Н.Е. ДЕМИДОВА

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Учебное пособие для иностранных граждан

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»

ДЕМИДОВА Н.Е.

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для иностранных граждан

НИЖНИЙ НОВГОРОД
2011

ББК 22.151.О$_я$729
Д 30

Научный редактор:

Петров В.В. – кандидат физико-математических наук, доцент ННГАСУ

Рецензенты:

Шабанов В.Н. – кандидат технических наук, доцент ННГУ

Лисенкова Е.Е. – кандидат физико-математических наук, доцент ВВАГС

Демидова Н.Е. Математика. Основы тригонометрии: Учебное пособие. – Н.Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 2011. – 92 с.

Пособие предназначено для иностранных слушателей подготовительных отделений, поступающих в высшие учебные заведения.

Пособие включает основной материал курса «Основы тригонометрии». Определения, правила и формулы иллюстрируются большим количеством примеров и практическими указаниями. Подробная рубрикация и словарь облегчают восприятие необходимого материала.

Пособие также будет интересно всем учащимся, готовящимся к поступлению в вузы.

ББК 22.151.О$_я$729
Д 30

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

1. Основные понятия тригонометрии

1.1. Отношения в прямоугольном треугольнике

Пусть ΔABC – прямоугольный, угол C – прямой, угол B – острый, a и b – катеты, c – гипотенуза (рисунок 1.1). *Синус* угла B равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе: $\sin B = \frac{b}{c}$, *косинус* угла B равен отношению прилежащего катета к гипотенузе: $\cos B = \frac{a}{c}$, *тангенс* угла B равен отношению противолежащего и прилежащего катетов: $tgB = \frac{b}{a}$, *котангенс* угла B равен отношению прилежащего и противолежащего катетов: $ctgB = \frac{a}{b}$.

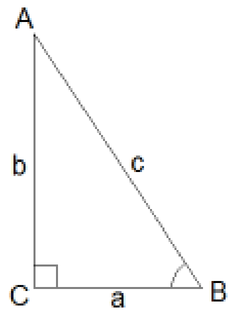


Рисунок 1.1. Прямоугольный треугольник ABC, a и b – катеты, c – гипотенуза

1.2. Тригонометрическая окружность. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла α. Периодичность значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α

Тригонометрическая (единичная) окружность – окружность радиусом, равным одному и с центром в начале координат (рисунок 1.2). Луч OP_α получен поворотом против часовой стрелки луча OP_0 на угол α. Ордината точки P_α – *синус* угла α ($\sin\alpha$), абсцисса точки P_α – *косинус* угла α ($\cos\alpha$). Отрезок [-1;1] на оси Oy – линия синусов, отрезок [-1;1] на оси Ox – линия косинусов. Величина $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$ – *секанс* угла α, величина $cosec\alpha = \dfrac{1}{sin\alpha}$ – *косеканс* угла α. *Тангенс* угла α – это $tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$, *котангенс* угла α – это $ctg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}$. Прямая *x*=1 – *линия (ось) тангенсов*, прямая *y*=1 – *линия (ось) котангенсов*.

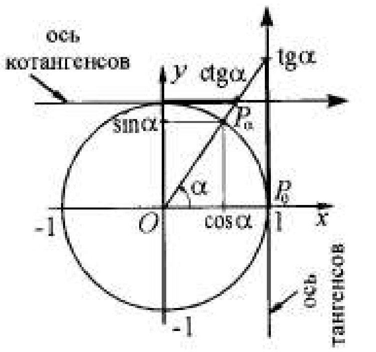


Рисунок 1.2. Тригонометрическая окружность

Угол α может измеряться в градусах и в радианах. Угол в *один радиан* – центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности *1 рад*≈ *57*^{0}*17'*. Формула *перевода градусной меры угла* α *в радианную* $\alpha = \dfrac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0}$, где α^0 – градусная мера угла.

Значения синуса косинуса и тангенса периодически повторяются: $sin(\alpha + 2\pi k) = sin\alpha$, $cos(\alpha + 2\pi k) = cos\alpha$, $tg(\alpha + \pi k) = tg\alpha$, $ctg(\alpha + \pi k) = ctg\alpha$, где $k \in Z$.

1.3. Знаки значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α в различных четвертях. Положительные и отрицательные углы

Углы, полученные поворотом луча OP_0 (рисунок 1.2) против часовой стрелки принимаются положительными, по часовой стрелке – отрицательными. При этом $sin(-\alpha) = -sin\alpha$, $cos(-\alpha) = cos\alpha$, $tg(-\alpha) = -tg\alpha$, $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$.

Четверть	Угол α $(k \in Z)$	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
I	$\alpha \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	+	+	+	+
II	$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$	+	**-**	**-**	**-**
III	$\alpha \in \left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	**-**	**-**	+	+
IV	$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right)$	**-**	+	**-**	**-**

1.4. Таблица значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса основных углов

α^0	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**
α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**
$cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**-1**	**0**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	**не сущ.***	$-\sqrt{3}$	**-1**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	**не сущ.***
$ctg\alpha$	**не сущ.***	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**-1**	$-\sqrt{3}$	**не сущ.***	**0**

* **не сущ.** – не существует

2. Основные формулы тригонометрии

2.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$	$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$
$tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha};$	$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha};$
$ctg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha};$	$1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{sin^2\alpha}.$

2.2. Формулы сложения

$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\, cos\beta \pm cos\alpha\, sin\beta;$	$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\, cos\beta \mp sin\alpha\, sin\beta;$
$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta};$	$ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$

2.3. Формулы двойного аргумента

$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha;$	$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha =$ $= 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha;$
$tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \dfrac{2}{ctg\alpha - tg\alpha};$	$ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \dfrac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}.$

2.4. Формулы тройного аргумента

$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha;$	$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha;$
$tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha};$	$ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}.$

2.5. Формулы половинного аргумента (для синуса и косинуса формулы понижения степени)

$sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-cos\,2\alpha}{2}$;	$cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{cos\,2\alpha+1}{2}$;
$tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha}=\dfrac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$;	$ctg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{sin\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\dfrac{1+cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$.

2.6. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$sin\,\alpha+sin\,\beta=2\,sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;	$sin\,\alpha-sin\,\beta=2\,sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;
$cos\,\alpha+cos\,\beta=2\,cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;	$cos\,\alpha-cos\,\beta=2\,sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$;
$tg\alpha\pm tg\beta=\dfrac{sin(\alpha\pm\beta)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}$;	$ctg\alpha\pm ctg\beta=\dfrac{sin(\beta\pm\alpha)}{sin\,\alpha\,sin\,\beta}$..

2.7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$sin\,\alpha\cdot sin\,\beta=\dfrac{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}{2}$;
$cos\,\alpha\cdot cos\,\beta=\dfrac{cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)}{2}$;
$sin\,\alpha\cdot cos\,\beta=\dfrac{sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)}{2}$.

2.8. Формулы приведения

Для того чтобы записать любую из формул приведения, можно руководствоваться следующими *правилами*:

1. в правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

2. если в левой части формулы угол равен $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

<table>
<tr><td colspan="4">Название функции не изменяется</td><td colspan="4">Название функции заменяется сходным</td></tr>
<tr><td></td><td>$-\alpha$</td><td>$\pi-\alpha$</td><td>$\pi+\alpha$</td><td>$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$</td><td>$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$</td><td>$\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$</td><td>$\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$</td></tr>
<tr><td>sin</td><td>$-\sin\alpha$</td><td>$\sin\alpha$</td><td>$-\sin\alpha$</td><td>$\cos\alpha$</td><td>$\cos\alpha$</td><td>$-\cos\alpha$</td><td>$-\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>$cos\,\alpha$</td><td>$-cos\,\alpha$</td><td>$-cos\,\alpha$</td><td>$sin\,\alpha$</td><td>$-sin\,\alpha$</td><td>$-sin\,\alpha$</td><td>$sin\,\alpha$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">tg</td><td>$-tg\alpha$</td><td>$-tg\alpha$</td><td>$tg\alpha$</td><td rowspan="2">$ctg\alpha$</td><td>$-ctg\alpha$</td><td>$ctg\alpha$</td><td>$-ctg\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$</td><td colspan="3">$\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Название функции не изменяется</td><td colspan="4">Название функции заменяется сходным</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ctg</td><td>$-ctg\alpha$</td><td>$-ctg\alpha$</td><td>$ctg\alpha$</td><td rowspan="2">$tg\alpha$</td><td>$-tg\alpha$</td><td>$tg\alpha$</td><td>$-tg\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$</td><td colspan="3">$\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$</td></tr>
</table>

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «–», так как если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\pi}{2} < \alpha + \dfrac{\pi}{2} < \pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

3. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Задача 1. Вычислить $tg\alpha$, если $sin\,\alpha=-0{,}8$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение. $cos^2\alpha=1-sin^2\alpha=1-(0{,}8)^2=0{,}36$, $cos\alpha=\pm\sqrt{0{,}36}=\pm 0{,}6$. Так как по условию угол α находится в III четверти, то $cos\alpha<0$, следовательно, $cos\alpha=-0{,}6$. Найдём $tg\alpha=\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{-0{,}8}{-0{,}6}=\frac{4}{3}$.

Задача 2. Упростить выражение $\frac{\sin 3\alpha\cos\alpha+\cos 3\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

Решение.

$$\frac{\sin 3\alpha\cos\alpha+\cos 3\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=\frac{\sin(3\alpha+\alpha)}{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin 4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=2\sin 2\alpha.$$

Задача 3. Вычислить $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$.

Решение

$$\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)=-\sin\frac{41\pi}{6}=-\sin\left(6\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=$$
$$=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Упражнения

1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4. Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\cos\beta = \frac{5}{13}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

6. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

7. Вычислить

7.1. $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;

7.2. $\cos\frac{5\pi}{4}$;

7.3. $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$;

7.4. $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

7.5. $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

7.2. $\sin\frac{19\pi}{4}$.

8. Вычислить

8.1. $\sin 405^0 - \cos 315^0$;

8.2. $\cos 690^0 - \sin 780^0$;

8.3. $\sin\frac{11\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3}$;

8.4. $\sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$.

9. Упростить выражения

9.1. $\dfrac{\sin(-\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)}$;

9.2. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(2\pi + \alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha) + 1}$.

10. Упростить выражения

10.1. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 10.2. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 10.3. $\dfrac{\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-1}$;

10.4. $\dfrac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-1}$; 10.5. $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 10.6. $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{1+\cos 4\alpha}$.

11. Доказать тождества

11.1. $\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

11.2. $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

11.3. $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha=2\cos(\alpha-\beta)$;

11.4. $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\cdot\sin 2\beta=-2\sin(\alpha-\beta)$.

12. Синус острого угла равен $\dfrac{15}{17}$. Найти косинус смежного с ним угла.

13. Косинус угла треугольника равен $\dfrac{9}{41}$. Найти синус угла, смежного с данным, при той же вершине треугольника.

14. Доказать тождества

14.1. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha$;

14.2. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

14.3. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

14.4. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

15. Вычислить

15.1. $\sin 575^0 \cdot \cos 845^0 - \cos 1405^0 \cdot \sin 1675^0 - \mathrm{tg} 215^0 \mathrm{tg} 685^0 - \mathrm{tg}^2 35^0$;

15.2. $\sin\frac{8\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6} + \cos\frac{29\pi}{6} \cdot \mathrm{tg}\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\cos\frac{29\pi}{6} \cdot \sin\frac{11\pi}{6}} + 7$;

15.3. $4\sin 18^0 \cdot \cos 36^0$;

15.4. $\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{5\pi}{7}$.

16. Упростить выражения

16.1. $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \mathrm{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$;

16.2. $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \mathrm{ctg}(\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

17. Упростить выражения и найти их числовые значения

17.1. $\dfrac{\sin\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(7\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\alpha - \pi)}$, при $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

17.2. $\dfrac{\mathrm{tg}(\pi + \alpha) - \mathrm{tg}(4\pi - \beta)}{1 + \mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{tg}\beta}$, при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$.

18. Упростить выражения

18.1. $\dfrac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \dfrac{2 - \cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

18.2. $\dfrac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos(-\alpha) + \sin\alpha} - \dfrac{2 - 3\sin^2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$.

19. Доказать тождества

19.1. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

19.2. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$;

19.3. $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot \operatorname{ctg}\alpha=1$;

19.4. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

20. Доказать тождества

20.1. $\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{\beta}{2}$;

20.2. $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

21. Упростить выражения

21.1. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;

21.2. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^0-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^0)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^0-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^0+\alpha)}$.

Ответы. 1. $-\frac{4}{5}$. 2. $-\frac{4}{5}$. 3. $\frac{5}{12}$. 4. $\frac{12}{5}$. 5. $\frac{56}{65}$. 6. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7.1. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7.2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7.3. $-\sqrt{3}$; 7.4. -1; 7.5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7.6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8.1. 0; 8.2. 0; 8.3. 0; 8.4. 0. 9.1. $-\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 9.2. $\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$. 10.1. $2\operatorname{ctg}\alpha$; 10.2. $2\operatorname{tg}\alpha$; 10.3. $\operatorname{tg}\alpha$; 10.4. $\operatorname{ctg}\alpha$; 10.5. 1; 10.6. 0,5. 12. $-\frac{8}{17}$. 13. $\frac{40}{41}$. 15.1. $\cos 70^0$; 15.2. 0; 15.3. 1; 15.4.

