

Б. Б. Лампси, Н. Ю. Трянина, П. А. Хазов, Б. Б. Лампси

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Нижний Новгород

2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Б. Б. Лампси, Н. Ю. Трянина, П. А. Хазов, Б. Б. Лампси

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2020

ББК 38
С 23
УДК 624.04(075)

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

- Е. А. Никитина* – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. ФГБУН «Институт проблем машиностроения РАН»
И. А. Волков – д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой подъемно-транспортных машин и машиноремонта ФГБОУ ВО «Волжский государственный университет»

Лампси Б.Б. Сборник задач и упражнений по устойчивости стержневых систем [Текст]: учеб. пособие /Б. Б. Лампси, Н. Ю. Трянина, П. А. Хазов, Б. Б. Лампси; Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун - т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2020. – 94 с.
ISBN 978-5-528-00379-5

Пособие содержит теоретические сведения и основные положения расчета стержневых систем на устойчивость. Многочисленные примеры, иллюстрирующие различные способы определения критических нагрузок, сопровождаются необходимыми пояснениями к решению и включают задания для самостоятельной работы.

Предназначено для подготовки к практическим занятиям по дисциплине “Устойчивость и основы динамики сооружений” для студентов:

- направления подготовки 08.03.01 Строительство, профиль Промышленное и гражданское строительство;
- специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений по специализациям:
 - ✓ строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений;
 - ✓ строительство гидротехнических сооружений повышенной ответственности.

ISBN 978-5-528-00379-5

© Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина,
П.А. Хазов, Б.Б. Лампси, 2020
© ННГАСУ, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Критические нагрузки и признаки устойчивости систем.....	7
1.1. Критические нагрузки и способы их определения.....	7
1.2. Признаки устойчивости систем.....	10
1.3. Степени свободы системы.....	12
2. Устойчивость систем с конечным числом степеней свободы.....	20
2.1. Устойчивость систем с одной степенью свободы.....	20
2.1.1. Определение критической нагрузки статическим способом.....	20
2.1.2. Определение критической нагрузки энергетическим способом.....	23
2.2. Устойчивость систем с двумя степенями свободы.....	26
2.2.1. Определение критической нагрузки статическим способом.....	26
2.2.2. Определение критической нагрузки энергетическим способом.....	29
3. Устойчивость прямых однопролетных стержней и статически определимых систем.....	33
3.1. Определение критической нагрузки для однопролетных стержней статическим методом.....	33
3.2. Определение критической нагрузки для однопролетных стержней энергетическим методом.....	42
3.3. Понятие о приведенной длине стержня.....	45
3.4. Определение критической нагрузки для стержня с сосредоточен- ными и распределенными нагрузками по его длине.....	47
3.5. Устойчивость статически определимых систем.....	51
4. Устойчивость статически неопределимых систем.....	60
4.1. Усилия и деформации сжато-изогнутого стержня.....	60
4.1.1. Стержень с шарнирным закреплением концов.....	61
4.1.2. Стержень с обоими защемленными концами.....	63
4.1.3. Стержень с одним защемленным и другим шарнирно-опертым	

концами.....	69
4.2. Устойчивость неразрезных балок и многоэтажных колонн.....	77
4.2.1. Уравнение трех моментов.....	77
4.2.2. Уравнение устойчивости неразрезной балки.....	80
4.3. Устойчивость рам	85
4.3.1. Основные допущения	87
4.3.2. Расчет рам методом перемещений	87
Список использованных источников	94

Введение

Устойчивость сооружений – раздел строительной механики, в котором разрабатываются методы расчета сооружений на устойчивость. Устойчивостью называется свойство сооружений сохранять свое первоначальное положение и первоначальную форму равновесия, соответствующую нагрузке. Сооружения всегда должны находиться в исходном состоянии и возвращаться в это состояние после устранения причин, вызвавших любые малые их отклонения от первоначального состояния равновесия. В соответствии с этим различают потерю устойчивости положения сооружений и потерю устойчивости форм равновесия в деформированном состоянии. Потеря устойчивости положения связана с нарушением первоначального состояния равновесия всего сооружения в целом при внешних воздействиях. Потеря устойчивости форм равновесия в деформированном состоянии определяется невозможностью сооружения сопротивляться действующей нагрузке. В этом случае незначительные причины внешнего или внутреннего характера приводят к изменению первоначального положения или первоначальной формы деформированного состояния. Поэтому возможны устойчивые и неустойчивые формы равновесия в деформированном состоянии всего сооружения или отдельных его элементов. Потеря устойчивости – это весьма опасное явление, которое необходимо прогнозировать при проектировании и строительстве сооружений. Опасность состоит в том, что потеря устойчивости происходит внезапно при нагрузках, значительно меньших разрушающих, а деформации элементов конструкции остаются небольшими до момента возникновения критического состояния.

В настоящем учебном пособии изложены основные методы определения устойчивых форм равновесия стержневых систем в деформированном состоянии и соответствующих им параметров нагрузки.

В первой главе рассматриваются основные признаки устойчивости сооружений и способы определения критических нагрузок для стержневых систем с различным числом степеней свободы.

Вторая глава посвящена изучению устойчивости стержневых систем с конечным числом степеней свободы.

Третья глава включает определение критических нагрузок для прямых однопролетных стержней и особенности расчета на устойчивость статически определимых систем.

Четвертая глава содержит основные положения расчета на устойчивость и способы определения критических нагрузок в статически неопределимых рамных системах и многоэтажных колоннах.

Все разделы пособия включают примеры и упражнения для самостоятельной работы, задания и пояснения к выполнению расчетно-графической работы по устойчивости сооружений.

1. Критические нагрузки и признаки устойчивости систем

1.1. Критические нагрузки и способы их определения

Равновесие системы (сооружения, конструкции, элемента) может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным. Для определения состояния равновесия системе придается малое отклонение и изучается ее поведение после устранения причин, вызвавших это отклонение. Равновесие, при котором после устранения причин, вызвавших какие-либо возможные отклонения системы, она возвращается в исходное положение, называется устойчивым. Примером может служить шарик, расположенный на вогнутой поверхности (рис.1.1,а). После отклонения из состояния равновесия он возвращается в исходное состояние. Равновесие, при котором после устранения причин, вызвавших малые возможные отклонения системы, происходит нарастание отклонений, называется неустойчивым. Примером может служить шарик, расположенный на выпуклой поверхности (рис.1.1,б). После отклонения из состояния равновесия он удаляется от исходного состояния. Равновесие, при котором после устранения причин, вызвавших малые отклонения, система остается в покое в этом отклоненном состоянии, называется безразличным. Примером может служить шарик, расположенный на горизонтальной плоскости (рис.1.1,в). После отклонения из состояния равновесия он остается в отклоненном состоянии.

Достижение системой такого состояния, при котором первоначальная форма ее равновесия становится неустойчивой, называется потерей устойчивости системы. Наименьшая нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости системы, называется критической нагрузкой $P_{кр}$. Для ее выражения рассмотрим упругий консольный стержень, нагруженный силой P (рис.1.2,а), величину которой будем постепенно увеличивать. Исследование устойчивости стержня показывает, что при небольших значениях силы $P < P_{кр}$ равновесие стержня является устойчивым. Поскольку после устранения причин, вызвавших малые отклонения "у", за счет сил упругости стержень возвратится в исходное состояние. При достижении силой значения $P = P_{кр}$, равновесие возможно как при исходном недеформированном состоянии, так и при отклоненном деформиро-

ванном состоянии. Это – безразличное состояние равновесия системы. Силы упругости позволяют сохранить первоначальное положение стержня при отсутствии малых отклонений "у" или удерживать его в отклоненном состоянии при малых отклонениях "у" (рис.1.2,б). В этом случае происходит разветвление форм равновесия и состояние системы удобно представить графически (рис.1.3,а), где выделены устойчивые состояния равновесия. В точке "к" происходит разветвление форм равновесия.

При дальнейшем увеличении величины силы $P > P_{кр}$ происходит нарастание деформаций, система не может вернуться в исходное состояние. Такое равновесие будет называться неустойчивым (рис.1.2,в), поскольку силы упругости не в состоянии сохранить стержень в этом положении или вернуть его в исходное состояние.

Критическая нагрузка определяется при безразличном состоянии равновесия. Для определения критических нагрузок существуют специальные способы:

- 1) статический метод основан на определении критической нагрузки из условия равновесия системы в отклоненном состоянии;
- 2) энергетический метод – это метод определения критической нагрузки из условия равенства нулю приращения полной энергии системы при переходе ее в соседнее состояние;
- 3) динамический метод основан на рассмотрении колебаний системы;
- 4) качественные методы – методы, основанные на качественном анализе выражений энергии и уравнений равновесия или движения системы.

В дальнейшем будем рассматривать только статические и энергетические методы.

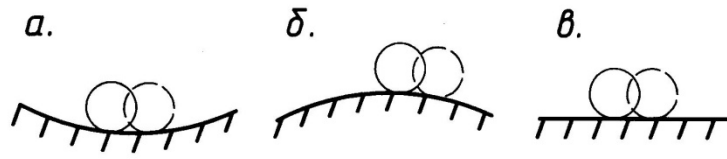


Рис. 1.1.

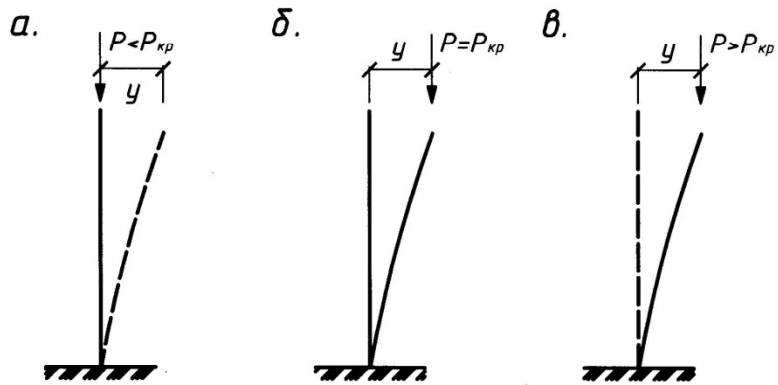


Рис. 1.2.

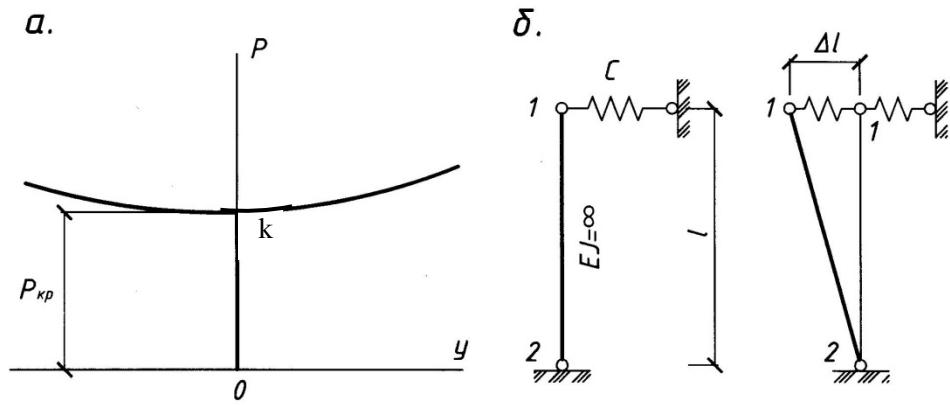


Рис. 1.3.

1.2. Признаки устойчивости системы

В зависимости от применяемого метода расчета по определению критической нагрузки устанавливаются и соответствующие признаки устойчивости системы.

Статические признаки рассматривают систему в отклоненном состоянии, близком к исходному состоянию равновесия.

Если силы $\sum S_{\text{внут}}$, уравнивающие систему в отклоненном состоянии, больше заданных внешних сил $\sum S_{\text{внеш}}$, то система в отклоненном состоянии не удержится и вернется в исходное состояние. При этом равновесие будет устойчивым. Если силы, удерживающие систему в отклоненном состоянии, меньше заданных, то система в отклоненном состоянии не удержится. Под действием заданных сил будет происходить дальнейшее отклонение ее от исходного состояния, равновесие будет неустойчивым. Если же силы, удерживающие систему в отклоненном состоянии равны заданным, то система может находиться как в исходном состоянии равновесия, так и в отклоненном без дальнейшего нарастания перемещений. Равновесие будет называться безразличным.

Этот признак можно проиллюстрировать на примере консольного упругого стержня, нагруженного вертикальной нагрузкой (рис.1.2), где в качестве заданных сил рассматривается продольная сжимающая сила P , а уравнивающих сил – силы упругости, удерживающие стержень в отклоненном, деформированном состоянии.

Энергетические признаки устойчивости системы формулируются принципом Лагранжа-Дирихле: если система находится в устойчивом равновесии, то ее полная потенциальная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними положениями системы, отличающимися от исходного положения бесконечно малыми перемещениями; если в неустойчивом равновесии, то потенциальная энергия максимальна; если в безразличном равновесии, то потенциальная энергия не меняется. Этот принцип можно проиллюстрировать на примере шарика, расположенного на поверхностях разного вида (рис.1.1), где потенциальная энергия при отклонении шарика от состояния равновесия

изменяется только за счет работы силы тяжести. Можно рассмотреть три случая:

- а) потенциальная энергия возрастает и положение устойчивое;
- б) потенциальная энергия убывает и положение неустойчивое;
- в) потенциальная энергия не изменяется и положение безразличного состояния равновесия.

Если записать изменение потенциальной энергии системы в виде

$$\delta\Pi = \delta V - \delta A, \quad (1.1)$$

где: δV – приращение потенциальной энергии деформации за счет работы внутренних сил;

δA – приращение работы внешних сил,

то при устойчивом равновесии:

$$\delta\Pi > 0; \text{ и } \delta V > \delta A, \quad (1.2)$$

при неустойчивом равновесии:

$$\delta\Pi < 0; \text{ и } \delta V < \delta A, \quad (1.3)$$

при безразличном равновесии:

$$\delta\Pi = 0; \text{ и } \delta V = \delta A. \quad (1.4)$$

В случае, если отклоненная форма равновесия системы характеризуется несколькими независимыми параметрами, то энергетический признак состояния равновесия можно представить в виде выражения экстремального значения полной потенциальной энергии системы, то есть:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

где: $\Pi = \Pi_0 + \delta V - \delta A$ – полная потенциальная энергия системы;

Π_0 – потенциальная энергия в исходном недеформированном состоянии равновесия;

Δ_i – обобщенные параметры, определяющие положение системы в отклоненном деформированном состоянии.

1.3. Степени свободы системы

При потере устойчивости стержневые системы теряют исходную форму устойчивого равновесия и принимают новую форму состояния равновесия. В зависимости от количества отклоненных форм равновесия, принимаемых стержневой системой, различают системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Числом степеней свободы W называют количество независимых параметров, определяющих положение системы при ее отклонении от положения равновесия. Изменение формы или положения системы связано с изменением координат ее характерных точек. В результате таких изменений отклоненная форма устойчивого равновесия будет характеризоваться постоянством соотношений между параметрами, определяющими эту отклоненную форму, независимо от величин самих параметров.

Конечным числом степеней свободы обладают стержневые системы, состоящие из недеформируемых, бесконечно жестких элементов, изменения форм которых определяются упругими свойствами опорных закреплений. Упругие стержни и стержневые системы, состоящие из них, имеют число степеней свободы равное бесконечности, поскольку они могут принимать бесконечное множество отклоненных форм устойчивого равновесия, для определения которых потребуется бесконечное множество геометрических параметров.

Пример 1.1. Определить степень свободы системы (рис.1.3,б).

Решение.

1) Смещаем узел 1 по направлению упругой связи 1, придавая стойке отклоненную форму устойчивого равновесия.

2) Обозначим величину этого перемещения по его направлению произвольным параметром Δ_1 . Так как других независимых параметров, определяющих отклоненную форму равновесия нет, определяем степень свободы стойки, которая равна $W = 1$.

Пример 1.2. Определить степень свободы системы (рис.1.4).

Решение. 1) Смещаем узел 1 по направлению упругой связи 1, придавая стойке отклоненную форму равновесия.

2) Обозначим величину этого перемещения по его направлению параметром Δ_1 .

3) Выразим перемещение точки 2 по направлению 2: $\Delta_2 = \Delta_1 l_1 / (l_1 + l_2)$. Оно зависит от параметра Δ_1 и геометрических размеров стойки. Поскольку других независимых параметров нет, определяем степень свободы стойки $W = 1$.

Пример 1.3. Определить степень свободы системы (рис.1.5,а).

Решение. 1) Смещаем узел 1 по направлению связи 1, придавая стойке отклоненную форму. Обозначим величину этого перемещения Δ_1 . Вызываемые им перемещения Δ_{21} и Δ_{31} будут зависимые.

2) Аналогично смещаем узел 2 по направлению связи 2, придавая стойке отклоненную форму. Обозначим величину этого перемещения Δ_2 . Вызываемые им перемещения Δ_{32} и Δ_{22} будут зависимые.

3) Поскольку других независимых параметров нет, определяем степень свободы стойки $W = 2$, которым будут соответствовать две независимые формы отклоненного состояния равновесия (рис.1.5,б).

Пример 1.4. Определить степень свободы системы с жесткостью стержней $EI = \infty$ (рис.1.6).

Решение. 1) Смещаем узел 1 по направлению связи 1 на величину Δ_1 . Вызываемые им относительные перемещения концов ригелей рамы будут равны Δ_1 и являются зависимыми.

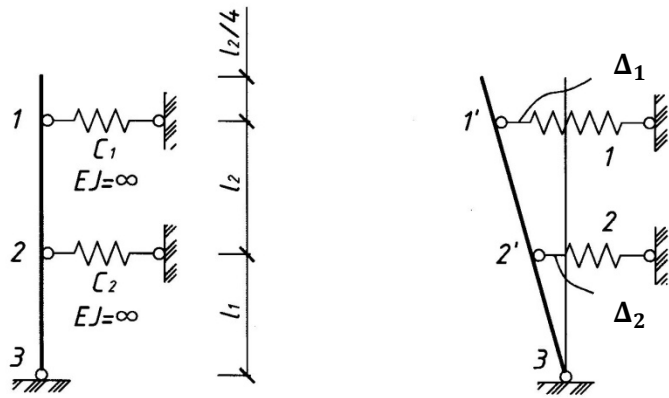
2) Смещаем узел 2 по направлению связи 2 на величину Δ_2 . Вызываемые им относительные перемещения концов стоек рамы будут равны Δ_2 и являются зависимыми.

3) Смещаем узел 3 по направлению связи 3 на величину Δ_3 . Вызываемые им относительные перемещения концов стоек рамы будут равны Δ_3 и являются зависимыми.

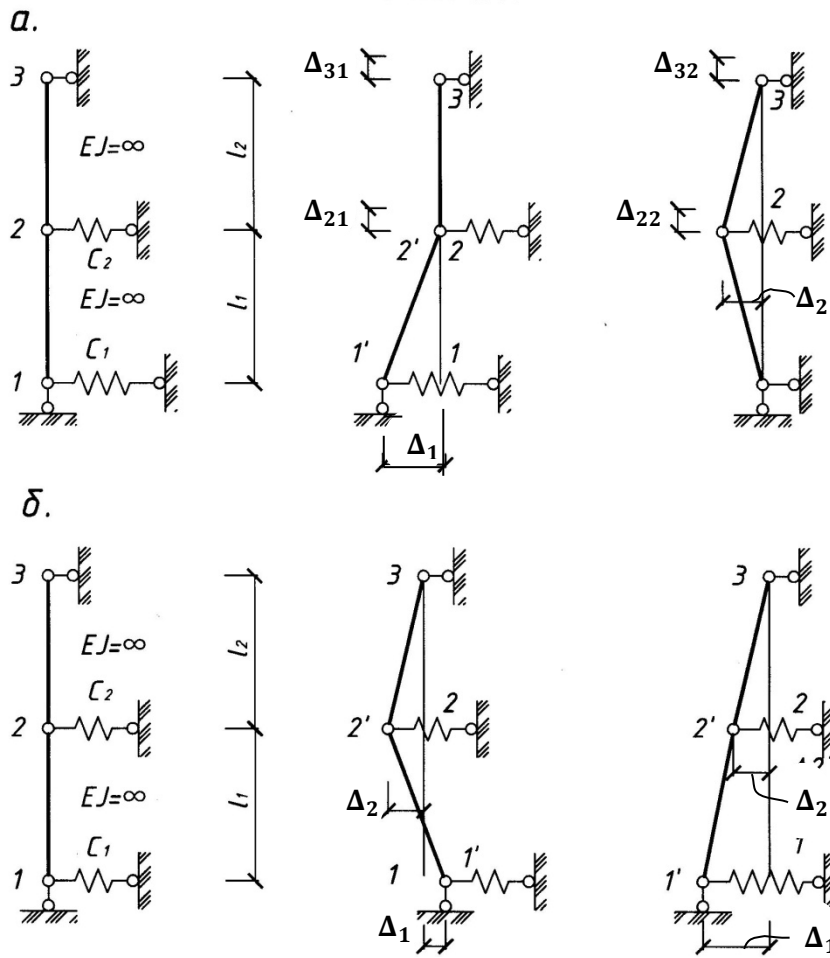
4) Поскольку других независимых параметров нет, определяем степень свободы рамы $W = 3$, которым будут соответствовать три независимые формы отклоненного состояния равновесия.

Пример 1.5. Определить степень свободы систем с жесткостью стержней $EI = \infty$ (рис.1.7,1.8). Результаты решения приведены на рисунках.

Пример 1.6. Определить самостоятельно степень свободы рам, состоящих из стержней с жесткостью $EI = \infty$ (рис.1.9, 1.10).



Puc. 1.4.



Puc. 1.5.

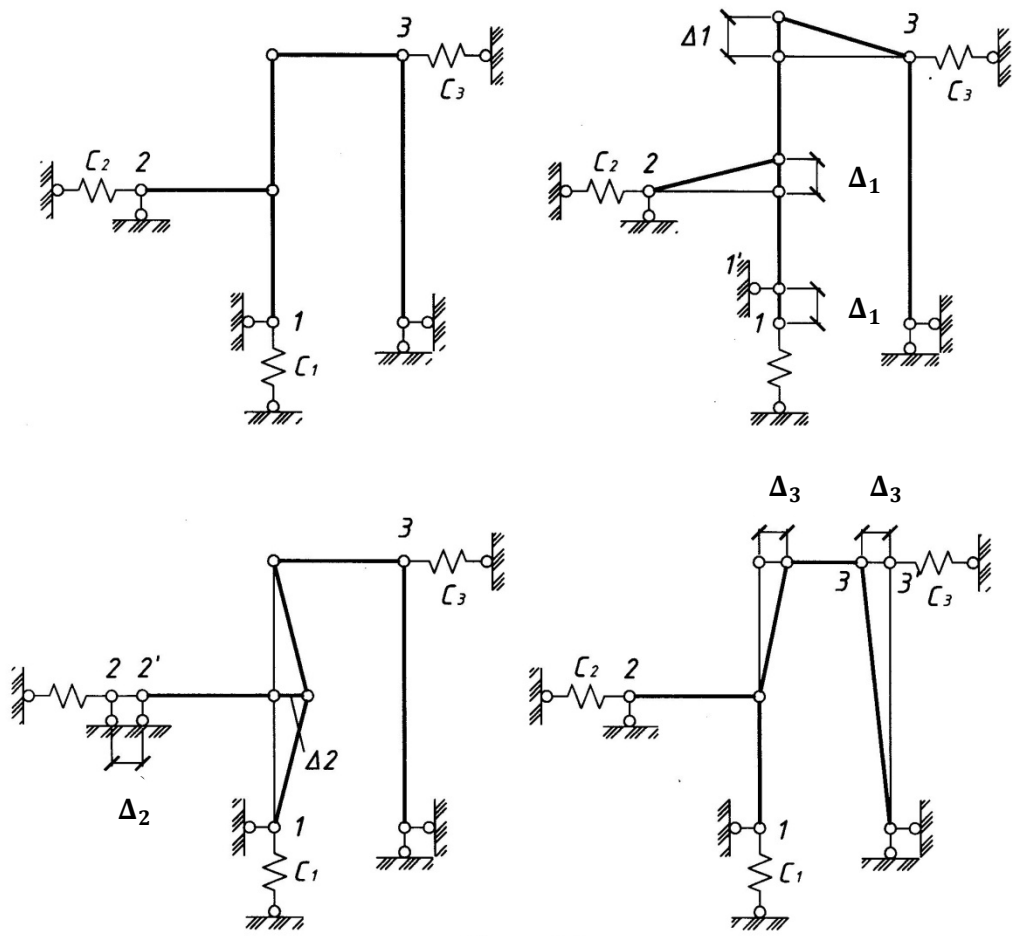


Рис. 1.6.

