

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
“Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет”
(ННГАСУ)

Планиметрия. Треугольники

Методические указания для иностранных граждан

НИЖНИЙ НОВГОРОД
ННГАСУ
2015

УДК 51

Планиметрия.Треугольники [Текст]: метод.указания для иностранных граждан /Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т , сост. Н.Е. Демидова, А.Ю. Долгоносова. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2015. – 31 с.

Методические указания предназначены для иностранных граждан, обучающихся по программе предвузовской подготовки в ННГАСУ.

Методические указания состоят из двух частей. Первая часть содержит сжатый теоретический материал по планиметрии. Во второй части представлены задачи с ответами.

Указания включают также справочные материалы и словарь.

Геометрия

Основные понятия геометрии

Точка, прямая, плоскость – основные понятия геометрии.

Аксиома – это математическое утверждение, которое не требует доказательства.

Теорема – это математическое утверждение, которое требует доказательства.

Геометрия состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии.

Планиметрия – это раздел геометрии, который изучает фигуры на плоскости.

Стереометрия – это раздел геометрии, который изучает тела в трехмерном пространстве.

Планиметрия

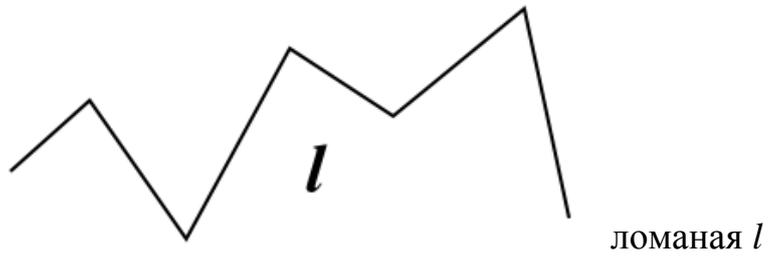
1. Линия. Луч. Отрезок. Угол

1.1. Линия и ее части

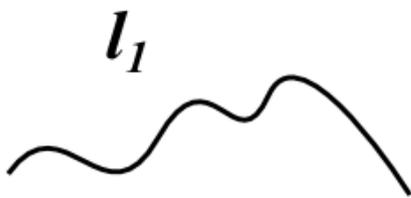
Прямая линия



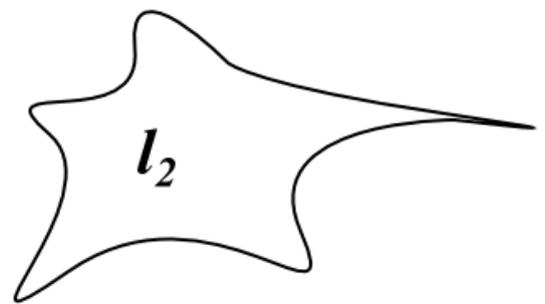
Ломаная линия



Кривая линия



l_1 – незамкнутая кривая линия



l_2 – замкнутая кривая линия

Луч



OA – луч

O – начало луча OA

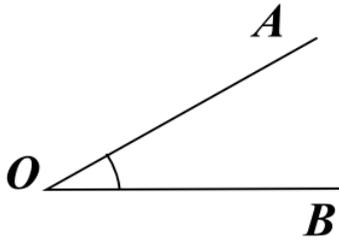
Отрезок



AB – отрезок

A, B – концы отрезка AB

1.2. Углы

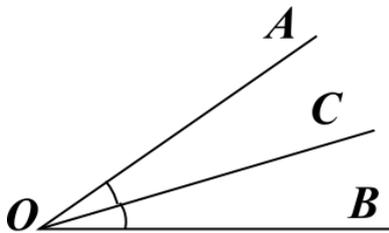


$\angle AOB$ – угол AOB

O – вершина угла AOB

OA, OB – стороны угла AOB

Биссектриса угла



OC – биссектриса угла $\angle AOB$

$\angle AOC = \angle COB$

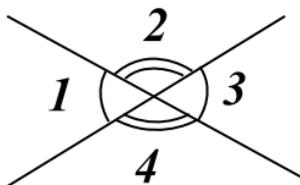
Смежные углы



$\angle 1, \angle 2$ – смежные углы.