$\frac{1}{8}$. 16.1. 1; 16.2. -1. 17.1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 17.2. $\sqrt{3}$. 18.1. $-\frac{3}{2}\mathrm{tg}2\alpha$; 18.2. $-\frac{\mathrm{tg}2\alpha}{2}$. 21.1. 1; 21.2. 1.

Задача 4. Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

Решение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$
$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Задача 5. Вычислить $\sin 75^0+\cos 75^0$.

Решение.

$$\sin 75^0+\cos 75^0=\sin 75^0+\sin 15^0=2\sin\frac{75^0+15^0}{2}\cos\frac{75^0-15^0}{2}=$$
$$=2\sin 45^0\cos 30^0=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Упражнения

22. Упростить выражения

22.1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; 22.2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

22.3. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 22.4. $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

23. Вычислить значения выражений

23.1. $\cos 105^0+\cos 75^0$; 23.2. $\sin 105^0-\sin 75^0$;

23.3. $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$; 23.4. $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$.

23.5. $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; 23.6. $\sin 105^0+\sin 165^0$.

24. Доказать тождества

24.1. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\mathrm{tg}2\alpha$; 24.2. $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$.

25. Упростить выражения

25.1. $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 25.2. $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Ответы. 22.1. $\sqrt{3}\cos\alpha$; 22.2. $\sqrt{2}\sin\beta$; 22.3. $\sin 2\alpha$; 22.4. $\sin 2\alpha$. 23.1. 0; 23.2. 0; 23.3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 23.4. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 23.5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 23.6. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 25.1. $\frac{\mathrm{ctg}2\alpha}{\cos\alpha}$; 25.2. $2\sin\alpha$.

4. Простейшие тригонометрические уравнения

4.1. Уравнение $\cos x = a$

Уравнение $\cos x = a$, если $|a|\le 1$, имеет решения $x=\pm\arccos a+2k\pi$, $k\in Z$, где $\arccos a$ – *арккосинус* числа а. *Арккосинусом* числа а $(\arccos a)$, где $|a|\le 1$, называется угол α такой, что 1) $\alpha\in[0;\pi]$ и 2) $\cos\alpha = a$ ($\arccos a=\alpha$, если $\cos\alpha=a$).

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\le\frac{\pi}{6}\le\pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\le\frac{5\pi}{6}\le\pi$.

Тождества

$\cos(\arccos a) = a$; $\arccos(\cos x) = x$, если $x \in [0;\pi]$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ $a \in [-1;1]$.

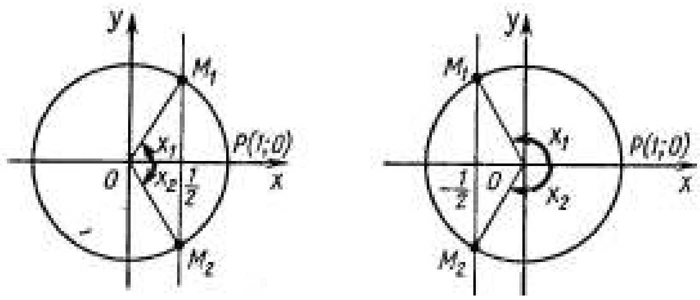


Рисунок 4.1. Тригонометрическая окружность с абсциссами точек M_1 и M_2

Задача 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. Косинус x – абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1;0)$ вокруг начала координат на угол x (рисунок 4.1). Абсциссу равную $\frac{1}{2}$ имеют две точки окружности M_1 и M_2. Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P(1;0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Точка M_2 получается из точки $P(1;0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Таким образом, все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Задача 2. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение. Абсциссу равную $-\frac{1}{2}$ имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рисунок 4.2). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Итак, каждое из уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $0 \le x \le \pi$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ – корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ – корень уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют *арккосинусом* числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; Число $\frac{2\pi}{3}$ называют *арккосинусом* числа $-\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Задача 3. Решить уравнение $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Решение. Так как $-\frac{3}{4} \in [-1;1]$, то уравнение $\cos x = -\frac{3}{4}$ имеет решения

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k = \pm\left(\pi - \arccos\frac{3}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ. $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$.

Задача 4. Решить уравнение $(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0$.

Решение.

1) $4\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{4}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Частные случаи:

$\cos x = 0,$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
$\cos x = 1,$	$x = 2\pi n$, $n \in Z$.
$\cos x = -1,$	$x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Задача 5. Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

Решение. $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in Z$.

Упражнения

1. Вычислить

1.1. $\arccos 0$; 1.2. $\arccos 1$; 1.3. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

1.4. $\arccos\dfrac{1}{2}$; 1.5. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 1.6. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Вычислить

2.1. $2\arccos 0 + 3\arccos 1$; 2.3. $12\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

2.2. $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$; 2.4. $4\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Решить уравнения

3.1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3.2. $\cos x = \dfrac{1}{2}$;

3.3. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3.4. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Решить уравнения

4.1. $\cos x = \dfrac{1}{3}$; 4.2. $\cos x = \dfrac{3}{4}$;

4.3. $\cos x = -0{,}3$; 4.4. $\cos x = -0{,}2$.

5. Решить уравнения

5.1. $\cos 4x = 1$; 5.2. $\cos 2x = -1$;

5.3. $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{4} = -1$; 5.4. $2\cos\dfrac{x}{3} = \sqrt{3}$.

5.5. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ 5.6. $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

6. Решить уравнения

6.1. $\cos x \cdot \cos 3x = \sin 3x \cdot \sin x$; 6.2. $\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x = 0$.

7. Решить уравнения

7.1. $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 7.2. $4\cos^2 x = 3$;

7.3. $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$; 7.4. $2\sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$.

8. Решить уравнения

8.1. $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$; 8.2. $(1 - \cos x)(4 + 3\cos 2x) = 0$;

8.3. $(1 + 2\cos x)(1 - 3\cos x) = 0$; 8.4. $(1 - 2\cos x)(2 + 3\cos x) = 0$.

9. Решить уравнения

9.1. $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 9.2. $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Ответы. 1.1. $\frac{\pi}{2}$; 1.2. 0; 1.3. $\frac{\pi}{4}$; 1.4. $\frac{\pi}{3}$; 1.5. $\frac{5\pi}{6}$. 1.6. $\frac{3\pi}{4}$ 2.1. π; 2.2. 2π; 2.3. π; 2.4. 8π. 3.1. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3.2. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 3.3. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3.4. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4.1. $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4.2. $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4.3. $x = \pm(\pi - \arccos 0{,}3) + 2\pi k$, $k \in Z$; 4.4. $x = \pm(\pi - \arccos 0{,}2) + 2\pi k$, $k \in Z$. 5.1. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 5.2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 5.3. $x = \pm 3\pi + 8\pi k$, $k \in Z$; 5.4. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in Z$; 5.5. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 5.6. $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 6.1. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 6.2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 7.1. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 7.2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; 7.3. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 7.4. $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in Z$. 8.1. $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 8.2. $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 8.3.

$x_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x_2 = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 8.4. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. 9.1. $x = \frac{7}{4}$; 9.2. $x = -2{,}5$.

4.2. Уравнение $\sin x = a$

Уравнение $\sin x = a$, если $|a| \le 1$, имеет решения $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in Z$, где arcsina – *арксинус* числа a. Арксинусом числа (arcsina), где $|a| \le 1$, называется угол α такой, что 1) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и 2) синус которого равен a: $\sin\alpha = a$ ($\arcsin a = \alpha$, если $\sin\alpha = a$).

Например, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le \left(-\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{\pi}{2}$.

Тождества

$\sin(\arcsin a) = a$, если $|a| \le 1$; $\arcsin(\sin x) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

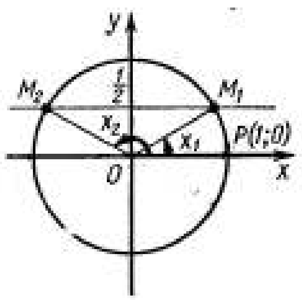
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Задача 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. $\sin x$ – ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1;0)$ вокруг начала координат на угол x (рисунок 4.2).

Ординату равную $\frac{1}{2}$ имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рисунок 4.2, слева). Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1;0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Точка M_2

получается из точки $P(1;0)$ поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т.е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Таким образом, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. Эти формулы объединяются в одну $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$.



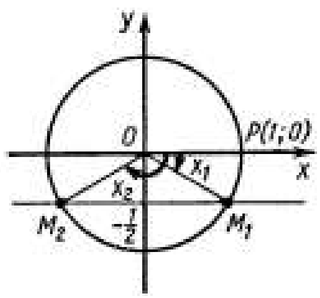


Рисунок 4.2. Тригонометрическая окружность с ординатами точек M_1 и M_2

В самом деле, если $n -$ чётное число, т.е. $n = 2k$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, если $n -$ нечётное число, т.е. $n = 2k + 1$, то $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, то есть $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$.

Задача 2. Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Решение. Ординату равную $-\frac{1}{2}$ имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рисунок 4.2, справа), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и

$x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. Эти формулы объединяются в одну $x=(-1)^n\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi n$, $n\in Z$.

В самом деле, если $n-$ чётное число, т.е. $n=2k$, то $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$, если $n-$ нечётное число, т.е. $n=2k+1$, то $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ. $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Итак, каждое из уравнений $\sin x=\dfrac{1}{2}$ и $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\dfrac{\pi}{6}-$корень уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2}$ и $x_1=-\dfrac{\pi}{6}-$ корень уравнения $\sin x=-\dfrac{1}{2}$. Число $\dfrac{\pi}{6}$ называют *арксинусом* числа $\dfrac{1}{2}$ и записывают $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$; число $-\dfrac{\pi}{6}$ называют *арксинусом* числа $-\dfrac{1}{2}$ и пишут $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 3. Решить уравнение $\sin x=\dfrac{2}{3}$.

Решение. Так как $\dfrac{2}{3}\in[-1;1]$, то уравнение $\sin x=\dfrac{2}{3}$ имеет решения $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ. $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Частные случаи

$\sin x = 0,$	$x = \pi n,\ n \in Z.$
$\sin x = 1,$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
$\sin x = -1,$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Задача 3. Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

Решение. $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Упражнения

1. Вычислить

1.1. $\arcsin\ 0$; 1.2. $\arcsin 1$; 1.3. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

1.4. $\arcsin\dfrac{1}{2}$; 1.5. $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 1.6. $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Вычислить

2.1. $\arcsin\ 1 - \arcsin(-1)$; 2.3. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2.2. $\arcsin\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2.4. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Решить уравнения

3.1. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3.2. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3.3. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;   3.4. $\sin x = -\frac{1}{2}$.

4. Решить уравнения

4.1. $\sin x = \frac{3}{4}$;   4.2. $\sin x = \frac{2}{7}$;

4.3. $\sin x = -\frac{1}{4}$;   4.4. $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

5. Решить уравнения

5.1. $\sin 3x = 1$;   5.2. $\sin 2x = -1$;

5.3. $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$;   5.4. $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$;

5.5. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ 5.6. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

6. Решить уравнения

6.1. $\sin 4x \cdot \cos 2x = \cos 4x \cdot \sin 2x$;

6.2. $\cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

7. Решить уравнения

7.1. $1 - 4\sin x \cos x = 0$;   7.2. $\sqrt{3} + 4\sin x \cos x = 0$;

7.3. $1 + 6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0$;   7.4. $1 - 8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} = 0$.

8. Решить уравнения

8.1. $1 + \cos 5x \cdot \sin 4x = \cos 4x \cdot \sin 5x$;

8.2. $1 - \sin x \cdot \cos 2x = \cos x \cdot \sin 2x$.

9. Решить уравнения

9.1. $(\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$; 9.2. $(4\sin x - 3)(2\sin x + 1) = 0$;

9.3. $(2\sin 2x - 1)(\sin 4x + 1) = 0$; 9.4. $(4\sin 3x - 1)(2\sin x + 3) = 0$.

10. Решить уравнения

10.1. $\arcsin\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) = \dfrac{\pi}{6}$; 10.2. $\arcsin(3 - 2x) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ответы. 1.1. 0; 1.2. $\dfrac{\pi}{2}$; 1.3. $\dfrac{\pi}{3}$; 1.4. $\dfrac{\pi}{6}$; 1.5. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 1.6. $-\dfrac{\pi}{3}$. 2.1. π; 2.2. 0; 2.3. $\dfrac{\pi}{2}$; 2.4. $-\dfrac{\pi}{2}$. 3.1. $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; 3.2. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 3.3. $x = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; 3.4. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 4.1. $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{3}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4.2. $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{2}{7} + \pi n$, $n \in Z$; 4.3. $x = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4.4. $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3} + \pi n$, $n \in Z$. 5.1. $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3}, k \in Z$; 5.2. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 5.3. $x = (-1)^{n+1} \dfrac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in Z$; 5.4. $x = (-1)^n \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 5.5. $x = -\dfrac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 5.6. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 6.1. $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 6.2. $x = \pi n$, $n \in Z$. 7.1. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 7.2. $x = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 7.3. $x = (-1)^{n+1} 2\arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 7.4. $x = (-1)^n \dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{1}{4} + \dfrac{3\pi n}{2}$, $n \in Z$. 8.1. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 8.2. $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. 9.1. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $x = (-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; 9.2. $x = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

$x=(-1)^k \arcsin\frac{3}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 9.3. $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

9.4. $x=(-1)^n\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 10.1. $x=7$; 10.2. $x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$.