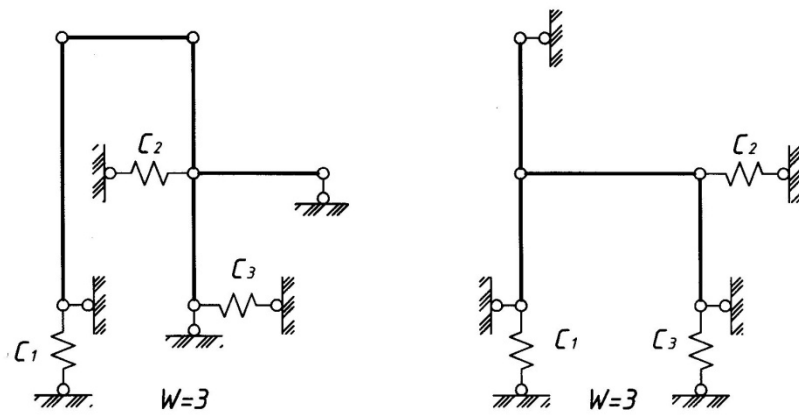


Рис. 1.7.

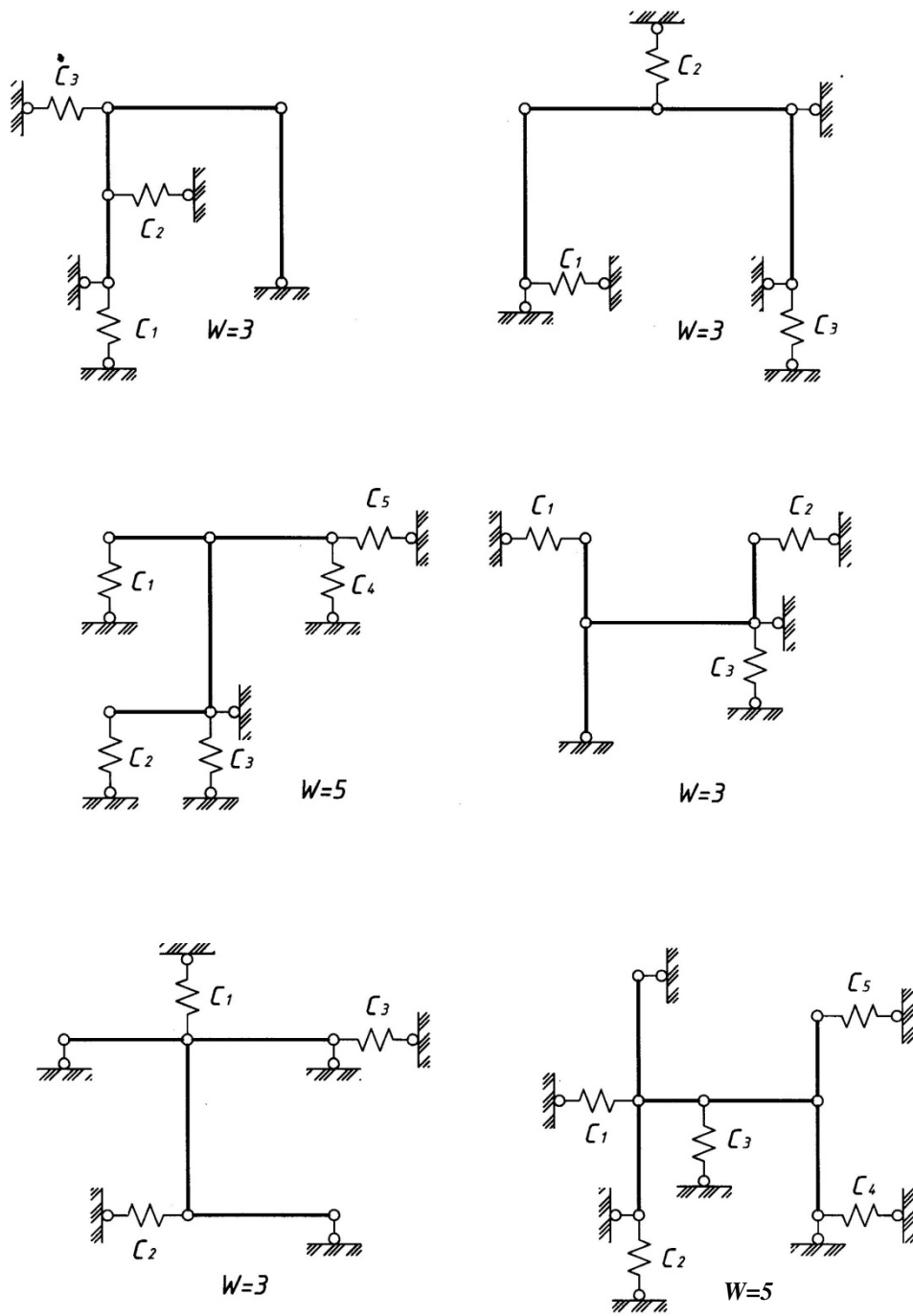


Рис. 1.8.

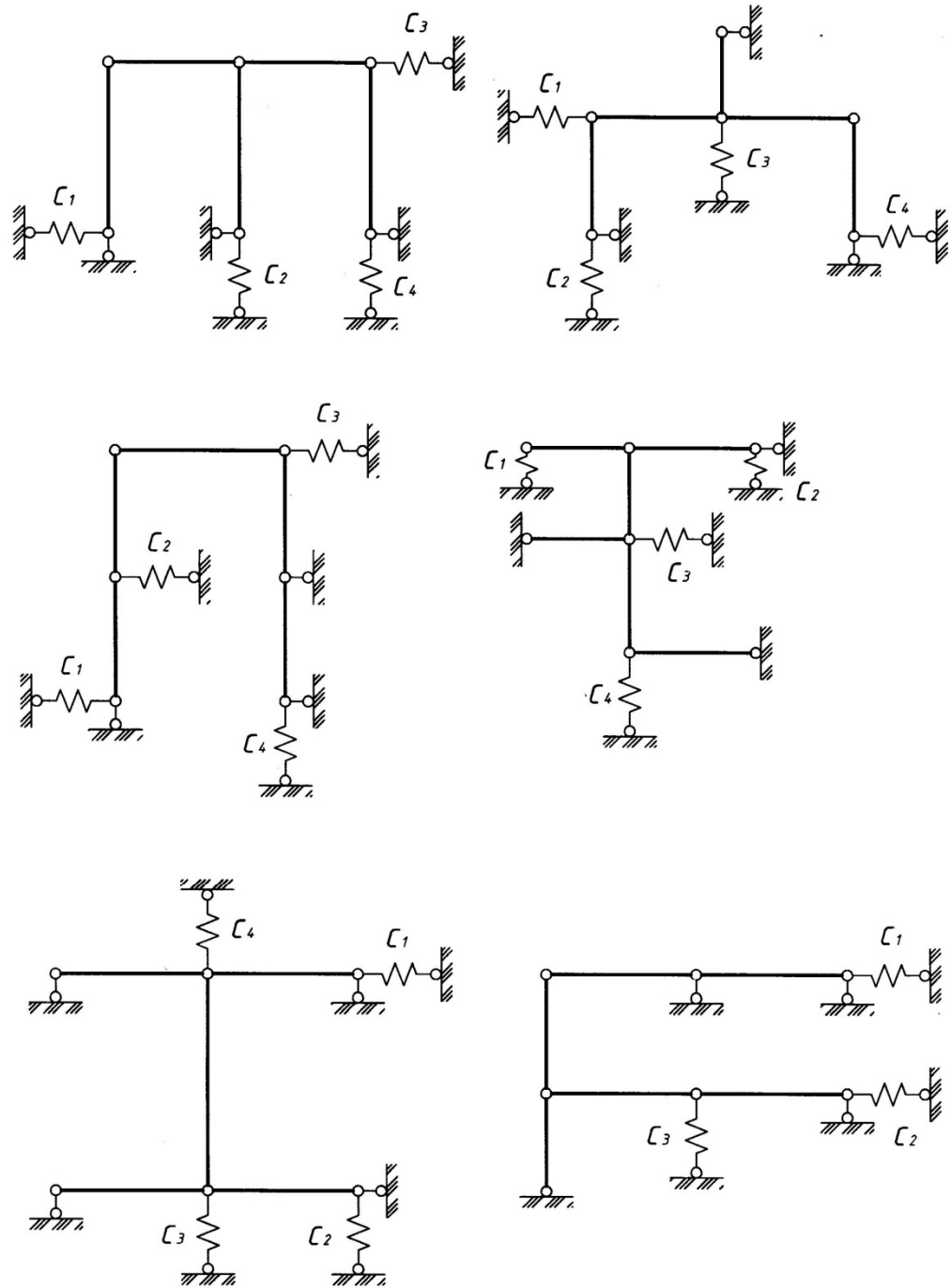


Рис. 1.9.

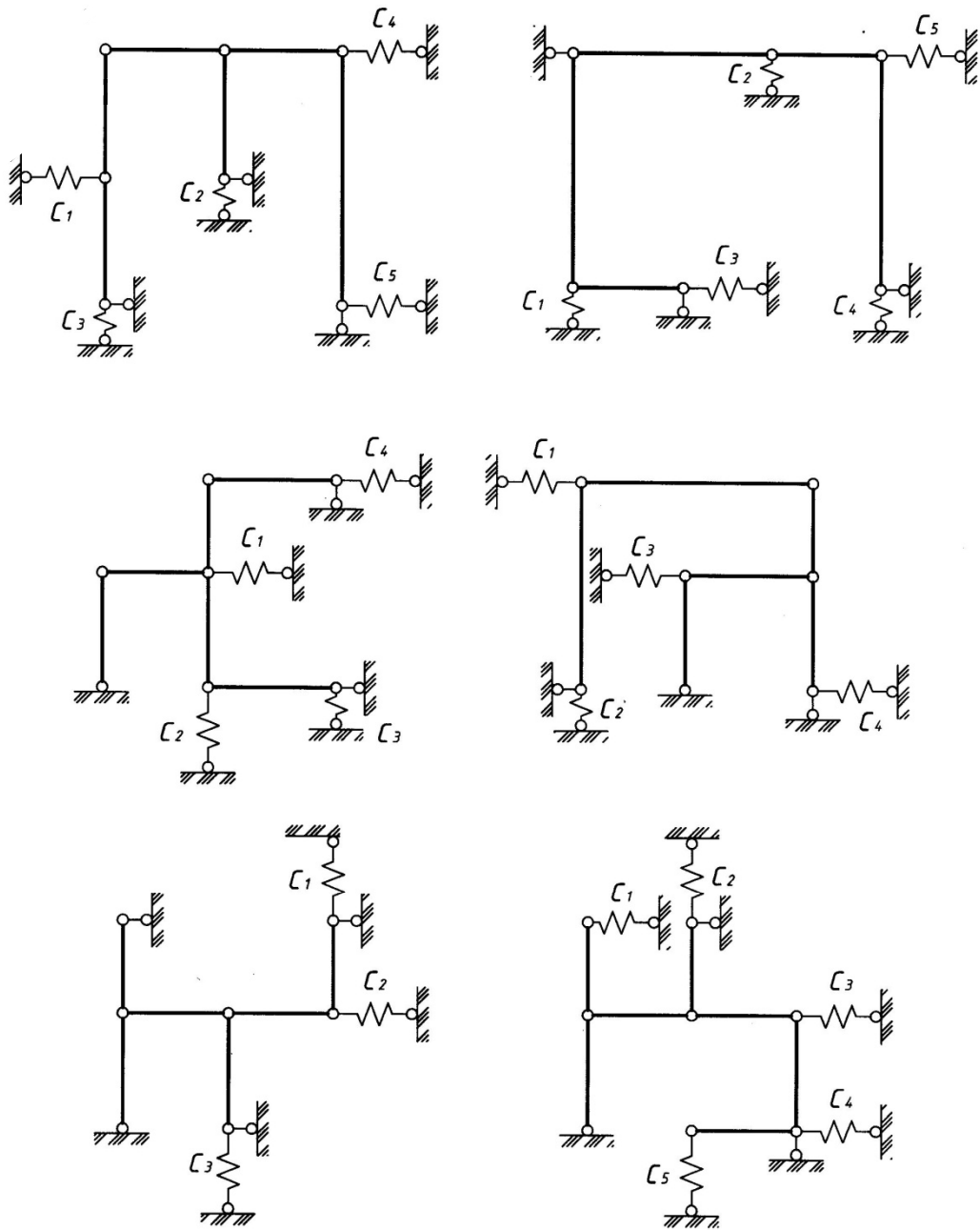


Рис. 1.10.

2. Устойчивость систем с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим стержневые системы с конечным числом степеней свободы и выразим для них значения критических нагрузок статическим и энергетическим способами. Для этого исследуемую систему приводят в состояние безразличного равновесия, при котором происходит потеря устойчивости, и выражают критическую нагрузку, используя статические или энергетические признаки устойчивости. Независимо от степени свободы и способа определения критической нагрузки, расчет выполняют в следующем порядке:

- 1) Полагают, что нагрузка достигла критического значения $R_{кр}$ и система находится в состоянии безразличного равновесия;
- 2) Отклоняют систему по направлениям степеней свободы и определяют ее новое положение параметрами Δ_i ;
- 3) Определяют реакции в упругих и неупругих связях для отклоненного состояния;
- 4) Составляют уравнения безразличного состояния равновесия в статической или энергетической формах;
- 5) Решают полученные уравнения устойчивости и определяют критическую нагрузку.

2.1. Устойчивость систем с одной степенью свободы

2.1.1. Определение критической нагрузки статическим способом

Применение этого способа предусматривает для отклоненного положения системы, находящейся в критическом состоянии, выполнения условия

$$\sum S_{\text{внеш}} = \sum S_{\text{внут}}, \quad (2.1)$$

что может соответствовать уравнениям равновесия статики в виде

$$\sum M_0 = 0, \sum X = 0, \sum Y = 0, \quad (2.2)$$

из которых выражается критическая нагрузка.

Пример 2.1. Для стойки (рис.2.1,а) высотой l (м), жесткостью $EI = \infty$ при абсолютно жесткой опоре 0 и упругой опоре 1 с жесткостью c (кН/м), определить критическую нагрузку $P_{кр}$.

Решение.

1) Полагаем, что $P = P_{кр}$ и стойка находится в критическом состоянии.

2) Отклоняем стойку по направлению степени свободы на величину Δ_1 (рис.2.1,б).

3) Определяем реакции в опорах.

$$\sum X = 0; V_0 = P_{кр}; \sum Y = 0; H_0 = R_1 = c\Delta_1.$$

4) Составляем уравнение безразличного состояния равновесия

$$\sum M_0 = 0; P_{кр}\Delta_1 - c\Delta_1 l = 0 \text{ или } (P_{кр} - cl)\Delta_1 = 0.$$

5) Составляем уравнение устойчивости

$$P_{кр} - cl = 0,$$

поскольку для отклоненного состояния $\Delta_1 \neq 0$.

6) Решаем уравнение устойчивости и определяем критическую нагрузку

$$P_{кр} = cl \text{ (кН)}.$$

Пример 2.2. Для рамы (рис.2.2,а) с жесткостью всех стержней $EI = \infty$ и упругими опорами 1,2 при их жесткости c_1 и c_2 определить критическую нагрузку $P_{кр}$.

Решение.

1) Полагаем $P = P_{кр}$ и отклоняем раму по направлению степени свободы Δ_1 (рис.2.2,б).

$$\text{Тогда } \Delta_2 = \frac{b}{a} \cdot \Delta_1, \quad \Delta_3 = \frac{l}{a} \cdot \Delta_1.$$

2) Составляем уравнение безразличного состояния равновесия

$$\sum M_0 = 0; c_1\Delta_1 a + c_2\Delta_2 b - P_{кр}\Delta_3 = 0,$$

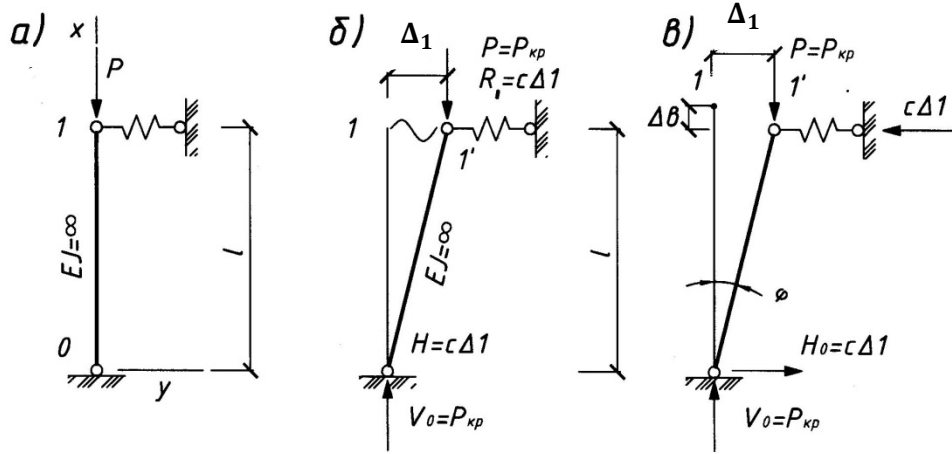


Рис. 2.1.

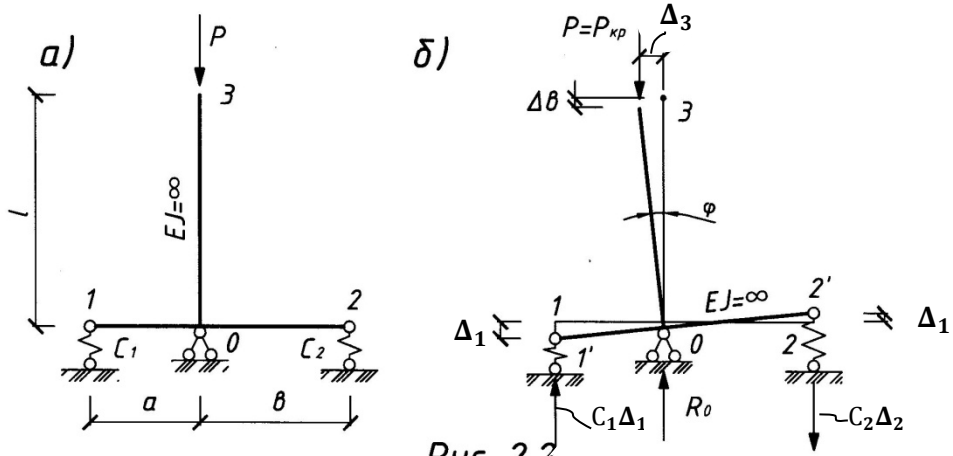


Рис. 2.2.

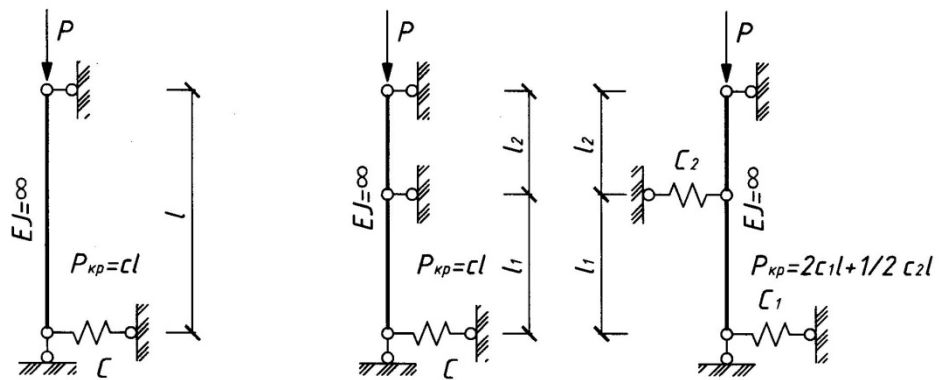


Рис. 2.3.

или: $c_1 \Delta_1 a + c_2 \frac{b}{a} b - P_{кр} \frac{1}{a} \Delta_1 = 0,$

$$(c_1 a + c_2 \frac{b^2}{a} - P_{кр} \frac{1}{a}) \Delta_1 = 0.$$

3) Составляем уравнение устойчивости

$$c_1 a + c_2 \frac{b^2}{a} - P_{кр} \frac{1}{a} = 0, \text{ поскольку } \Delta_1 \neq 0.$$

4) Решаем уравнение устойчивости и определяем критическую нагрузку

$$P_{кр} = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{1} \quad (\text{кН}).$$

2.1.2. Определение критической нагрузки энергетическим способом

Применение этого способа предусматривает для отклоненного положения системы, находящейся в критическом состоянии, выполнение условия (1.4) $\delta V = \delta A$, из которого выражается критическая нагрузка.

Пример 2.3. Для стойки (рис.2.1,а) высотой l (м), жесткостью $EI = \infty$ и упругой опоре 1 с жесткостью c (кН/м) определить критическую нагрузку $P_{кр}$.

Решение.

1) Полагаем, что $P = P_{кр}$ и стойка находится в критическом состоянии.

2) Отклоняем стойку по направлению степени свободы на величину Δ_1 (рис.2.1,в).

3) Определяем реакции в опорах

$$\sum X = 0; V_0 = P_{кр}; \sum Y = 0; H_0 = R_1 = c \Delta_1$$

4) Составляем уравнение безразличного состояния равновесия $\delta V = \delta A$,

где $\delta V = \frac{1}{2} c \Delta_1^2, \delta A = P_{кр} \Delta_b$

$$\Delta_b = l - l \cos \varphi = l(1 - \cos \varphi) = l \cdot 2 \sin^2 \varphi / 2 \cong l \cdot 2 \varphi^2 / 4 = \frac{1}{2} l \varphi^2 = \frac{1}{2} l \left(\frac{\Delta_1}{l} \right)^2.$$

5) Решаем уравнение устойчивости

$$c l - P_{кр} = 0$$

и определяем критическую нагрузку

$$P_{кр} = c l \quad (\text{кН}).$$

Пример 2.4. Для рамы (рис.2.2,а) определить критическую нагрузку $P_{кр}$.

Решение.

1) Полагаем, что $P = P_{кр}$ и отклоняем раму по направлению степени свободы Δ_1 (рис.2.2,б). Тогда

$$\Delta_2 = b/a \cdot \Delta_1, \Delta_3 = l/a \cdot \Delta_1, \Delta_b = \frac{1}{2}l\varphi^2 = \frac{1}{2}l\left(\frac{\Delta_3}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}l\left(\frac{l\Delta_1}{al}\right)^2 = \frac{1}{2}l\left(\frac{\Delta_1}{a}\right)^2.$$

2) Составляем уравнение безразличного состояния равновесия $\delta V = \delta A$, где

$$\delta V = \frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2, \quad \delta A = P_{кр}\Delta_b.$$

Тогда: $\frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2 = P_{кр}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1}{a}\right)^2$, или

$$\frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\frac{b}{a}\Delta_1\right)^2 = P_{кр}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1}{a}\right)^2.$$

3) Решаем уравнение устойчивости

$$c_1a + c_2b^2/a - P_{кр}l/a = 0$$

и определяем критическую нагрузку

$$P_{кр} = (c_1a^2 + c_2b^2)/l \quad (\text{кН}).$$

Пример 2.5. Для стоек и рам с одной степенью свободы (рис.2.3, 2.4) определить критическую нагрузку статическим и энергетическим способом самостоятельно.