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Вертикальные углы



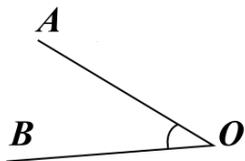
$\angle 1, \angle 3$ – вертикальные углы

$\angle 2, \angle 4$ – вертикальные углы

$\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$

Виды углов



Острый угол

$$\angle AOB < 90^\circ$$



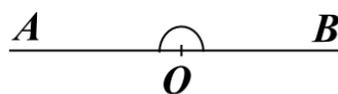
Прямой угол

$$\angle AOB = 90^\circ$$



Тупой угол

$$90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$$

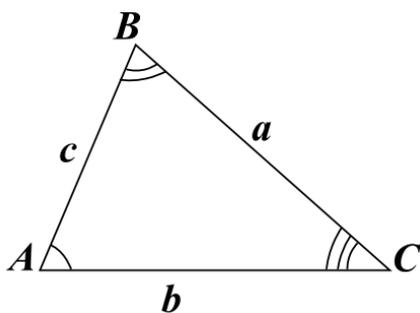


Развернутый угол

$$\angle AOB = 180^\circ$$

2. Треугольники

2.1. Элементы треугольника



$\triangle ABC$ – треугольник

$a = BC, b = AC, c = AB$ – стороны

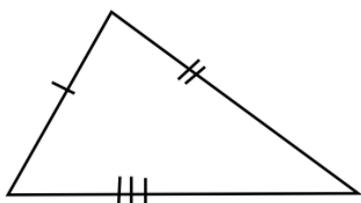
$\angle A, \angle B, \angle C$ – углы

A, B, C – вершины

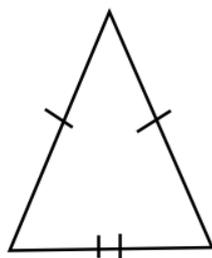
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$P = a + b + c$, где P – периметр треугольника.

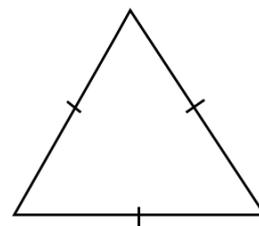
2.2. Виды треугольников



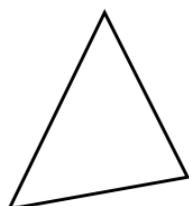
Разносторонний



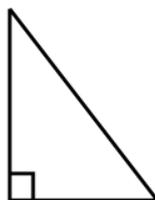
Равнобедренный



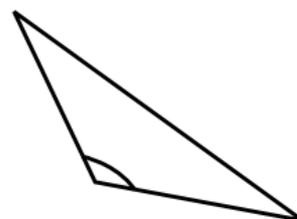
Равносторонний
или правильный



Остроугольный



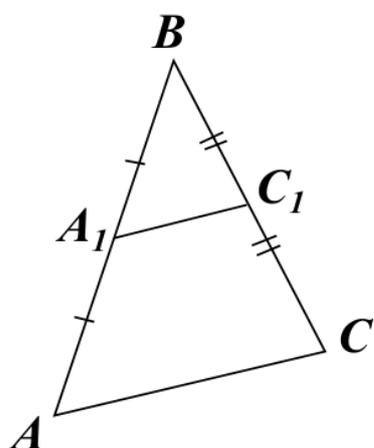
Прямоугольный



Тупоугольный

2.3. Замечательные линии треугольника

Средняя линия треугольника



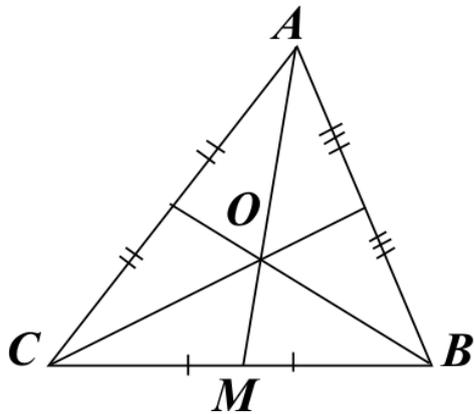
A_1C_1 – средняя линия $\triangle ABC$,

$$A_1C_1 = 1/2 AC, A_1C_1 \parallel AC,$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1,$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} / S_{\triangle ABC} = 1/4$$