4.3. Уравнение $\mathrm{tg}x = a$

Уравнение $\mathrm{tg}x=a$, $a\in R$, имеет решения $x=\mathrm{arctg}a+k\pi$, $k\in Z$, где $\mathrm{arctg}a$ – *арктангенс* числа a.

Арктангенсом числа $(\mathrm{arctg}a)$, где $a\in R$, называется угол α такой, что

1) $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,

2) $\mathrm{tg}\alpha=a$ ($\mathrm{arctg}a=\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=a$).

Например, $\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, так как $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$ и $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$; $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, так как $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$.

Тождества

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}a)=a$; $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)=x$, если $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; $\mathrm{arctg}(-x)=\mathrm{arctg}x$.

Например, $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})=-\mathrm{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$; $\mathrm{arctg}(-1)=-\mathrm{arctg}1=-\frac{\pi}{4}$.

Задача 1. Решить уравнение $\mathrm{tg}x=\sqrt{3}$.

Решение. Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведём через точку P (рисунок 4.3.) прямую, перпендикулярную PO (ось тангенсов), и отложим отрезок $PM=\sqrt{3}$, через точки M и O проведём прямую. Эта прямая пересекает окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим

$\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = tgx_1$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P(1;0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Точка M_2 получается поворотом точки $P(1;0)$ на угол $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Итак, корни уравнения $tgx = \sqrt{3}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in Z$. Эти формулы объединяются в одну: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

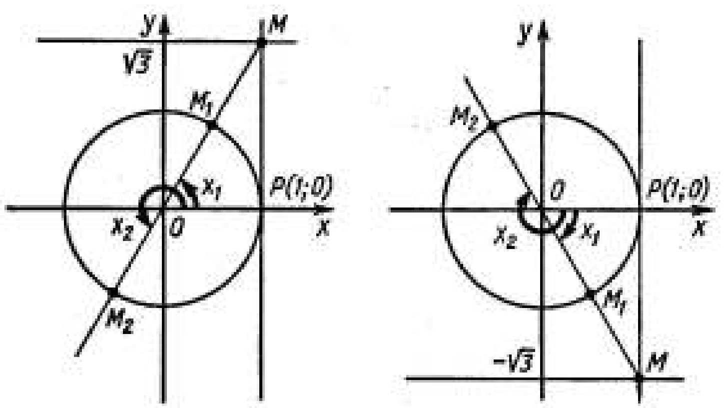


Рисунок 4.3. Тригонометрическая окружность с отмеченными на ней углами, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$ (слева) и $-\sqrt{3}$ (справа)

Задача 2. Решить уравнение $tgx = -\sqrt{3}$.

Решение. Углы, тангенсы которых равны ($-\sqrt{3}$), указаны на рисунке 4.3, где $PM \perp PO$, $PM = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника POM находим

$\angle POM=\frac{\pi}{3}$, т.е. $x_1=-\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P(1;0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in Z$. Точка M_2 получается поворотом точки $P(1;0)$ на углы $x=-\frac{\pi}{3}+\pi(2k+1)$, где $k\in Z$. Поэтому корни уравнения $tgx=-\sqrt{3}$ можно найти по формуле $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ. $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Итак, каждое из уравнений $tgx=\sqrt{3}$ и $tgx=-\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\frac{\pi}{3}$ – корень уравнения $tgx=\sqrt{3}$ и $x_1=-\frac{\pi}{3}$ – корень уравнения $tgx=-\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют *арктангенсом* числа $\sqrt{3}$ и записывают $arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют *арктангенсом* числа $-\sqrt{3}$ и пишут $arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

Задача 3. Решить уравнение $tgx=2$.

Решение. $x=arctg2+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ. $x=arctg2+\pi n,\ n\in Z.$

Задача 4. Решить уравнение $(tgx+4)\left(ctgx-\sqrt{3}\right)=0$.

Решение. 1) $tgx+4=0,\ \ tgx=-4,\ \ x=arctg(-4)+\pi n,\ n\in Z.$

При этих значениях x первая скобка левой части исходного уравнения обращается в ноль, а вторая не теряет смысла, так как из равенства $\mathrm{tg}x = -4$ следует, что $\mathrm{ctg}x = -\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

2) $\mathrm{ctg}x - \sqrt{3} = 0,\ \ \mathrm{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \ x = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом вторая скобка исходного уравнения равна нулю, а первая скобка не теряет смысла.

Ответ. $x = \mathrm{arctg}(-4) + \pi n,\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Упражнения

1. Вычислить

1.1. $\mathrm{arctg}0$; 1.2. $\mathrm{arctg}(-1)$; 1.3. $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 1.4. $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

2. Вычислить

2.1. $6\mathrm{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 2.3. $3\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2.2. $2\mathrm{arctg}1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2.4. $5\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Решить уравнения

3.1. $\mathrm{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3.2. $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$;

3.3. $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$; 3.4. $\mathrm{tg}x = -1$;

3.5. $\mathrm{tg}x = 4$; 3.6. $\mathrm{tg}x = -5$.

4. Решить уравнения

4.1. $\mathrm{tg}2x = 0$; 4.2. $\mathrm{tg}3x = 0$;

4.3. $1 + \mathrm{tg}\frac{x}{3} = 0$; 4.4. $\sqrt{3} + \mathrm{tg}\frac{x}{6} = 0$.

5. Решить уравнения

5.1. $(\mathrm{tg}x - 1)(\mathrm{tg}x + \sqrt{3}) = 0$; 5.2. $(\sqrt{3}\mathrm{tg}x + 1)(\mathrm{tg}x - \sqrt{3}) = 0$;

5.3. $(\mathrm{tg}x - 2)(3\cos x - 1) = 0$; 5.4. $(\mathrm{tg}x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

5.5. $(\mathrm{tg}x + 4)\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$; 5.6. $\left(\mathrm{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\mathrm{tg}x - 1) = 0$.

6. Решить уравнения

6.1. $\mathrm{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 6.2. $\mathrm{arctg}(3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

Ответы. 1.1. 0; 1.2. $-\frac{\pi}{4}$; 1.3. $-\frac{\pi}{6}$; 1.4. $\frac{\pi}{3}$. 2.1. 3π; 2.2. 0; 2.3. $\frac{7\pi}{6}$; 2.4. $-\frac{47\pi}{12}$. 3.1. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 3.2. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 3.3. $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 3.4. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 3.5. $x = \mathrm{arctg}4 + \pi n$, $n \in Z$; 3.6. $x = -\mathrm{arctg}5 + \pi n$, $n \in Z$. 4.1. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4.2. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4.3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4.4. $x = 2\pi + 6\pi n$, $n \in Z$. 5.1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 5.2. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 5.3. $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n$, $n \in Z$; 5.4. $x = \mathrm{arctg}4{,}5 + \pi n$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 5.5.

$x = \mathrm{arctg}4 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 5.6. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 6.1. $x = \frac{2}{5}$; 6.2. $x = \frac{3+\sqrt{3}}{5}$.

5. Решение различных типов тригонометрических уравнений

5.1. Уравнения, сводящиеся к квадратным

1. Уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ и $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$, где $a, b, c \in R$ и $a \neq 0$. Делаем замену $\sin x = t$ или соответственно $\cos x = t$, где $t \in [-1; 1]$. Решаем квадратное уравнение, затем простейшие тригонометрические уравнения.

Задача 1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Решение. Делаем подстановку $\sin x = t$, $|t| \le 1$ и решаем квадратное уравнение $t^2 + t - 2 = 0$; $t_1 = -2, t_2 = 1$, где $t = -2$ – посторонний корень. Переходим к простейшему уравнению $\sin x = 1$, его решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

2. Уравнение вида $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$, где $a, b, c \in R$ и $a \neq 0$.

Метод решения: заменяем $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и получаем: $a\cos^2 x - b\cos x - (c + a) = 0$, затем делаем подстановку: $\cos x = t$, $|t| \le 1$ и решаем квадратное уравнение, находим x.

Задача 2. Решить уравнение $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решение. Заменяем $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos x = t \in [-1;1]$, решаем квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$; $t_1 = -\dfrac{1}{2}, t_2 = 1.$ Простейшие уравнения $\cos x = 1,\ \cos x = -\dfrac{1}{2}$, их решения $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Ответ. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

3. Уравнение вида $a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$; где $a, b, c \in R$ и $a \neq 0$.

Метод решения: аналогичен методу решения уравнения в пункте **2**.

Задача 3. Решить уравнение $12\cos^2 x + \sin x - 11 = 0$.

Решение. Заменяем $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\sin x = t$, $|t| \le 1$, решаем квадратное уравнение $12t^2 - t - 1 = 0$, из которого находим $t_1 = \dfrac{1}{3}, t_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Получаем простейшие уравнения $\sin x = \dfrac{1}{3},\ \sin x = -\dfrac{1}{4}$, их решения $x_1 = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi$, $x_2 = (-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

Ответ. $x_1 = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi$; $x_2 = (-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

4. Уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, где $a, b, c \in R$ и $a \neq 0$.

Предположим, что $\cos x = 0$. Подставим это значение косинуса в уравнение, получим

$$a\sin^2 x + b\sin x \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0,$$

чего не может быть, так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Следовательно, $\cos x\neq 0$, поэтому обе части уравнения $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ можно разделить на $\cos^2 x\neq 0$.

Метод решения: обе части уравнения делим на $\cos^2 x\neq 0$ и получаем: $a\mathrm{tg}^2 x+b\mathrm{tg}x+c=0$, затем делаем подстановку: $\mathrm{tg}x=t$ и решаем квадратное уравнение, затем находим x.

Задача 4. Решить уравнение $5\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Решение. Делим обе части исходного уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, получаем $5\mathrm{tg}^2 x-3\mathrm{tg}x-2=0$. Делаем подстановку $\mathrm{tg}x=t$, решаем квадратное уравнение $5t^2-3t-2=0$; $t_1=-\dfrac{2}{5}, t_2=1$. Переходим к простейшим уравнениям $\mathrm{tg}x=-\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{tg}x=1$, решение которых соответственно $x=\pi k-\mathrm{arctg}\dfrac{2}{5}, k\in Z$ и $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Ответ. $x_1=\pi k-\mathrm{arctg}\dfrac{2}{5}, k\in Z$; $x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

5. Уравнение вида $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$, где $a,b,c,d\in R$, $a\neq 0$, $a\neq d$.

Метод решения

Преобразуем исходное уравнение, используя основное тригонометрическое тождество:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right) \text{ или}$$

$$(a-d)\sin^2 x+b\sin x\cos x+(c-d)\cos^2 x=0,$$

последнее уравнение решается как уравнение в пункте **4**.

Задача 5. Решить уравнение $2\sin^2 x-5\sin x\cos x-8\cos^2 x=-2$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right),$$

$$4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0.$$

Делим обе части последнего уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получаем $4\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg}x - 6 = 0$. Делаем подстановку $\mathrm{tg}x = t$, решаем квадратное уравнение $4t^2 - 5t - 6 = 0$; $t_1 = -\dfrac{3}{4}, t_2 = 2$. Переходим к простейшим уравнениям $\mathrm{tg}x = -\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{tg}x = 2$, решение которых соответственно $x = \pi k - \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4}, k \in Z$ и $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n, n \in Z$.

Ответ. $x = \pi k - \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4}, k \in Z$ и $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n, n \in Z$.

Задача 6. Решить уравнение $\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x + 1 = 0$.

Решение. Область определения функций уравнения: $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Так как $\mathrm{ctg}x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}x}$, то исходное уравнение можно переписать в виде: $\mathrm{tg}x - \dfrac{2}{\mathrm{tg}x} + 1 = 0$. Умножим обе части последнего уравнения на $\mathrm{tg}x$, получаем $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x - 2 = 0$.

$\mathrm{tg}x = t$, $t^2 + t - 2 = 0$, $t_1 = -2,\ t_2 = 1$. Переходим к уравнениям $\mathrm{tg}x = -2,\ \mathrm{tg}x = 1$, решение которых соответственно $x = \pi k - \mathrm{arctg}2, k \in Z$ и $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Найденные корни удовлетворяют этим условиям.

Ответ. $x = \pi k - \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4}, k \in Z$ и $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n, n \in Z$.

Задача 7. Решить уравнение $3\cos^2 6x + 8\sin 3x\cos 3x - 4 = 0$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$3\left(1-\sin^2 6x\right)+4\sin 6x-4=0,$$

$$3\sin^2 6x-4\sin 6x+1=0.$$

Обозначим $\sin 6x = t$, получим $3t^2-4t+1=0$, $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=1$. Решения уравнений $\sin 6x=\frac{1}{3}$, $\sin 6x=1$ соответственно $x=\frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{6}$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Ответ. $x=\frac{(-1)^n}{6}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{6}$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

5.2. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$, где $a, b, c \in R$

При $c=0$ обе части делим на $\cos x\neq 0$ и получаем: $a\,\mathrm{tg}x+b=0$ и $x=\mathrm{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)+\pi k$, $k\in Z$.

При $c\neq 0$ для решения уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ используем *метод вспомогательного угла*. Выражение $a\sin x+b\cos x$ преобразуется к виду $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+x)$, где φ определяется из условий

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

При $a, b>0$ $\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$.

Частные случаи

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right);$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Множество значений выражения $a\sin x + b\cos x$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Преобразуем уравнение $a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\varphi + x) = c$ или $\sin(\varphi + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Если $|c| \le \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + \pi k,\ k \in Z.$$

Задача 8. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

Решение. Делим обе части исходного уравнения на $\cos x \ne 0$, получаем $\sqrt{3}\mathrm{tg}x + 1 = 0$. Из уравнения $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ находим $x = k\pi - \frac{\pi}{6},\ k \in Z$.

Ответ. $x = k\pi - \frac{\pi}{6},\ k \in Z$.

Задача 9. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Решение. Так как $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ и $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, то $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. Пусть $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Отсюда находим $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

5.3. Уравнения с тригонометрическими функциями от различных аргументов

Задача 10. Решить уравнение $\sin 2x - \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Решение. Так как $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$, то исходное уравнение преобразуется к виду

$$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) - 2 = 0.$$

Обозначим $\sin x + \cos x = t$, получим $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Решим уравнение $\sin x + \cos x = -1$. Преобразуем его к виду

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = -\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0,\ \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0;$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1,\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Уравнение $\sin x + \cos x = 2$ не имеет корней, так как $\sin x \le 1$, $\cos x \le 1$ и равенства $\sin x = 1, \cos x = 1$ не могут одновременно выполняться.

Ответ. $x = \pi + 2\pi n,\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Задача 11. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

Решение. Так как $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, то исходное уравнение преобразуется к виду: $\frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos 2x = 0$. Из последнего уравнения находим $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ или $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$, $k \in Z$.

Ответ. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$, $k \in Z$.

Задача 12. Решить уравнение $\cos^2 x = \sin 2x$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\cos^2 x = 2\sin x\cos x \text{ или } \cos x(\cos x - 2\sin x) = 0;$$

$$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$\cos x - 2\sin x = 0,\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2},\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k = \operatorname{arcctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \operatorname{arcctg} 2 + \pi k\ \ k \in Z$.

Задача 13. Решить уравнение $\sin x\cos x\cos 2x = \frac{1}{8}$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение, используя формулу двойного аргумента для синуса $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}, \text{или } \sin 4x = \frac{1}{2},\ 4x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ x = (-1)^k\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z.$$

Ответ. $x = (-1)^k\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z$.

Задача 14. Решить уравнение $1 + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$.

Решение. Область определения функций исходного уравнения $\cos x \neq 0$. Так как $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1+\cos x}{2}}{\frac{1-\cos x}{2}}$, то исходное уравнение примет вид

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Приведем левую часть к общему знаменателю и перекрёстно перемножим части уравнения, получим $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим $\cos x = -1$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Или

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Уравнения типа $\sin \alpha x = \sin \beta x$, $\cos \alpha x = \cos \beta x$, $\sin \alpha x = \cos \beta x$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha, \beta \neq 0$ для последнего: $\alpha \neq \pm\beta$ решаются с помощью формул преобразования суммы в произведение, последнее ещё и с помощью формулы приведения.

Задача 15. Решить уравнение $\sin 7x = \sin 3x$.

Решение. По формуле (2.6) разность синусов преобразуем исходное уравнение

$$\sin 7x = \sin 3x \Leftrightarrow \sin 7x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos 5x = 0.$$

Решения уравнений $\sin 2x = 0$ и $\cos 5x = 0$, соответственно, $x = \frac{\pi k}{2}$,

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

Задача 16. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

Решение. Используя формулу приведения (2.7) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, запишем уравнение в виде

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0\,.$$

С помощью формулы (2.6) для суммы косинусов преобразуем исходное уравнение

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Решения уравнений $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ и $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, соответственно, $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

Ответ. $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

Задача 17. Решить уравнение $\sin 3x + \sin 7x = 3\cos 2x$.

Решение. С помощью формулы (2.6.) для суммы синусов преобразуем исходное уравнение

$$2\sin 5x \cdot \cos 2x = 3\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin 5x \cdot \cos 2x - 3\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Уравнений $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ корней не имеет.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Задача 18. Решить уравнение $\cos 3x \cdot \cos x = \cos 2x$.

Решение. С помощью формулы (2.2.) для синуса разности преобразуем исходное уравнение

$$\cos 3x \cdot \cos x = \left(\cos 3x - x\right) \Leftrightarrow \cos 3x \cdot \cos x = \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 3x \cdot \sin x = 0.$$

Корни уравнений $\sin 3x = 0$ и $\sin x = 0$ соответственно $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = \pi k,\ k \in Z$. Корни второго уравнения содержатся в серии корней первого, так как, если $k = 3n$, то $\frac{\pi k}{3} = \pi n$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

Задача 19. Решить уравнение $\left(tgx + 1\right)\left(2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3}\right) = 0.$

Решение.

1) $tgx + 1 = 0,\ tgx = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом первая скобка левой части уравнения равна нулю, а вторая не теряет смысла.

2) $2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3} = 0,\ \cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in Z.$

При этих значениях x вторая скобка левой части исходного уравнения равна нулю, а первая скобка не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Задача 20. Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$

Решение. Используя формулу 2.3 для косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, преобразуем исходное уравнение

$$3\left(1 - \cos 2x\right) + 2\left(1 - \cos^2 2x\right) = 5 \text{ или}$$
$$2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0,\ \cos 2x\left(2\cos 2x + 3\right) = 0.$$

1) $\cos 2x = 0,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

2) уравнение $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ корней не имеет.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

Упражнения

1. Решить уравнения

1.1. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 1.2. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

1.3. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; 1.4. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

1.5. $2\sin^2 x + \sin x - 6 = 0$; 1.6. $2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

2. Решить уравнения

2.1. $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2.2. $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

2.3. $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 2.4. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

3. Решить уравнения

3.1. $tg^2 x = 2$; 3.2. $tgx = ctgx$;

3.3. $tgx + 3ctgx = 2\sqrt{3}$; 3.4. $tg^2 x - 3tgx - 4 = 0$;

3.5. $tgx - \sqrt{3}ctgx + 1 = \sqrt{3}$; 3.6. $tg^2 x - tgx + 1 = 0$.

4. Решить уравнения

4.1. $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$; 4.2. 4.3. $3 + \sin 2x = 4\sin^2 x$;

4.3. $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$;

4.4. $3\cos 2x + \sin^2 x + 5\sin x \cos x = 0$.

5. Решить уравнения

5.1. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$; 5.2. $\cos x = \sin x$;

5.3. $\sin x = 2\cos x$; 5.4. $2\sin x + \cos x = 0$.

6. Решить уравнения

6.1. $\sin x - \cos x = 1$; 6.2. $\cos x + \sin x = 1$;

6.3. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 6.4. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

7. Решить уравнения

7.1. $\cos x = \cos 3x$; 7.2. $\sin 5x = \sin x$;

7.3. $\sin 2x = \cos 3x$; 7.4. $\sin x + \cos 3x = 0$.

8. Решить уравнения

8.1. $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$; 8.2. $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;

8.3. $\cos x + \cos 3x = 4\cos 2x$; 8.4. $\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 4x$.

9. Решить уравнения

9.1. $\left(\operatorname{tg}x - \sqrt{3}\right)\left(2\sin\frac{x}{12} + 1\right) = 0$; 9.2. $\left(1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{4}\right)\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 1\right) = 0$;

9.3. $\left(2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)\left(2\operatorname{tg}x + 1\right) = 0$; 9.4. $\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\operatorname{tg}x - 3\right) = 0$.

10. Решить уравнения

10.1. $\sqrt{3}\sin x\cos x = \sin^2 x$; 10.2. $2\sin x\cos x = \cos x$;

10.3. $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 10.4. $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$.

11. Решить уравнения

11.1. $2\sin^2 x = 1 + \frac{1}{3}\sin 4x$; 11.2. $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$;

11.3. $2\cos^2 2x + 3\cos^2 x = 2$; 11.4. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$.

12. Решить уравнения

12.1. $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;

12.2. $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;

12.3. $\sin 2x + 4(\sin x + \cos x) + 4 = 0$;

12.4. $\sin 2x + 5(\cos x - \sin x + 1) = 0$.

13. Решить уравнения

13.1. $1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0$;

13.2. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (\sin x + \cos x)^2$.

14. Решить уравнения

14.1. $8\sin x \cos x \cos 2x = 1$; 14.2. $1 + \cos^2 x = \sin^2 x$.

15. Решить уравнения

15.1. $2\cos^2 2x + 3\sin 4x + 4\sin^2 2x = 0$;

15.2. $1 - \sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$;

15.3. $2\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^3 2x = 1$;

15.4. $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x$.

16. Решить уравнения

16.1. $\cos x \cos 2x = \sin x \sin 2x$; 16.2. $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$;

16.3. $\sin 3x = \sin 2x \cos x$; 16.4. $\cos 5x \cos x = \cos 4x$.

Ответы. 1.1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 1.2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 1.3. $x=2\pi k$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 1.4. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 1.5. корней нет; 1.6. корней нет. 2.1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 2.2. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 2.3. $x=\pi+2\pi k$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 2.4. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. 3.1. $x=\pm\mathrm{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n\in Z$; 3.2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 3.3. $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 3.4. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\mathrm{arctg}4+\pi n$, $n\in Z$; 3.5. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 3.6. корней нет 4.1. $x=\mathrm{arctg}2+\pi n, x=\mathrm{arctg}4+\pi n, n\in Z$. 4.2. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\mathrm{arctg}3+\pi n$, $n\in Z$; 4.3. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\mathrm{arctg}4+\pi n$, $n\in Z$;.4.4 $x=\mathrm{arctg}3+\pi n$, $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$. 5.1. $x=\pi n-\frac{\pi}{3}$, $n\in Z$; 5.2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 5.3. $x=-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\pi n, x=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n, n\in Z$; 5.4. $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 6.1. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 6.2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, x=2\pi k$, $k\in Z$; 6.3. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 6.4. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$. 7.1. $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 7.2. $x=\frac{\pi k}{2}, x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 7.3. $x=-\frac{\pi}{2}-2\pi k$, $k\in Z$; 7.4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 8.1. $x=\frac{\pi k}{4}, x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 8.2. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 8.3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 8.4. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. 9.1. $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x=(-1)^{k+1}2\pi+12\pi k$, $k\in Z$; 9.2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$,

$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 9.3. $x=\left((-1)^k-1\right)\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=-\mathrm{arctg}2+\pi k, k\in Z$; 9.4. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. 10.1. $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x=\pi k$, $k\in Z$; 10.2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 10.3. $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi k}{2}-\frac{\mathrm{arctg}2}{2}$, $k\in Z$; 10.4. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. 11.1. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 11.2. $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 11.3. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 11.4. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. 12.1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 12.2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=2\pi k$, $k\in Z$; 12.3. $x=\pi+2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 12.4. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=2\pi k$, $k\in Z$. 13.1. $x=\pi+2\pi k$, $x=-\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$; 13.2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=2\pi k$, $k\in Z$. 14.1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 14.2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. 15.1. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x=-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; 15.2. корней нет; 15.3. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 15.4. $x=\pi k$, $k\in Z$. 16.1. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 16.2. $x=\pi k$, $k\in Z$; 16.3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $x=\pi k$; 16.4. $x=\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$.

6. Решение простейших тригонометрических неравенств

В тригонометрических неравенствах аргументы тригонометрических функций рассматриваются как действительные числа.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства вида $\cos x > a$, $\cos x \ge a$, $\sin x > a$, $\sin x \ge a$, $\cos x < a$, $\cos x \le a$, $\sin x < a$, $\sin x \le a$, $(|a| \le 1)$, $\operatorname{tg} x > a$ $(a \in R)$ и т.д. Рассмотрим примеры решений некоторых из них.

Задача 1. Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

Решение. Косинус угла x равен абсциссе точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую $\frac{1}{2}$.

Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рисунок 4.4, слева).

Точка M_1 получается поворотом точки $P(1;0)$ на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$; точка M_2 – поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства являются все числа из промежутка $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

Учитывая периодичность функции косинус, получаем, что все решения данного неравенства – множество интервалов $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Ответ. $x\in\left]-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right[,\ n\in Z.$

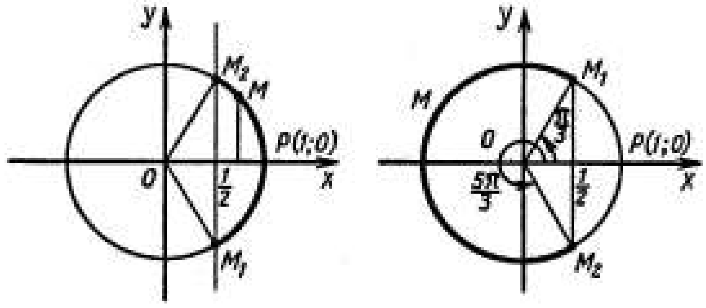


Рисунок 4.4. Тригонометрическая окружность с отмеченными на ней абсциссами точек M_1 и M_2

Задача 2. Решить неравенство $\cos x\le\frac{1}{2}.$

Решение. Абсциссу, не большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги единичной окружности M_1MM_2 (рисунок 4.4, справа). Поэтому решениями неравенства $\cos x\le\frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат промежутку $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}$. Учитывая периодичность функции косинус, получаем, что все решения данного неравенства – множество отрезков $\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Ответ. $x\in\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z.$

Задача 3. Решить неравенство $\sin x\ge-\frac{1}{2}.$

Решение. Синус угла x равен ординате точки единичной окружности. Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги единичной окружности

M_1MM_2 (рисунок 4.5, слева). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат промежутку $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$. Все решения данного неравенства – множество отрезков $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ. $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

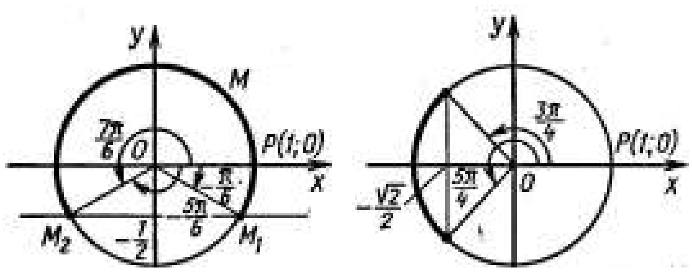


Рисунок 4.5. Тригонометрическая окружность с отмеченными на ней ординатами (слева) и абсциссами (справа) точек M_1 и M_2

Задача 4. Решить неравенство $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Решение. Все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2 имеют ординату, меньшую (рисунок 4.5 слева). Поэтому все числа $x \in \left]-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right[$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства – интервалы $\left]-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right[$ $n \in Z$.

Ответ. $x \in \left]-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right[,\ n \in Z$.

Задача 5. Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{4} - 1\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Обозначим $\frac{x}{4}-1=y$. Решая неравенство $\cos y \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рисунок 4.5, справа), находим $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le y \le \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$. Заменяя $y=\frac{x}{4}-1$, получаем $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le \frac{x}{4}-1 \le \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, откуда $1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le \frac{x}{4} \le 1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $4+3\pi+8\pi n \le \frac{x}{4} \le 4+5\pi+8\pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x \in \left[4+3\pi+8\pi n; 4+5\pi+8\pi n\right]$, $n \in Z$.

Упражнения

1. Решить неравенства

1.1. $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$;   1.2. $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

1.3. $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;   1.4. $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Решить неравенства

2.1. $\cos x \le \sqrt{3}$;   2.2. $\cos x < -2$;

2.3. $\cos x \ge 1$;   2.4. $\cos x \le -1$.

3. Решить неравенства

3.1. $\sin x > \frac{1}{2}$;   3.2. $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3.3. $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$;   3.4. $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Решить неравенства

4.1. $\sin x \ge -\sqrt{2}$;   4.2. $\sin x > 1$;

4.3. $\sin x \le -1$;   4.4. $\sin x \ge 1$.

5. Решить неравенства

5.1. $\sqrt{2}\cos 2x \le 1;$

5.2. $2\sin 3x > -1;$

5.3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2};$

5.4. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$

6. Решить неравенства

6.1. $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right) \ge \frac{1}{2};$

6.2. $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

7. Решить неравенства

7.1. $\sin^2 x + 2\sin x > 0;$

7.2. $\cos^2 x - \cos x < 0.$

Ответы. 1.1. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n \le x \le \frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$.; 1.2. $\frac{\pi}{6}+2\pi n \le x \le \frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$; 1.3. $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$; 1.4. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$. 2.1. решений нет; 2.2. решений нет; 2.3. $x = 2\pi k,\ k \in Z$; 2.4. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$. 3.1. $\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$; 3.2. $-\frac{5\pi}{4}+2\pi n \le x \le \frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$; 3.3. $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n < x < -\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$.; 3.4. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n \le x \le \frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. 4.1. решений нет; 4.2. решений нет; 4.3. $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$; 4.4. $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. 5.1. $\frac{\pi}{8}+\pi n \le x \le \frac{7\pi}{8}+\pi n$, $n \in Z$; 5.2. $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \le x \le \frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 5.3. $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le x \le 2\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 5.4. $2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$; 6.1. $12-3\pi+8\pi n \le x \le 12-\pi+8\pi n$, $n \in Z$; 6.2.

$-6-\pi+6\pi n \le x \le -6+\pi+6\pi n$, $n \in Z$. 7.1. $2\pi n < x < \pi+2\pi n$, $n \in Z$; 7.2. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$.

Упражнения к разделам 1-6

1. Упростить выражение

1.1. $\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 1.2. $\mathrm{ctg}\,\alpha\left(\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)$.

2. Упростить выражение

2.1. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2.2. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

3. Доказать тождество

3.1. $1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; 3.2. $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

4. Вычислить

4.1. $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha$ при $\alpha=\dfrac{5\pi}{24}$;

4.2. $\cos 3\alpha+2\cos(\pi-3\alpha)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha=\dfrac{5\pi}{36}$.

5. Вычислить

5.1. $\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos 75^0-\cos 15^0\right)}{1-2\sin^2 15^0}$; 5.2. $\dfrac{2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\dfrac{\pi}{8}\cos^2\dfrac{\pi}{8}}$.

6. Доказать тождества

6.1. $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$; 6.2. $\dfrac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

7. Показать, что

7.1. $\sin 35^0 + \sin 25^0 = \cos 5^0$; 7.2. $\cos 12^0 - \cos 48^0 = \sin 18^0$.

Проверочная работа

1. Найти значения выражений

$\dfrac{1 + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos(0{,}5 + \alpha)}$ при $\alpha = \dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{\sin 75^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \cos 75^0}$;

$\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Решить уравнения

$\sin 3x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 3x = 1$;

$2\cos^2 x + 5\cos x = 3$;

$\mathrm{tg}x - 3\mathrm{ctg}x = 0$;

$\sin 3x - \sin x = 0$;

$2\sin x + \sin 2x = 0$.

3. Решить неравенства $\sin x > \dfrac{1}{2}$; $\cos x < 0$.

---

8. Вычислить

8.1. $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; 8.2. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 4\arcsin 1$;

8.3. $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) - \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 8.4. $\arccos(-1) - \arcsin(-1)$;

8.5. $2\operatorname{arctg}1-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 8.6. $4\operatorname{arctg}(-1)+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

9. Решить уравнения

9.1. $\cos(4-2x)=\frac{1}{2}$; 9.2. $\cos(6+3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

9.3. $\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; 9.4. $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\sqrt{3}=0$.

10. Решить уравнения

10.1. $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; 10.2. $1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$;

10.3. $3+4\sin(2x+1)=0$; 10.4. $5\sin(2x-1)-2=0$.

11. Решить уравнения

11.1. $\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)\left(1-4\sin x\cdot\cos x\right)=0$;

11.2. $\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)\left(1+2\sin 2x\cdot\cos 2x\right)=0$.

12. Решить уравнения

12.1. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 12.2. $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

12.3. $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 12.4. $1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=0$.

13. Решить уравнения

13.1. $2\sin^2 x+\sin x=0$; 13.2. $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$;

13.3. $\cos^2 x-2\cos x=0$; 13.4. $6\cos^2 x+7\cos x-3=0$.

14. Решить уравнения

14.1. $6\sin^2 x-\cos x+6=0$; 14.2. $8\cos^2 x-12\sin x+7=0$.

15. Решить уравнения

15.1. $\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}x = 0$; 15.2. $2\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - 3 = 0$;

15.3. $\mathrm{tg}x - 12\mathrm{ctg}x + 1 = 0$; 15.4. $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 2$.

16. Решить уравнения

16.1. $2\sin 2x = 3\cos 2x$; 16.2. $4\sin 3x + 5\cos 3x = 0$.

17. Решить уравнения

17.1. $5\sin x + \cos x = 5$; 17.2. $4\sin x + 3\cos x = 6$.

18. Решить уравнения

18.1. $\sin 3x = \sin 5x$; 18.2. $\cos x = \cos 3x$;

18.3. $\cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x = 0$; 18.4. $\sin 3x \cdot \sin 5x - \sin^2 5x = 0$.

19. Решить неравенства

19.1. $\sin x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 19.2. $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

19.3. $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 19.4. $\cos x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Упростить выражение

$$\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right) \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{\cos(\pi - \beta + \alpha)}.$$

21. Доказать тождества

21.1. $$\frac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2\cos\left(\dfrac{7\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(2\alpha - 3\pi)} = -\sqrt{3}\mathrm{ctg}^2 4\alpha;$$

21.2. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-1{,}5\pi)}{\sin^4(\alpha-2{,}5\pi)+\cos^4(\alpha-2{,}5\pi)-1}=-2\operatorname{ctg}^2 4\alpha$;

21.3. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-1{,}5\pi)}{\sin^4(\alpha-2{,}5\pi)+\cos^4(\alpha-2{,}5\pi)-1}=-2\operatorname{ctg}^2 4\alpha$;

21.4. $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)+}{2\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}$.

22. Доказать тождества

22.1. $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos2\alpha}{\sin2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

22.2. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

22.3. $\dfrac{\cos3\alpha+\cos2\alpha+\cos\alpha+1}{\cos\alpha+2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1}=2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

22.4. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha-2\cos2\alpha+\cos3\alpha}=-\dfrac{2\cos2\alpha}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

23. Упростить выражения

23.1. $\dfrac{2(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}$; 23.2. $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha-1}$.

24. Вычислить

24.1. $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 24.2. $\cos\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$;

24.3. $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 24.4. $\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

24.5. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;   24.6. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

25. Вычислить

25.1. $\sin(4\arcsin 1)$;   25.2. $\sin\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

25.3. $\cos\left(5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;   25.4. $\cos(6\arcsin 1)$;

25.5. $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$;   25.6. $\operatorname{tg}\left(4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

26. Решить уравнения

26.1. $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$;   26.2. $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$.

27. Решить уравнения

27.1. $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

27.2. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

28. Решить уравнения

28.1. $1 + 2\sin x = \sin 2x + 2\cos x$;   28.2. $1 + 3\cos x = \sin 2x + 3\sin x$.

29. Решить уравнения

29.1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$;

29.2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$.

30. Решить уравнения

30.1. $\cos^3 x\sin x - \sin^3 x\cos x = \frac{1}{4}$;   30.2. $\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$.

31. Решить уравнения

31.1. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$; 31.2. $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$;

31.3. $\sin 4x = 6\cos^2 2x - 4$; 31.4. $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1$.

32. Решить уравнения

32.1. $\sin^2 x - \cos x \cos 3x = \frac{1}{4}$; 32.2. $\sin 3x = 3\sin x$;

32.3. $3\cos 2x - 7\sin x = 4$; 32.4. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

32.5. $\cos 4x - \sin 2x = 1$; 32.6. $5\sin 2x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0$.

33. Решить уравнения

33.1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 7x$;

33.2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

33.3. $\sin x - \sin 3x = \sin 2x - \sin 4x$;

33.4. $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

Ответы. 1.1. $\cos\alpha$; 1.2. $2\sin\alpha$. 2.1. $\mathrm{tg}\,\alpha$; 2.2. $-\mathrm{ctg}\,\alpha$. 4.1. $-\frac{1}{2}$; 4.2. $\frac{1}{4}$; 5.1. $\sqrt{2}$; 5.2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 8.1. $\frac{\pi}{3}$; 8.2. $-\frac{7\pi}{4}$; 8.3. $\frac{\pi}{3}$; 8.4. $\frac{3\pi}{2}$; 8.5. 0; 8.6. 0; 9.1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2 - \pi k$, $k \in Z$; 9.2. $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$; 9.3. $x = \pm\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} - \pi k$, $k \in Z$; 9.4. $x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. 10.1. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; 10.2. $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in Z$; 10.3. $x = (-1)^{k+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 10.4. $x = \frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{5} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. 11.1. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 11.2. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$,

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. 12.1. $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 12.2. $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 12.3. $x=\frac{8\pi}{15}+\pi k$, $k\in Z$; 12.4. $x=\frac{3\pi}{28}+\pi k$, $k\in Z$. 13.1. $x=\pi k,\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 13.2. $x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$; 13.3. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 13.4. $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. 14.1. Нет решений; 14.2. $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+\pi k$, $k\in Z$. 15.1. $x=\pi k,\ x=-\text{arctg}3+\pi k$, $k\in Z$; 15.2. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=\text{arctg}1{,}5+\pi k$, $k\in Z$; 15.3. $x=-\text{arctg}4+\pi k,$ $x=\text{arctg}3+\pi k,$ $k\in Z$; 15.4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. 16.1. $x=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 16.2. $x=-\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{5}{4}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. 17.1. $x=2\text{arctg}\frac{4}{3}+\pi k,\ x=2\text{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$; 17.2. нет решений. 18.1. $x=\pi k,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 18.2. $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 18.3. $x=\pi k,\ x=\frac{\pi k}{4},\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 18.4. $x=\frac{\pi k}{2},\ x=\frac{\pi k}{5},\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. 19.1. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k\le x\le\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 19.2. $-\frac{5\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 19.3. $\frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le\frac{11\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; 19.4. $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. 20. $-4\sin2\alpha$. 23.1. $\frac{\text{ctg}2\alpha}{\cos\alpha}$; 23.2. $2\sin2\alpha$. 24.1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 24.2. $\frac{1}{2}$; 24.3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 24.4. $\frac{1}{2}$; 24.5. $\sqrt{3}$; 24.6. 1. 25.1. 0; 25.2. 0; 25.3. $\frac{1}{2}$; 25.4. -1; 25.5. $\sqrt{3}$ 25.6. 0. 26.1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=-\text{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$. 26.2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=\text{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z$. 27.1. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=\text{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $k\in Z$; 27.2. $x=\text{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,$

$x=-\mathrm{arctg}2+\pi k, \quad k\in Z$; 28.1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 28.2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. 29.1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\quad k\in Z$; 29.2. $x=\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\quad k\in Z$. 30.1. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ 30.2. $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. 31.1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 31.2. $x=\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; 31.3. $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 31.4. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi k}{11}$, $k\in Z$; 32.1. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 32.2. $x=\pi k$, $k\in Z$; 32.3. $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 32.4. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 32.5. $x=\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 32.6. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. 33.1. $x=\frac{\pi k}{4}-\frac{3\pi}{32}$, $x=\frac{\pi k}{3}-\frac{3\pi}{24}$, $k\in Z$; 33.2. $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 33.3. $x=\pi k,\ x=2\pi k,\ x=\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$; 33.4. $x=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$.

7. Тригонометрические функции

7.1. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1;0)$ на угол x радиан. Каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$ или на множестве R всех действительных чисел определены функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$. *Область определения (D_f) функций* $y=\sin x$ и $y=\cos x$ – множество R всех действительных чисел. Известно, что $\sin x$ и $\cos x$ изменяются в пределах отрезка $[-1;1]$. *Множество значений (E_f) функций* $y=\sin x$ и $y=\cos x$ является отрезок $-1\le y\le 1$.

Задача 1. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

Решение. Выражение $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ имеет смысл при $\sin x+\cos x\ne 0$ или $tgx\ne -1$, $x\ne -\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x\ne -\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Ответ. $x\ne -\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Задача 2 . Найти множество значений функции $y=3+\sin x\cos x$.

Решение. Выясним, какие значения принимает y при различных значениях x. Преобразуем функцию к виду $2y-3=\sin 2x$. Это выражение имеет смысл при $-1\le 2y-3\le 1$, откуда находим множество значений исходной функции $2{,}5\le y\le 3{,}5$.

Ответ. $y\in[2{,}5;\ 3{,}5]$.

Функция $y = \mathrm{tg}x$ определяется формулой $y = \mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Эта функция определена при тех значениях x, для которых $\cos x \neq 0$ или $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Область определения функции $y = \mathrm{tg}x$ – множество чисел $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Множество значений функции $y = \mathrm{tg}x$ является множество R всех действительных чисел.

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$ относятся к основным элементарным функциям.

Задача 4. Найти область определения функции $y = \sin 3x + \mathrm{tg}2x$.

Решение. Выясним, при каких значениях x выражение $y = \sin 3x + \mathrm{tg}2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\mathrm{tg}2x$ – при $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, т.е. при $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Ответ. $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Задача 5. Найти множество значений функции $y = 3\sin x + 4\cos x$.

Решение. Нужно выяснить, при каких значениях y уравнение $y = 3\sin x + 4\cos x$ имеет корни. Разделим выражение $y = 3\sin x + 4\cos x$ на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$: $\dfrac{y}{5} = \dfrac{3}{5}\sin x + \dfrac{4}{5}\cos x$. Найдётся такой угол α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ и $\dfrac{y}{5} = \cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x$, получаем, используя формулу сложения для синуса 2.2, $\frac{y}{5} = \sin(x + \alpha)$. Следовательно, множество значений $-1 \le \frac{y}{5} \le 1$ или $-5 \le y \le 5$.

Ответ. $-5 \le y \le 5$.

Упражнения

1. Найти область определения функций

1.1. $y = \sin 2x;$ 1.2. $y = \cos\frac{x}{2};$

1.3. $y = \cos\frac{1}{x};$ 1.4. $y = \sin\frac{2}{x};$

1.5. $y = \sin\sqrt{x};$ 1.6. $y = \cos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$

2. Найти множество значений функции

2.1. $y = 1 + \sin x;$ 2.2. $y = 1 - \cos x;$

2.3. $y = 2\sin x + 3;$ 2.4. $y = 1 - 4\cos 2x;$

2.5. $y = \sin 2x \cos 2x + 2;$ 2.6. $y = \frac{1}{2}\sin x \cos x - 1.$

3. Найти область определения функций

3.1. $y = \frac{1}{\cos x};$ 3.2. $y = \frac{2}{\sin x};$

3.3. $y = \mathrm{tg}\frac{x}{3};$ 3.4. $y = \mathrm{tg}5x.$

4. Найти область определения функций

4.1. $y = \sqrt{\sin x + 1};$ 4.2. $y = \sqrt{\cos x - 1};$

4.3. $y = \sqrt{2\cos x - 1};$ 4.4. $y = \sqrt{1 - 2\sin x};$

4.5. $y = \lg \sin x;$ 4.6. $y = \ln \cos x.$

5. Найти область определения функций

5.1. $y=\dfrac{1}{2\sin^2 x-\sin x}$; 5.2. $y=\dfrac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$;

5.3. $y=\dfrac{1}{\sin x-\sin 3x}$; 5.4. $y=\dfrac{1}{\cos^3 x+\cos x}$.

6. Найти множество значений функции

6.1. $y=\sin^2 x-\cos 2x$; 6.2. $y=1-8\sin^2 x\cos^2 x$;

6.3. $y=\dfrac{1+8\cos^2 x}{4}$; 6.4. $y=10-9\sin^2 3x$;

6.5. $y=1-2|\cos x|$; 6.6. $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=3\cos 2x-4\sin 2x.$$

8. Найти множество значений функции $y=\sin x-5\cos x$.

Ответы. 1.1. $x\in R$; 1.2. $x\in R$; 1.3. $x\neq 0$; 1.4. $x\neq 0$; 1.5. $x\geq 0$; 1.6. $x<-1,\ x\geq 1$. 2.1. $0\leq y\leq 2$; 2.2. $0\leq y\leq 2$; 2.3. $0\leq y\leq 2$; 2.4. $-3\leq y\leq 5$; 2.5. $\dfrac{3}{2}\leq y\leq\dfrac{5}{2}$; 2.6. $-\dfrac{5}{4}\leq y\leq-\dfrac{3}{4}$. 3.1. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 3.2. $x\neq\pi n$, $n\in Z$; 3.3. $x\neq\dfrac{3\pi}{2}+3\pi n$, $n\in Z$; 3.4. $x\neq\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5}$, $n\in Z$. 4.1. $x\in R$; 4.2. $x=2\pi n,\ n\in Z$; 4.3. $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 4.4. $-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4.5. $2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ n\in Z$; 4.6. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. 5.1. $x\neq\pi n$, $n\in Z$; 5.2. $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 5.3. $x\neq\pi n$, $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 5.4. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

6.1. $-1 \le y \le 3$; 6.2. $-1 \le y \le 1$; 6.3. $\frac{1}{4} \le y \le \frac{9}{4}$; 6.4. $1 \le y \le 10$; 6.5. $-1 \le y \le 1$; 6.6. $-\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}$. 7. 5 и -5. 8. $-\sqrt{26} \le y \le \sqrt{26}$.

7.2. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций

Функция f(x) является *чётной*, если выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ и – *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любых x из области определения функции. Для любого x верны равенства $\sin(-x) = -\sin(x)$ и $\cos(-x) = \cos(x)$. Следовательно, $y = \sin x$ – *нечётная* функция, а $y = \cos x$ – *чётная* функция. Для любого значения x из области определения функций $y = \mathrm{tg}x$ и $y = \mathrm{ctg}x$ верны равенства $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}(x)$, $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$ и $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ – *нечётные* функции.

Если $f(-x) \ne f(x)$ и $f(-x) \ne -f(x)$, то данная функция – *функция общего вида*.

Задача 1. Выяснить, является ли функция $y = 2 + \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ чётной или нечётной.

Решение. Используя формулу приведения для синуса, запишем данную функцию в виде $y = 2 + \sin^2 x$. Имеем

$$y(-x) = 2 + \sin^2(-x) = 2 + (-\sin x)^2 = 2 + \sin^2 x = y(x),$$

т.е. функция является чётной.

Ответ. $y = 2 + \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ – чётная функция.

Функция f(x) называется *периодической*, если существует такое число $T \ne 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Таких чисел может быть множество, наименьшее из них называется *периодом* функции f(x).

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции f(x), то числа $x + T$ и $x - T$ и вообще числа $x + Tn$, $n \in Z$ также должны принадлежать области определения функции и $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in Z$.

Для любых значений x верны равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Покажем, что число 2π является *наименьшим положительным периодом* функции $y = \cos x$.

Пусть $T > 0$ − период косинуса, т.е. для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi n$, $n \in Z$. Так как $T > 0$, то T может принимать значения $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ и поэтому период не может быть меньше 2π.

Можно показать, что *наименьший положительный период функции* $y = \sin x$ также равен 2π.

Задача 2. Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ – периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

Решение. Данная функция определена для всех $x \in R$ и $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x)$.

Ответ. Доказано, что $f(x) = \sin 3x$ − периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

Функции $y = \mathrm{tg}x$ и $y = \mathrm{ctg}x$ являются периодическими с периодом π. Или $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$ и $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}x$. Область определения для функций $y = \mathrm{tg}x$ и $y = \mathrm{ctg}x$ соответственно $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

Покажем, что число π является *наименьшим положительным периодом* функции $y = \mathrm{tg}x$.

Пусть $T > 0$ – период тангенса, тогда $\mathrm{tg}(x + T) = \mathrm{tg}x$, откуда при $x = 0$ получаем $\mathrm{tg}T = 0$, $T = \pi n$, где $n \in Z$. Наименьшее положительное $n = 1$, следовательно, π – наименьший положительный период функции $y = \mathrm{tg}x$.

Задача 3. Доказать, что $f(x) = \mathrm{tg}\dfrac{x}{3}$ – периодическая функция с периодом 3π.

Решение. $\mathrm{tg}\dfrac{x+3\pi}{3} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{3} + \pi\right) = \mathrm{tg}\dfrac{x}{3}$, $\mathrm{tg}\dfrac{x-3\pi}{3} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{3} - \pi\right) = \mathrm{tg}\dfrac{x}{3}$, $\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}$ – периодическая функция с периодом 3π.

Ответ. доказано, что $\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}$ – периодическая функция с периодом 3π.

Упражнения

1. Проверить на чётность функции

1.1. $y = \cos 3x$; 1.2. $y = 2\sin 4x$; 1.3. $y = \dfrac{x}{2}\mathrm{tg}^2 x$;

1.4. $y = x\cos\dfrac{x}{2}$; 1.5. $y = x\sin x$; 1.6. $y = 2\sin^2 x$.

2. Проверить на чётность функции

2.1. $y = \sin x + x$; 2.2. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - x^2$;

2.3. $y = 3 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi - x)$;

2.4. $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right) + 3$;

2.5. $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x \cdot \cos x$;

2.6. $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$.

3. Доказать, что данные функции является периодическими с периодом 2π

3.1. $y = \cos x - 1$; 3.2. $y = \sin x + 1$; 3.3. $y = 3\sin x$;

3.4. $y = \frac{\cos x}{2}$; 3.5. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3.6. $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

4. Доказать, что данные функции является периодическими с периодом T

4.1. $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 4.2. $y = \cos\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

4.3. $y = \mathrm{tg}2x$, $T = \frac{\pi}{2}$; 4.4. $y = \sin\frac{4x}{5}$, $T = \frac{5\pi}{2}$.

5. Исследовать функции на чётность

5.1. $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; 5.2. $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos 2x}$; 5.3. $y = \frac{\cos 2x - x^2}{\sin x}$;

5.4. $y = \frac{x^2 + \sin 2x}{\cos x}$; 5.5. $y = 3^{\cos x}$; 5.6. $y = x|\sin x|\sin^3 x$.

6. Найти наименьшие положительные периоды функций

6.1. $y = \cos\frac{2}{5}x$; 6.2. $y = \sin\frac{3}{2}x$;

6.3. $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 6.4. $y = |\sin x|$.

Ответы. 1.1. чётная ;1.2. нечётная; 1.3. нечётная; 1.4. нечётная; 1.5. чётная; 1.6. чётная. 2.1. нечётная; 2.2. общего вида; 2.3. чётная; 2.4. чётная; 2.5. общего вида; 2.6. $-\frac{5}{4} \le y \le -\frac{3}{4}$. 5.1. чётная; 5.2. чётная; 5.3. нечётная; 5.4. нечётная; 5.5. чётная; 5.6. чётная. 6.1. 5π; 6.2. $\frac{4\pi}{3}$; 6.3. 2π; 6.4. π.

7.3. Функция $y = \cos x$, её свойства и график

Основные свойства функции $y = \cos x$ (рисунок 7.1)

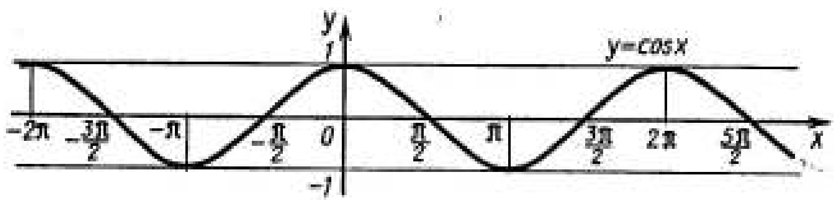


Рисунок 7.1. График функции $y = \cos x$

1. Область определения – множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений – отрезок $[-1; 1]$.
3. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π.
4. Функция $y = \cos x$ чётная.
5. Функция $y = \cos x$ принимает

- значение равное 0 при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;
- наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in Z$;
- наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;
- положительные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;
- отрицательные значения на интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

6. Функция $y = \cos x$

- *возрастает* на отрезках $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$;

- *убывает* на отрезках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Задача 1. Найти все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащее отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Решение. На отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$ графики $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$ (рисунок 7.1) пересекаются в трёх точках с абсциссами $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Это и есть корни исходного уравнения.

Ответ. $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

Задача 2. Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Решение. Из рисунка 7.1 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi\right]$.

Ответ. $x \in \left(-\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi\right]$.

Упражнения

1. Сравнить числа, используя свойство возрастания и убывания функции $y = \cos x$

1.1. $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$;　　1.2. $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;

1.3. $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 1.4. $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

1.5. $\cos 1$ и $\cos 3$; 1.6. $\cos 4$ и $\cos 5$.

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$

2.1. $\cos x = \frac{1}{2}$; 1.2. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.3. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.4. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

3. Найти все корни неравенства, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$

3.1. $\cos x \geq \frac{1}{2}$; 3.2. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$;

3.3. $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3.4. $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Сравнить числа, выражая синус через косинус по формулам приведения 2.7

4.1. $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; 4.2. $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;

4.3. $\cos\frac{5\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$; 4.4. $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}$;

4.5. $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$; 4.6. $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

5. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

5.1. $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 5.2. $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

6.1. $\cos 2x < \frac{1}{2}$; 6.2. $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Построить график функции и выяснить её свойства

7.1. $y = 1 + \cos x$; 7.2. $y = \cos x - 2$;

7.3. $y = \cos 2x$; 7.4. $y = 3\cos x$.

8. Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку

8.1. $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; 8.2. $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

9. Построить график функции

9.1. $y = |\cos x|$; 9.2. $y = 3 - 2\cos(x - 1)$.

Ответы. 1.1. $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$; 1.2. $\cos\frac{8\pi}{7} < \cos\frac{10\pi}{7}$; 1.3. $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 1.4. $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 1.5. $\cos 1 > \cos 3$; 1.6. $\cos 4 < \cos 5$. 2.1. $x = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$.; 2.2. $x = \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$; 2.3. $x = \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$; 2.4. $x = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$. 3.1. $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{3}$; 3.2. $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{3}$; 3.3. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6} < x \le 3\pi$; 3.4. $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4} < x < 3\pi$; 4.1. $\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{3\pi}{10}$ 4.2. $\sin\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{7}$; 4.3. $\cos\frac{5\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{8}$; 4.4. $\sin\frac{3\pi}{5} > \cos\frac{3\pi}{5}$; 4.5. $\cos\frac{\pi}{6} < \cos\frac{\pi}{7}$;

4.6. $\cos\frac{\pi}{8} > \sin\frac{3\pi}{10}$. 5.1. $x = \frac{\pi}{6};\ ;\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}$; 5.2. $x = -\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12};\frac{13\pi}{12};\frac{23\pi}{12};\frac{25\pi}{12}$.

6.1. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$; 6.2. $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12};\ \frac{11\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12};\ \frac{23\pi}{12} < x < \frac{25\pi}{12}$.

8.1. $-1 \le y \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8.2. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.4. Функция $y = \sin x$, её свойства и график

Основные свойства функции $y = \sin x$ (рисунок 7.2)

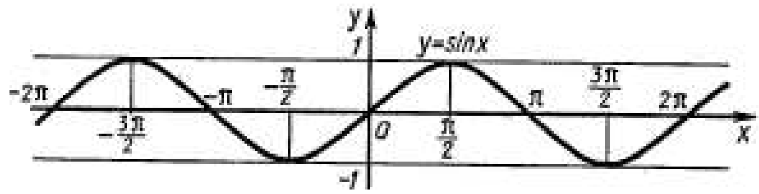


Рисунок 7.2. График функции $y = \sin x$

1. *Область определения* – множество R всех действительных чисел.
2. *Множество значений* – отрезок $[-1;\ 1]$.
3. Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π.
4. Функция $y = \sin x$ – нечётная.
5. Функция $y = \sin x$ принимает

- значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in Z$;
- наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;
- наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;
- положительные значения на интервалах $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$;
- отрицательные значения на интервалах $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.

6. Функция $y = \sin x$

- *возрастает* на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

- *убывает* на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Задача 1. Найти все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащее отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Решение. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$. На отрезке $[-\pi; 2\pi]$ эти графики (рисунок 7.3) пересекаются в двух точках с абсциссами $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. Это и есть корни исходного уравнения.

Ответ. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

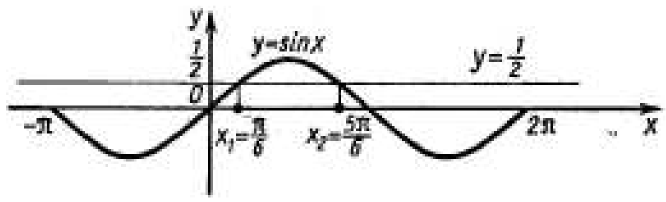


Рисунок 7.3. Графики функции $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$

Задача 2. Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Решение. Из рисунка 7.3 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Ответ. $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right].$

Упражнения

1. Сравнить числа, используя свойство возрастания и убывания функции $y = \sin x$

1.1. $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 1.2. $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;

1.3. $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 1.4. $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;

1.5. $\sin 3$ и $\sin 4$; 1.6. $\sin 7$ и $\sin 6$.

2. Найти корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$

2.1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 1.2. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.3. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.4. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Найти решения неравенств, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$

3.1. $\sin x > \frac{1}{2}$; 3.2. $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3.3. $\sin x \ge -\frac{1}{2}$; 3.4. $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Сравнить числа, выражая косинус через синус по формулам приведения 2.7

4.1. $\sin\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{\pi}{9}$; 4.2. $\sin\frac{9\pi}{8}$ и $\cos\frac{9\pi}{8}$;

4.3. $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{5\pi}{14}$; 4.4. $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{3\pi}{10}$.

5. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \pi$

5.1. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 5.2. $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Найти решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \pi$

6.1. $\sin 2x \ge -\frac{1}{2}$; 6.2. $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Построить график функции и выяснить её свойства

7.1. $y = 1 - \sin x$; 7.2. $y = 2 + \sin x$;

7.3. $y = \sin 3x$; 7.4. $y = 2\sin x$.

8. Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку

8.1. $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 8.2. $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

9. Построить график функции

9.1. $y = \sin|x|$; 9.2. $y = |\sin x|$.

Ответы. 1.1. $\sin\frac{7\pi}{10} > \sin\frac{13\pi}{10}$; 1.2. $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; 1.3. $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right) > \sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 1.4. $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 1.5. $\sin 3 > \sin 4$; 1.6. $\sin 7 > \sin 6$. 2.1. $x = \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$; 2.2. $x = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$; 2.3. $x = \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$; 2.4. $x = \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$. 3.1. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6} < x < \frac{17\pi}{6}$; 3.2. $0 \le x < \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \le x < \frac{9\pi}{4}$;

3.3. $0 \le x < \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \le x < 3\pi$; 3.4. $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. 4.1. $\sin\frac{\pi}{9} < \sin\frac{7\pi}{18}$; 4.2. $\sin\frac{9\pi}{8} > \cos\frac{9\pi}{8}$; 4.3. $\sin\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{7}$; 4.4. $\sin\frac{\pi}{8} < \cos\frac{3\pi}{10}$. 5.1. $x = -\frac{17\pi}{12}; -\frac{13\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}$; 5.2. $x = -\frac{11\pi}{9}; -\frac{10\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; -\frac{4\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}$.

7.5. Функция $y = \mathrm{tg}x$, её свойства и график

Основные свойства функции $y = \mathrm{tg}x$ (рисунок 7.4)

1. О*бласть определения* – множество R всех действительных чисел кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

2. *Множество значений* – множество R всех действительных чисел.

3. Функция $y = \mathrm{tg}x$ периодическая с периодом π.

4. Функция $y = \mathrm{tg}x$ нечётная.

5. Функция $y = \mathrm{tg}x$ принимает

- значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in Z$;

- положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

- отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$.

6. Функция $y = \mathrm{tg}x$ *возрастает* на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

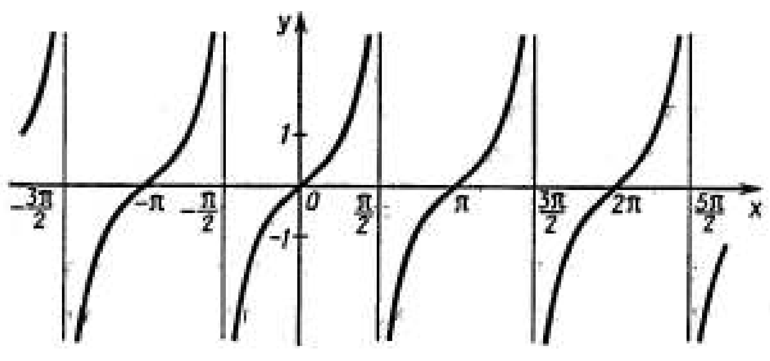


Рисунок 7.4. График функции $y = \mathrm{tg}x$

Задача 1. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащее отрезку $-\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ (рисунок 7.4). На отрезке $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ эти графики пересекаются в трёх точках с абсциссами $\operatorname{arctg} 2; \operatorname{arctg} 2 + \pi; \operatorname{arctg} 2 - \pi.$ Это и есть корни исходного уравнения.

Ответ. $x \in \{\operatorname{arctg} 2; \operatorname{arctg} 2 + \pi; \operatorname{arctg} 2 - \pi\}.$

Задача 2. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \le 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из рисунка 7.4. видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше графика функции $y = 2$ на промежутках $[-\pi; -\pi + \operatorname{arctg} x]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} 2\right]$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi + \operatorname{arctg} 2\right]$.

Ответ. $x \in [-\pi; -\pi + \operatorname{arctg} x] \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} 2\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi + \operatorname{arctg} 2\right]$.

Задача 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

Решение. Из рисунка 7.4. видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше графика прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на $\pi, 2\pi, 3\pi, -\pi, -2\pi \ldots$.

Ответ. $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

Упражнения

1. Сравнить числа, используя свойство возрастания и убывания функции $y = \mathrm{tg}x$

1.1. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}$; 1.2. $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\mathrm{tg}\frac{8\pi}{9}$;

1.3. $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\mathrm{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 1.4. $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

1.5. $\mathrm{tg}2$ и $\mathrm{tg}3$; 1.6. $\mathrm{tg}1$ и $\mathrm{tg}1{,}5$.

2. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$

2.1. $\mathrm{tg}x = 1$; 1.2. $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$;

2.3. $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$; 1.4. $\mathrm{tg}x = -1$.

3. Найти решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$

3.1. $\mathrm{tg}x \ge 1$; 3.2. $\mathrm{tg}x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.3. $\mathrm{tg}x < -1$; 3.4. $\mathrm{tg}x \ge -\sqrt{3}$.

4. Решить неравенства

4.1. $\mathrm{tg}x < 1$; 4.2. $\mathrm{tg}x \ge \sqrt{3}$;

4.3. $\mathrm{tg}x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4.4. $\mathrm{tg}x > -1$.

5. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0;\ 3\pi]$

5.1. $\mathrm{tg}x = 3$; 5.2. $\mathrm{tg}x = -2$.

6. Решить неравенства

6.1. $\operatorname{tg}x > 4$;   6.2. $\operatorname{tg}x \le 5$;

6.3. $\operatorname{tg}x < -4$;   6.4. $\operatorname{tg}x \ge -5$.

7. Найти решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0;\ 3\pi]$

7.1. $\operatorname{tg}x \ge 3$;   7.2. $\operatorname{tg}x < 4$;

7.3. $\operatorname{tg}x \le -4$;   7.4. $\operatorname{tg}x > -3$.

8. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$

8.1. $\operatorname{tg}2x = \sqrt{3}$;   8.2. $\operatorname{tg}3x = -1$.

9. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$

9.1. $\operatorname{tg}2x \le 1$;   9.2. $\operatorname{tg}3x < -\sqrt{3}$.

10. Построить график функции и выяснить его свойства

10.1. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;   10.2. $y = \operatorname{tg}x - 2$;

10.3. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}x$;   10.4. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

11. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg}x$, если x принадлежит промежутку

11.1. $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 11.2. $\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right)$; 11.3. $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; 11.4. $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

12. Построить график функции

12.1. $y = \operatorname{tg}|x|$; 12.2. $y = |\operatorname{tg}x|$; 12.3. $y = \operatorname{ctg}x$; 12.4. $y = \frac{1}{\operatorname{ctg}x}$.

Ответы. 1.1. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 1.2. $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} < \operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 1.3. $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 1.4. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 1.5. $\operatorname{tg}2 < \operatorname{tg}3$; 1.6. $\operatorname{tg}1 < \operatorname{tg}1{,}5$. 2.1. $x = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$; 2.2. $x = -\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$; 2.3. $x = -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$; 2.4. $x = -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$. 3.1. $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}$; 3.2. $-\pi \le x < \frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$; 3.3. $-\frac{\pi}{2} < x \le -\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{4}$; 3.4. $-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3} < x \le 2\pi$. 4.1. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le \frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$; 4.2. $\frac{\pi}{3} + \pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$; 4.3. $-\frac{\pi}{2} + \pi n \le x \le -\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$; 4.4. $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$.

5.1. $x = \operatorname{arctg}3 + \pi$; $x = \operatorname{arctg}2 + 2\pi$; 5.2. $x = -\operatorname{arctg}2 + \pi$; $x = -\operatorname{arctg}2 + 2\pi$; $x = -\operatorname{arctg}2 + 3\pi$. 6.1. $\operatorname{arctg}3 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$; 6.2. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le \operatorname{arctg}5 + \pi n$; $n \in Z$; 6.3. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\operatorname{arctg}4 + \pi n$; $n \in Z$; 6.4. $-\operatorname{arctg}5 + \pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$. 7.1. $\operatorname{arctg}3 \le x < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}3 + \pi \le x < \frac{3\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}3 + 3\pi \le x < \frac{5\pi}{2}$; 7.2. $0 \le x < \operatorname{arctg}4$; $\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg}4 + \pi$; $\frac{3\pi}{2} < x < \operatorname{arctg}4 + 2\pi$; $\frac{5\pi}{2} < x \le 2\pi$; 7.3. $\frac{\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg}4$; $\frac{3\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg}4 + \pi$; $\frac{5\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg}4 + 2\pi$; 7.4. $0 \le x < -\frac{\pi}{2}$; $-\operatorname{arctg}3 + \pi < x < \frac{3\pi}{2}$; $-\operatorname{arctg}3 + 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$; $-\operatorname{arctg}3 + 3\pi < x \le 3\pi$. 8.1. $x = \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}$; 8.2. $x = -\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$. 9.1. $-\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$; 9.2. $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{4\pi}{9}$;

$-\frac{\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{9}$; $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{9}$; $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{9}$; $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. 11.1. $-1 \le y \le \sqrt{3}$;

11.2. $y > 1$; 11.3. $y > 0$; 11.4. $y \in R$.

Упражнения к разделу 7

1. Найти область определения функции

1.1. $y = \sin x + \cos x$; 1.2. $y = \sin x + \mathrm{tg}x$;

1.3. $y = \sqrt{\sin x}$; 1.4. $y = \sqrt{\cos x}$;

1.5. $y = \frac{2x}{2\sin x - 1}$; 1.6. $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x - \sin x}$.

2. Найти множество значений функции

2.1. $y = 1 - 2\sin^2 x$; 2.2. $y = 2\cos^2 x - 1$;

2.3. $y = 3 - 2\sin^2 x$; 2.4. $y = 2\cos^2 x + 5$;

2.5. $y = \cos 3x \cdot \sin x - \sin 3x \cdot \cos x + 4$;

2.6. $y = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x - 3$.

3. Найти область определения функции

3.1. $y = x^2 + \cos x$; 3.2. $y = x^3 - \sin x$;

3.3. $y = (1 - x^2)\cos x$; 3.4. $y = (1 + \sin x)\sin x$.

4. Найти период функции

4.1. $y = \cos 7x$; 4.2. $y = \sin\frac{x}{7}$.

5. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3]$

5.1. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 5.2. $\sqrt{3} - \sin x = \sin x$;

5.3. $3\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$; 5.4. $\cos x + 1 = 0$.

6. Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$

6.1. $1+2\cos x \ge 0$; 6.2. $1-2\sin x < 0$;

6.3. $2+\mathrm{tg}x > 0$; 6.4. $1-2\mathrm{tg}x \le 0$.

7. Решить графически уравнение

7.1. $\cos x = x^2$; 7.2. $\sin x = 1 - x$.

Проверочная работа

1. Найти область определения функции $y = \mathrm{tg}4x$. Является ли эта функция чётной?

2. Построить схематически график функции $y = \sin x$; $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$. При каких значениях x $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) > 0$, $y(x) < 0$, функция возрастает? Убывает?

3. Построить схематически график функции $y = \mathrm{tg}x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При каких значениях x $\mathrm{tg}x = 0$, $\mathrm{tg}x > 0$, $\mathrm{tg}x < 0$?

4. Решить неравенство $\mathrm{tg}x \ge -1$.

---

8. Найти область определения функции

8.1. $y = \mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; 8.2. $y = \sqrt{\mathrm{tg}x}$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

9.1. $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; 9.2. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

9.3. $y = 1 - 2|\sin 3x|$; 9.4. $y = \sin^2 x - 2\cos^2 x$.

10. Проверить на чётность функции

10.1. $y = \sin x + \mathrm{tg}x$; 10.2. $y = \sin x \mathrm{tg}x$;

10.3. $y = \cos x + |\sin x|$; 10.4. $y = \sin x |\cos x|$.

11. Найти период функции

11.1. $y = 2\sin(2x + 1)$; 11.2. $y = 3\mathrm{tg}\frac{1}{4}(x + 1)$.

12. Решить графически уравнение

12.1. $\cos x = |x|$; 12.2. $\sin x = -|x + 1|$.

13. Найти нули функции

13.1. $y = \sin^2 x + \sin x$; 13.2. $y = \cos^2 x - \cos x$;

13.3. $y = \cos 4x - \cos 2x + \sin x$;

13.4. $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.

Ответы. 1.1. $x \in R$; 1.2. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$; 1.3. $\pi n \le x \le \pi + \pi n;\ n \in Z$; 1.4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$; 1.5. $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$; 1.6. $x \neq \pi n;\ x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$. 2.1. $-1 \le y \le 1$; 2.2. $-1 \le y \le 1$; 2.3. $1 \le y \le 3$; 2.4. $5 \le y \le 7$; 2.5. $3 \le y \le 5$; 2.6. $-4 \le y \le -2$. 3.1. Чётная; 3.2. нечётная; 3.3. чётная; 3.4. общего вида. 4.1. $T = \frac{2\pi}{7}$; 4.2. $T = 4\pi$; 5.1. $x = \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$; 5.2. $x = \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$; 5.3. $x = \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$; 5.4. $x = \pi;\ 3\pi$. 6.1. $-2\pi \le x \le -\frac{7\pi}{6}$; 6.2. $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$; 6.3. $-\mathrm{arctg}2 - \pi < x \le -\pi;\ -2\pi \le x < -\frac{3\pi}{2}$, 6.4. $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - 2\pi \le x < \frac{3\pi}{2}$. 8.1. $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 8.2. $\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. 9.1. 1 и -1; 9.2. $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 9.3. 1 и -1; 9.4. 1 и -2. 10.1. Нечётная; 10.2. чётная; 10.3.

чётная; 10.4. нечётная. 11.1. π ; 11.2. 4π. 13.1. $x = \pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; 13.2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi n,\ n \in Z$; 13.3. $x = \pi n;\ (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$; 13.4. $x = \frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{4} + \pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$.

Словарь

Русский	*Английский*	*Французский*
Абсцисса	Abscissa	L'abscisse
Арккосинус	Arc cosine	Arc cosinus
Арксинус	Arc sine	Arc sinus
Арктангенс	Arc tangent	Arc tangente
Арккотангенс	Arc cotangent	Arc cotangente
Градус	Degree	Le degré
Диаметрально	Diametrically	Diamétralement
Дуга	Arc	L'arc
Единичная	Unit	Unitaire
Координата	Coordinate	La coordonnée
Косинус	Cosine	Le cosines
Котангенс	Cotangent	La cotangente
Окружность	Circle	La circonférence
Ордината	Ordinate	L'ordonnée
Ось	Axis	L'axe
Преобразование	Transformation	La transformation
Противоположный	The opposite	L'opposé
Приведение	Reduction	La réduction
Прямая	Straight line. Direct	La ligne droite. Direct
Прямоугольный	The rectangular	Le rectangulaire
Радиан	Radian	Radian
Синус	Sine	Le sinus
Смежный угол	Adjacent angle	L'angle de contingence
Тангенс	Tangent	La tangente
Треугольник	Triangle	Le triangle
Тригонометрический	The trigonometrical	Le trigonométrique
Тригонометрия	Trigonometry	La trigonométrie

Тождество	Identity	L'identité
Четверть	Quarter	Le quart
Отрезок	Segment	Le segment
Центральный угол	The central angle	L'angle au centre
Элемент	Element	L'élément

Список литературы

1. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М.И. Сканави / М.: Высшая школа, 1994. – 528 с.

2. Козко, А.И. Математика. Письменный экзамен. Решение задач. Методы. Идеи: Учеб. пособие / А.И. Козко, Ю.Н.Макаров, В.Г. Чирский. – М.: Экзамен, 2007. – 511 с.

3. Цыпкин, А.Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – М.: Оникс: 21 век. Мир и образование, 2005. – 460 с.

4. Смирнова, Л.А. Русско-английский разговорник для физиков / Л.А.Смирнова. Под ред. Д.М. Толстого. – М.: Советская энциклопедия, 1968. – 336 с.

5. Драгнев, М.В. Французско-русский математический словарь. Под ред. Н.Х. Розова / М.В. Драгнев, М.И. Жаров, Н.Х. Розов. – М.: Советская энциклопедия, 1970. – 303 с.

6. Кузнецова, Т.И. Учебный русско-англо-китайский словарь математической лексики. Под ред. Т.И. Кузнецовой / Т.И. Кузнецова, Е.А. Лазарева. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. Центр международного образования, 2000. – 57 с.

7. Гринёва, Е.Ф. Французско-русский словарь / Е.Ф. Гринёва, Т.М. Громова. – М.: Русский язык, 1991. – 576 с.

8. Скакун, В.Л. Русско-французский словарь / В.Л. Скакун. – Минск: Харвест, 2003. – 992 с.

9. Аросева, Т.Е. Пособие по научному стилю речи / Т.Е. Аросева, Л.Г. Рогова, Н.Ф. Сафьянова. – М.: Русский язык, 1987. – 291 с.

10. Кожухов, И.Б. Математика. Полный справочник / И.Б. Кожухов, А.А.Прокофьев. – М.: Махаон, 2008. – 352 с.

11. Крысенко, С.М. Новейший англо-русский, русско-английский словарь / С.М. Крысенко. – Киев: Арий, М.: ИКТЦ «Лада», 2007. – 903 с.

12. Мюллер, В.К. Новый англо-русский словарь / В.К.Мюллер – М.: Рус. яз.: Медиа, 2007. – 945 с.

13. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Астрель, 2005. – 991 с.

14. Фадеев, М.А. Численные методы / М.А. Фадеев, К.А. Марков. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. – 156 с.

15. Ященко, И.В. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ авторы-составители: Ященко И.В., Семенов А.Л., Высоцкий И.Р., Гущин Д.Д., Захаров П.И., Панферов В.С., Посицельский С.Е., Семенов А.В., Семенова М.А., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Шноль Д.Э. – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 132 с.

16. Ященко, И.В. ЕГЭ-2011: Математика / ФИПИ авторы-составители: Ященко И.В., Семенов А.Л., Высоцкий И.Р., Гущин Д.Д., Захаров П.И., Панферов В.С., Посицельский С.Е., Семенов А.В., Семенова М.А., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Шноль Д.Э.– М.: Астрель, 2010. . – 93 с.

Содержание

ДЕМИДОВА Наталия Евгениевна

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Учебное пособие для иностранных граждан

Редактор
Гришуткина Н.П.

Подписано в печать_________Формат 60*90 1/16
Бумага газетная. Печать офсетная
Уч. изд. л. _______ Уч. печ. л. _______Тираж _________Заказ№_______

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 603950, Н. Новгород, Ильинская, 65
Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н. Новгород, Ильинская, 65