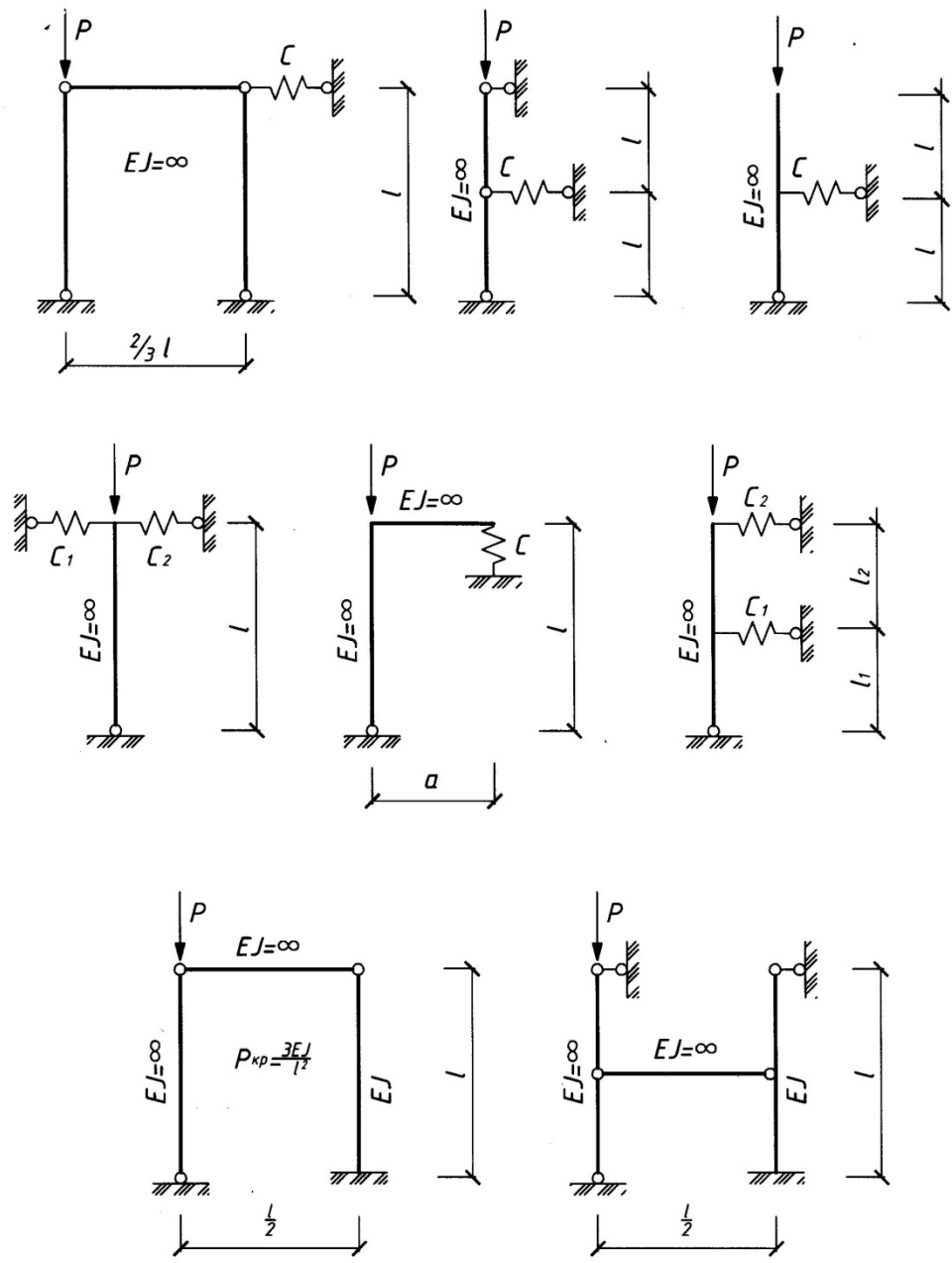


Рис. 2.4.

2.2. Устойчивость систем с двумя степенями свободы

2.2.1. Определение критической нагрузки статическим способом

Выражение критической нагрузки для системы с двумя степенями свободы статическим способом выполняется из условия критического состояния (2.1) и соответствующих уравнений равновесия статики (2.2).

Пример 2.6. Для стойки (2.5,а) высотой l_1 и l_2 (м), жесткостью $EI = \infty$ при абсолютно жесткой опоре 3 и упругих опорах 1, 2 с жесткостями c_1, c_2 (кН/м) соответственно, определить критическую нагрузку $P_{кр}$.

Решение.

1. Полагаем, что $P = P_{кр}$ и стойка находится в критическом состоянии.

2. Отклоняем стойку по направлению степени свободы на величину Δ_1 и Δ_2 (рис.2.5,б).

3. Определяем реакции в опорах

$$\sum X = 0; V_1 = P_{кр}; \sum Y = 0; R_3 = c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2$$

4. Составляем уравнения безразличного состояния равновесия

$$\sum M_1 = 0; P_{кр}\Delta_1 - R_3(l_1 + l_2) + c_2\Delta_2l_1 = 0;$$

$$\sum M_2^{\text{верх}} = 0; P_{кр}\Delta_2 - R_3l_2 = 0.$$

С учетом $R_3 = c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2$, получим систему однородных уравнений,

$$\begin{cases} [P_{кр} - c_1(l_1 + l_2)]\Delta_1 - c_2\Delta_2l_2 = 0; \\ -c_1\Delta_1l_2 + (P_{кр} - c_2l_2)\Delta_2 = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

которая допускает два вида решения:

а) нулевое, когда $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, что соответствует исходному (недеформированному) состоянию равновесия и не рассматривается;

б) ненулевое, когда $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$, что соответствует отклоненному состоянию равновесия. В этом случае должен быть равен нулю определитель системы, который представляет собой уравнение устойчивости

$$\begin{vmatrix} [P_{кр} - c_1(l_1 + l_2)] & -c_2l_2 \\ -c_1l_2 & (P_{кр} - c_2l_2) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Решаем уравнение устойчивости

$$P_{кр}^2 - (c_1 l_1 + c_1 l_2 + c_2 l_2) P_{кр} + c_1 c_2 l_1 l_2 = 0$$

и определяем критическую нагрузку

$$P_{1,2}^{кр} = \frac{c_1 l_1 + c_1 l_2 + c_2 l_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1 l_1 + c_1 l_2 + c_2 l_2)^2}{4} - c_1 c_2 l_1 l_2}. \quad (2.4)$$

Каждому значению критической нагрузки $P_1^{кр}$ и $P_2^{кр}$ будет соответствовать своя форма отклоненного состояния равновесия. Практическое значение имеет лишь наименьшее значение критической нагрузки. Формы отклоненного состояния равновесия могут быть построены из уравнений (2.3), куда входят независимые параметры Δ_1 и Δ_2 .

В частном случае, при $c_1 = c_2 = c$ и $l_1 = l_2 = l$, получим из (2.4):

$$P_1^{кр} = 0,382cl; P_2^{кр} = 2,618cl$$

Критической нагрузкой для данной стойки будет $P_{кр} = 0,382cl$, так как именно этому наименьшему значению соответствует потеря устойчивости системы.

6. Строим формы отклоненного состояния равновесия.

Подставляя в уравнение (2.3) $P_1^{кр} = 0,382cl$, получим перемещение по направлению c_2 от $P_1^{кр}$.

$\Delta_{21} = -1,62 \Delta_{11}$. Принимая перемещение Δ_{11} по направлению c_1 от $P_1^{кр}$ за масштаб, то есть $\Delta_{11} = 1$, строим первую форму отклоненного состояния равновесия (рис.2.5,в), которая соответствует критической нагрузке $P_1^{кр} = 0,382cl$.

Аналогично подставляя в (2.3) $P_2^{кр} = 2,618cl$, получим перемещение по направлению c_2 от $P_2^{кр}$.

$\Delta_{22} = 0,62 \Delta_{12}$. Принимая перемещение Δ_{12} по направлению c_1 от $P_2^{кр}$ за масштаб, то есть $\Delta_{12} = 1$, строим вторую форму отклоненного состояния равновесия (рис.2.5,г), которая соответствует критической нагрузке $P_2^{кр} = 2,618cl$.

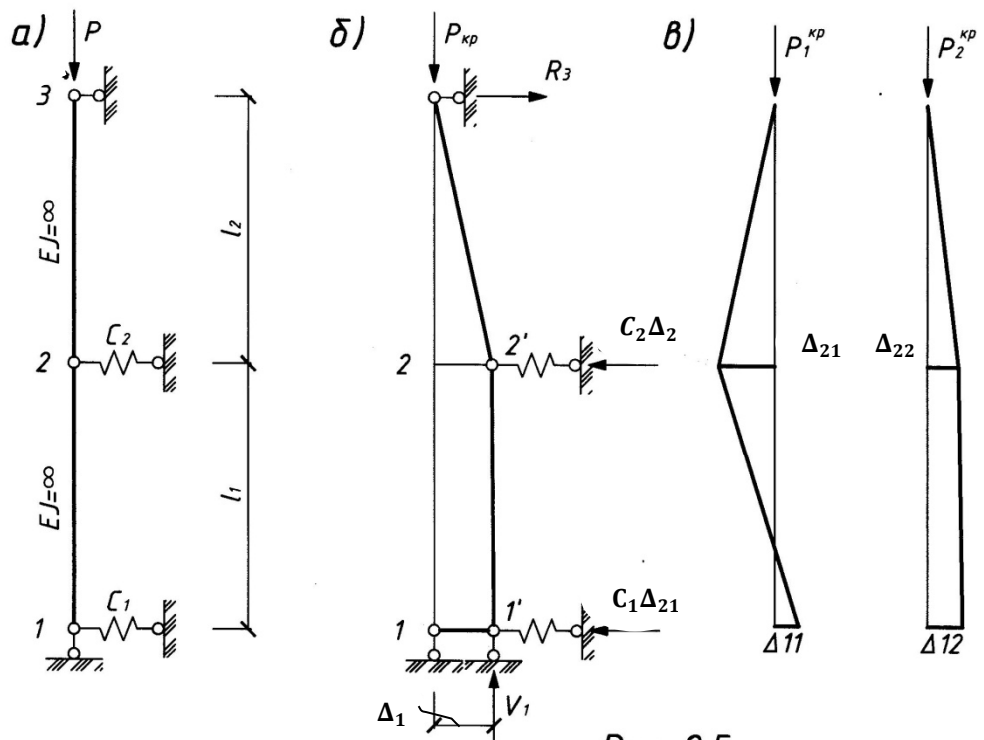


Рис. 2.5.

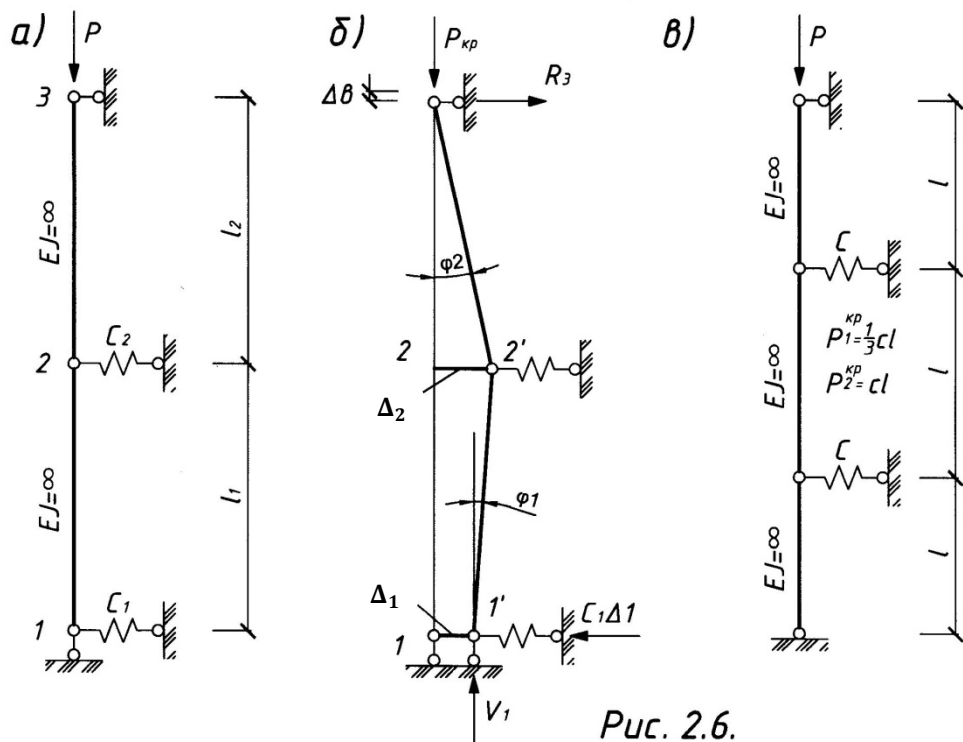


Рис. 2.6.

2.2.2. Определение критической нагрузки энергетическим способом

Применение этого способа предусматривает для отклоненного положения системы, находящейся в критическом состоянии, выполнение условия экстремального значения полной потенциальной энергии (1.5) $\partial\Pi/\partial\Delta_i = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$), из которого выражается критическая нагрузка.

Пример 2.7. Для стойки (рис.2.6,а) высотой l_1 и l_2 , жесткостью $EI = \infty$ при абсолютно жесткой опоре 3 и упругих опорах 1, 2 с жесткостями c_1, c_2 (кН/м) соответственно, определить критическую нагрузку $P_{кр}$.

Решение.

1. Полагаем, что $P = P_{кр}$ и стойка находится в критическом состоянии.

2. Отклоняем стойку по направлению степени свободы на величину Δ_1 и Δ_2 (рис.2.6,б).

3. Определяем реакции в опорах

$$\sum X = 0; V_1 = P_{кр}; \sum Y = 0; R_3 = c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2$$

4. Составляем выражение полной потенциальной энергии системы для отклоненного состояния равновесия

$$\Pi = \Pi_0 + \delta V - \delta A = \Pi_0 + \frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2 - P_{кр}\Delta_b,$$

где Π_0 – потенциальная энергия в исходном недеформированном состоянии равновесия.

5. Выражаем вертикальное перемещение Δ_b через перемещения Δ_1 и Δ_2 .

$$\begin{aligned} \Delta_b &= (l_1 - l_1 \cos\varphi_1) + (l_2 - l_2 \cos\varphi_2) = l_1(1 - \cos\varphi_1) + l_2(1 - \cos\varphi_2) = \\ &= l_1 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + l_2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \cong \frac{1}{2}l_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}l_2\varphi_2^2 = \\ &= \frac{1}{2l_1}(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \frac{1}{2l_2}\Delta_2^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ввиду малости углов } \varphi_1 \text{ и } \varphi_2, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} \cong \frac{\varphi_1}{2}, \quad \sin \frac{\varphi_2}{2} \cong \frac{\varphi_2}{2}$$

$$\text{и } \operatorname{tg}\varphi_1 \cong \varphi_1 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{l_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 \cong \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{l_2},$$

$$\text{тогда: } \Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2 - P_{кр} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l_1}(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \frac{1}{l_2}\Delta_2^2 \right].$$

6. Составляем условия экстремального значения полной потенциальной энергии системы в отклоненном состоянии (1.5):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = 0; \quad c_1 \Delta_1 + \frac{P_{кр}(\Delta_2 - \Delta_1)}{l_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} = 0; \quad c_2 \Delta_2 - \frac{P_{кр}}{l_1} (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{P_{кр}}{l_2} \Delta_2 = 0,$$

$$\text{или:} \quad \begin{cases} (c_1 l_1 - P_{кр}) \Delta_1 + P_{кр} \Delta_2 = 0, \\ P_{кр} l_2 \Delta_1 + (c_2 l_1 l_2 - P_{кр} l_2 - P_{кр} l_1) \Delta_2 = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет ненулевое решение для $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, в случае равенства нулю определителя системы,

$$\begin{vmatrix} (c_1 l_1 - P_{кр}) & P_{кр} \\ P_{кр} l_2 & (c_2 l_1 l_2 - P_{кр} l_2 - P_{кр} l_1) \end{vmatrix} = 0,$$

который представляет собой уравнение устойчивости.

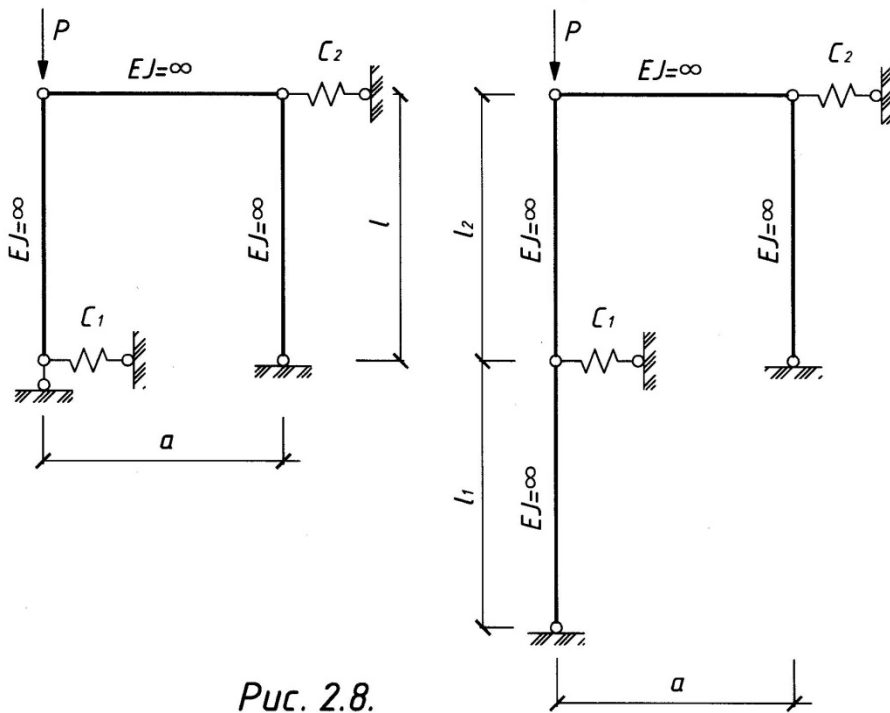
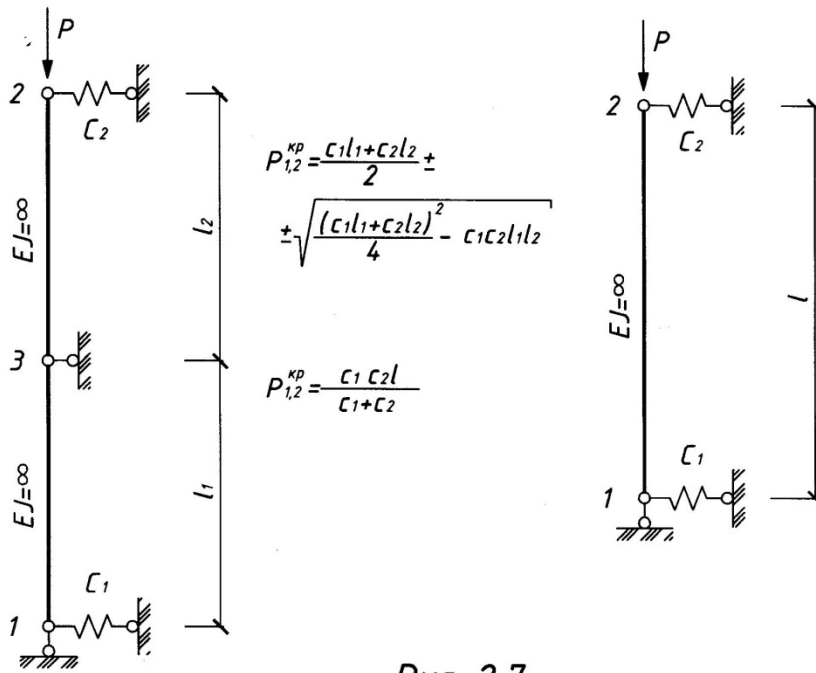
7. Решаем уравнение устойчивости

$$P_{кр}^2 - (c_1 l_1 + c_1 l_2 + c_2 l_2) P_{кр} + c_1 c_2 l_1 l_2 = 0$$

и определяем критическую нагрузку

$$P_{1,2}^{кр} = \frac{c_1 l_1 + c_1 l_2 + c_2 l_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1 l_1 + c_1 l_2 + c_2 l_2)^2}{4} - c_1 c_2 l_1 l_2},$$

значение которой соответствует решению (2.4) аналогичной задачи, решенной статическим способом.



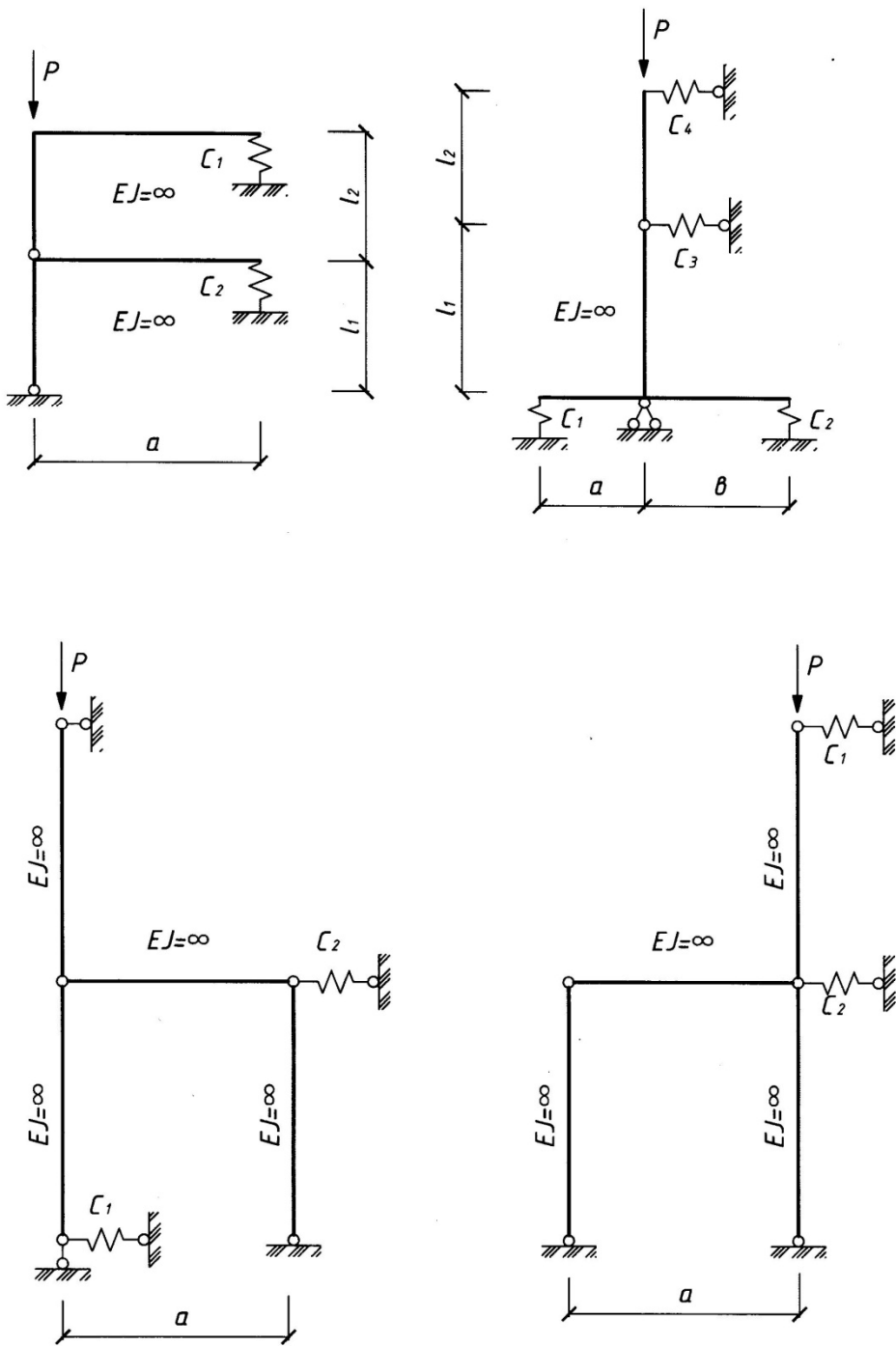


Рис. 2.9.

Пример 2.8. Для стоек и рам с двумя степенями свободы (рис.2.6,в-2.9) определить критическую нагрузку статическим и энергетическим способом самостоятельно.

3. Устойчивость прямых однопролетных стержней и статически определимых систем

3.1. Определение критической нагрузки для однопролетных стержней статическим методом

Рассмотрим однопролетный стержень (рис.3.1), нагруженный силой P , приложенной по оси. При значении силы $P = P_{кр}$ будет иметь место разветвление форм равновесия, когда одному значению нагрузки соответствуют две формы равновесия: исходная (недеформированная) и отклоненная (деформированная).

Запишем выражение для кривизны стержня в деформированном состоянии равновесия

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{EI'} \quad (3.1)$$

где: M – изгибающий момент в произвольном сечении x ;

EI – жесткость стержня при изгибе.

Известно, что кривизна дуги определяется зависимостью

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.2)$$

Приравнивая правые часть (3.1) и (3.2), получим нелинейное дифференциальное уравнение равновесия стержня

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EJ}. \quad (3.3)$$

В принятой системе координат положительным значениям изгибающих моментов (растянутые волокна справа) соответствуют отрицательные значения второй производной от прогиба и наоборот. Поэтому в формуле (3.3) принят знак минус.