Медиана треугольника



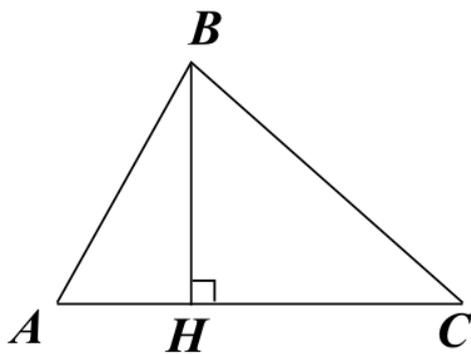
AM – медиана $\triangle ABC$,

$$CM = MB,$$

O – точка пересечения медиан,

$$AO : OM = 2 : 1.$$

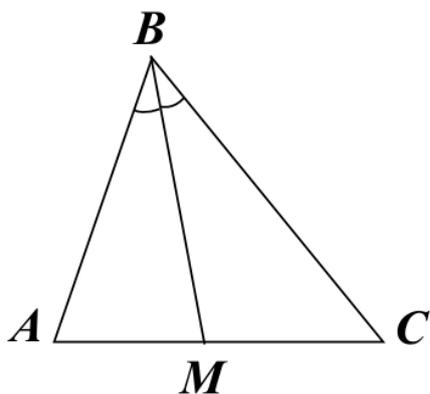
Высота треугольника



BH – высота $\triangle ABC$,

$$BH \perp AC.$$

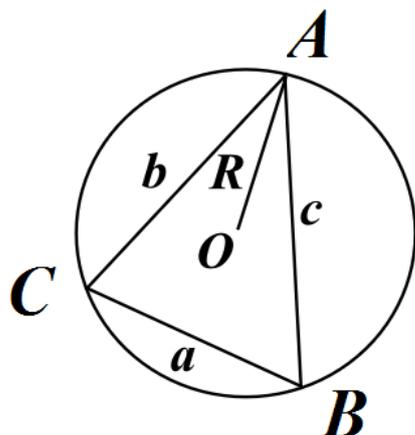
Биссектриса треугольника



BM – биссектриса $\triangle ABC$,

$$\angle ABM = \angle MBC = \frac{1}{2} \angle ABC.$$

2.4. Соотношения в треугольнике



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R - радиус описанной окружности

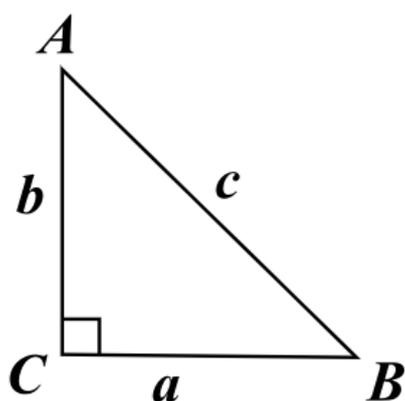
Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Прямоугольный треугольник



$\triangle ABC$ – прямоугольный треугольник,

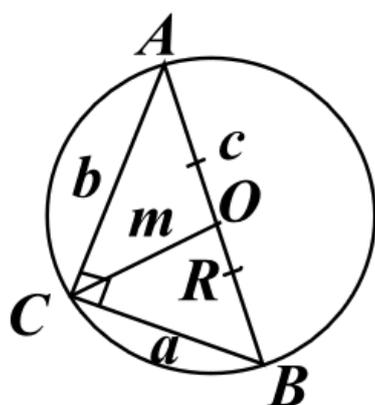
$\angle C = 90^\circ$ – прямой угол,

Для $\angle A$:

$a = BC$ – противолежащий катет,

$b = AC$ – прилежащий катет,

$c = AB$ – гипотенуза.



