Delta ABO \propto \Delta ADK$ следует $\dfrac{AK}{AO}=\dfrac{KD}{OB}$, то есть

$$\frac{6-x}{6}=\frac{y}{4}\Rightarrow y=\frac{4(6-x)}{6}=\frac{2}{3}\cdot(6-x).$$

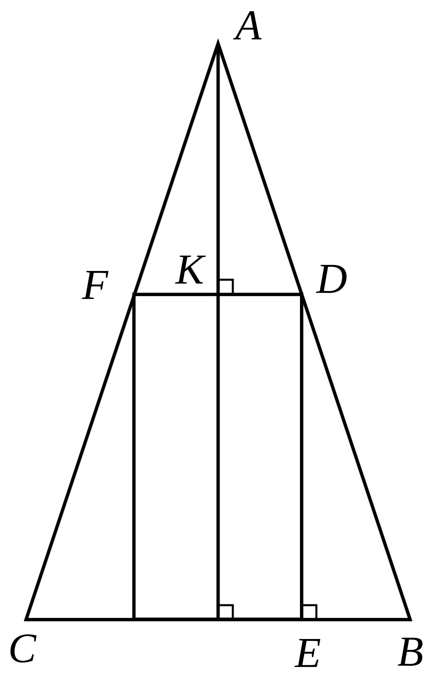


Рис. 3

Объем $V(x)$ цилиндра равен

$$V(x)=H\cdot S_{осн}=\pi x\left(\frac{2}{3}\cdot(6-x)\right)^2=\frac{4\pi}{9}\cdot x\cdot(36-12x+x^2)\text{, где } x\in(0;\ 6).$$

Итак, необходимо найти значение x, при котором функция $V(x)$ принимает свое наибольшее значение на интервале $(0;\ 6)$. Найдем производную функции $V(x)$: $V'(x)=\frac{4\pi}{9}\cdot(36-24x+3x^2)$. В нашем случае функция $V(x)$ дифференцируема на $(0;\ 6)$, найдем стационарные точки:

$$\frac{4\pi}{9}\cdot(36-24x+3x^2)=0,$$

$$x^2-8x+12=0,$$

$$x_1=6\notin(0;\ 6),\ x_2=2\in(0;\ 6).$$

Получили, что $x=2$ - единственная стационарная точка функции $V(x)$ на $(0;\ 6)$. Выясним, является ли она точкой экстремума, для этого найдем вторую производную функции $V(x)$ в точке $x = 2$.

$$V''(x) = \frac{4\pi}{9}\cdot(-24+6x) \Rightarrow V''(2) = \frac{4\pi}{9}\cdot(-24+6\cdot 2) = -\frac{16\pi}{3} < 0,$$

следовательно, $x = 2$ является точкой максимума.

Итак, $x = 2$ - единственная точка экстремума (точка максимума) дифференцируемой функции $V(x)$ на $(0;\ 6)$, поэтому свое наибольшее значение функция $V(x)$ на $(0;\ 6)$ принимает в $x = 2$.

Отсюда $y = \frac{2}{3}\cdot(6-2) = 2\frac{2}{3}$.

Таким образом, цилиндр наибольшего объема, вписанный в конус с радиусом 4 дм и высотой 6 дм, должен иметь высоту 2 дм и радиус основания $2\frac{2}{3}$ дм.

<u>Задание № 4</u>

Составить математическую модель задачи и решить ее.

1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?
2. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы её объем был наименьшим?
3. Проволокой, длина которой ℓ м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?
4. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть

размеры балки?

5. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей?
6. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?
7. Из круглого бревна радиуса R требуется вырезать прямоугольную балку максимальной прочности. Известно, что прочность балки прямо пропорциональна произведению её ширины на квадрат высоты. Какими должны быть размеры балки, чтобы её прочность была максимальной?
8. Оросительный канал имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?
9. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости (K – коэффициент пропорциональности). При какой скорости V плавание судна окажется наиболее экономичным?
10. Определить размеры открытого бассейна объемом 256 $м^3$, имеющего квадратное дно, так чтобы на облицовку его стен и дна было израсходовано наименьшее количество материала.
11. Имеется квадратный лист жести, сторона которого 60 см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку (без крышки). Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?

12. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры сосуда, если на его изготовление имеется $27\pi \approx 84{,}82\ дм^2$ материала.
13. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объема $V = 25\ м^3 \approx 8\pi\ м^3$. Каковы должны быть размеры ямы (радиус и высота), чтобы на облицовку её дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?
14. Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды заданной боковой поверхности $S = 4\sqrt{3}\ м^2$. Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания и высота), чтобы вместимость палатки была наибольшей?
15. Цистерна имеет форму прямого кругового цилиндра, завершенного с одной стороны полушаром. Вместимость цистерны $V = 41{,}89\ ì^3 \approx \frac{40\pi}{3}\ ì^3$. Найти радиус цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.
16. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения $P = 35{,}7\ м \approx (20 + 5\pi)\ м$. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?
17. Из прямоугольного листа жести размером 48×18 см требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?
18. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью $V\ ì^3$. Стоимость $1\,м^2$ материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 руб., а стоимость $1\,м^2$ материала, идущего на стенки бака, составляет P_2 руб. При каком отношении радиуса дна к

высоте бака затраты на материал будут минимальными?

19. Керосиновая цистерна объемом $V\,м^3$, имеет форму цилиндра, завершенного с одной стороны конусом. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, чтобы количество материала для постройки цистерны было наименьшим.
20. Статуя высотой *2 м* стоит на постаменте высотой *3 м*. На каком расстоянии от основания постамента должен встать наблюдатель (его рост до уровня глаз равен *1,6 м*), чтобы видеть статую под наибольшим углом? Шириной основания постамента можно пренебречь.
21. Требуется построить пятистенку с наибольшей полезной площадью. При этом известно, что сумма длин стен этой пятистенки составляет a м. Каковы должны быть длины стен?
22. Требуется построить пятистенку с данной полезной площадью $S\ м^2$. Какие размеры должна иметь пятистенка, чтобы количество материала, затраченного на ее строительство, было наименьшим?
23. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув, получить воронку наибольшей вместимости. Найти центральный угол сектора.
24. Прямоугольный участок разделен перегородкой, параллельной меньшей из сторон прямоугольника. Стоимость установки внешнего ограждения составляет 900 руб. за метр, а перегородки – 1600 руб. за метр. Общая площадь участка $153\,м^2$. Определить размеры участка, минимизирующие стоимость строительства ограждения.
25. Требуется огородить прямоугольную площадь вдоль уже выстроенной стены. Стоимость ограждения стороны, параллельной стене, равна 60 руб. за метр, а стоимость ограждения двух других сторон составляет 90 руб. за метр. Какая максимальная площадь может быть огорожена, если имеется всего 10800 руб.?
26. Требуется выделить прямоугольную площадку земли в 512 $м^2$,

огородить её забором и разделить загородкой на три равные части параллельно одной из сторон площадки. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы на постройку заборов пошло наименьшее количество материала?

27. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком $5\frac{км}{ч}$, а на веслах по $4\frac{км}{ч}$, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?
28. Стадион представляет собой прямоугольное поле с областями в виде полукруга, присоединенными к двум его противоположным сторонам. Периметр стадиона должен быть 330 м. Найти наибольшую возможную его площадь.
29. Фермер хочет расчистить поле в виде прямоугольного участка с присоединенным к одной из его сторон полукруглым участком. Прямоугольный участок будет отведен под посадку картофеля, дающий доход в 5 денежных единиц на 1 $м^2$, а полукруглый участок предназначен под посадку капусты, дающий доход в 6 денежных единиц на 1 $м^2$. Периметр поля должен быть равен 800 м. Как должен фермер спланировать поле, чтобы получить наибольший доход?
30. Художник решил нарисовать картину, изображающую красный прямоугольник, окруженный белой каймой. Требуется, чтобы площадь красного прямоугольника была равна $12 дм^2$, а ширина каймы 1 $дм$ по сторонам и 2 $дм$ сверху и снизу. Каковы должны быть размеры картины, чтобы общая площадь её была наименьшей?

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие.- СПб., изд-во «Профессия», 2003. – 432с.
2. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Уч. пособие/ под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/ Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2003.- 471с.
4. Расчетно-графические работы по высшей математике: методические указания/ К.Г.Козлова, Ф.С.Аитова, В.В.Пылаева, О.П.Гусева, Г.П.Опалева. – Горький, ГИСИ, 1983. Ч. 2. – 60с.
5. Задачник по курсу математического анализа. Учеб.пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов. Ч.1 Под редакцией Н.Я.Виленкина. М.: Просвещение, 1971. – 343с.
6. Домашняя контрольная работа. Тема: «Исследование функции с помощью производных. Построение графиков функций». Н.Новгород: НГПУ, 1995. – 27с.

<u>Содержание</u>

Елена Александровна Бондарь

Татьяна Александровна Пушкова

Павел Валерьевич Столбов

Учебно-методическое пособие
по математике для обучающихся
по направлению «Строительство»

Редактор Д.М. Фетюкова

Подписано в печать__________ Формат 60x90 /1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная. Уч. изд. л.____.
Усл. печ. л___. Тираж ____ экз. Заказ №_______

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет» (ННГАСУ)
603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ. 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65.