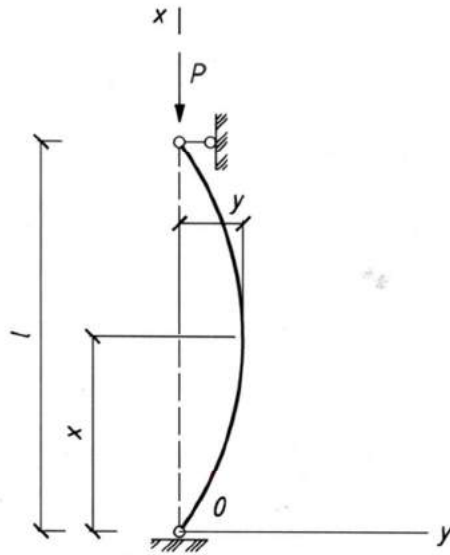


Рис. 3.1.

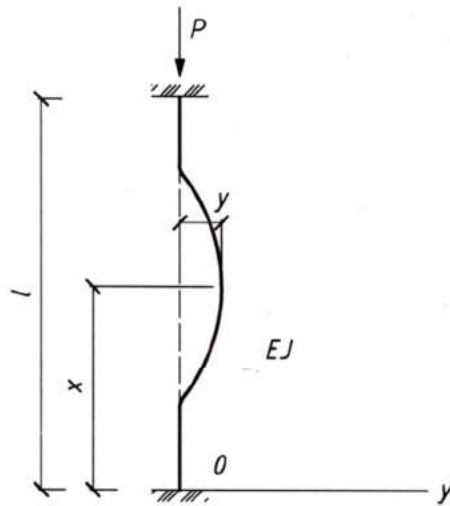


Рис. 3.2.

Если принять отклонения от исходной формы равновесия бесконечно малыми, то можно пренебречь величиной $(y')^2$ по сравнению с единицей. Тогда уравнение (3.3) примет вид

$$y'' = -\frac{M}{EJ} . \quad (3.4)$$

Для стержня с шарнирными концами, когда $M = P \cdot y$, уравнение (3.4) принимает вид

$$y'' + n^2 y = 0, \quad (3.5)$$

$$\text{где: } n^2 = \frac{P}{EJ} . \quad (3.6)$$

Для распространения уравнения (3.5) на другие случаи закрепления концов стержня, вычислим вторую производную по x

$$y^{IV} + n^2 y'' = 0 . \quad (3.7)$$

Полученное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка является основным при исследовании устойчивости прямых однопролетных стержней постоянного по длине сечения.

Решение уравнения (3.7) имеет вид:

$$y = A \sin nx + B \cos nx + Cx + D . \quad (3.8)$$

Произвольные постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий.

Пример 3.1. Определить критическую силу для стержня с шарнирным опиранием концов (рис.3.1).

Решение.

1). Составляем граничные условия

$$y = y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

2). Подставляем первое условие $y = 0$ в уравнение (3.8)

$$\begin{cases} B + D = 0; \\ A \sin nl + B \cos nl + Cl + D = 0. \end{cases}$$

Для использования второго условия $y'' = 0$, возьмем вторую производную по x от (3.8)

$$y'' = -n^2(A \sin nx + B \cos nx).$$

Тогда после подстановки граничных условий получим:

$$\begin{cases} -Bn^2 = 0; \\ -n^2(A \sin nl + B \cos nl) = 0. \end{cases}$$

3). Решаем систему из четырех уравнений и определяем произвольные постоянные

$$B = C = D = 0;$$

$$A \sin nl = 0.$$

При деформированной форме равновесия $A \neq 0$, поэтому

$$\sin(nl) = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.9) получаем:

$$nl = k\pi; \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \infty); \quad (3.10)$$

$$n^2 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}; \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

При $k = 0$, имеем исходную (недеформированную) форму равновесия, поэтому это значение « k » можно исключить.

4). Определяем значение критической нагрузки, используя (3.6)

$$P_{кр} = k^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (k = 1, 2, \dots, \infty). \quad (3.11)$$

Практическое значение имеет наименьшая величина $P_{кр}$, т.е. при $k = 1$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (3.12)$$

Получили формулу Эйлера определения критической силы для стержня с шарнирным закреплением концов.

5). Выражаем формы деформации стержня. Из (3.8) после подстановки произвольных постоянных и значений «n» (3.10) получаем:

$$y = A \sin k \frac{\pi}{l} x; \quad (k = 1, 2, \dots, \infty). \quad (3.13)$$

Эта синусоида с числом полуволин по длине стержня, равным «k».

Эйлеровой силе соответствует одна полуволна синусоиды ($k = 1$) с формой деформации, показанной на рис.3.1.

Пример 3.2. Определить критическую силу для стержня с жестко заделанными концами (рис.3.2).

Решение.

1). Составляем граничные условия

$y = y' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$ и вычисляем первую производную по x из уравнения (3.8)

$$y' = n(A \cos nx - B \sin nx) + C.$$

Используя граничные условия, получим четыре уравнения для определения произвольных постоянных:

$$\begin{cases} B + D = 0; \\ An + C = 0; \\ A \sin nl + B \cos nl + Cl + D = 0; \\ n(A \cos nl - B \sin nl) + C = 0. \end{cases}$$

2). Решаем систему уравнений.

Подставляя $D = -B$ и $C = -An$ в последние два уравнения будем иметь:

$$\begin{cases} A(\sin nl - nl) + B(\cos nl - 1) = 0, \\ A(\cos nl - 1) - B \sin nl = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Система однородных уравнений (3.14) имеет два решения:

1). Нулевое, когда $A = B = C = 0$. Оно описывает исходную форму равновесия стержня и не рассматривается;

2). Ненулевое, когда $A \neq 0$ и $B \neq 0$. Условием существования такого решения является равенство нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} \sin nl - nl & \cos nl - 1 \\ \cos nl - 1 & -\sin nl \end{vmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Раскрывая определитель системы, получим уравнение устойчивости стержня

$$\sin \frac{nl}{2} \left(\sin \frac{nl}{2} - \frac{nl}{2} \cos \frac{nl}{2} \right) = 0. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) эквивалентно двум уравнениям. Из уравнения $\sin \frac{nl}{2} = 0$ получаем $nl = 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty$)

Наименьший ненулевой корень будет при $k = 1$, тогда $nl = 2\pi$.

Выражение в скобках представим в виде уравнений

$$\sin V - V \cos V = 0,$$

или

$$\frac{V}{\operatorname{tg} V} = 1; \left(V = \frac{nl}{2} \right).$$

Такие уравнения решаются с помощью специальных таблиц или графическим способом. При решении этого уравнения будем иметь $V = 4,493$. Тогда $nl = 8,986$.

3). Определяем критическую нагрузку. Наименьший корень уравнений (3.16) будет $nl = 2\pi$, а соответствующее значение критической силы по (3.6) равно

$$P_{\text{кр}} = \frac{4\pi^2}{l^2} EI. \quad (3.17)$$

Пример 3.3. Определить критическую силу для стержня с одним зашпеленным и другим шарнирным концами (рис.3.3).

Решение. Для определения $P_{\text{кр}}$ используем дифференциальное уравнение (3.4):

$$y'' = -\frac{M}{EI}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении на расстоянии x от начала координат будет равен:

$$M = Py + Q(1 - x).$$

Подставим его в уравнение (3.4):

$$y'' = -\frac{P}{EI}y - \frac{Q}{EI}(1-x),$$

или с учетом (3.6):

$$y'' + n^2y = \frac{Q}{EI}(x-1). \quad (3.18)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $y = y_0 + y_ч$,

где y_0 – общее решение однородного уравнения;

$y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = A\sin nx + B\cos nx.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме $y_ч = c(x-1)$.

Подставляя решение в исходное уравнение (3.18) получим

$$y_ч'' = 0;$$

$$\frac{P}{EI}c(x-1) = \frac{Q}{EI}(x-1); c = \frac{Q}{P}.$$

Таким образом, общее решение уравнений (3.18)

$$y = A\sin nx + B\cos nx + \frac{Q}{P}(x-1). \quad (3.19)$$

Здесь: $A, B, \frac{Q}{P}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Граничные условия

$$y = y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad y = 0 \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (3.20)$$

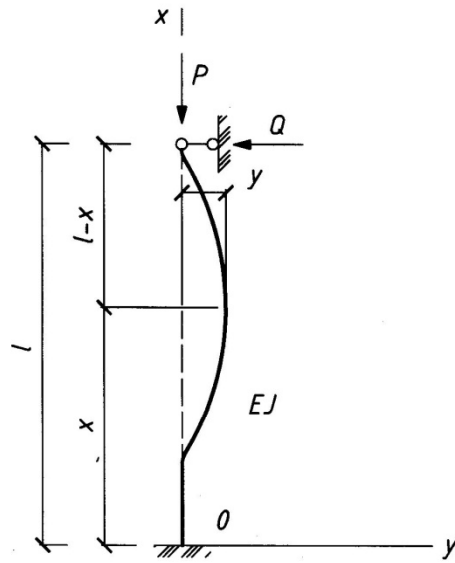


Рис. 3.3.

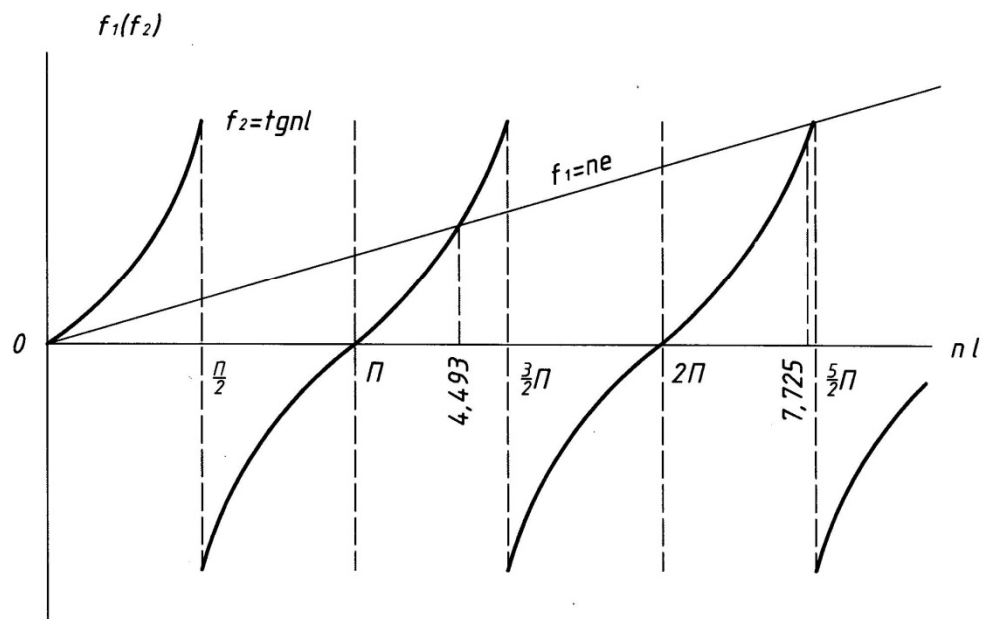


Рис. 3.4.

Подставляя решение в исходное уравнение (3.18) получим

$$y''_4 = 0;$$

$$\frac{P}{EI} c(x-1) = \frac{Q}{EI} (x-1); c = \frac{Q}{P}.$$

Таким образом, общее решение уравнений (3.18)

$$y = A \sin nx + B \cos nx + \frac{Q}{P} (x-1) \quad (3.19).$$

Здесь $A, B, \frac{Q}{P}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Граничные условия (см. 3.20):

$$y = y' = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad y = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Подставляя (3.20) в (3.19) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} B - \frac{Q}{P} 1 = 0; \\ An + \frac{Q}{P} = 0; \\ A \sin nl + B \cos nl = 0. \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных и приравняем его к нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ n & 0 & 1 \\ \sin nl & \cos nl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение устойчивости:

$$\sin nl - nl \cos nl = 0,$$

$$\text{или: } \operatorname{tg} nl = nl.$$

Решая графически, как показано на рис.3.4, определяем наименьший корень уравнения $nl = 4,493$. После подстановки этой величины в (3.6) получаем значение критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{20,19}{l^2} EI. \quad (3.21)$$

3.2. Определение критической нагрузки для однопролетных стержней энергетическим методом

Вычислим критическую нагрузку для стержня (рис.3.5), используя энергетический признак безразличного равновесия (1.4) $\delta V = \delta A$.

Приращение потенциальной энергии деформации

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

Учитывая, что $M = -EJy''$, получим:

$$\delta V = \frac{1}{2} EI \int_0^l (y'')^2 dx.$$

Работа внешних сил равна

$$\delta A = P \Delta.$$

Определим сближение концов стержня:

$$\Delta = \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l (1 - \cos\varphi) ds = \int_0^l \frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi} dx = \int_0^l \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} dx.$$

Учитывая, что рассматриваются малые деформации системы, полагаем $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2} \approx \frac{y'}{2}$, $\cos\varphi \approx 1$.

Тогда $\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx$

$$\delta A = \frac{1}{2} P \int_0^l (y')^2 dx.$$

Используя энергетический критерий безразличного равновесия, будем иметь

$$\frac{1}{2} EI \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{1}{2} P \int_0^l (y')^2 dx,$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} EI. \quad (3.22)$$

Это общая формула Рэлея, по которой определяют критическую силу для однопролетного стержня энергетическим методом.

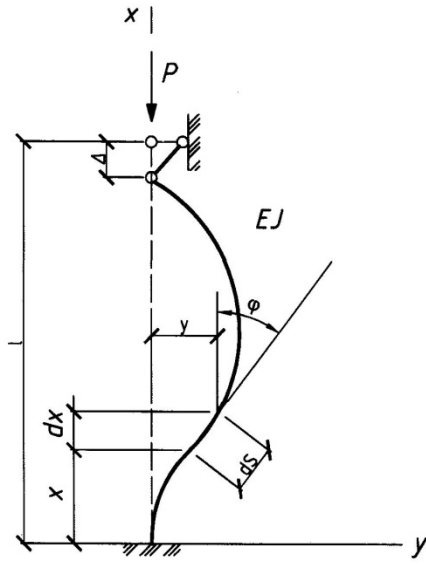


Рис. 3.5.

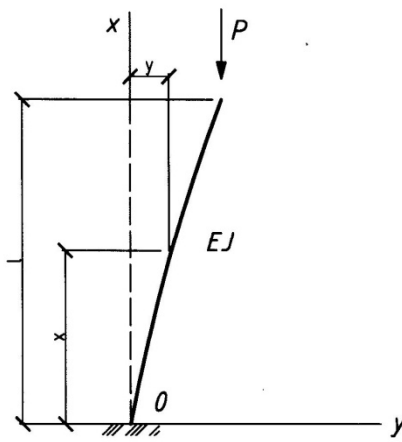


Рис. 3.6.

При использовании формулы Рэлея необходимо знать уравнение формы деформации стержня $y(x)$ в отклоненном состоянии равновесия. Обычно, функцию $y(x)$ подбирают исходя из граничных условий. В общем случае формула Рэлея является приближенной.

Пример 3.4. Определить критическую силу для стержня, показанного на рис.3.6 по формуле Рэлея.

Решение.

1). Принимаем форму деформации стержня при потере устойчивости в виде $y = a \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} x\right)$.

Это выражение удовлетворяет граничным условиям:

$$y = y' = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = l.$$

2), Вычислим производные от $y(x)$:

$$y' = a \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}; \quad y'' = a \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

Учитывая, что $\int_0^1 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \int_0^1 \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{1}{2}$,

$$\text{получим: } \int_0^1 (y'')^2 dx = a^2 \frac{\pi^4}{16l^4};$$

$$\int_0^1 \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = a^2 \frac{\pi^4 l}{2 \cdot 16l^4};$$

$$\int_0^1 (y')^2 dx = a^2 \frac{\pi^2}{4l^2}; \quad \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = a^2 \frac{\pi^2 l}{4 \cdot 1^2 \cdot 2}.$$

3). Определяем значение критической силы, согласно (3.22)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2}{4l^2} EI. \quad (3.23)$$

Получено точное значение критической силы. Это показывает, что выражение формы деформации, принятое в решении, также является точным.

В более сложных случаях приходится решать задачу о форме деформации, удовлетворяющей условиям закрепления концов стержня. Обычно форма деформации задается рядом

$$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i} = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_n x^{2n}, \quad (3.24)$$

где коэффициенты a_i определяются из граничных условий.

3.3. Понятие о приведенной длине стержня

Рассмотрим однопролетный стержень при различных условиях закрепления его концов (рис.3.7). Сопоставление значений критических сил и форм деформации при потере устойчивости приводит к следующему важному выводу. Если ввести понятие "приведенная длина стержня", то для всех случаев закрепления концов можно использовать одну общую формулу Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}, \quad (3.25)$$

где l_0 – условная приведенная длина однопролетного стержня, критическая сила которого при шарнирном закреплении его концов такая же, как для заданного стержня.

$$l_0 = \mu l. \quad (3.26)$$

Здесь μ – коэффициент приведения, значения которого указаны на рис.3.7.

Величина l_0 представляет собой базу полуволны синусоиды - кривой, определяющей точную форму деформации стержня с шарнирными закреплениями концов. Так, например, консольный стержень может рассматриваться как половина симметричного стержня с шарнирным закреплением концов.

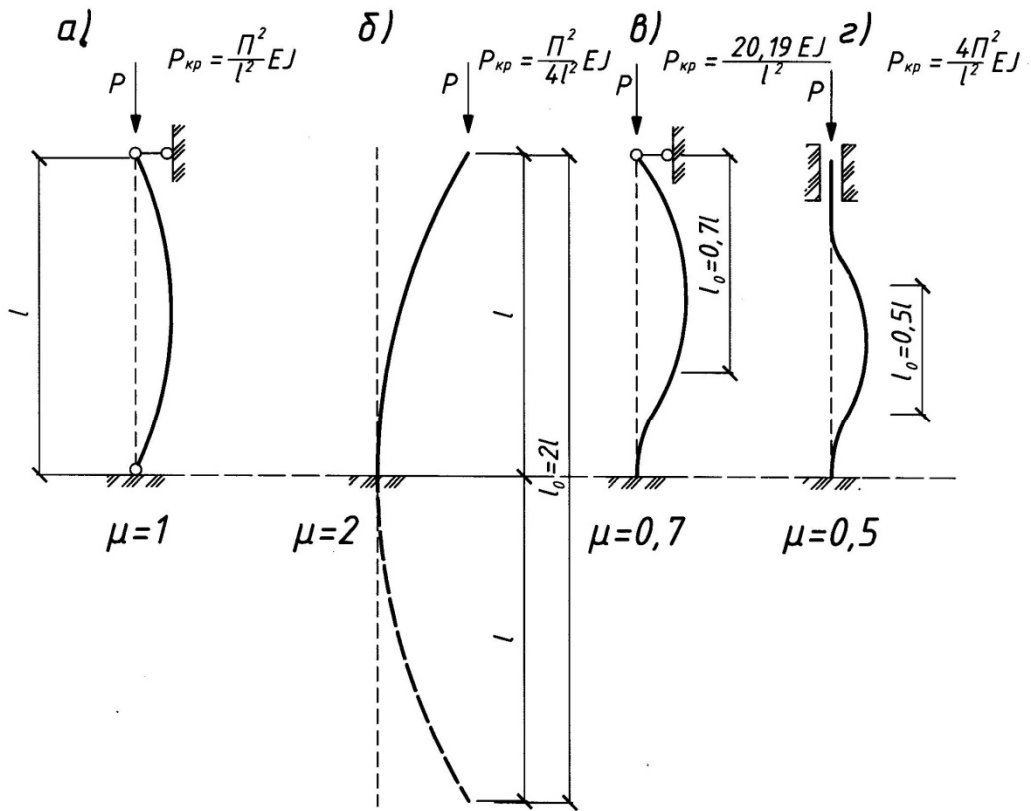


Рис. 3.7.

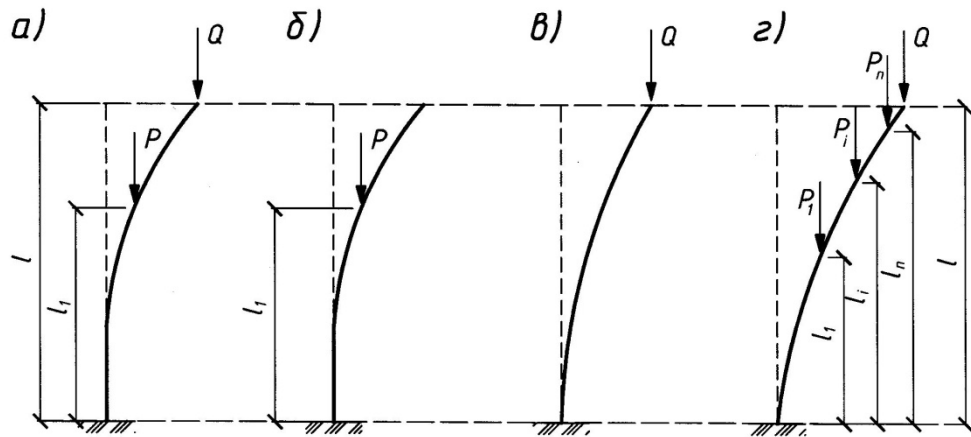


Рис. 3.8.

3.4. Определение критической нагрузки для стержня с сосредоточенными и распределенными нагрузками по его длине

При действии на однопролетный стержень нескольких сил определяют критический параметр нагрузки $\beta_{кр}$. Это число, на которое нужно умножить заданную нагрузку, чтобы она стала критической. Критический параметр характеризует степень надежности системы при расчете на устойчивость. Устойчивое равновесие системы соответствует значениям $\beta_{кр} > 1$.

Для исследования устойчивости консольных стержней постоянного сечения при большом числе сил, действующих по его длине, можно использовать приближенный метод проф. А.П. Коробова.

Рассмотрим два случая загрузки стержня (рис.3.8). В первом случае (рис.3.8,б) критическая сила будет равна:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4l_1^2}.$$

Во втором случае (рис.3.8,в):

$$Q_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Очевидно, что

$$Q_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \cdot \frac{l_1^2}{l_1^2} = P_{кр} \left(\frac{l_1}{l}\right)^2. \quad (3.27)$$

Таким образом, приходим к выводу, что если считать оба случая равноустойчивыми, то критическая сила, приложенная на конце стержня, меньше критической силы, приложенной на расстоянии l_1 на величину $\left(\frac{l_1}{l}\right)^2$ и силу P можно перенести на конец стержня, уменьшая ее в $\left(\frac{l_1}{l}\right)^2$ раз. Распространяя это правило на случай действия системы сил (рис.3.8.), можно записать:

$$Q_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \beta_{\text{кр}} \sum_{i=1}^n P_{\text{кр}} \cdot \left(\frac{l_i}{l}\right)^2.$$

Из этого выражения определяем критический параметр

$$\beta_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \cdot \sum_{i=1}^n P_{\text{кр}} \left(\frac{l_i}{l}\right)^2}. \quad (3.28)$$

Метод А.П. Коробова является приближенным. Критические нагрузки, определенные этим методом, получаются меньше, чем при решении точными методами. Следовательно, расчет методом А.П. Коробова обеспечивает дополнительный запас надежности системы.

Пример 3.5. Определить критическую нагрузку для консольного стержня (рис.3.9), при $P_2 = 3P_1$.

Решение.

1) Определяем критический параметр:

$$\beta_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 [P_1 + P_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2]} = \frac{\pi^2 EI}{7l^2 P_1} = \frac{1,41 EI}{l^2 P_1}.$$

2) Определяем критическую нагрузку:

$$P_1^{\text{кр}} = \beta_{\text{кр}} P_1 = \frac{1,41}{l^2} EI;$$

$$P_2^{\text{кр}} = \beta_{\text{кр}} P_2 = \frac{4,23}{l^2} EI.$$

Погрешность составляет 7,7%. Точное решение:

$$P_1^{\text{кр}} = \frac{1,528}{l^2} EI.$$

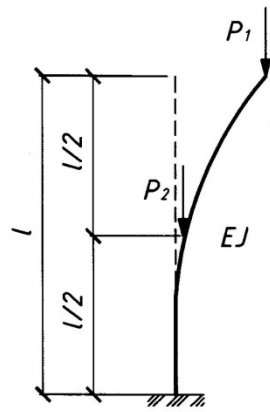


Рис. 3.9.