Теорема Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Медиана, проведенная к гипотенузе

$$c = 2m = 2R$$

Тригонометрические соотношения

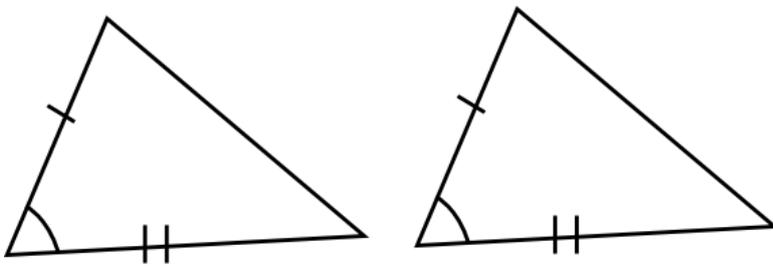
$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$$

2.5. Признаки равенства треугольников

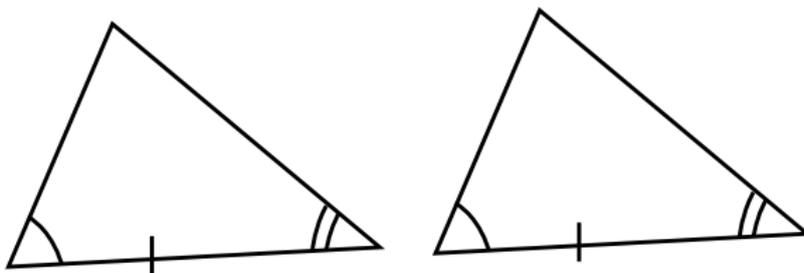
Первый признак равенства:

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



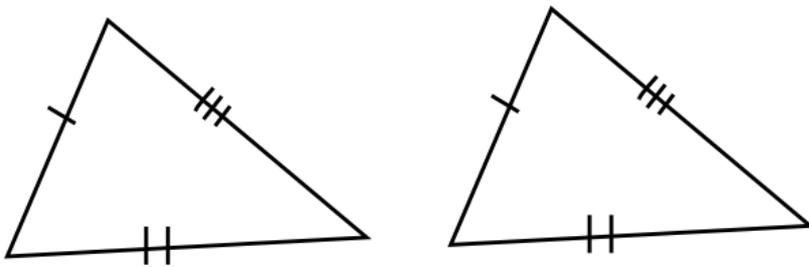
Второй признак равенства:

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Третий признак равенства:

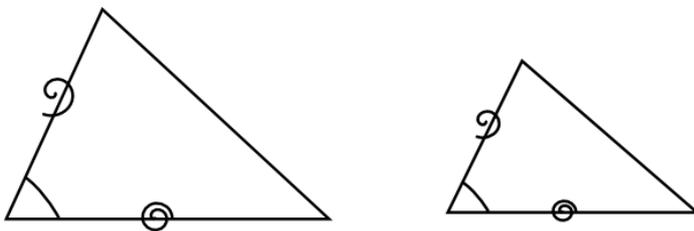
Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



2.6. Признаки подобия треугольников

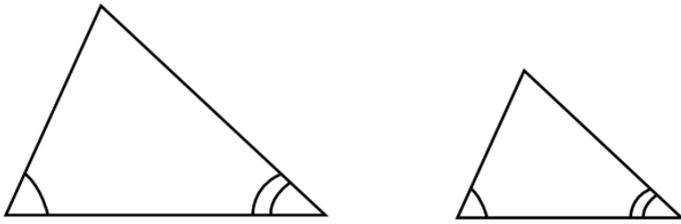
Первый признак подобия:

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, а стороны, образующие этот угол, пропорциональны в равном отношении, то такие треугольники подобны.