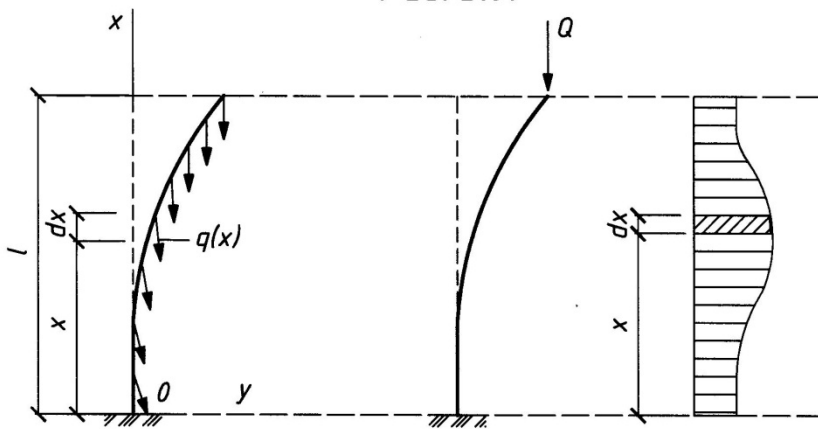


Рис. 3.10.

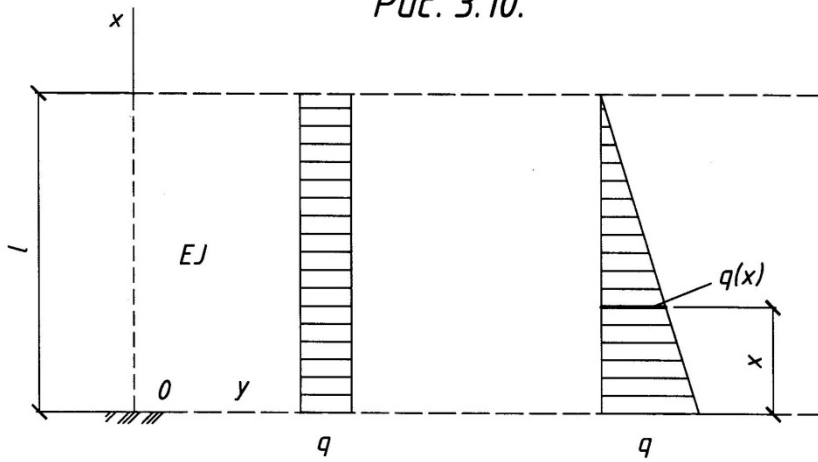


Рис. 3.11.

Метод проф. А.П. Коробова можно использовать также и для расчета стержней с распределённой по его длине нагрузкой $q(x)$

Рассмотрим консольный стержень с распределенной по его длине нагрузкой (рис.3.10).

Выделим бесконечно малый элемент стержня длиной d_x . Элементарная сила, действующая на этот участок после приведения к концу стержня по (3.27) будет:

$$dQ_{KP} = \left(\frac{x}{l}\right)^2 q(x) dx.$$

Интегрируя по длине стержня, получим:

$$Q_{KP} = \frac{1}{l^2} \int_0^l x^2 q(x) dx = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Расчетная формула для определения критической распределенной по длине стержня сжимающей нагрузки будет иметь вид:

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \int_0^l x^2 q(x) dx. \quad (3.29)$$

Пример 3.6. Определить критическую нагрузку для консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной сжимающей нагрузкой $q(x) = q$ и от распределенной нагрузки, изменяющейся по закону $q(x) = q(1 - \frac{x}{l})$ (треугольная нагрузка).

Решение.

1) При равномерно распределенной нагрузке $q(x) = q$ (рис. 3. 11, а):

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2} = q \int_0^l x^2 dx = \frac{ql^3}{3};$$

$$(ql)_{KP} = \frac{3 \pi^2 EI}{4 l^2} = \frac{7,404}{l^2} EI.$$

2) При нагрузке, распределенной по треугольнику

$$q(x) = q \left(1 - \frac{x}{l}\right);$$

$$\frac{\pi^2 EI}{4} = q \int_0^1 x^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{ql^3}{12};$$

$$(ql/2)_{\text{кр}} = \frac{3 \pi^2 EI}{2 l^2} = \frac{14,808}{l^2} EI.$$

3.5. Устойчивость статически определимых систем

Статически определимые системы содержат, как известно, только безусловно необходимые связи. Поэтому достижение критического состояния таких систем связано с потерей устойчивости одного из стержней. Под действием внешних нагрузок элементы стержневой системы испытывают либо деформации изгиба, либо деформации центрального растяжения или сжатия. Будем рассматривать потерю устойчивости системы, связанную с достижением критического состояния ее центрально сжатых стержней. При возникновении в одном из сжатых стержней системы усилия, соответствующего критическому значению, он достигает состояния безразличного равновесия и с увеличением нагрузки теряет устойчивость. Вслед за потерей устойчивости одного стержня вся система теряет устойчивость. Поэтому критическая нагрузка статически определимой системы может быть вычислена из условия достижения стержня с наибольшим сжимающим усилием критического состояния, то есть

$$N_{i,\text{сж}} = N_{i,\text{кр}}, \quad (3.30)$$

где: $N_{i,\text{сж}}$ - продольные силы в стержнях от действующих нагрузок (P, q, M);

$N_{i,\text{кр}}$ - критические продольные усилия в сжатых стержнях, определяемые согласно (3.25)

$$N_{i,\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_i}{l_{i,0}^2}. \quad (3.31)$$

При выявлении сжатых стержней необходимо знать не только геометрические размеры и жесткостные показатели, но и условия закрепления в опорах и ха-

рактен сопряжения с другими стержнями. Это учитывается коэффициентом приведения μ (рис.3.7) и приведенной длиной стержня l_0 (3.26). Наименьшая критическая нагрузка ($P_{i,КР}$; $q_{i,КР}$; $M_{i,КР}$), полученная из (3.30), будет являться критической нагрузкой для всей системы.

Пример 3.7. Определить критическую нагрузку $M_{КР}$ для рамы (рис.3.12).

Решение.

Сжатым элементом рамы является стойка 1-2. Реакция в шарнирной опоре 2 равна сжимающему усилию $N_{1,2,сж}$ в стержне 1-2.

Из уравнения равновесия $\sum M_3 = 0$ определяем

$$R_2 = N_{1,2,сж} = \frac{M}{l_1}.$$

Стойка 1-2 является упругим стержнем с одним свободным концом, т.к. шарнирно подвижная опора 3 допускает смещение конца стойки в горизонтальном направлении. Расчетная схема показана на рис.3.12.

По формуле (3.31) определяем $N_{(1-2),КР}$

$$N_{1-2,КР} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2h)^2},$$

где $l_0 = 2h$.

По формуле (3.30) определяем $M_{КР}$

$$N_{12,сж} = N_{12,КР},$$

или

$$\frac{M}{l_1} = \frac{\pi^2 EI}{4h^2},$$

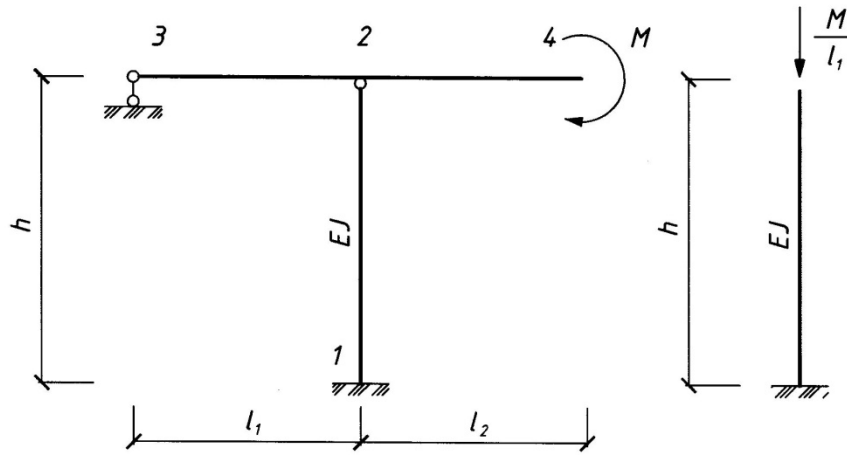


Рис. 3.12.

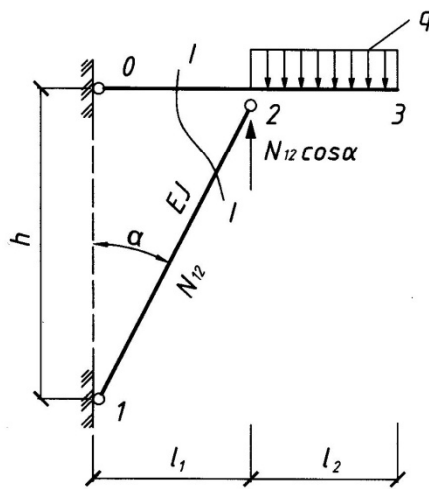


Рис. 3.13.

откуда

$$M_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 l_1 EI}{4h^2}.$$

Пример 3.8. Определить $q_{\text{кр}}$ для рамы (рис.3.13).

Решение.

Сжатым элементом является подкос 1-2. Сжимающее усилие в нем вычислим, проводя сечение 1-1 и рассматривая равновесие правой отсеченной части. Из уравнения равновесия $\sum M_0 = 0$ имеем:

$$\sum M_0 = ql_2(l_1 + 0.5l_2) - N_{1,2} \cos \alpha l_1 = 0$$

$$N_{1,2,\text{сж}} = ql_2(l_1 + 0.5l_2)/l_1 \cos \alpha$$

Стержень 1-2 представляет собой упругий стержень с шарнирами по концам, для которого:

$$l_0 = l_{1,2} = \sqrt{l_1^2 + h^2}.$$

Определим критическую нагрузку по (3.31):

$$N_{1,2,\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2 + h^2}.$$

Из условия (3.30) определим $q_{\text{кр}}$:

$$N_{12,\text{сж}} = N_{12,\text{кр}},$$

или

$$\frac{\pi^2 EI}{l_1^2 + h^2} = \frac{ql_2(l_1 + 0.5l_2)}{l_1 \cos \alpha},$$

откуда

$$q_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI l_1 \cos \alpha}{(l_1^2 + h^2) l_2 (l_1 + 0.5l_2)}.$$

При достижении нагрузкой q значения $q_{кр}$, стержень 1-2 переходит в критическое состояние и при дальнейшем увеличении нагрузки теряет устойчивость.

Пример 3.9. Определить $P_{кр}$ для фермы (рис.3.14) при следующих данных:

$$\alpha=36,87^\circ, \sin\alpha=0,60, \cos\alpha=0,80,$$

$$\beta=56,31^\circ, \sin\beta=0,83, \cos\beta=0,55.$$

Решение. Сжатыми элементами системы является стержни 1-2 и 2-3. Определим опорные реакции:

$$\sum M_3 = 0; R_1 = P/3,$$

$$\sum M_1 = 0; R_1 = 2P/3.$$

Вычислим продольные сжимающие усилия в стержнях 1-2 и 2-3:

$$\sum y = 0, \quad N_{12,сж} = \frac{P}{3[\cos(90^\circ - \alpha)]} = \frac{P}{3 \sin \alpha},$$

$$\sum x = 0, \quad N_{23,сж} = \frac{2P}{3[\cos(90^\circ - \beta)]} = \frac{2P}{3 \sin \beta}.$$

Оба стержня шарнирно закреплены по концам, поэтому критические продольные усилия для них вычислим по формуле

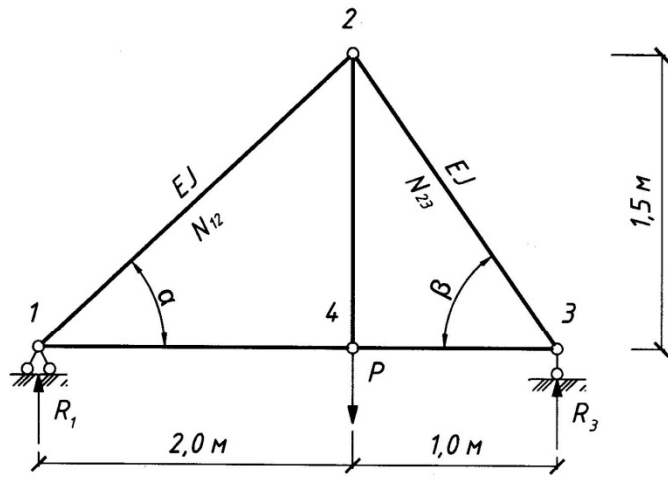
$$N_{i,кр} = \frac{\pi^2 EI_i}{l_i^2}.$$

Для стержня 1-2:

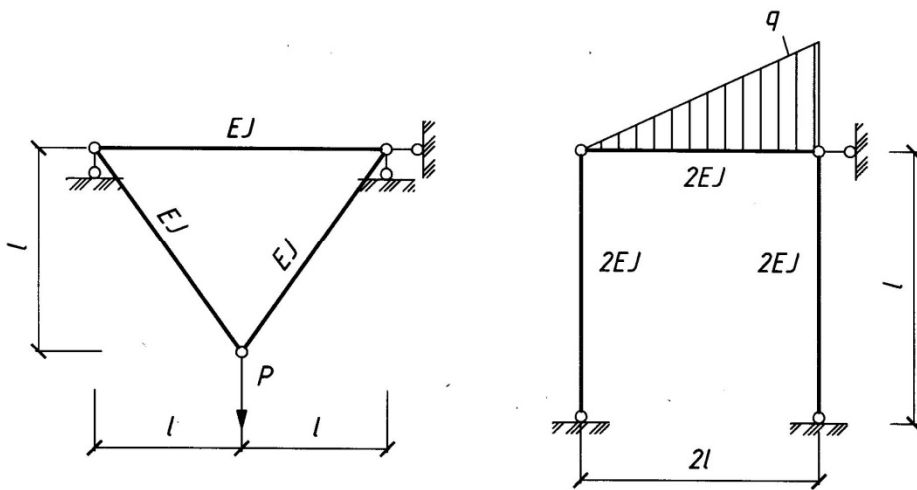
$$l_{1-2} = \frac{2}{\cos \alpha}; N_{i,кр} = \frac{\pi^2 2EI}{4} \cos^2 \alpha = 0,5 \pi^2 EI \cos^2 \alpha.$$

Для стержня 2-3:

$$l_{1-2} = \frac{1}{\cos \beta}; N_{i,кр} = \pi^2 EI \cos^2 \beta.$$



Puc. 3.14.



Puc. 3.15.

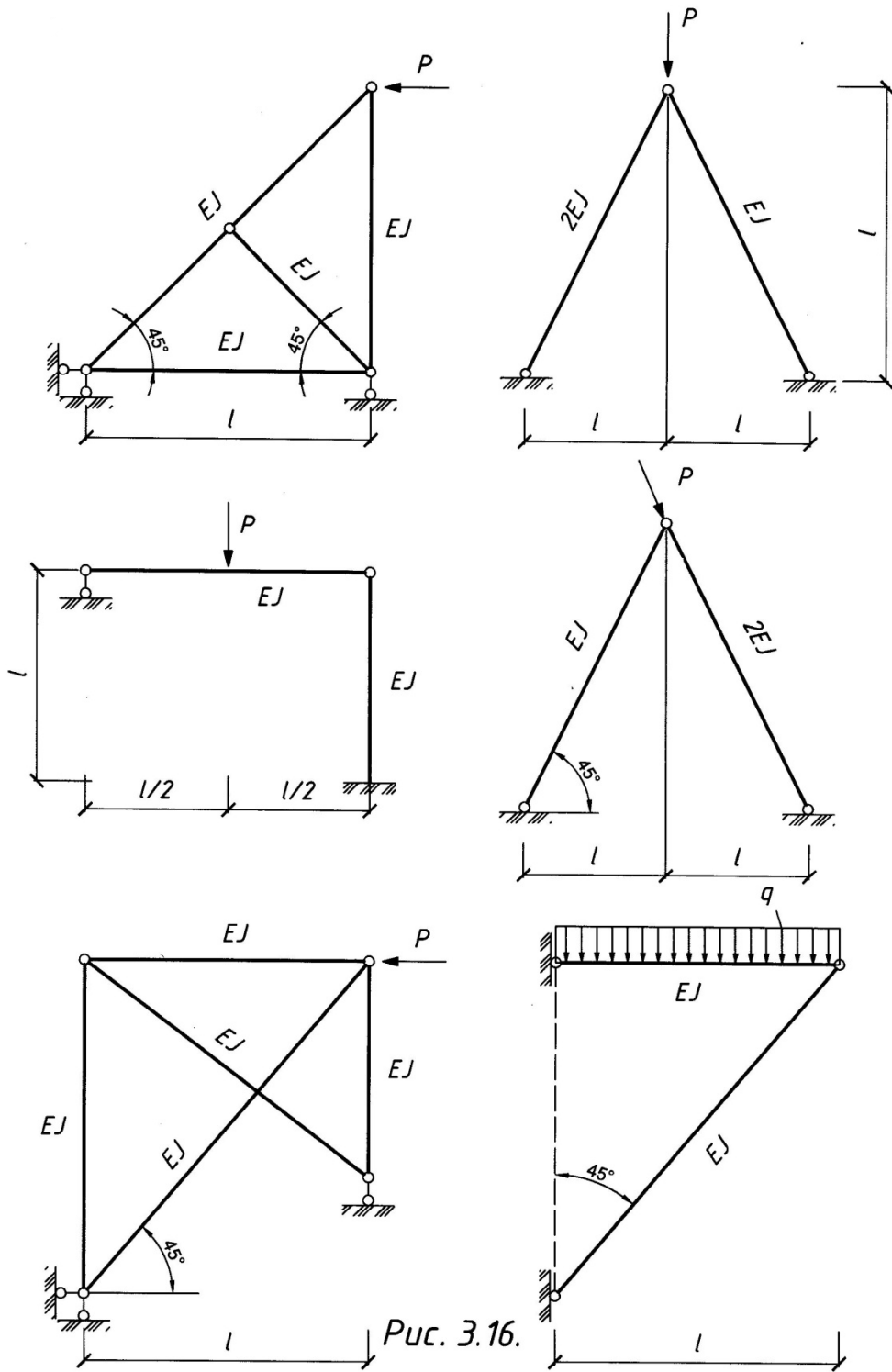


Рис. 3.16.

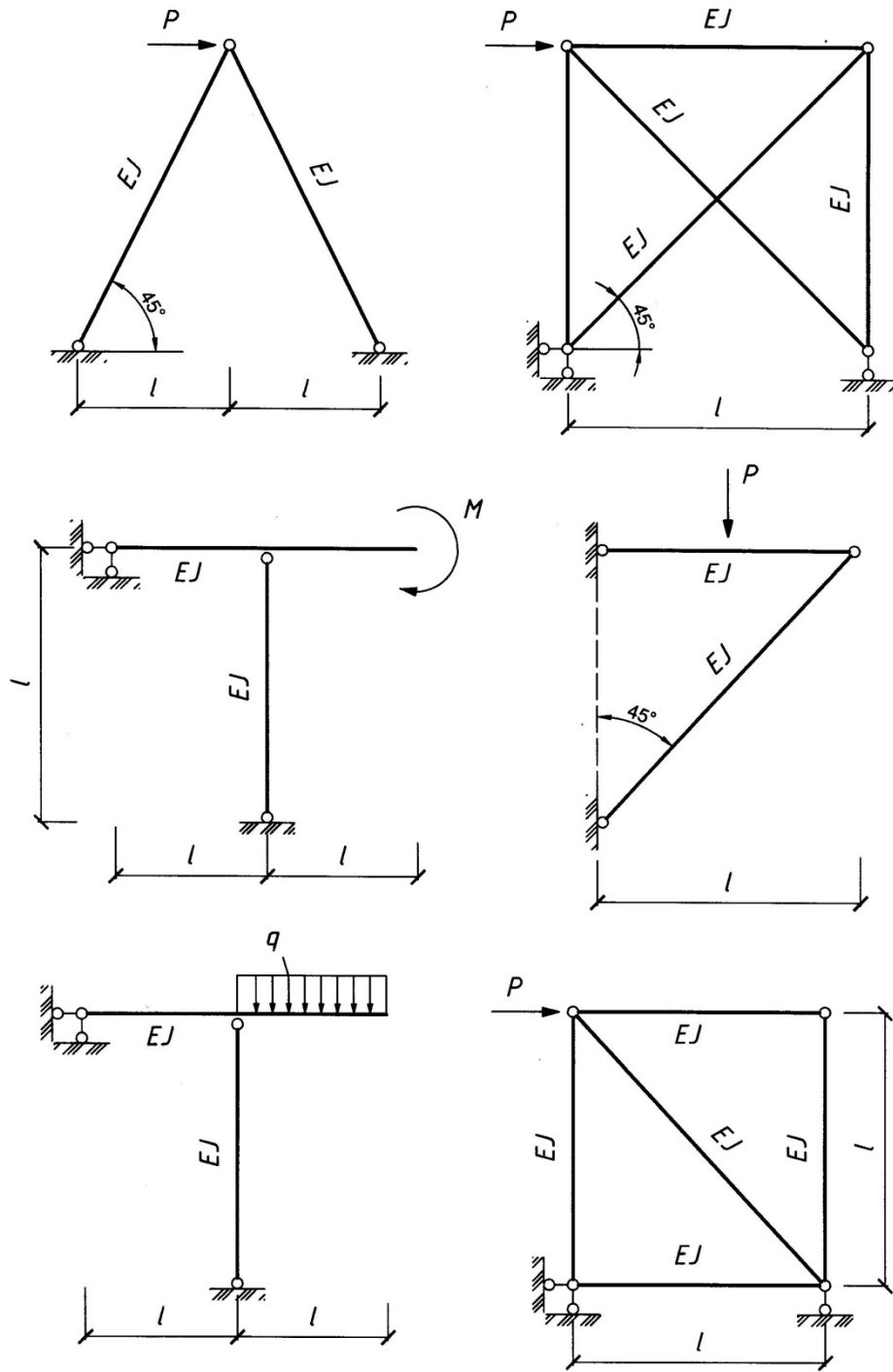


Рис. 3.17.

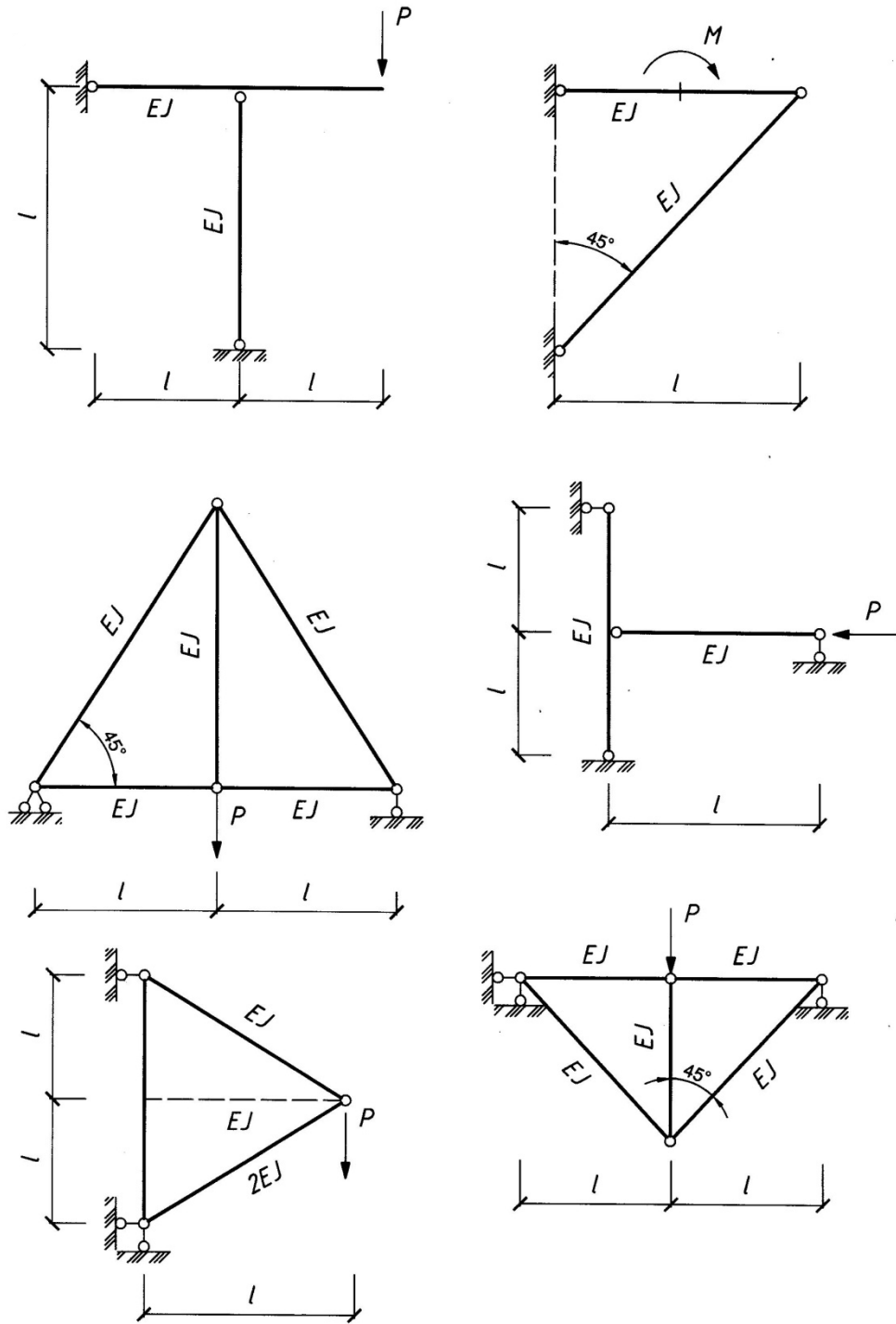


Рис. 3.18.