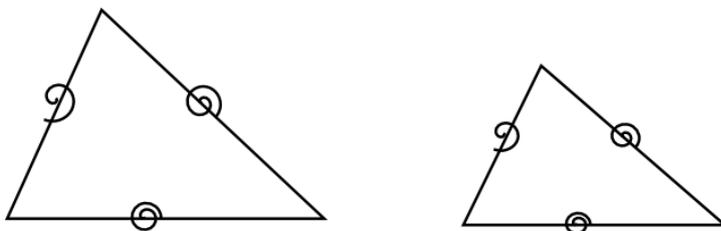
Второй признак подобия:

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

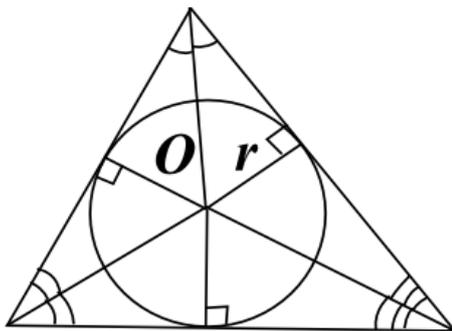


Третий признак подобия:

Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны



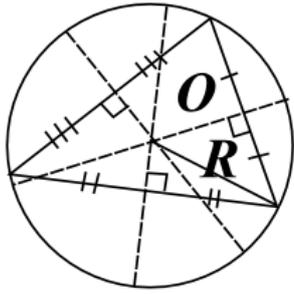
2.7. Окружность и треугольник



Вписанная окружность

O – центр вписанной окружности

O – точка пересечения биссектрис

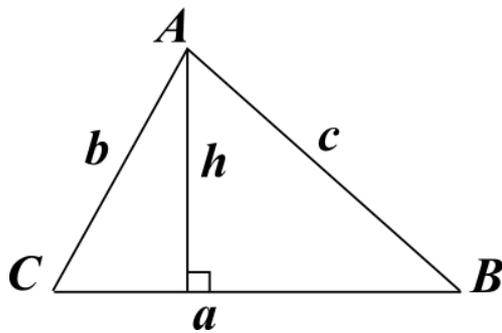


Описанная окружность

O – центр описанной окружности

O – точка пересечения средних перпендикуляров

2.8. Формулы площади



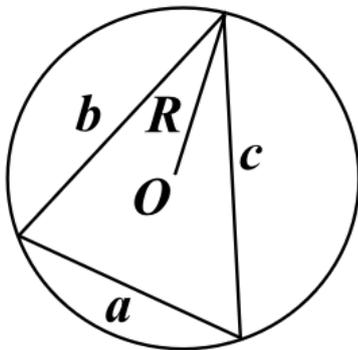
$$S = \frac{ah}{2}$$

$$S = \frac{ab \sin A}{2}$$

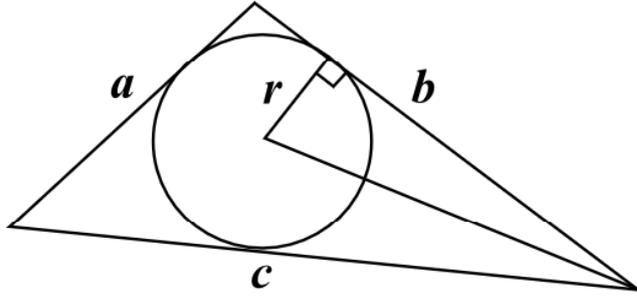
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

h -высота, проведенная к основанию a .



$$S = \frac{abc}{4R}$$



$$S = pr, \quad p = \frac{a + b + c}{2}$$

Правильный треугольник



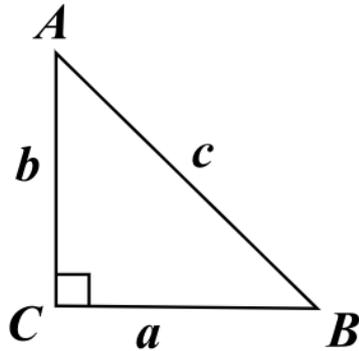
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = 3\sqrt{3}r^2$$

$$S = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

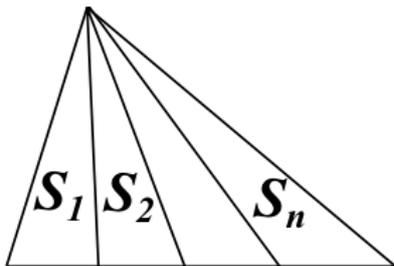
$$a = \sqrt{3}R = 2\sqrt{3}r$$

Прямоугольный треугольник



$$S = \frac{ab}{2}$$

Аддитивность площадей



$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

3. Задачи

3.1. Произвольный треугольник

Задача 1. В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC , точка P лежит на стороне BC . Отрезок AP пересекает BM в точке O , $BO = BP$. Найдите отношение $OM:PC$.

(1 : 2)

Задача 2. Сторона треугольника равна 21, а две другие стороны образуют угол 60° и относятся как 3:8. Найдите эти стороны.

(9; 24)

Задача 3. Длины двух сторон треугольника равны 2 и 3 и площадь $S = 3\sqrt{15}/4$. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

$\left(\frac{8}{\sqrt{15}}\right)$

Задача 4. В треугольнике длина основания на 4 см меньше длины высоты, а площадь этого треугольника равна 96 см^2 . Найти длины основания и высоты треугольника.

(12; 16)

3.2. Треугольник и окружность

Задача 5. Найти диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20 и 24.

(12)

Задача 6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AB = 18$, $AC = 5$, $AH = 3$ и AH – высота треугольника ABC .

(15)

Задача 7. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 9, 10, 17.

(10,652)

3.3. Равносторонний треугольник

Задача 8. Найти площадь равностороннего треугольника со стороной $2\sqrt{3}$.

(3)

Задача 9. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

(0,5)

Задача 10. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.

(2)

Задача 11. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

(1)

Задача 12. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC , а вторая касается прямых AB и AC и первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

(3:2; 2:1)

3.4. Равнобедренный треугольник

Задача 13. Найти высоту к боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами 20, 20, 32.

(19,2)

Задача 14. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 34, котангенс угла при основании треугольника равен $\frac{15}{8}$. Найдите площадь треугольника.

(480)

Задача 15. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла при основании равнобедренного треугольника на противоположную сторону, делит последнюю в отношении **1:2** (считая от основания треугольника). Найти углы треугольника.

$$(\arcsin 1/\sqrt{6})$$

Задача 16. Найти высоту к боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами **20, 20, 32**.

$$(19,2)$$

Задача 17. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и боковую сторону, равны соответственно **5** и **6**. Найти стороны треугольника.

$$(25/4; 25/4; 15/4)$$

Задача 18. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны **20**, косинус угла при основании треугольника равен **0,8**. Найдите периметр треугольника.

$$(72)$$

Задача 19. В равнобедренном треугольнике длина основания относится к длине боковой стороны как **4:3**, а его периметр равен **20**. Найдите длину основания треугольника

$$(8)$$

3.5. Прямоугольные треугольники

Задача 20. Длина одного катета больше другого на 10, но меньше длины гипотенузы на 10. Найти длину гипотенузы.

(50)

Задача 21. В треугольнике KBC угол $\angle K = 90^\circ$, $KB = 12$, $KC = 16$. Найти синус и косинус меньшего угла треугольника.

(0,6;0,8)

Задача 22. В треугольнике KBC угол $\angle K = 90^\circ$, $KB = 10$, $KC = 8$. Найти тангенс и котангенс меньшего угла треугольника.

(0,75;2,4)

Задача 23. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 34, а разность их длин равна 14. Найдите длину гипотенузы.

(26)

Задача 24. Найдите длину высоты прямоугольного треугольника, если он делит гипотенузу на отрезки 32 и 18.

(24)

Задача 25. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 3 раза больше меньшего из катетов. Найти медиану, проведенную к гипотенузе, если больший катет равен $4\sqrt{2}$.

(3)

Задача 26. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40. Определить медиану, проведенную к гипотенузе, если один из катетов равен 5.

(25)

Задача 27. Периметр прямоугольного треугольника равен 17,5. Найти медиану, проведенную к гипотенузе, если один из катетов равен 5.

($3\frac{5}{8}$)

Задача 28. Найти площадь круга S , вписанного в прямоугольный треугольник с катетами, равными 24 и 10. В ответе указать S/π .

(16)

Задача 29. Найти диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами, равными 6 и 8.

(10)

Задача 30. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 40° . Определить острый угол между радиусом описанной окружности, проведенным в вершину прямого угла, и гипотенузой.

(80°)

Задача 31. В окружность радиуса $\sqrt{3}$ вписан прямоугольный треугольник так, что один из катетов в $\sqrt{3}$ раз ближе к центру, чем другой. Определить больший катет.

(3)

Задача 32. В треугольнике ABC даны $\angle B = 30^\circ, \angle C = 90^\circ, O$ – центр вписанной окружности. Отрезок $OA = 12$. Определить радиус вписанной окружности.

(6)

Задача 33. В треугольнике ABC даны CD – медиана, $\angle ACB = 90^\circ, \angle B = 58^\circ$. Найдите $\angle ACD$. Ответ дайте в градусах.

(122°)

Задача 34. Периметр треугольника равен 28, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр полученного треугольника.

(14)

Задача 35. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

(45°)

Задача 36. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° и 61° .

Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

(16°)

Задача 37. Катет прямоугольного треугольника равен 4, а медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 2,5. Найти площадь треугольника.

(6)

Задача 38. Найти площадь круга (S), вписанного в прямоугольный треугольник с катетами, равными 24 и 10. В ответе указать S/π .

(16)

4. Словарь

Русский	Английский	Французский
Аксиома	Axiom	Axiome
Биссектриса	Bisector	Bissectrice
Вершина	Top	Sommet
Величина	Valeur	Valeur (f)
Вид	Type	Type
Вписанная окружность	Inscribed circumference	Circonférence inscrite
Взаимное расположение	Relative position	Disposition reciproque
Высота	Altitude, height	Hauteur
Геометрия	Geometry	Géométrie(f)
Гипотенуза	Hypotenuse	Hypoténuse (f)
Градус	Degree	Degré (m)
Диагональ	Diagonal	Diagonale (f)

Диаметр	Diameter	Diamètre (m)
Длина	Length	Longueur (f)
Доказательство	Proof	Preuver (f)
Замкнутая линия	Closed line	Ligne fermée
Катет	Cathetus	Cathète, (f)
Кривая линия	Curved line	Ligne courbe
Ломаная линия	Polygonal line	Ligne brisée
Луч	Ray	Rayon(m)
Медиана	Median	Médiane(f)
Накрест лежащие углы	Alternate angles	Angles alternes
Ограниченный	Limited	Limite
Односторонние углы	Unilateral angle	Anglesco-internes
Окружность	Circumference	Circonférence
Описанная окружность	Circumscribed circumference	Circonférence circonscrite
Основание	Base	Base (f)
Острый угол	Acute angle	Angle aigu
Ось симметрии	Axis of symmetry	Axede la symétrie

Отношение	Ratio	Rapport, m
Отрезок	Segment	Segment (m)
Параллельный	Parallel	Parallèle
Пересечение	Intersection	Intersection (f)
Периметр	Perimeter	Périmètre (m)
Перпендикулярный	Perpendicular	Perpendiculaire
Планиметрия	Planimetry, planegeometry	Planimétrie (f)
Площадь	Area	Aire (f)
Подобие	Similarity	Similitude (f)
Правильный	Regular	Régulier
Признак	Criterion	Critère (m)
Прилежащий	Adjacent	Adjacent
Провести	Build	Tracer
Противолежащий	Opposite	Opposé
Противоположный	Opposite	Opposé
Прямая линия	Straightline	Ligne droite
Прямой угол	Rightangle	Angle droit
Равнобедренный	Isosceles	Isocèle
Равносторонний	Equilateral	Équilatéral

Радиус	Radius	Rayon (m)
Развёрнутый угол	Flat angle	Angle plat
Свойство	Property	Propriété (f)
Секущая	Secant	Sécante(f)
Симметричный	Symmetric	Symétrique
Соответственные углы	Corresponding angles	Angles correspondants
Теорема	Theorem	Théorème (m)
Точка	Point	Point(m)
Треугольник	Triangle	Triangle, m
Тупой угол	Oblique angle	Angle obtus
Угол	Angle	Angle (m)
Центр	Center	Centre

5. Справочный материал

Знак	Русский	Английский	Французский
\forall	любой, каждый	every	Tout
\exists, \nexists	существует, не существует	exist, don't exist	exister, non exister
$^{\circ}$	Градус	degree	Degré
Δ	Треугольник	triangle	Triangle
\triangle	прямоугольный треугольник	right triangle	triangle rectangle
∞	бесконечность	infinity	l'infini
\cap	Пересечение	intersection	l'intersection
\cup	Объединение	union	l'union
\emptyset	пустое множество	empty set	ensemble vide
\in, \notin	принадлежит, не принадлежит	belong to, does not belong	appartient à, n'appartient pas à
$\sqrt{\quad}$	корень квадратный из	square root of	racine carrée de
$\sqrt[3]{\quad}$	корень кубический из	cube root of	racine cubique de

$(), \{ \}, []$	Скобки	parentheses, braces, brackets	Parenthèses
$[a, b]$	Отрезок	segment	le segment l'intervalle fermé
(a, b)	Интервал	interval	l'intervalle ouvert
sin	Синус	Sine	le sinus
cos	Косинус	cosine	le cosinus
tg	Тангенс	tangent	la tangente
ctg	котангенс	cotangent	la cotangente
S	площадь	Area	Aire
P	периметр	Perimeter	Périmètre
R	Радиус описанной окружности	the radius of the circumcircle	le rayon du cercle
r	Радиус вписанной окружности	the radius of the inscribed circle	le rayon du cercle inscrit

6. Список литературы

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Астрель, 2005. – 991 с.
2. Гринёва, Е.Ф. Французско-русский словарь / Е.Ф. Гринёва, Т.М. Громова. – М.: Русский язык, 1991. – 576 с.
3. Крысенко, С.М. Новейший англо-русский, русско-английский словарь / С.М. Крысенко. – Киев: Арий, М.: ИКТЦ «Лада», 2007. – 903 с.
4. Мюллер, В.К. Новый англо-русский словарь / В.К.Мюллер – М.: Рус. яз.: Медиа, 2007. – 945 с.
5. Петров В.В., Юрченко Т.В. Варианты заданий по математике. Вступительные испытания 2007-2008 ./ Петров В.В.- Н. Новгород, ННГАСУ, 2009.-25 с.
6. Скакун, В.Л. Русско-французский словарь / В.Л. Скакун. – Минск: Харвест, 2003. – 992 с.
7. Promt Translate.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.translate.ru>.

Содержание

Геометрия	3
Основные понятия геометрии	3
1. Линия. Луч. Отрезок. Угол.....	3
1.1. Линия и ее части.....	3
1.2. Углы.....	5
2. Треугольники	6
2.1. Элементы треугольника	6
2.2. Виды треугольников.....	7
2.3. Замечательные линии треугольника.....	7
2.4. Соотношения в треугольнике.....	9
2.5. Признаки равенства треугольников.....	10
2.6. Признаки подобия треугольников	11
2.7. Окружность и треугольник.....	12
2.8. Формулы площади.....	13
3. Задачи	15
3.1. Произвольный треугольник.....	15
3.2. Треугольник и окружность	16
3.3. Равносторонний треугольник.....	16
3.4. Равнобедренный треугольник	17
3.5. Прямоугольные треугольники.....	19
4. Словарь.....	22
5. Справочный материал.....	26
6. Список литературы	28

Демидова Наталия Евгениевна
Долгоносова Анна Юрьевна

Планиметрия. Треугольники

Методические указания для иностранных граждан

Подписано в печать _____ Формат 60*90 1/16
Бумага газетная. Печать трафаретная
Уч. изд. л. _____ Уч. печ. л. _____ Тираж _____ Заказ № _____

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет», 603950, Н. Новгород,
Ильинская, 65
Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н. Новгород, Ильинская, 65