Из условия (3.29) найдем критические значения P :

$$N_{12,сж} = N_{12,кР}; P_{12,кР} = 1.5\pi^2 EI \cos^2 \alpha \sin \alpha = 0.576\pi^2 EI ,$$

$$N_{23,сж} = N_{23,кР}; P_{23,кР} = 1.5\pi^2 EI \cos^2 \beta \sin \beta = 0.377\pi^2 EI .$$

Расчетным является меньшее значение критической нагрузки $P_{23,кР} = 0.377\pi^2 EI$. При достижении нагрузки значения $P_{23,кР}$, устойчивость теряет стержень 2-3 и вся ферма.

Пример 3.10. Определить критическую нагрузку для систем (рис.3.15 – 3.18) самостоятельно.

4. Устойчивость статически неопределимых систем

Для исследования устойчивости неразрезных балок и рам необходимо знать углы поворота и концевые усилия сжато-изогнутого стержня с различным опиранием концов.

4.1. Усилия и деформации сжато-изогнутого стержня

Рассмотрим стержень (рис.4.1,а) длиной ℓ постоянной жесткости поперечного сечения EI , сжатый силой N , при отсутствии поперечной нагрузки, в состоянии безразличного равновесия. В момент потери устойчивости стержня его левый конец повернулся на угол φ_0 , в начальном сечении возникли момент M_0 и поперечная сила Q_0 . Кроме этого, произошло взаимное смещение опор на величину y_0 . Начальные параметры y_0, φ_0, M_0, Q_0 определяют деформации и усилия стержня в начале координат. Рассмотрим равновесие стержня в деформированном состоянии при малых отклонениях от исходного прямолинейного состояния равновесия. Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (3.4):

$$y'' = \frac{-M(x)}{EI} ,$$

где $M(x) = M_0 + Q_0x + N(y - y_0)$ – изгибающий момент в произвольном сечении. Тогда получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + n^2y = -\frac{Q_0}{EI}x - \frac{M_0}{EI} + \frac{N}{EI}y_0,$$

где $n^2 = N/EI$. Решение этого уравнения

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 \frac{\sin nx}{n} - \frac{M_0}{N} (1 - \cos nx) - \frac{Q_0}{nN} (nx - \sin nx) \quad (4.1)$$

представляет собой уравнение оси сжато-изогнутого стержня.

Рассмотрим три типа сжато-изогнутых стержней: стержень с шарнирным закреплением концов; стержень с обоими защемленными концами; стержень с одним защемленным и другим шарнирно опертым концами.

4.1.1. Стержень с шарнирным закреплением концов

Начальные параметры, т.е. усилия и деформации стержня с шарнирным закреплением концов (рис.4.1.б) в сечении, где принято начало координат, будут:

$$y_0 = 0; \quad \varphi_0 = \varphi_a; \quad M_0 = M_a; \quad Q_0 = Q_a = \frac{M_b - M_a}{l}.$$

Подставляя в (4.1) значения начальных параметров и учитывая, что при $x = l$, $y = 0$, получим:

$$\varphi_0 l \frac{\sin V}{V} - \frac{M_a}{N} (1 - \cos V) - \frac{M_b - M_a}{VN} (V - \sin V) = 0,$$

где: $V = nl = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$. (4.2)

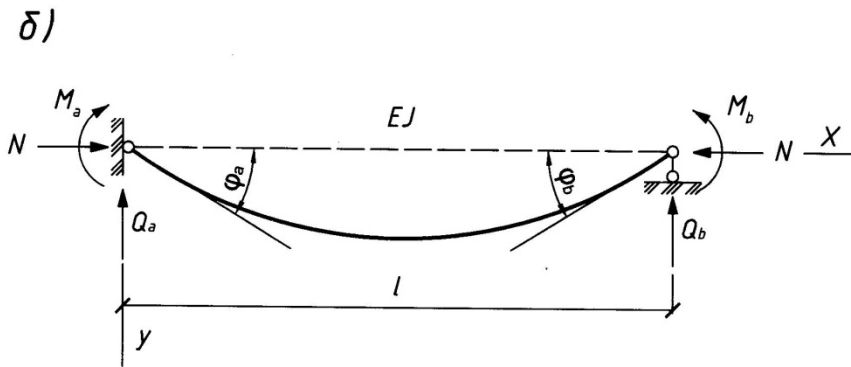
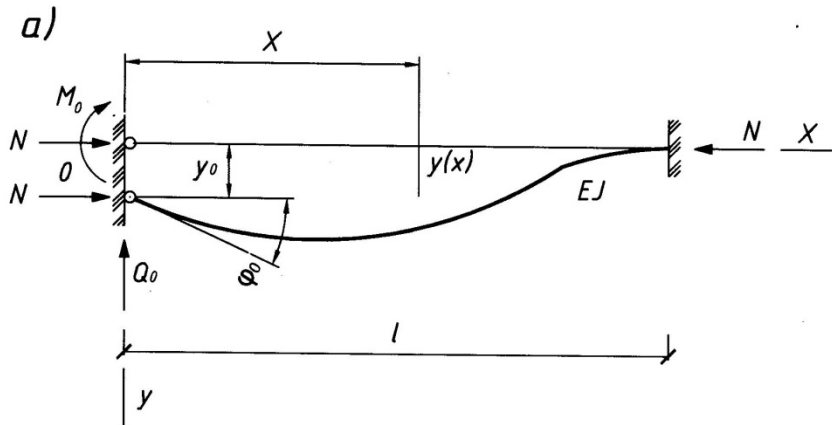


Рис. 4.1.

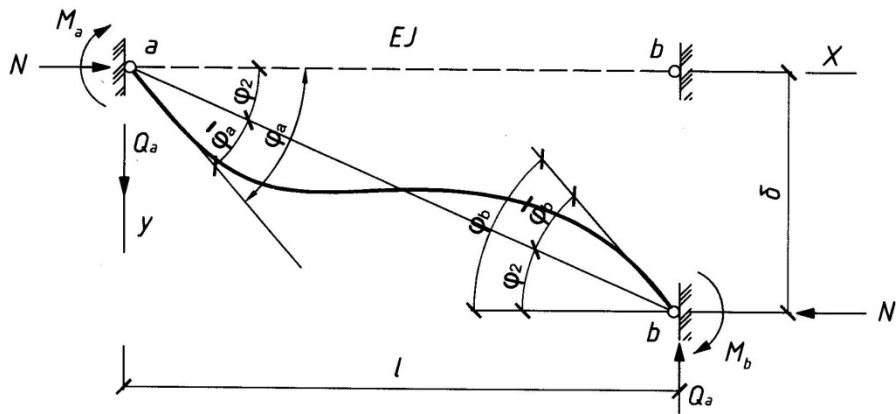


Рис. 4.2.

Из последнего выражения будем иметь:

$$\varphi_a = \frac{M_a}{Nl} \left(1 - \frac{V}{\operatorname{tg} V}\right) + \frac{M_b}{Nl} \left(\frac{V}{\sin V} - 1\right); \quad (4.3)$$

Учитывая, что $Nl = \frac{V^2 EI}{1}$ и вводя обозначения

$$\varphi(V) = \frac{6}{V} \left(\frac{1}{\sin V} - \frac{1}{V}\right); \quad \Psi(V) = \frac{3}{V} \left(\frac{1}{V} - \operatorname{ctg} V\right), \quad (4.4)$$

получим выражение для определения угла поворота левого конца стержня:

$$\varphi_a = \frac{M_a}{3EI} l\Psi(V) + \frac{M_b}{6EI} l\varphi(V). \quad (4.5)$$

Выражение для определения угла поворота правого конца стержня будет:

$$\varphi_b = \frac{M_b}{3EI} l\Psi(V) + \frac{M_a}{6EI} l\varphi(V). \quad (4.6)$$

Значения функций $\varphi(V)$ и $\Psi(V)$ (4.4), вычисленные С.П. Тимошенко, приведены в таблице 4.1.

При отсутствии нагрузки в пролете изгибающие моменты в таких стержнях не возникают. Однако, при относительном сдвиге концов на величину δ появляется поперечная сила, определяемая из условия равновесия стержня

$$Q_a = Q_b = Q = -\frac{N\delta}{l} = -\frac{i}{l^2} V^2 \delta. \quad (4.7)$$

4.1.2. Стержень с обоими заземленными концами

Такой стержень удобно рассматривать, заменяя его эквивалентным стержнем с шарнирным опиранием концов (рис.4.2), загруженным опорными моментами M_a и M_b , поперечными силами Q_a и Q_b и продольной силой N . Деформации концов стержня определяются углами поворота φ_a и φ_b , а также относительным сдвигом δ . Из рис.4.2 видно, что

$$\varphi_a = \overline{\varphi_a} + \varphi_2; \quad \varphi_b = \overline{\varphi_b} + \varphi_2, \quad (4.8)$$

где: $\varphi_2 = \frac{\delta}{l}$ - составляющая угла поворота, вызываемая сдвигом концов стержня;

φ_a и φ_b - углы поворота вследствие изгиба стержня, которые с учетом знаков опорных моментов согласно (4.5) и (4.6) будут равны:

$$\overline{\varphi_a} = \frac{M_a l}{3EY} \cdot \frac{3}{V} \left(\frac{1}{V} - \text{ctg}V \right) - \frac{M_b l}{6EY} \cdot \frac{6}{V} \left(\frac{1}{\sin V} - \frac{1}{V} \right),$$

$$\overline{\varphi_b} = \frac{M_b l}{3EY} \cdot \frac{3}{V} \left(\frac{1}{V} - \text{ctg}V \right) - \frac{M_a l}{6EY} \cdot \frac{6}{V} \left(\frac{1}{\sin V} - \frac{1}{V} \right).$$

Подставляя в (4.8), получим:

$$\varphi_a = \frac{M_a l}{3EI} \cdot \frac{3}{V} \left(\frac{1}{V} - \text{ctg}V \right) - \frac{M_b l}{6EI} \cdot \frac{6}{V} \left(\frac{1}{\sin V} - \frac{1}{V} \right) + \frac{\delta}{l},$$

$$\varphi_b = \frac{M_b l}{3EI} \cdot \frac{3}{V} \left(\frac{1}{V} - \text{ctg}V \right) - \frac{M_a l}{6EI} \cdot \frac{6}{V} \left(\frac{1}{\sin V} - \frac{1}{V} \right) + \frac{\delta}{l}.$$
(4.9)

Решая систему уравнений относительно концевых моментов и учитывая, что $i = \frac{EI}{l}$, получим:

$$M_a = 4i\varphi_2(V)\varphi_a + 2i\varphi_3(V)\varphi_b - 6\frac{i}{2}\varphi_4(V)\delta,$$

$$M_b = 2i\varphi_3(V)\varphi_a + 4i\varphi_2(V)\varphi_b - 6\frac{i}{2}\varphi_4(V)\delta,$$
(4.10)

где:

$$\varphi_2(V) = \frac{V(\text{tg}V - V)}{8\text{tg}V\left(\text{tg}\frac{V}{2} - \frac{V}{2}\right)},$$

$$\varphi_3(V) = \frac{V(V - \sin V)}{4\sin V\left(\text{tg}\frac{V}{2} - \frac{V}{2}\right)},$$

$$\varphi_4(V) = \frac{4\varphi_2(V) + 2\varphi_3(V)}{6} = \varphi_1\left(\frac{V}{2}\right).$$
(4.11)

Таблица 4.1. Численные значения функций С.П. Тимошенко

V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$	V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$
0	1.0000	1.0000	2.01	1.8130	1.4438
0.5	1.0300	1.0171	2.02	1.8270	1.4512
1.00	1.1304	1.0737	2.03	1.8413	1.4587
1.05	1.1455	1.0822	2.04	1.8558	1.4664
1.10	1.1617	1.0912	2.05	1.8706	1.4742
1.15	1.1792	1.1009	2.06	1.8858	1.4822
1.20	1.1979	1.1114	2.07	1.9012	1.4904
1.25	1.2180	1.1225	2.08	1.9168	1.4987
1.30	1.2396	1.134	2.09	1.9329	1.5070
1.35	1.2628	1.1473	2.10	1.9494	1.5158
1.40	1.2878	1.1610	2.11	1.9661	1.5846
1.45	1.3146	1.1757	2.12	1.9831	1.5336
1.50	1.3434	1.1915	2.13	2.0005	1.5427
1.55	1.3744	1.2084	2.14	2.0184	1.5521
1.60	1.4078	1.2266	2.15	2.0366	1.5616
1.65	1.4439	1.2462	2.16	2.0552	1.5713
1.70	1.4830	1.2673	2.17	2.0741	1.5813
1.75	1.5252	1.2901	2.18	2.0935	1.5914
1.80	1.5710	1.3147	2.19	2.1133	1.6018
1.85	1.6208	1.3414	2.20	2.1336	1.6124
1.90	1.6750	1.3704	2.21	2.1543	1.6233
1.95	1.7343	1.4020	2.22	2.1754	1.6343
2.00	1.7993	1.4365	2.23	2.1972	1.6457

Продолжение таблицы 4.1.

V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$	V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$
2.24	2.2194	1.6572	2.48	2.9624	2.0413
2.25	2.2421	1.6690	2.49	3.0056	2.0635
2.26	2.2654	1.6812	2.50	3.0502	2.0864
2.27	2.2891	1.6936	2.51	3.0963	2.1100
2.28	2.3135	1.7062	2.52	3.1438	2.1343
2.29	2.3384	1.7192	2.53	3.1931	2.1595
2.30	2.3641	1.7325	2.54	3.2437	2.1855
2.31	2.3902	1.7461	2.55	3.2963	2.2124
2.32	2.4171	1.760	2.56	3.3508	2.2402
2.33	2.4448	1.7744	2.57	3.4072	2.2690
2.34	2.4731	1.7891	2.58	3.4657	2.2988
2.35	2.5022	1.8041	2.59	3.5262	2.3297
2.36	2.5320	1.8195	2.60	3.5890	2.3618
2.37	2.5625	1.8354	2.61	3.6542	2.3950
2.38	2.5939	1.8516	2.62	3.7220	2.4295
2.39	2.6262	1.8683	2.63	3.7925	2.4654
2.40	2.6596	1.8854	2.64	3.8659	2.5027
2.41	2.6935	1.9031	2.65	3.9421	2.5415
2.42	2.7287	1.9212	2.66	4.0218	2.5819
2.43	2.7649	1.9398	2.67	4.1047	2.6241
2.44	2.8021	1.9589	2.68	4.1914	2.6680
2.45	2.8403	1.9786	2.69	4.2820	2.7140
2.46	2.8798	1.999	2.70	4.3766	2.7619
2.47	2.9204	2.019	2.71	4.4757	2.8121

Продолжение таблицы 4.1.

V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$	V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$
2,72	4,5795	2,8648	2,96	10,5393	5,8622
2,73	4,6885	2,9199	2,97	11,1510	6,1688
2,74	4,8029	2,9778	2,98	11,8386	6,5134
2,75	4,9233	3,0386	2,99	12,6171	6,9035
2,76	5,0499	3,1027	3,00	13,5057	7,3486
2,77	5,1835	3,1702	3,01	14,5295	7,8613
2,78	5,3245	8,2414	3,02	15,7219	8,4583
2,79	5,4736	8,3106	3,03	17,1282	9,1623
2,6:0	5,6315	3,3963	3,04	18,8116	10,0049
2,81	5,7990	3,4807	3,05	20,8629	11,0314
2,82	5,9770	3,5704	3,06	23,4176	12,3096
2,88	6,1664	3,6659	3,07	25,6860	13,9446
2,04	6,3685	3,7676	3,08	31,0160	16,1105
2,85	3,5845	3,8764	3,09	37,0244	19,1156
2,86	6,8160	3,9928	3,10	45,9234	26,5659
2,87	7,0646	4,1179	3,11	60,4566	30,8334
2,88	7,3322	4,2525	3,12	88,4522	44,8321
2,89	7,6212	4,3977	3,13	164,7487	82,9812
2,90	7,9343	4,5550	3,14	1199,16	600,190
2,91	8,2745	4,7259	3,15	-227,166	-112,974
2,92	8,6455	4,9121	3,16	-103,757	-51,2692
2,93	9,0516	5,1160	3,17	-67,2348	-33,0068
2,94	9,4982	5,3401	3,16	-49,7513	-24,2541
2,95	9,9915	5,5875	3,19	-39,600	-19,1176

Продолжение таблицы 4.1

V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$
3,20	-32,7063	-15,7398
3,21	-27,9276	-13,3495
3,22	-24,3683	-11,5688
3,23	-21,6142	-10,1909
3,24	-19,4202	-9,0929
3,25	-17,6312	-8,1975
3,26	-16,1447	-7,4532
3,27	-14,8899	-6,8248
3,28	-13,8166	-6,2872
3,29	-12,8881	-5,8220
3,30	-12,0770	-5,4154
3,40	-7,4248	-3,0787
8,50	-5,3769	-2,0433
8,60	-4,2292	-1,4572
3,70	-3,4990	-1,0787
3,80	-2,9961	-0,8128

V	$\varphi(V)$	$\Psi(V)$
3,90	-2,6314	-0,6147
4,00	-2,3570	-0,4603
4,10	-2,1454	-0,3355
4,20	-1,9792	-0,2317
4,30	-1,8475	-0,1430
4,40	-1,7429	-0,0652
4,50	-1,6603	0,0044
4,60	-1,5962	0,0682
4,80	-1,5152	0,1851
5,00	-1,4914	0,2975
5,25	-1,5482	0,4495
5,50	-1,7446	0,6470
5,75	-2,2344	0,9747
6,00	-3,7455	1,8015
6,25	-29,0867	14,5346
6,50	4,1490	-2,0242

Определяем поперечные силы:

$$Q_a = Q_b = Q = -\frac{1}{l}(M_a + M_b + N\delta) = -\frac{1}{l}\{[4i\varphi_2(V) + 2i\varphi_3(V)]\varphi_a + \\ + [2i\varphi_3(V) + 4i\varphi_2(V)]\varphi_b - [12\frac{i}{2}\varphi_4(V) - N]\delta\}.$$

Так как $N = \frac{v^2}{l}i$ и $\varphi_4(V) = \frac{4\varphi_2(V) + 2\varphi_3(V)}{6}$, получим

$$Q_a = Q_b = -6\frac{i}{2}\varphi_4(V)\varphi_a - 6\frac{i}{2}\varphi_4(V)\varphi_b + 12\frac{i}{l^2}\eta_2(V)\delta, \quad (4.12)$$

$$\text{где } \eta_2(V) = \varphi_4(V) - \frac{v^2}{12} = \frac{v^3}{24(\text{tg}\frac{v}{2} - \frac{v}{2})}. \quad (4.13)$$

4.1.3. Стержень с одним защемленным и другим шарнирно-опертым концами

Для рассматриваемого случая закрепления стержня по концам (рис.4.2), опорный момент M_b равен нулю. Полагая в (4.9) $M_b = 0$, получим

$$\varphi_a = \frac{M_a l}{3EI} \cdot \frac{3}{V} \left(\frac{1}{V} - \text{ctg}V \right) + \frac{\delta}{l}.$$

Отсюда

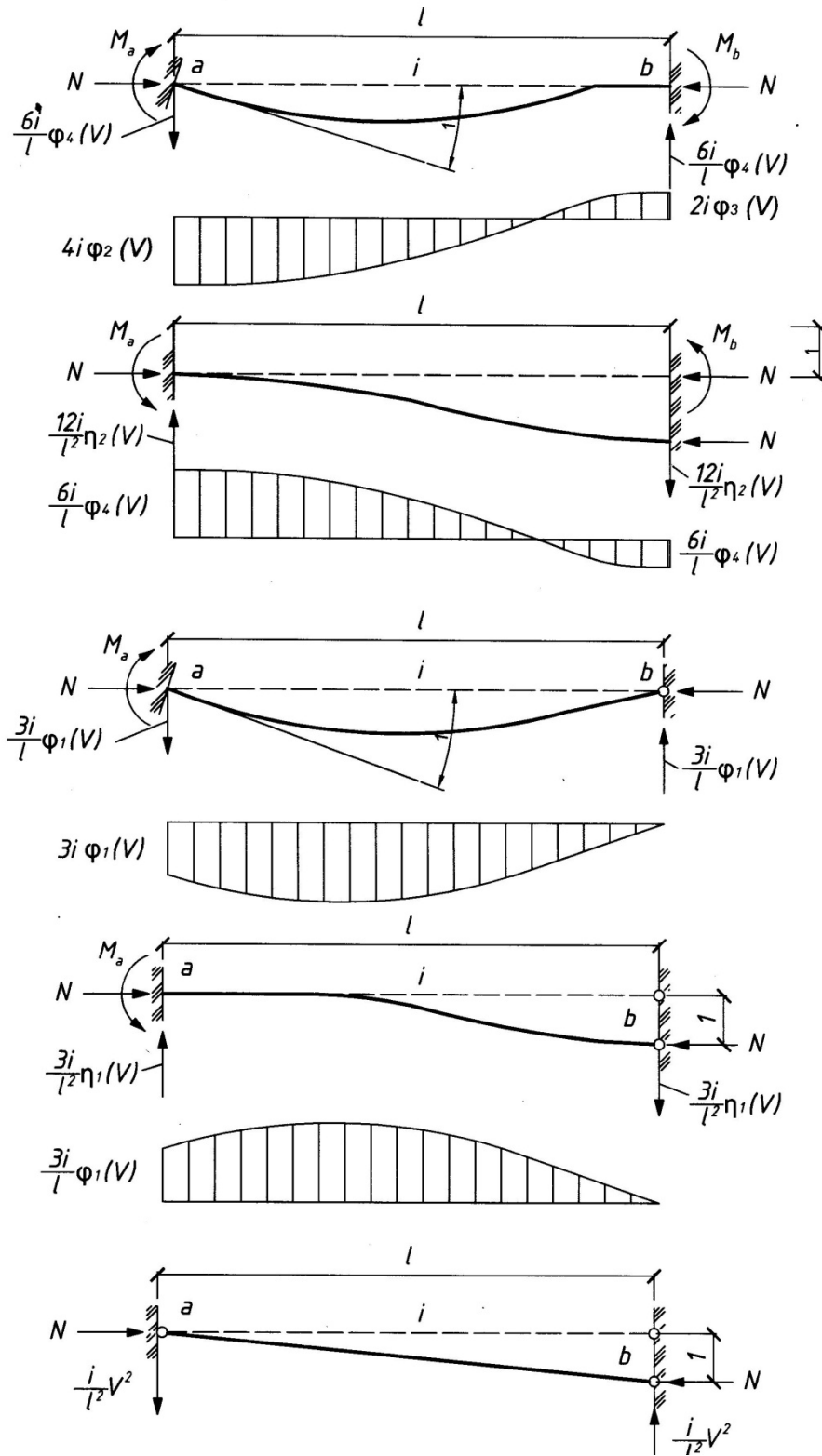
$$M_a = 3i\varphi_1(V)\varphi_a - 3\frac{i}{2}\varphi_1(V)\delta = 3i\varphi_1(V) \left(\varphi_a - \frac{\delta}{l} \right), \quad (4.14)$$

$$\text{где } \varphi_1(V) = \frac{v^2 \text{tg}V}{3(\text{tg}V - V)}. \quad (4.15)$$

Определим поперечные силы

$$Q_a = Q_b = Q = -\frac{1}{l}(M_a + N\delta) = -\frac{1}{l}\left\{3i\varphi_1(V)\varphi_a - \left[3\frac{i}{2}\varphi_1(V) - N\right]\delta\right\}.$$

Реакции сжато-изогнутых стержней от единичных перемещений



Так как $N = \frac{V^2}{1} i$, получим:

$$Q_a = Q_b = -3 \frac{i}{1} \varphi_1(V) \varphi_a + 3 \frac{i}{1^2} \eta_1(V) \delta, \quad (4.16)$$

где:
$$\eta_1(V) = \varphi_1(V) - \frac{V^2}{3} = \frac{V^3}{3(\operatorname{tg} V - V)}. \quad (4.17)$$

Выражения (4.7), (4.10), (4.12), (4.14) и (4.16) позволяют вычислить концевые усилия (реакции) в стержнях при единичных перемещениях его концов, которые приведены в таблице 4.2

Значения функций $\varphi_1(V)$ (см. 4.15); $\varphi_2(V)$, $\varphi_3(V)$, $\varphi_4(V)$, (см. 4.11); $\eta_1(V)$ (см. 4.17); $\eta_2(V)$ (см. 4.13), вычисленные проф. А.Ф.Смирновым, приведены в таблице 4.3.

ЗНАЧЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

$$\varphi_1(V) = \frac{V^2 \operatorname{tg} V}{3(\operatorname{tg} V - V)}; \quad \varphi_2(V) = \frac{V(\operatorname{tg} V - V)}{8 \operatorname{tg} V (\operatorname{tg} \frac{V}{2} - \frac{V}{2})}; \quad \varphi_3(V) = \frac{V(V - \sin V)}{4 \sin V (\operatorname{tg} \frac{V}{2} - \frac{V}{2})};$$

$$\varphi_4(V) = \varphi_1\left(\frac{V}{2}\right); \quad \eta_1(V) = \frac{V^3}{3(\operatorname{tg} V - V)}; \quad \eta_2(V) = \eta_1\left(\frac{V}{2}\right); \quad \eta_3(V) = \varphi_4(V).$$

Числовые значения функций А.Ф. Смирнова

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,9998	0,9999	1,0001	0,9999	0,9990	0,9997
0,10	0,9993	0,9997	1,0002	0,9998	0,9960	0,9990
0,15	0,9985	0,9992	1,0004	0,9996	0,9910	0,9970
0,20	0,9973	0,9987	1,0007	0,9994	0,9840	0,9960
0,25	0,9958	0,9979	1,0010	0,9990	0,9750	0,9937
0,30	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910
0,35	0,9918	0,9959	1,0020	0,9980	0,9510	0,9877
0,40	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840
0,45	0,9864	0,9932	1,0034	0,9966	0,9189	0,9797
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,55	0,9797	0,9899	1,0051	0,9948	0,8789	0,9697
0,60	0,9757	0,9880	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640
0,65	0,9715	0,9859	1,0071	0,9929	0,8307	0,9577
0,70	0,9669	0,9836	1,0082	0,9918	0,8035	0,9510
0,75	0,9619	0,9811	1,0095	0,9905	0,7743	0,9437
0,80	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360
0,65	0,9508	0,9757	1,0123	0,9879	0,7100	0,9277
0,90	0,9447	0,9727	1,0139	0,9864	0,6747	0,9189
0,95	0,9382	0,9696	1,0155	0,9849	0,6374	0,9097
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,05	0,9240	0,9627	1,0190	0,9816	0,5566	0,8896
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8789
1,15	0,9083	0,9551	1,0230	0,9777	0,4675	0,8675
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557
1,25	0,8908	0,9469	1,0274	0,9737	0,3700	0,8435

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
1,30	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,35	0,8716	0,9378	1,0322	0,9693	0,2641	0,8174
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,45	0,8505	0,9279	1,0375	0,8644	0,1498	0,7892
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,55	0,8275	0,9173	1,0432	0,9593	0,0267	0,7590
1,60	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432
1,65	0,8024	0,9058	1,0495	0,9537	-0,1051	0,7269
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100
1,75	0,7751	0,8936	1,0563	0,9478	-0,2457	0,6926
1,80	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747
1,85	0,7455	0,8804	1,0637	0,9415	-0,3954	0,9563
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
1,95	0,7133	0,8664	1,0717	0,9348	-0,5542	0,6180
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,05	0,6783	0,8515	1,0804	0,9278	-0,7225	0,5776
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9241	-0,8103	0,5566
2,15	0,6404	0,8356	1,0897	0,9203	-0,9005	0,5351
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,25	0,5991	0,8187	1,0998	0,9124	-1,0884	0,4906
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,35	0,5543	0,8008	1,1106	0,9041	-1,2865	0,4439
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,45	0,5054	0,7819	1,1224	0,8954	-1,4954	0,3952
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	-1,6040	0,3700
2,55	0,4520	0,7618	1,1350	0,8862	-1,7155	0,3443
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,65	0,3935	0,7405	1,1487	0,8766	-1,9474	0,2914
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,75	0,3291	0,7181	1,1634	0,8665	-2,1917	0,2364

Продолжение таблицы 4.3

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,85	0,2580	0,6943	1,1793	0,8560	-2,4495	0,1791
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1498
2,95	0,1790	0,6691	1,1966	0,8450	-2,7218	0,1199
3,00	0,1361	0,6560	1,2058	0,8393	-2,8639	0,0893
3,05	0,0907	0,6425	1,2152	0,8335	-3,0102	0,0583
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0
3,15	-0,0088	0,6144	1,2355	0,8214	-3,3163	-0,0053
3,20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8152	-3,4768	-0,0381
3,25	-0,1220	0,5846	1,2574	0,8089	-3,6428	-0,0713
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,35	-0,2521	0,5531	1,2813	0,7958	-3,9930	-0,1393
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1743
3,45	-0,4036	0,5196	1,3072	0,7822	-4,3711	-0,2097
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,55	-0,5832	0,4841	1,3357	0,7679	-4,7840	-0,2821
3,60	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7606	-5,0062	-0,3194
3,65	-0,8002	0,4463	1,3667	0,7531	-5,2409	-0,3571
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7455	-5,4903	-0,3954
3,75	-1,0693	0,4061	1,4008	0,7377	-5,7568	-0,4341
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,85	-1,4142	0,8633	1,4388	0,7216	-6,3551	-0,5136
3,90	-1,5269	0,3407	1,4584	0,7533	-6,6966	-0,5542
3,95	-1,8760	0,3174	1,4705	0,7018,	-7,0768	-0,5954
4,00	-2,1726	0,2933	1,5018	1,6961	-7,5060	-0,6372
4,05	-2,5327	0,2683	1,5252	0,6873	-8,0002	-0,6795
4,10	-2,9802	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,15	-3,5532	0,2156	1,5762	0,6691	-9,2940	-0,7661
4,20	-4,3156	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103

Продолжение таблицы 4.3.

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
4,25	-5,3838	0,1587	1,6237	0,6501	-11,405	-0,8550
4,30	-6,9947	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9005
4,35	-9,7154	0,0976	1,6963	0,6304	-16,023	-0,9464
4,40	-15,327	0,0648	1,7310	0,6202	-21,781	-0,9931
4,45	-33,818	0,0307	1,7678	0,6098	-40,419	-1,0404
4,50	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	221,05	-1,0884
4,55	-	-0,419	1,8488	0,5883	-	-1,1369
4,60	-	-0,0808	1,8933	0,5772	-	-1,1861
4,65	-	-0,1217	1,9409	0,5657	-	-1,2360
4,70	-	-0,1646	1,9919	0,5543	-	-1,2865
$(3/2)\pi$	-	0,1755	2,0052	0,5514	-	-1,2992
4,75	-	-0,2097	2,0468	0,5425	-	-1,3377
4,80	-	-0,2572	2,1056	0,5304	-	-1,3896
4,85	-	-0,3075	2,1691	0,5180	-	-1,4422
4,90	-	-0,3607	2,2375	0,5054	-	-1,4954
4,95	-	-0,4176	2,3119	0,4925	-	-1,5493
5,00	-	-0,4772	2,3924	0,4793	-	-1,6040
5,05	-	-0,5412	2,4800	0,4658	-	-1,6594
5,10	-	-0,6099	2,5757	0,4520	-	-1,7155
5,15	-	-0,6835	2,6805	0,4379	-	-1,7723
5,20	-	-0,7630	2,7961	0,4234	-	-1,8299
5,25	-	-0,8488	2,9232	0,5086	-	-1,8882
5,30	-	-0,9423	3,0648	0,3935	-	-1,9474
5,35	-	-1,0442	3,2224	0,3780	-	-2,0072
5,40	-	-1,1563	3,3989	0,3621	-	-2,0679
5,45	-	-1,2802	3,5980	0,3458	-	-2,1294
5,50	-	-1,4181	3,8234	0,3291	-	-2,1917
5,55	-	-1,5729	4,0817	0,3120	-	-2,2549
5,60	-	-1,7481	4,3794	0,2944	-	-2,3189

Продолжение таблицы 4.3.

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
5,65	–	-1,9484	4,7261	0,2764	–	-2,3838
5,70	–	-2,1804	5,1346	0,2580	–	-2,4495
5,75	–	-2,4526	5,6223	0,2390	–	-2,5162
5,80	–	-2,7777	6,2140	0,2195	–	-2,5838
5,85	–	-3,1736	6,9455	0,1995	–	-2,6523
5,90	–	-3,6678	7,8726	0,1790	–	-2,7218
5,95	–	-4,3047	9,0830	0,1578	–	-2,7924
6,00	–	-5,1594	10,727	0,1361	–	-2,8639
6,05	–	-6,3715	13,084	0,1137	–	-2,9365
6,10	–	-8,2335	16,739	0,0906	–	-3,0102
6,15	–	-11,477	23,154	0,0669	–	-3,0850
6,20	–	-18,591	37,308	0,0424	–	-3,1609
6,25	–	-47,067	94,186	0,0172	–	-3,2380
2π	–	$-\infty$	$+\infty$	0	–	-3,2898

4.2. Устойчивость неразрезных балок и многоэтажных колонн

Расчетная схема в виде неразрезной балки на жестких или упругих опорах применяется для колонн многоэтажных зданий с жесткими или податливыми перекрытиями, сооружений на оттяжках и т.д. Характерной особенностью этих сооружений является наличие больших продольных сжимающих сил, которые приложены на опорах, тогда как нагрузки в пролетах сравнительно невелики и при исследовании устойчивости ими можно пренебречь.

При сжимающей нагрузке меньше критической устойчивой будет прямолинейная форма балки. При критическом значении нагрузки будут возможны как прямолинейное, так и деформированное состояния равновесия балки, т.е. происходит разветвление форм равновесия. Имеет место потеря устойчивости первого рода.

4.2.1. Уравнение трех моментов

Рассмотрим неразрезную балку, нагруженную осевой сжимающей нагрузкой (рис.4.3,а). В пролетах балки нагрузки отсутствуют или ими пренебрегают.

Критическое значение сжимающей нагрузки будем определять из условий равновесия в деформированном состоянии при потере устойчивости системы.

Выделим отдельно два пролета балки, примыкающие к опоре i (рис.4.3,б). Параметры, характеризующие пролеты, определяются по (4.2):

$$V_i = l_i \sqrt{\frac{N_i}{EI_i}}; \quad V_{i+1} = l_{i+1} \sqrt{\frac{N_{i+1}}{EI_{i+1}}}.$$

Здесь: N_i, N_{i+1} - продольные силы в i -ом и $(i+1)$ - ом пролетах;

EI_i, EI_{i+1} жесткости при изгибе сечений балки в i -ом и $(i+1)$ -ом пролетах.

Используем уравнение непрерывности деформаций неразрезной балки на опоре:

$$\varphi_i^{\text{л}} = -\varphi_i^{\text{п}}, \quad (4.18)$$

т.е. углы поворота сечений балки на опоре i должны быть одинаковыми слева и справа от опоры.

Вычислим углы поворота концов простых балок (рис.4.3,б) по (4.5), (4.6).

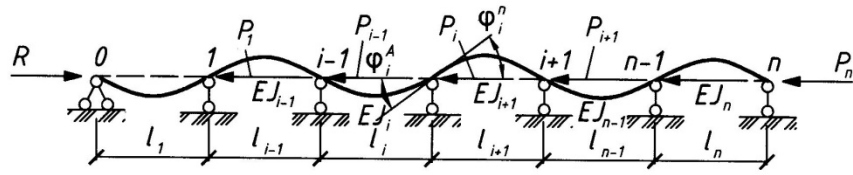
$$\varphi_i^{\text{лев.}} = \frac{M_i l_i}{3EI_i} \Psi(V_i) + \frac{M_{i-1} l_i}{6EI_i} \varphi(V_i);$$

$$\varphi_i^{\text{пр.}} = \frac{M_i l_{i+1}}{3EI_{i+1}} \Psi(V_{i+1}) + \frac{M_{i+1} l_{i+1}}{6EI_{i+1}} \varphi(V_{i+1}).$$

Подставив в (4.18) и умножив все члены равенства на 6, получим уравнение трех моментов для промежуточной опоры i :

$$\frac{M_{i-1} l_i}{6EI_i} \varphi(V_i) + 2M_i \left[\frac{l_i}{EI_i} \Psi(V_i) + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} \Psi(V_{i+1}) \right] + \frac{M_{i+1} l_{i+1}}{6EI_{i+1}} \varphi(V_{i+1}) = 0. \quad (4.19)$$

a)



б)

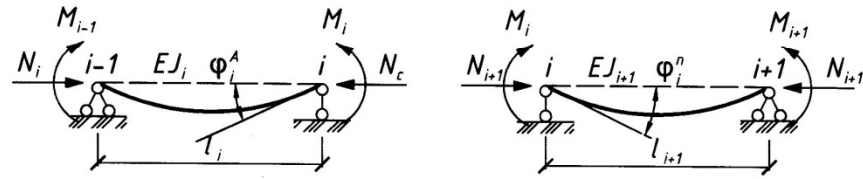


Рис. 4.3.

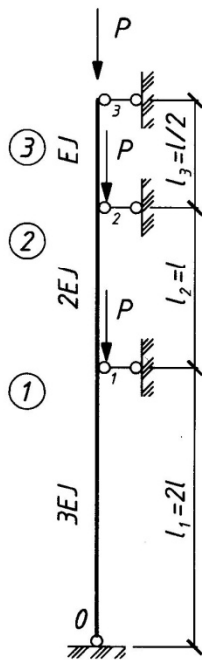


Рис. 4.4.

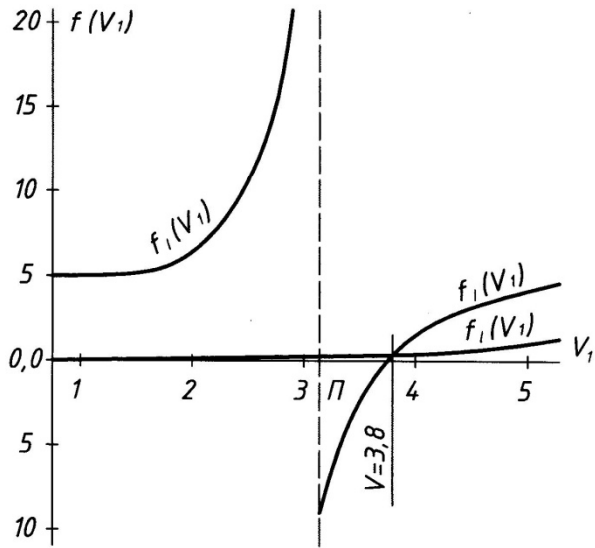


Рис. 4.5.

4.2.2. Уравнение устойчивости неразрезной балки

Для неразрезной балки с крайними шарнирными опорами уравнение трех моментов (4.19) следует составлять по количеству промежуточных опор. Для балки с защемленной крайней опорой можно составить такие уравнения для промежуточных опор и одно, дополнительное уравнение для защемленной опоры, рассматривая ее как промежуточную с дополнительным пролетом нулевой длины. Тогда, получим систему однородных линейных уравнений, которая допускает два вида решений:

а). Нулевое, когда $M_1 = M_2 = \dots = M_n = 0$. Это решение может соответствовать двум случаям равновесия: исходному (недеформированному) и деформированному в частном случае, когда соблюдается условие $V_1 = V_2 = \dots = V_n$. При этом, критические силы будут определяться по формуле Эйлера:

$$N_i^{KP} = \frac{\pi^2}{l_i^2} EI_i, \quad (i=1,2,\dots,n).$$

При отсутствии опорных моментов, каждый пролет будет деформирован как простая балка на двух шарнирных опорах, чем и определяется это решение.

б). Ненулевое для моментов. Условием существования такого решения является равенство нулю определителя системы уравнений трех моментов

$$D[\varphi(V_i); \Psi(V_i)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.20)$$

Это трансцендентное уравнение устойчивости системы, из которого определяется критическая нагрузка.

Для упрощения все параметры V_i выражают через какой-либо один, например V_1 .

Тогда уравнение (4.20) примет вид:

$$D[\varphi(V_1); \Psi(V_1)] = 0.$$

Решая это уравнение, получаем значение параметра V_1 . Критическое значение продольной силы в первом пролете будет равно

$$N_1^{KP} = \frac{V_1^2}{l_1^2} EI_1,$$

а после выражения всех V_i определяем критические продольные силы в остальных пролетах

$$N_i^{KP} = \frac{V_i^2}{l_i^2} EI_i, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.21)$$

Зная критические продольные силы, легко определить критическую нагрузку. В практических расчетах нужно уметь определять приведенные длины пролетов балки $l_{0i} = \mu_i l_i$.

Приравнявая формулу Эйлера к выражению (4.21)

$$\frac{\pi^2}{(\mu_i l_i)^2} EI_i = \frac{V_i^2}{l_i^2} EI_i,$$

вычислим коэффициент приведения

$$\mu_i = \frac{\pi}{V_i}. \quad (4.22)$$

Пример 4.1. Определить критическую нагрузку и приведенные длины пролетов для неразрезной балки (рис.4.4).

Решение:

1. Определяем продольные силы из значения параметров V (4.2) для пролетов балки:

$$\text{1-ый пролет: } N_1 = 3P, \quad V_1 = 2l \sqrt{\frac{3P}{3EI}} = 2l \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

$$\text{2-ой пролет: } N_2 = 2P, \quad V_2 = l \sqrt{\frac{2P}{2EI}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{1}{2} V_1,$$

$$\text{3-й пролет: } N_3 = P, \quad V_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{1}{4} V_1.$$

2. Учитывая, что $M_0 = M_3 = 0$, составляем уравнения трех моментов (4.19), заменяя $\varphi(V_i)$ и $\Psi(V_i)$ на φ_i и Ψ_i

$$\text{опора 1: } 2M_1 \left(\frac{2l}{3EI} \Psi_1 + \frac{l}{2EI} \Psi_2 \right) + M_2 \frac{l}{2EI} \varphi_2 = 0,$$

$$\text{опора 2: } M_1 \frac{1}{2EI} \varphi_2 + 2M_2 \left(\frac{1}{2EI} \Psi_1 + \frac{1}{2EI} \Psi_3 \right) = 0.$$

3. Составляем уравнение устойчивости (4.20)

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} \Psi_1 + \Psi_2 & \frac{1}{2} \varphi_2 \\ \frac{1}{2} \varphi_2 & \Psi_2 + \Psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Развертывая определитель, получим уравнение

$$\left(\frac{4}{3} \Psi_1 + \Psi_2 \right) (\Psi_2 + \Psi_3) - \frac{1}{4} \varphi_2^2 = 0.$$

5. Решаем уравнение графическим способом.

Обозначая $f_1(V_1) = \left(\frac{4}{3} \Psi_1 + \Psi_2 \right) (\Psi_2 + \Psi_3)$, $f_2(V_1) = \frac{1}{4} \varphi_2^2$, представим уравнение в виде $f_1(V_1) = f_2(V_1)$. Значения $f_1(V_1)$ и $f_2(V_2)$ сведены в таблицу 4.4. Функции Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 и φ_2 определялись по таблице 4.1.

Строим графики функций $f_1(V_1)$ и $f_2(V_2)$. Их пересечение дает корень уравнения V_1 . Графическое решение представлено на рис.4.5. Решение уравнения дает наименьшие значения параметров:

$$V_1 = 3,28, \quad V_2 = 1,9; \quad V_3 = 0,95.$$

6. Определяем критическую нагрузку из условия

$$V_2 = l \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EI}}, \quad P_{\text{кр}} = \frac{V_2^2}{l^2} EI = \frac{3,61}{l^2} EI.$$

7. Определяем приведенные длины отдельных пролетов балки.

$$\text{По (4.22) имеем: } \mu_1 = \frac{\pi}{V_1} = \frac{3,14}{3,8} = 0,827;$$

$$\mu_2 = \frac{\pi}{V_2} = \frac{3,14}{1,9} = 1,654; \quad \mu_3 = \frac{\pi}{V_3} = \frac{3,14}{0,95} = 3,308.$$

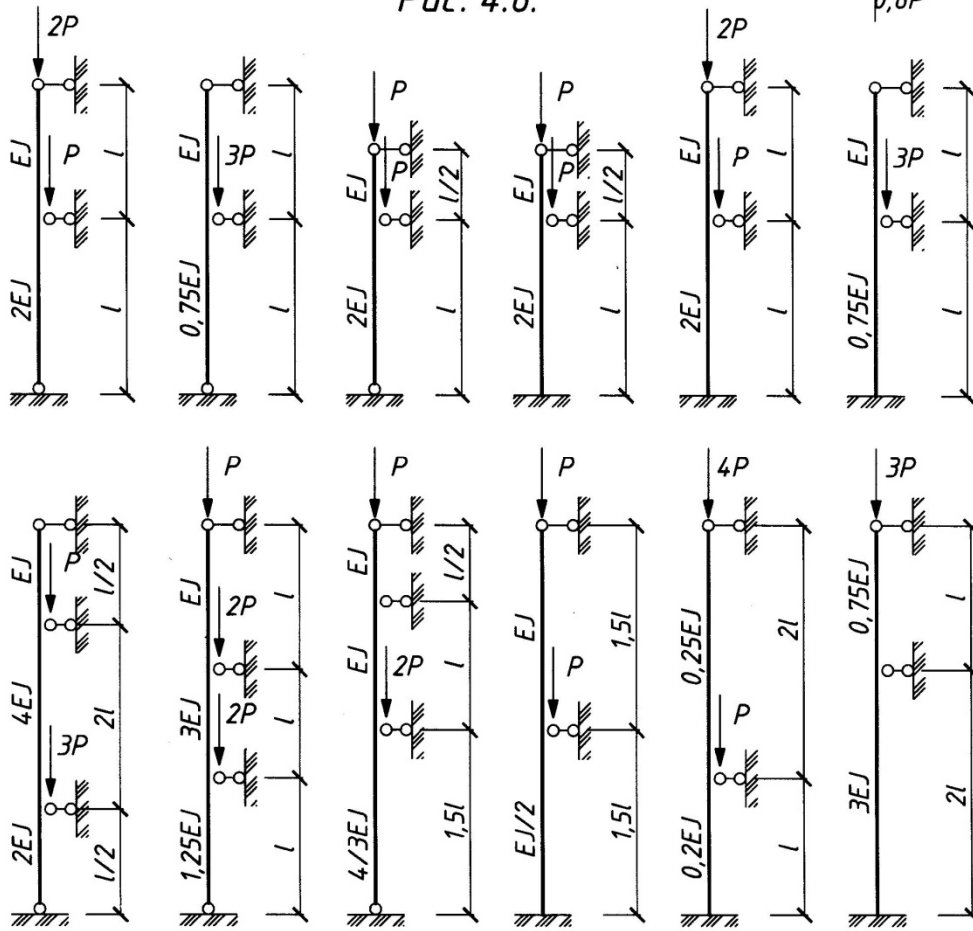
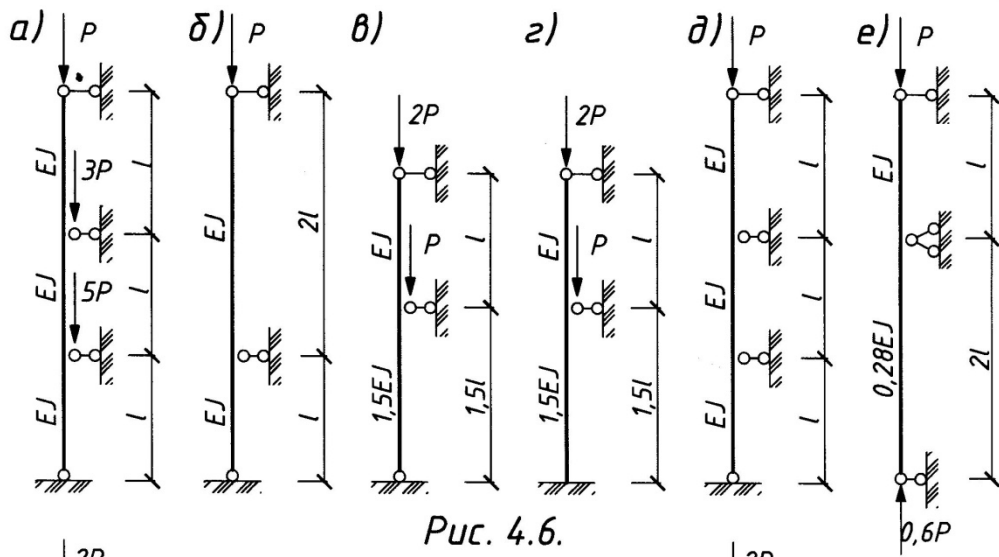
$$\text{Тогда } l_{01} = \mu_1 l_1 = 0,827 * 2l = 1,654l;$$

$$l_{02} = \mu_2 l_2 = 1,654 * l = 1,654l;$$

$$l_{03} = \mu_3 l_3 = 3,308 * \frac{l}{2} = 1,654l.$$

Таблица 4.4

V_1	V_2	V_3	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	$\frac{4}{3}\Psi_1 + \Psi_2$	$\Psi_2 + \Psi_3$	$f_1(V_1)$	φ_2	$f_2(V_1)$
1	0,5	0,25	1,074	1,017	1,008	2,449	2,025	4,959	1,031	0,266
2	1	0,5	1,436	1,074	1,017	2,988	2,091	6,248	1,130	0,319
3	1,5	0,75	7,349	1,192	1,040	10,988	2,232	24,525	1,353	0,458
π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pm\infty$	1,216	1,060	$\pm\infty$	2,276	$\pm\infty$	1,388	0,482
3,6	1,8	0,9	-1,457	1,315	1,065	-0,627	2,380	-1,492	1,571	0,617
3,8	1,9	0,95	-0,813	1,370	1,070	0,287	2,440	0,700	1,675	0,701
4	2	1	-0,46	1,436	1,074	0,823	2,510	2,066	1,799	0,809
5	2,5	1,25	0,298	2,086	1,123	2,483	3,209	7,969	3,050	2,326



Пример 4.2. Определить критическую нагрузку для многоэтажных колонн (рис.4.6).

Результаты решения:

$$\text{а) } P_{\text{КР}} = \frac{1.22^2}{l^2} EI;$$

$$\text{г) } P_{\text{КР}} = \frac{1.92^2}{l^2} EI;$$

$$\text{б) } P_{\text{КР}} = \frac{2.355^2}{l^2} EI;$$

$$\text{д) } P_{\text{КР}} = \frac{3.054^2}{l^2} EI;$$

$$\text{в) } P_{\text{КР}} = \frac{3.88^2}{l^2} EI;$$

$$\text{е) } P_{\text{КР}} = \frac{3.48^2}{l^2} EI.$$

Пример 4.3. Выполнить расчет на устойчивость многоэтажных колонн (рис.4.7) самостоятельно.

4.3. Устойчивость рам

Будем исследовать рамы, состоящие из прямолинейных стержней, нагруженные только узловой нагрузкой (рис.4.8). Такая нагрузка будет вызывать в стержнях только продольные усилия и деформации.

При нагрузке меньше критической устойчивой будет прямолинейная форма стержней. При критическом значении нагрузки возможны как исходная (недеформированная), так и отклоненная (деформированная) формы равновесия. Таким образом, происходит раздвоение форм равновесия. Прямолинейная форма равновесия будет неустойчивой, а деформированная (криволинейная) форма равновесия устойчивой. Происходит потеря устойчивости первого рода.

Для определения критической нагрузки рассматривают деформированную форму равновесия при потере устойчивости системы. Применяются обычные методы расчета статически неопределимых систем: метод сил, метод перемещений, смешанный метод и т.д.

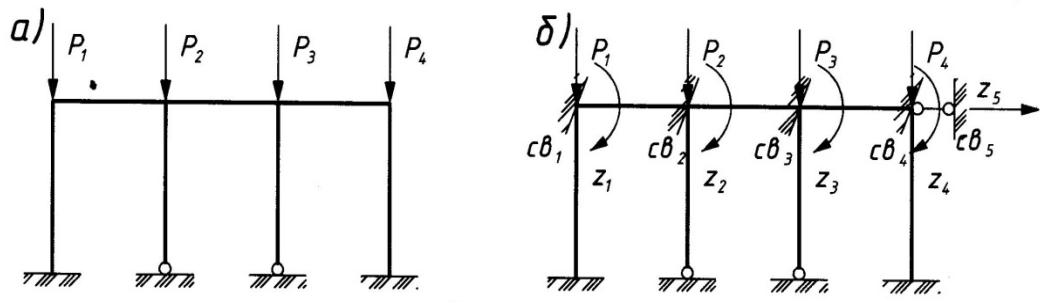


Рис. 4.8.

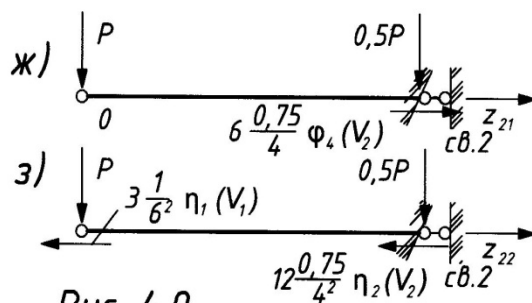
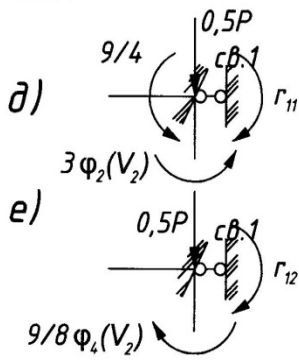
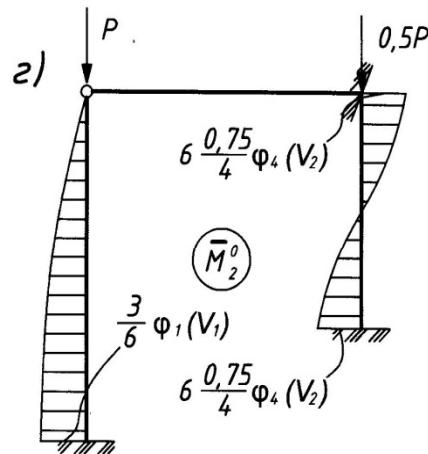
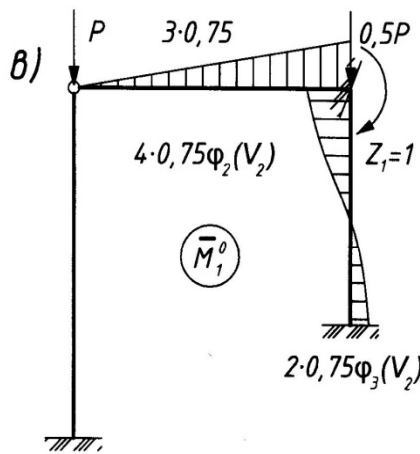
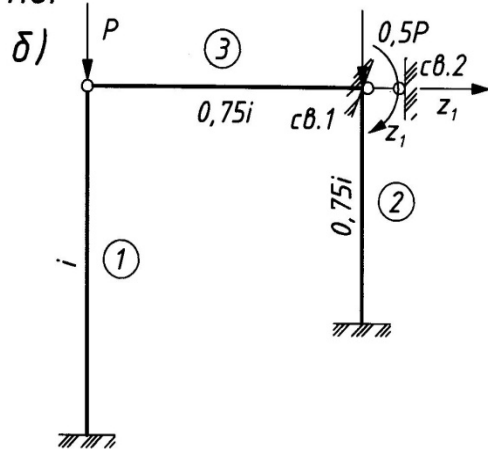
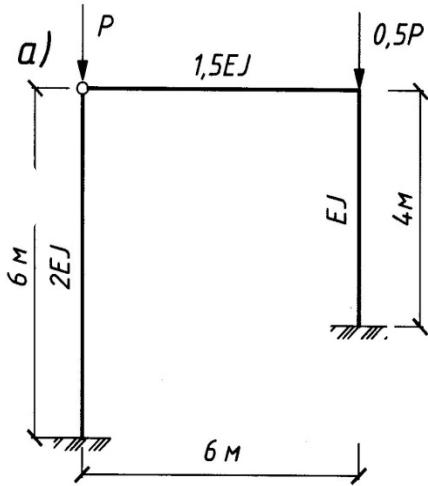


Рис. 4.9.

4.3.1. Основные допущения

При исследовании устойчивости плоских рам принимаются следующие допущения:

- рассматривается только узловая нагрузка, не вызывающая поперечного изгиба стержней;
- стержни считаются несжимаемыми и нерастяжимыми;
- расстояния между узлами после деформации принимаются равными расстояниям до деформации;
- при определении поперечных сил в изогнутых стержнях не учитывается изменение угла наклона сечения за счет изгиба стержней;
- при вычислении перемещений учитываются сжимающие силы, возникающие до деформации, влияние приращений продольных сил в момент потери устойчивости не учитываются.

Первое из допущений вызвано тем, что здесь рассматривается потеря устойчивости первого рода. Наличие внеузловой нагрузки вызывает продольно-поперечный изгиб стержней рамы, при этом будет иметь место потеря устойчивости второго рода.

Последние три допущения исходят из того, что при потере устойчивости деформированная форма равновесия отличается от исходной весьма малыми перемещениями.

Принятые допущения должны соблюдаться на любом этапе расчета рамы.

4.3.2. Расчет рам методом перемещений

Рассмотрим раму, загруженную силами, приложенными в узлах (рис.4.8,а). Основная система метода перемещений (рис.4.8,б) формируется из заданной системы путем введения моментных и силовых связей. Неизвестные z_1, z_2, \dots, z_n здесь представляют собой угловые и независимые линейные перемещения узлов

рамы. Канонические уравнения метода перемещений при узловой нагрузке, не вызывающей поперечного изгиба стержней, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \dots + r_{1n}z_n &= 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \dots + r_{2n}z_n &= 0; \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Коэффициенты канонических уравнений r_{ik} представляет собой реакции, возникающие во вновь введенных связях от единичных перемещений.

В связи с тем, что часть стержней рамы сжата продольными силами, реакции r_{ik} будут зависеть от этих сил. В расчете продольные силы в стержнях N_i задают параметрами V_i по (4.2) и все реакции r_{ik} выражают функциями этих параметров.

Система однородных линейных уравнений (4.23) допускает два вида решений:

а) Нулевое при z_1, z_2, \dots, z_n , которому соответствует исходная недеформированная форма равновесия рамы и поэтому не рассматривается.

б) Ненулевое, соответствующее отклоненной (деформированной) форме равновесия при потере устойчивости рамы. В этом случае определитель системы уравнение (4.23) должен быть равен нулю.

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

Это уравнение устойчивости. Развертывая определитель, можно получить трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки.

В основной системе метода перемещений применяются обычно два типа стержней: 1) с обоими защемленными концами; 2) с одним защемленным и другим шарнирно-опертым концами. Иногда имеют место также стержни с обоими шарнирными концами.

Реакции изогнутых стержней от единичных перемещений известны из метода перемещений, а реакции сжато-изогнутых стержней от этих же перемещений приведены в таблице 4.2. Данные этой таблицы можно использовать и при определении реакций в изогнутых стержнях от единичных перемещений, полагая в значениях концевых усилий

$V_i = 0$, $\varphi_1(V_i) = \varphi_2(V_i) = \varphi_3(V_i) = \varphi_4(V_i) = \eta_1(V_i) = \eta_2(V_i) = 1$, а эпюры рассматривать, как изменяющиеся по линейному закону.

Пример 4.4. Определить критическую нагрузку для рамы, изображенной на рис.4.9,а. Вычислить приведенные длины стоек рамы.

Решение:

1. Выбираем основную систему метода перемещений (рис.4.9 б), вводя дополнительные связи, препятствующие повороту свободного жесткого узла и его линейному перемещению.
2. Определяем параметры сжатых стержней:

$$V_1 = 6 \sqrt{\frac{P}{2EI}} = 3\sqrt{2} \sqrt{\frac{P}{EI}};$$

$$V_2 = 4 \sqrt{\frac{0.5P}{EI}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{P}{EI}};$$

Таким образом, $V_2 = \frac{2}{3} V_1$.

3. Составляем уравнение устойчивости

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от

$z_1 = 1$, (рис.4.9,в), от $z_2 = 1$ (рис.4.9,г).

5. Определяем погонные жесткости стержней и удельные реакции

$$i_1 = \frac{2EI}{6} = \frac{EI}{3} = i; i_2 = \frac{EI}{4} = 0.75i; i_3 = \frac{1.5EI}{6} = \frac{EI}{4} = 0.75i$$

$$r_{11} = 3\varphi_2(V_2) + \frac{9}{4} = 3[\varphi_2(V_2) + 0.75], \quad (\text{рис.4.9,д})$$

$$r_{12} = -\frac{9}{8}\varphi_4(V_2), \quad (\text{рис.4.9,е})$$

$$r_{21} = -\frac{9}{8}\varphi_4(V_2), \quad (\text{рис.4.9,ж})$$

$$r_{22} = \frac{1}{12}\eta_1(V_1) + \frac{9}{16}\eta_2(V_2). \quad (\text{рис.4.9,з})$$

6, Формируем уравнение устойчивости

$$r_{11}r_{22} - r_{21}^2 = 0,$$

$$3[\varphi_2(V_2) + 0,75] \left[\frac{1}{12}\eta_1(V_1) + \frac{9}{16}\eta_2(V_2) \right] - \left[\frac{9}{8}\varphi_4(V_2) \right]^2 = 0.$$

7, Решаем уравнение устойчивости. Обозначая

$$3[\varphi_2(V_2) + 0,75] = 3[\varphi_2(V_2) + 0,75] \left[\frac{1}{12}\eta_1(V_1) + \frac{9}{16}\eta_2(V_2) \right]$$

$$3[\varphi_2(V_2) + 0,75] = \left[\frac{9}{8}\varphi_4(V_2) \right]^2,$$

представляем уравнение в виде

$$f_1(V) = f_2(V).$$

Решение проводим графическим способом, составляя вспомогательную таблицу 4.5.

Таблица 4.5.

V1	V2	$\varphi_2(V)$	$3[\varphi_2(V_2) + 0,75]$	$\eta_1(V_1)$	$\eta_2(V_2)$	$f_1(V)$	$\varphi_4(V_i)$	$f_2(V)$
0	0	1	1,750	1	1	3,386	1	1,266
1	0,667	0,986	1,736	0,598	0,94	3,019	0,990	1,241
2	1,333	0,940	1,690	-0,632	0,831	2,368	0,971	1,192
3	2,000	0,859	1,609	-2,864	0,598	0,463	0,931	1,096
4	2,667	0,729	1,479	-7,506	0,264	-2,116	0,872	0,962

Наименьший корень уравнения устойчивости (рис.4.10) $V_1 = 2,75$.

8. Определяем критическую нагрузку

$$P_{\text{кр}} = \frac{V_1^2}{6^2} 2EI = \frac{2.75^2}{36} 2EI = 0.42EI.$$

9. Определяем приведенные длины стоек рамы:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{V_1} = \frac{3.14}{2.75} = 1.142; \quad l_{01} = \mu_1 l_1 = 1.142 * 6 = 6.852$$

$$\mu_2 = \frac{\pi}{V_2} = \frac{3.14}{2/3 * 2.75} = 1.713; \quad l_{02} = \mu_2 l_2 = 1.713 * 4 = 6.852$$

Пример 4.5. Определить критическую нагрузку для рам (рис.4.11).

Результаты решения:

а) $P_{\text{кр}} = \frac{2,69^2}{l^2} EI;$

б) $P_{\text{кр}} = \frac{\pi/2^2}{l^2} EI;$

в) $P_{\text{кр}} = \frac{3,55^2}{l^2} EI;$

г) $P_{\text{кр}} = \frac{1,55^2}{l^2} EI;$

д) $P_{\text{кр}} = \frac{2,46^2}{l^2} EI;$

е) $P_{\text{кр}} = \frac{3,826^2}{l^2} E.$

Пример 4.6. Выполнить расчет рам на устойчивость самостоятельно (рис.4.12)

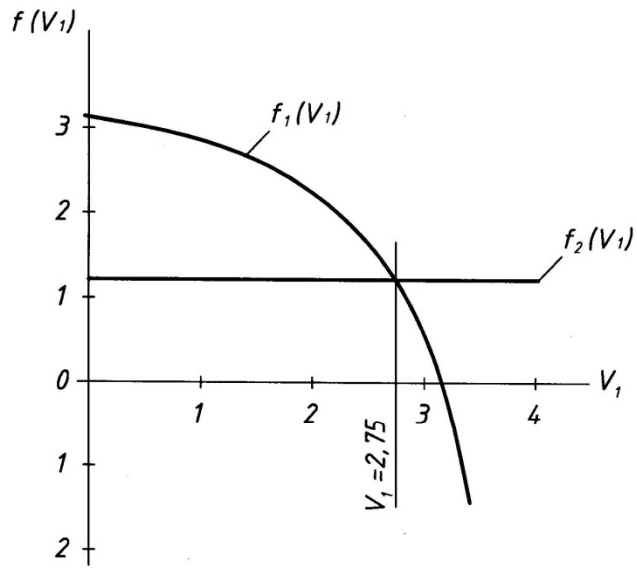


Рис. 4.10.

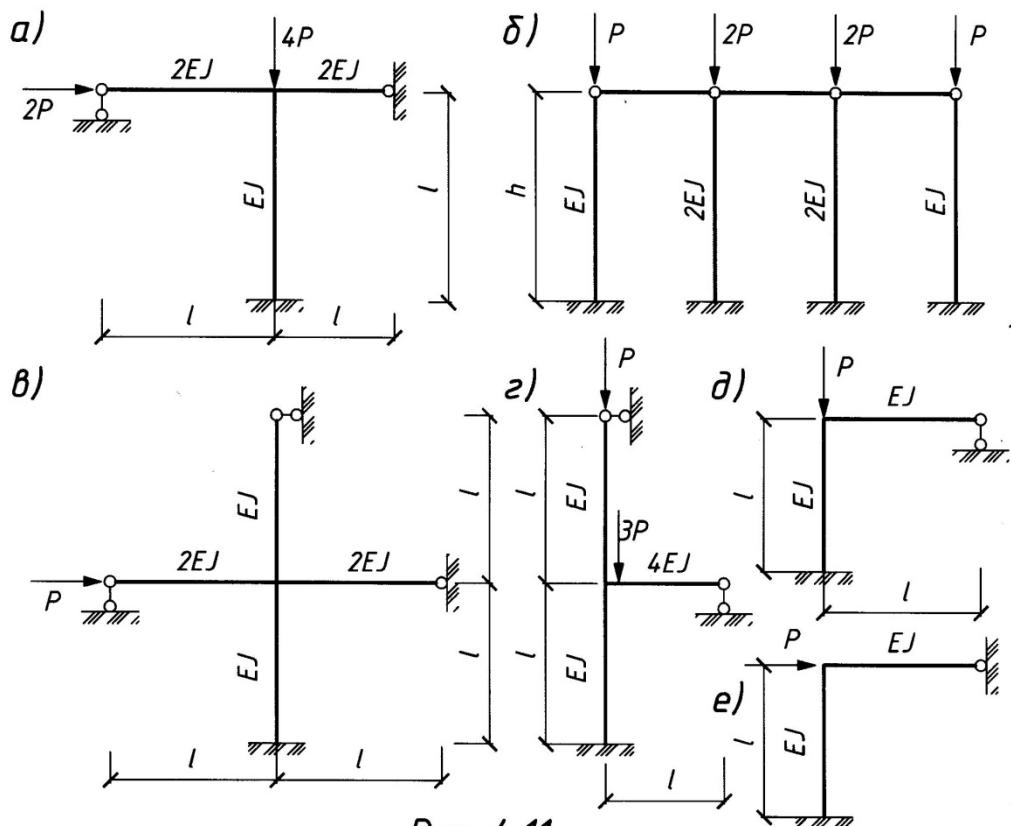


Рис 4.11

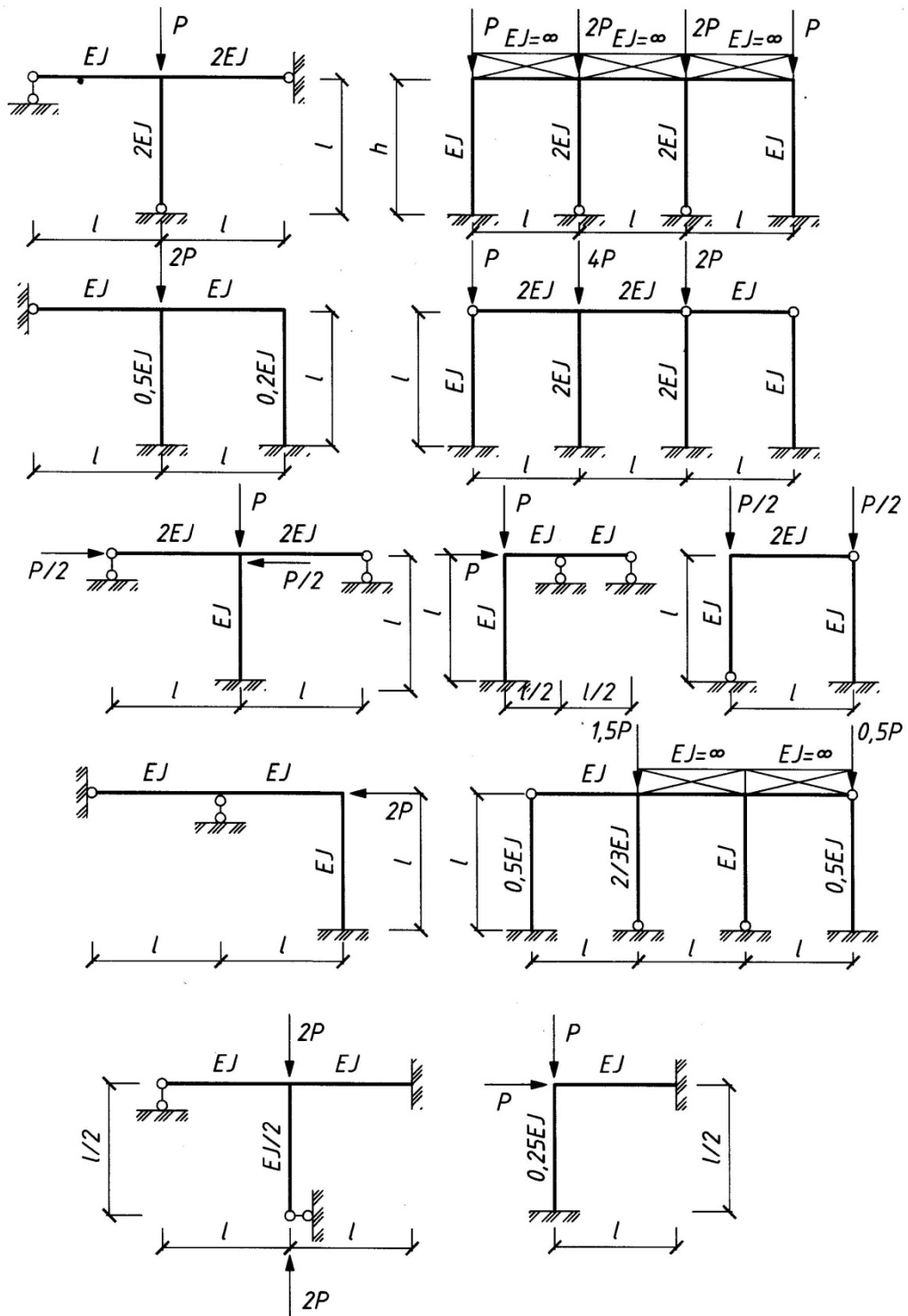


Рис. 4.12.

Список литературы

1. В. А. Киселев. Строительная механика. Спец. курс. М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
2. А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашенников и др. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. - М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
3. Н. И. Безухов, О. В. Лукин, Н. В. Колкунов. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987.–110с.
4. Масленников , А.М. Основы динамики и устойчивости стержневых систем. М.– СПб.: АСВ, 2000.–203с.
5. Шеин, А.И. Краткий курс строительной механики: учебн. для студентов вузов по направлению 270100 «Стр-во» /А.И.Шеин. – М. : Изд. Дом «БАС-ТЕТ», 2011.- 272 с.; ил.- 407-00.

Лампси Борис Борисович
Трянина Надежда Юрьевна
Хазов Павел Алексеевич
Лампси Борис Борисович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО УСТОЙЧИВОСТИ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Подписано в печать 13.02.2020г. Формат 60x90 1/8 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 11,2. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru