

Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, С.Г. Юдников, И.В. Половец,
А.А. Юлина, Б.Б. Лампси, П.А. Хазов

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

Часть II. Статически неопределимые системы

Учебное пособие

Нижний Новгород
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, С.Г. Юдников, И.В. Половец,
А.А. Юлина, Б.Б. Лампси, П.А. Хазов

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть II. Статически неопределимые системы

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2015

ББК38.112

С 23

Рецензенты:

Волков И.А. – доктор технических наук, профессор (ВГУВТ)

Истомин С.Н. – технический директор МП «Институт развития города
«НижегородгражданНИИпроект»»

Б.Б. Лампси. Сборник задач и упражнений по строительной механике. Часть II: Статически определимые системы [Текст]: учебное пособие для вузов/ Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, С.Г. Юдников, И.В. Половец, А.А. Юлина, Б.Б. Лампси, П.А. Хазов; Нижегород. гос. архит.-строит.ун-т- Нижний Новгород: ННГАСУ, 2015. - 132с. ISBN 5 - 87941-254-7

Пособие содержит теоретические сведения и основные положения расчета плоских статически неопределимых стержневых систем методом сил, перемещений и комбинированным способом при силовых, температурных и кинематических воздействиях. Многочисленные примеры расчета сопровождаются необходимыми пояснениями к решению и включают задания для самостоятельной работы. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 270800.62 «Строительство».

Рис. 84, табл. 2, библиогр. назв.8

ББК38.112

ISBN 5 - 87941-254-7

© Коллектив авторов,

©ННГАСУ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ	4
1.1	Понятие о статически неопределимых системах	4
	Порядок расчета рамы методом сил состоит из следующих этапов:	5
1.2	Определение степени статической неопределимости	5
1.3	Выбор основной системы метода сил	6
1.4	Канонические уравнения метода сил	7
1.4.1	Определение перемещений Δ_{ip} от нагрузки	8
1.4.2	Определение перемещений Δ_{it} от изменения температурного режима	13
1.4.3	Определение перемещений Δ_{ic} от кинематического воздействия	14
1.5	Построение эпюр усилий в заданной системе от внешних нагрузок и воздействий	14
1.6	Примеры расчета статически неопределимых рам методом сил	18
2	РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	37
2.1	Основная система метода перемещений. Определение числа неизвестных метода перемещений	38
2.2	Канонические уравнения метода перемещений	42
2.3	Примеры расчета статически неопределимых рам методом перемещений	49
3	РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК	60
3.1	Степень статической неопределимости	60
3.2	Уравнение трех моментов	60
3.3	Уравнение трех углов для расчета неразрезных балок от нагрузки	62
3.4	Примеры расчета неразрезных балок с помощью уравнения трех моментов	63
4	КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ	79
4.1	Основные свойства симметричных систем при симметричной и обратносимметричной нагрузках	79
4.2	Примеры расчета симметричных статически неопределимых рам комбинированным методом	82
	Список использованной литературы	98

1 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

1.1 Понятие о статически неопределимых системах

Реальные сооружения представляют собой сложные инженерные системы, расчет которых с учетом всех их особенностей выполнить достаточно сложно. В связи с этим для практических расчетов используют вместо конструктивных схем расчетные схемы, где принимают ряд приемов, которые незначительно влияют на результаты, но существенно упрощают решение. Из всего разнообразия расчетных схем в пособии рассматриваются только плоские статически неопределимые стержневые системы.

Статически неопределимыми называются системы, в которых не все реакции и усилия, определяемые по недеформированному состоянию, могут быть определены из уравнений равновесия статики.

Кинематической характеристикой статически неопределимых систем является наличие лишних связей, количество которых определяет степень статической неопределимости.

Статически неопределимые системы обладают следующими характерными для них свойствами:

- усилия в статически неопределимых системах зависят от количества и жесткостей лишних связей;
- наличие лишних связей в статически неопределимой системе повышает её общую жесткость, поэтому перемещения точек системы всегда меньше аналогичных перемещений точек системы, не содержащей лишних связей;
- изменение температурного режима и кинематические воздействия вызывают появление внутренних усилий в статически неопределимых системах, в отличие от статически определимых систем, где температурные и кинематические воздействия не влияют на напряженно-деформированное состояние системы;
- усилия в статически неопределимых системах при действии нагрузки зависят только от соотношения жесткостей сечений стержней, а при изменении температурного режима и кинематического воздействия – от величин жесткостей сечений стержней.

Суть метода сил заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных, избыточных связей, как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется соответствующими силами и моментами. Их величины в дальнейшем подбираются так, чтобы перемещения системы соответствовали тем бы ограничениям, которые на нее накладываются отброшенными связями.

Порядок расчета рамы

методом сил состоит из следующих этапов:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний, построение единичных и грузовой эпюр.
5. Определение коэффициентов канонических уравнений.
6. Решение системы канонических уравнений.
7. Построение эпюр M , Q , N .
8. Проверка правильности расчета. Она состоит из двух частей:
 - статическая проверка, состоит в проверке выполнения условий равновесия;
 - кинематическая проверка.

1.2 Определение степени статической неопределимости

Статически неопределимые системы содержат избыточные или «лишние» (по сравнению со статически определимыми системами) связи, число которых называется *степенью статической неопределимости*. Степень статической неопределимости, или число избыточных связей, определяется следующими зависимостями:

– для стержневых систем

$$L = -3D + C_0 + 2Ш, \quad (1.1)$$

– для шарнирно-стержневых систем

$$L = C_0 + C - 2У, \quad (1.2)$$

где

L – количество избыточных или «лишних» связей

D – число дисков,

C – число стержней,

C_o – число опорных стержней,

$У$ – число шарнирных узлов,

$Ш$ – число простых шарниров.

Количество простых шарниров определяется по формуле

$$Ш = n - 1, \quad (1.3)$$

где n – количество дисков, сходящихся в шарнирном узле.

Практически число лишних связей удобно определять по формуле

$$Л = 3К - Ш, \quad (1.4)$$

где $К$ – число замкнутых, бесшарнирных контуров, каждый из которых имеет по три лишние связи.

Вычислим степень статической неопределимости для систем (рис.1.1).

Для схемы *a*,

используя (1.1), получим $Д = 3$, $C_o = 8$, $Ш = 2$ и $Л = -3*3 + 8 + 2*2 = 3$,

используя (1.4): $К = 2$, $Ш = 3$ и $Л = 3*2 - 3 = 3$.

Для схемы *б*,

согласно (1.1), получим $Д = 3$, $C_o = 8$, $Ш = 2$ и $Л = -3*3 + 8 + 2*2 = 3$,

согласно (1.4): $К = 2$, $Ш = 3$ и $Л = 3*2 - 3 = 3$.

Аналогично для схем *в-е*

$Л = 4$, $Л = 4$, $Л = 6$ и $Л = 4$ соответственно.

1.3 Выбор основной системы метода сил

Система, освобожденная от избыточных связей, становится статически определимой. Она носит название *основной системы*.

Поскольку за лишние или избыточные можно принять любые типы связей, то возможно выбирать несколько принципиально различных основных систем. Однако нельзя при назначении основной системы устранять необходимые связи, то есть нельзя в качестве основной системы принимать механизм или систему, обладающую той или иной степенью подвижности, хотя бы мгновенной. Следовательно, основная система метода сил должна быть неизменяемой.

Для заданной рамы (рис.1.1а) рассмотрим следующие основные системы (рис.1.2). Кинематический анализ основных систем показывает, что основная

Коэффициенты при неизвестных δ_{ij} в уравнениях представляют собой удельные перемещения, то есть перемещения в основной системе по направлению силового фактора X_i от $X_j=1$. Эти коэффициенты для системы с m -стержнями, работающими преимущественно на изгиб (рамы, балки), определяются по формуле Мора-Максвелла

$$\delta_{ij} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 \bar{M}_j^0}{EI} ds. \quad (1.6)$$

где \bar{M}_i^0, \bar{M}_j^0 - изгибающие моменты от действия единичных неизвестных $X_i = 1, X_j = 1$;

Перемещения δ_{ij} разделяются на главные удельные перемещения δ_{ii}, δ_{jj} , которые всегда положительные, и побочные удельные перемещения δ_{ij} ($i \neq j$), которые могут принимать как положительное, так и отрицательное значение. Поскольку побочные удельные перемещения по теореме Максвелла обладают свойством взаимности $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, то матрица, составленная из коэффициентов канонических уравнений метода сил (1.5) будет всегда симметрична по отношению к главной диагонали.

Свободные члены уравнений Δ_{ik} (1.5) представляют собой перемещения в основной системе от нагрузки Δ_{ip} , изменения температурного режима Δ_{it} , кинематического воздействия Δ_{ic} и при одновременном воздействии нагрузки, температурных и кинематических воздействий выражаются в виде

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ic}. \quad (1.7)$$

1.4.1 Определение перемещений Δ_{ip} от нагрузки

Слагаемое Δ_{ip} представляет собой перемещение в основной системе по направлению силового фактора P_i от нагрузки, определяемое для систем, работающих преимущественно на изгиб по формуле Мора-Максвелла

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 M_p^0}{EI} ds, \quad (1.8)$$

где M_p^0 - изгибающий момент от действия заданной нагрузки в основной системе. Вычисление изгибающих моментов в сечениях статически определимой основной системы и построение эпюр от указанных воздействий выполняется статическим способом вырезания узлов и простых сечений.

Для вычисления интегралов в формулах (1.6) и (1.8) можно применять правило Верещагина:

$$\sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 \bar{M}_j^0}{EI} ds = \sum_{v=1}^m \frac{\omega_i y_{cj}}{EI};$$

$$\sum_{i=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 M_p^0}{EI} ds = \sum_{v=1}^n \frac{\omega_p y_{ci}}{EI}. \quad (1.9)$$

Для проверки правильности вычисления перемещений существуют следующие проверки:

1. Построчная

$$\delta_{is} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 \bar{M}_s^0}{EI} ds = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}, \quad (1.10)$$

выполняемая для каждой строки системы канонических уравнений (1.5).

Здесь

$$\bar{M}_s^0 = \bar{M}_1^0 + \bar{M}_2^0 + \dots + \bar{M}_n^0 \quad (1.11)$$

изгибающий момент в основной системе от суммарного действия $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$.

2. Универсальная

$$\delta_{ss} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{(\bar{M}_s^0)^2}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^n \delta_{ij}, \quad (i \neq j). \quad (1.12)$$

3. Свободных членов

$$\Delta_{sp} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_p^0}{EI} ds = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np}. \quad (1.13)$$

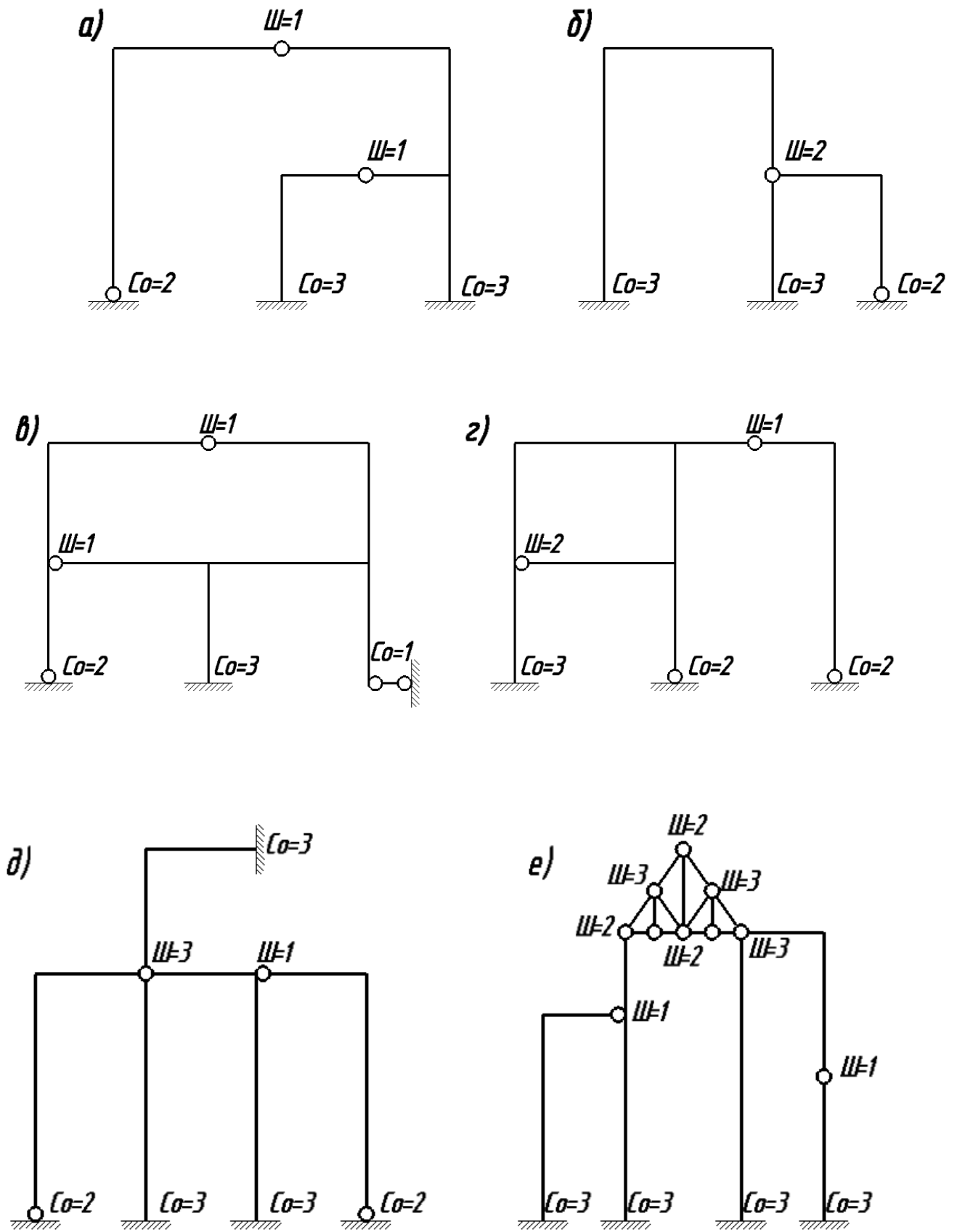


Рис.1.1

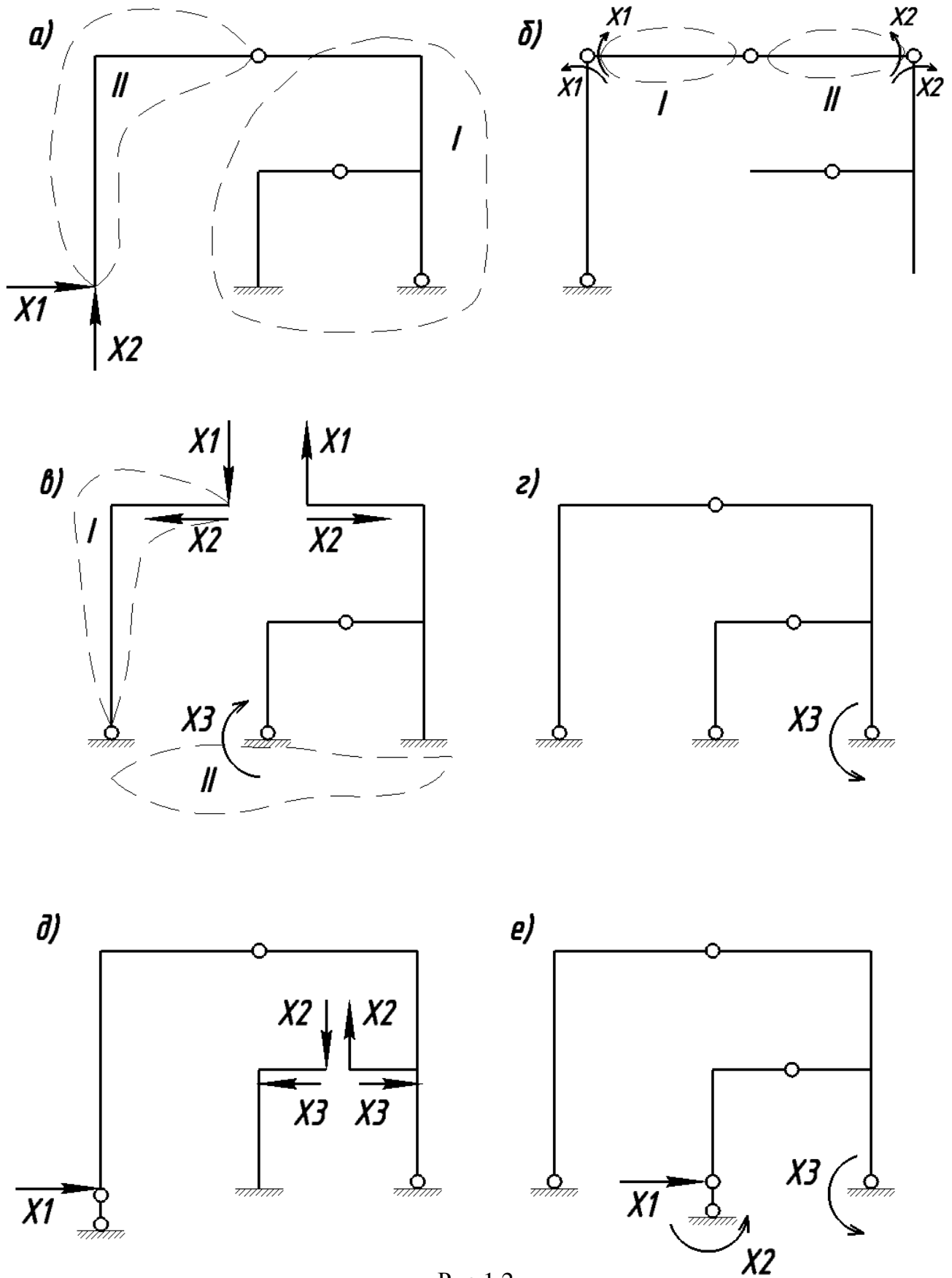


Рис 1.2

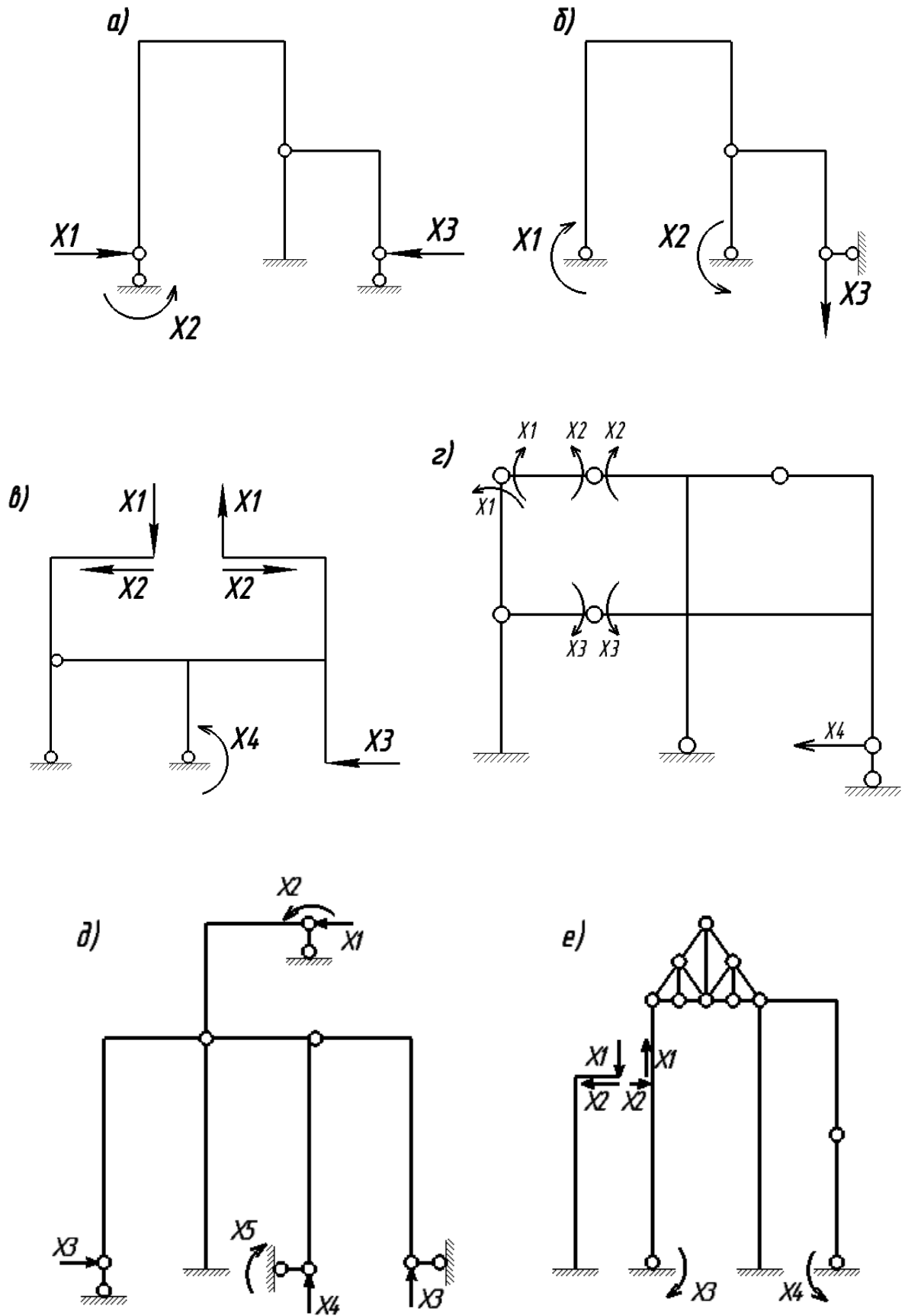


Рис 1.3

1.4.2 Определение перемещений Δ_{it} от изменения температурного режима

Слагаемое Δ_{it} в формуле 1.7 представляет собой перемещение в основной системе по направлению силового фактора X_i от изменения температурного режима, определяемое по формуле

$$\Delta_{it} = \sum_{v=1}^m \alpha_0 \omega_{N_i^0} + \sum_{v=1}^m \alpha \frac{\Delta t}{H} \omega_{M_i^0} \quad (1.14)$$

при условии постоянного изменения температуры по длине каждого стержня и однородности материала.

Здесь

α – коэффициент линейного расширения материала;

$t_0 = \frac{(t_1 + t_2)}{2}$ – приращение температуры на уровне нейтрального слоя стержня;

t_1 – температура наружных волокон;

t_2 – температура внутренних волокон;

$\Delta t = t_1 - t_2$ – перепад температур;

H – высота сечения в плоскости изгиба $\acute{\omega}$;

$\omega_{N_s^0}, \omega_{M_i^0}$ – площади эпюр нормальных сил и изгибающих моментов на стержне с

меняющейся температурой от силового фактора $X_i=1$;

m – число стержней, по длине которых происходит изменение температурного режима.

Каждое слагаемое в (1.14) считается положительным, если деформации, вызванные силовым фактором $X_i=1$ и изменением температурного режима совпадают, и отрицательным, если эти деформации не совпадают.

1.4.3 Определение перемещений Δ_{ic} от кинематического воздействия

Слагаемое Δ_{ic} в (1.7) представляет собой перемещение в основной системе по направлению силового фактора P_i от кинематического воздействия, определяемое по формуле

$$\Delta_{ic} = - \sum_{v=1}^w r_{vi}^0 c_v, \quad (1.15)$$

где r_{vi}^0 – реакция в связи, получившей кинематическое воздействие, от силового фактора $X_i=1$; c_v – величина кинематического воздействия; w – число опорных связей, получивших кинематические воздействия.

Реакция r_{vi}^0 считается положительной, если ее направление совпадает с направлением кинематического воздействия, и отрицательной, если не совпадает.

1.5 Построение эпюр усилий в заданной системе от внешних нагрузок и воздействий

В результате решения системы канонических уравнений (1.5) находим действительные значения основных неизвестных $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$. Изгибающие моменты M_p в заданной системе от действующей нагрузки в соответствии с принципом независимости действия сил могут быть вычислены как сумма изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки M_p^0 и действительных значений неизвестных

$$M_p = M_p^0 + \sum_{j=1}^n \bar{M}_j^0 X_j. \quad (1.16)$$

Аналогично может быть построена эпюра изгибающих моментов от температурного M_t ,

$$M_t = \bar{M}_1^0 X_1 + \dots + \bar{M}_n^0 X_n \quad (1.17)$$

и кинематического M_c воздействий

$$M_c = \bar{M}_1^0 X_1 + \dots + \bar{M}_n^0 X_n. \quad (1.18)$$

Здесь M_t^0 и M_c^0 – изгибающие моменты в основной системе, вызванные температурным и кинематическим воздействиями соответственно, которые в частном случае для статически определимой основной системы равны нулю.

Построенные эпюры изгибающих моментов должны удовлетворять условиям равновесия узлов и кинематической проверке:

$$\Delta_{ip} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_i^0}{EI} ds = 0$$

или

$$\Delta_{sp} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_s^0}{EI} ds = 0 \quad (1.19)$$

при расчете от нагрузки;

$$\Delta_{it} = \sum_{v=1}^T \alpha t_0 \omega_{\bar{N}_i^0} + \sum_{v=1}^T \alpha \frac{\Delta t}{H} \omega_{\bar{M}_i^0} + \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 M_t}{EI} ds = 0 \quad (1.20)$$

или

$$\Delta_{st} = \sum_{v=1}^T \alpha t_0 \omega_{\bar{N}_s^0} + \sum_{v=1}^T \alpha \frac{\Delta t}{H} \omega_{\bar{M}_s^0} + \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_t}{EI} ds = 0 \quad (1.21)$$

при расчете от изменения температурного режима;

$$\Delta_{ic} = -\sum_{v=1}^w r_{vi}^0 c_v + \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 M_c}{EI} ds = 0 \quad (1.22)$$

или

$$\Delta_{sc} = -\sum_{v=1}^w r_{vs}^0 c_v + \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_c}{EI} ds = 0 \quad (1.23)$$

при расчете от кинематических воздействий.

Здесь $\omega_{\bar{N}_s^0}$, $\omega_{\bar{M}_s^0}$, – площади эпюр в основной системе от суммарного действия

$X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$, r_{vs}^0 – удельные реакции в основной системе от суммарного действия $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$.

Поперечные и продольные силы в сечениях заданной рамы Q_p и N_p могут быть вычислены по принципу независимости действия сил

$$Q_p = Q_p^0 + \sum_{j=1}^n \bar{Q}_j^0 X_j, \quad (1.24)$$

$$N_p = N_p^0 + \sum_{j=1}^n \bar{N}_j^0 X_j. \quad (1.25)$$

Здесь Q_p^0, N_p^0 и \bar{Q}_j^0, \bar{N}_j^0 – поперечные и продольные силы в основной системе от нагрузки и единичного значения неизвестного $X_j=1$ соответственно.

Эпюру поперечных сил Q_p можно построить и по известной эпюре изгибающих моментов M_p . Для этого следует рассмотреть равновесие всех вырезанных из системы стержней. Выделенный стержень или часть его представляется в виде простой двухопорной балки, загруженной местной нагрузкой и концевыми моментами, принятыми в соответствии с эпюрой изгибающих моментов M_p (рис.1.4). Ординаты эпюры поперечных сил будут определяться зависимостью:

$$Q_p = Q_p^0 + \frac{M_{пр} - M_{лев}}{l}, \quad (1.26)$$

где Q_p^0 – значение поперечной силы от действия местной нагрузки на стержень (балку);

$M_{пр}$ и $M_{лев}$ – правый и левый концевые моменты, взятые с эпюры M_p . Они считаются положительными, если вызывают растяжение нижних волокон, и отрицательными – если верхних.

Ординаты эпюр поперечных сил от температурных Q_t и кинематических Q_c воздействий можно вычислить согласно (1.27), полагая отсутствующими поперечные силы от местного воздействия.

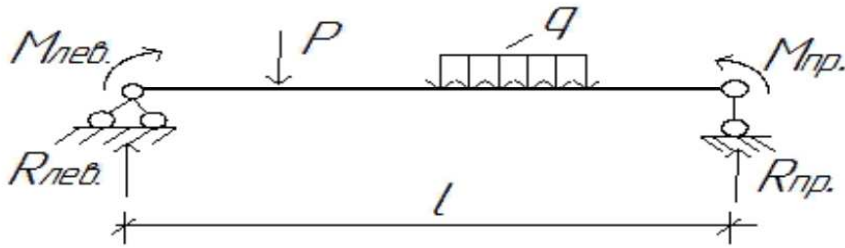


Рис.1.4

Построение эпюр продольных сил от нагрузки N_p , изменения температурного режима N_t и кинематических воздействий N_c выполняется способом последовательного вырезания узлов. Для этого к вырезанному с эпюр Q_p , Q_t , Q_c узлу прикладывают с учетом знаков (рис.1.5) поперечные силы, неизвестные продольные силы, принимая их растягивающими, и узловые внешние нагрузки. Начиная с двухстержневого узла, составляют уравнения равновесия в виде

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad (1.27)$$

определяют неизвестные продольные силы и выполняют построения соответствующих эпюр N_p , N_t , N_c .

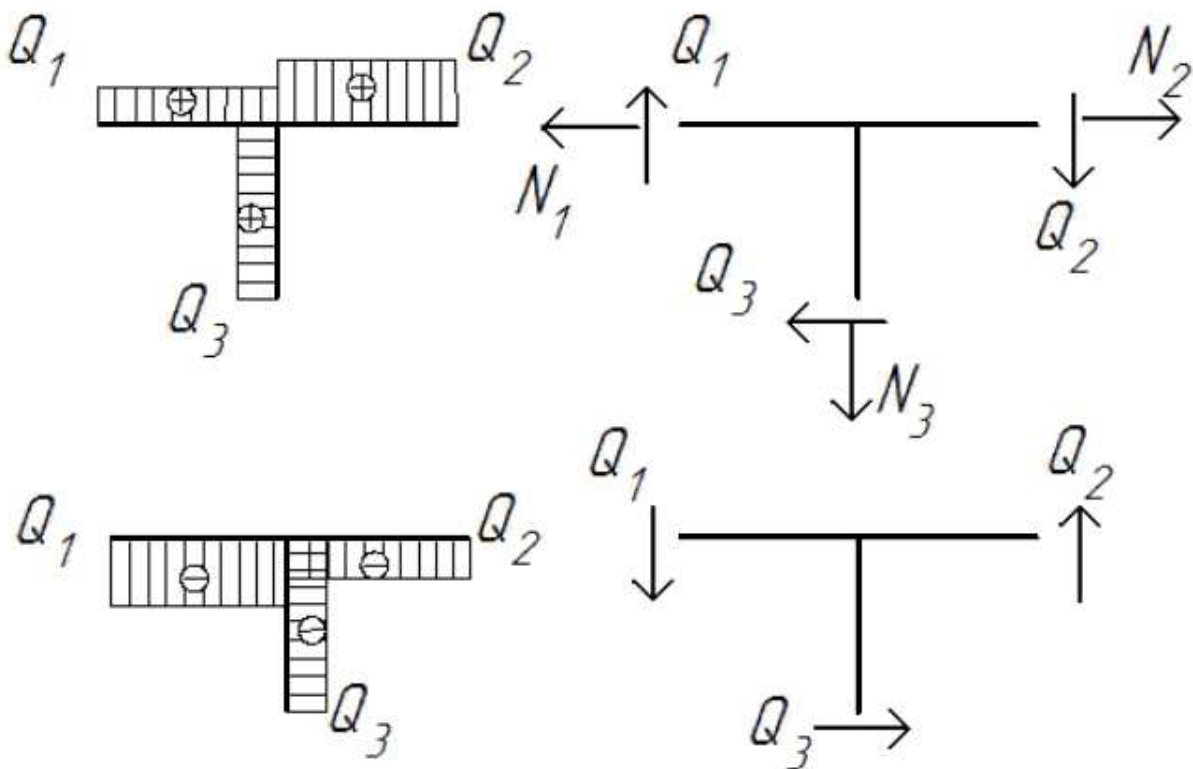


Рис.1.5

Для оценки правильности полученных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил выполняется статическая проверка, основанная на рассмотрении равновесия отсеченных частей системы. Разрезая систему произвольным сечением и заменяя действие устраненной части усилиями M, Q, N , составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_I = 0, \quad (1.28)$$

где I – произвольная точка, относительно которой составляется уравнение равновесия. Направление изгибающих моментов, поперечных и продольных сил устанавливается по эпюрам M_p, Q_p, N_p . Направление изгибающих моментов принимается в соответствии с растянутыми в сечении волокнами. Поперечные силы прикладываются с учетом знаков (1.4; 1.5). Положительные продольные силы принимаются растягивающими, отрицательные – сжимающими. Условия статической проверки должны выполняться с погрешностью, не превышающей 3%.

1.6 Примеры расчета статически неопределимых рам методом сил

Пример 1.6.1. Выполнить расчет статически неопределимой рамы (рис.1.6), вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от нагрузки, изменения температурного режима и кинематического воздействия при $I_1 : I_2 = 1 : 3$, $EI = 2 \cdot 10^5$ (кНм²), $\alpha = 10^{-5}$.

1.6.1 Расчет от нагрузки

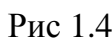
1. Определяем степень статической неопределимости рамы.

$$L=3 \cdot K - \text{III}=3 \cdot 2 - 4=2.$$

2. Выбираем основную систему (рис.1.7).

3. Составляем канонические уравнения метода сил (1.5).

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

4. Строим эпюры изгибающих моментов  ной системе от неизвестных $X_1=1$, $X_2=1$ и от заданной нагрузки (рис.1.8 – 1.10).

5. Определяем перемещения в основной системе по правилу Верещагина (1.9).

$$\delta_{11} = \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{\left(\bar{M}_1^0\right)^2}{EI} ds = 7 \cdot 9 \cdot 7 / 3EI_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 + 7 \cdot 3 \cdot 7 / 3EI_1 +$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 = 604,333 / EI_1 \text{ (м/кН)};$$

$$\delta_{22} = \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{\left(\bar{M}_2^0\right)^2}{EI} ds = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 / 3EI_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 / 3EI_1 = 333 / EI_1 \text{ (м/кН)};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{\bar{M}_1^0 \bar{M}_2^0}{EI} ds = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / 3EI_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / 3EI_1 = 119 / EI_1 \text{ (м/кН)};$$

$$\Delta_{1p} = \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{\bar{M}_1^0 M_p^0}{EI} ds = 147 \cdot 9 \cdot 7 / 3EI_1 + \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 147 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 / EI_1 - \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 147 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 / EI_1 -$$

$$- 147 \cdot 3 \cdot 7 / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 147 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 177 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 177 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 7 +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot 3,5\right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 103,5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,5 + \frac{1}{3} \cdot 7\right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 103,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 / 3EI_1 =$$

$$= -2397,5 / EI_1 \text{ (м)};$$

$$\Delta_{2p} = \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{\bar{M}_2^0 M_p^0}{EI} ds = -147 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 / 3EI_1 - 147 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 147 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 / 3EI_1 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 177 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 / EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 177 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 4,5\right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 103,5 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 4,5 +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot 9\right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 103,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,5 / 3EI_1 = -7345,5 / EI_1 \text{ (м)}.$$

6. Строим суммарную эпюру изгибающих моментов $\bar{M}_s^0 = \bar{M}_1^0 + \bar{M}_2^0$ (рис.1.11) и выполняем проверки правильности определения перемещений:

Построчная (1.10)

$$\delta_{1s} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_1^0 \bar{M}_s^0}{EI} ds = 7 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot (7-1) / 3EI_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 + 7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (7+10) / 3EI_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / 3EI_1 = 723,333 / EI_1 \text{ (м/кН)},$$

$$\delta_{2s} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_2^0 \bar{M}_s^0}{EI} ds = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 7) / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 7) / 3EI_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / 3EI_1 = 452 / EI_1 \text{ (м/кН)},$$

$$\delta_{1s} = \delta_{11} + \delta_{12} = 604,333 / EI_1 + 119 / EI_1 = 723,333 / EI_1 \text{ (м/кН)},$$

$$\delta_{2s} = \delta_{21} + \delta_{22} = 119 / EI_1 + 333 / EI_1 = 452 / EI_1 \text{ (м/кН)}.$$

Универсальная (1.12)

$$\delta_{ss} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{(\bar{M}_s^0)^2}{EI} ds = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 2) / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 7) / 3EI_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot 2 / EI_1 + 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 10) / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 7) / 3EI_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / 3EI_1 = 1175,333 / EI_1 \text{ (м/кН)},$$

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = 604,333 / EI_1 + 333 / EI_1 + 2 \cdot 119 / EI_1 = 1175,333 / EI_1 \text{ (м/кН)}.$$

Проверка свободных членов (1.13)

$$\Delta_{sp}^0 = \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_p^0}{EI} ds = 147 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} (7-2) / 3EI_1 + \frac{1}{3} \cdot 147 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 / EI_1 - \frac{1}{3} \cdot 147 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 / EI_1 -$$

$$- 147 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} (7+10) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 147 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 177 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 177 \cdot 3 \cdot$$

$$\cdot (\frac{2}{3} \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 8) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 103,5 \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 16) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 103,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 / 3EI_1 =$$

$$= -9743 / EI_1 \text{ (м)},$$

$$\Delta_{sp}^0 = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -2397,5 / EI_1 - 7345,3 / EI_1 = -9743 / EI_1 \text{ (м)}.$$

7. Решаем систему канонических уравнений и определяем действительные значения лишних неизвестных.

$$\begin{cases} \frac{604,333}{EI_1} X_1 + \frac{119}{EI_1} X_2 - \frac{2397,5}{EI_1} = 0 \\ \frac{119}{EI_1} X_1 + \frac{333}{EI_1} X_2 - \frac{7345,5}{EI_1} = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -0,4046(\text{кН}); \quad X_2 = 22,2032(\text{кН}).$$

8. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от вычисленных значений неизвестных (рис.1.12, 1.13).

9. Строим эпюру изгибающих моментов M_p в заданной раме от нагрузки (1.17) (рис.1.14.).

10. Выполняем кинематическую проверку решения (1.20).

$$\begin{aligned} \Delta_{sp} &= \sum_{v=1}^{m=7} \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_s^0}{EI} ds = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 55,661 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 7 \right) / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 144,1678 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) / 3EI_1 - \\ &- \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7^2 / 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 144,1678 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 + \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7^2 / 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 / EI_1 - \\ &- 7 \cdot 149,8322 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 / EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 149,8322 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 10 \right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 83,2226 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 10 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3} \cdot 7 \right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 83,2226 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 / 3EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 19,9966 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 / EI_1 + \frac{1}{2} \cdot 19,9966 \cdot 3 \cdot \\ &\cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 5,0017 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 16 \right) / 3EI_1 - \frac{1}{2} \cdot 5,0017 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 / 3EI_1 = \\ &= (4099,5978 - 4099,412) / EI_1 = 0,1899 / EI_1 < 0,1\%. \end{aligned}$$

11. Определяем поперечные силы в каждом стержне рамы (1.27) (рис.1.15 – 1.18):

Стержень 1–2

$$M_{np} = -144,1678 \text{ (кНм)}, \quad M_{лев} = 55,6610 \text{ (кНм)}, \quad Q_{12}^0 = Q_{21}^0 = 0,$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 + (-144,1678 - 55,661) / 9 = -22,2032 \text{ (кН)}.$$

Стержень 2–3

$$M_{np} = 0, \quad M_{лев} = -144,1678 \text{ (кНм)}, \quad Q_{23}^0 = 6 \cdot 7 / 2 = 21 \text{ (кН)}, \quad Q_{32}^0 = -6 \cdot 7 / 2 = -21 \text{ (кН)};$$

$$Q_{23} = 21 + (0 - (-144,1678)) / 7 = 41,5955 \text{ (кН)}, \quad Q_{32} = -21 + (0 - (-144,1678)) / 7 = -0,4046 \text{ (кН)}.$$

Стержень 3–4

$$M_{np} = -149,8322 \text{ (кНм)}, \quad M_{лев} = 0, \quad Q_{34}^0 = 6 \cdot 7 / 2 = 21 \text{ (кН)}, \quad Q_{43}^0 = -6 \cdot 7 / 2 = -21 \text{ (кН)};$$

$$Q_{34} = 21 + (-149,8322 - 0) / 7 = -0,4046 \text{ (кН)},$$

$$Q_{43} = -21 + (-149,8322 - 0) / 7 = -42,4046 \text{ (кН)}.$$

Стержень 4–5

$$M_{\text{пр}} = 149,8322 \text{ (кНм)}, \quad M_{\text{лев}} = 83,2226 \text{ (кНм)}, \quad Q_{45}^0 = Q_{54}^0 = 0;$$

$$Q_{45} = Q_{54} = 0 + (149,8322 - 83,2226) / 3 = 22,2032 \text{ (кН)}.$$

Стержень 5–6

$$M_{\text{пр}} = 83,2226 \text{ (кНм)}, \quad M_{\text{лев}} = 0, \quad Q_{56}^0 = Q_{65}^0 = 0;$$

$$Q_{56} = Q_{65} = 0 + (83,2226 - 0) / 6 = 13,8704 \text{ (кН)}.$$

Стержень 7–8

$$M_{\text{пр}} = 19,9966 \text{ (кНм)}, \quad M_{\text{лев}} = 0, \quad Q_{87}^0 = -10 / 2 = -5 \text{ (кН)}, \quad Q_{78}^0 = 10 / 2 = 5 \text{ (кН)};$$

$$Q_{87} = -5 + (19,9966 - 0) / 6 = -1,6672 \text{ (кН)},$$

$$Q_{78} = 5 + (19,9966 - 0) / 6 = 8,3328 \text{ (кН)}.$$

Стержень 5–7

$$M_{\text{пр}} = -19,9966 \text{ (кНм)}, \quad M_{\text{лев}} = 0, \quad Q_{57}^0 = Q_{75}^0 = 0;$$

$$Q_{57} = Q_{75} = 0 + (-19,9966 - 0) / 7 = -2,8565 \text{ (кН)}.$$

12. Строим эпюру поперечных сил Q_p в заданной раме от нагрузки (рис.1.19).

13. Определяем продольные силы в стержнях рамы (1.28) (рис.1.20).

Узел 2

$$\sum X = 0, \quad N_{23} + 22,2032 = 0, \quad N_{23} = -22,2032 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_{21} - 41,5954 = 0, \quad N_{21} = -41,5954 \text{ (кН)}.$$

Узел 4

$$\sum X = 0, \quad -N_{43} - 22,2032 = 0, \quad N_{43} = -22,2032 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_{45} - 42,4046 = 0, \quad N_{45} = -42,4046 \text{ (кН)}.$$

Узел 5

$$\sum X = 0, \quad N_{57} + 22,2032 - 13,8704 = 0, \quad N_{57} = -8,3328 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_{56} - 42,4046 + 2,8566 = 0, \quad N_{56} = -39,5480 \text{ (кН)}.$$

Узел 7

$$\sum X = 0, \quad -N_{75} - 8,3328 = 0, \quad N_{75} = -8,3328 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_{78} - 2,8566 = 0, \quad N_{78} = -2,8566 \text{ (кН)}.$$

14. Строим эпюру продольных сил N_p в заданной раме от нагрузки (рис.1.21).

15. Выполняем статическую проверку решения, рассматривая равновесие отсеченной части рамы (1.29) (рис.1.22).

$$\sum X = 0, 22,2032 - 13,8710 + 1,6672 - 10 = 0;$$

$$\sum Y = 0, -6 * 14 + 41,5954 + 39,548 + 2,8566 = 0;$$

$$\sum M_1 = 0, 55,6610 + 6 * 14 * 7 - 39,548 * 14 - 2,8566 * 21 - 10 * 3 = 0.$$

1.6.2 Расчет от изменения температурного режима

1. Выбираем основную систему (рис.1.23).

2. Составляем канонические уравнения метода сил (1.5).

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0. \end{cases}$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов M_1, M_2 (рис.1.8; 1.9) и продольных сил (рис.1.24; 1.25) в основной системе от $X_1=1, X_2=1$.

4. Определяем перемещения в основной системе Δ_{1t}, Δ_{2t} (1.14).

$$\Delta_{1t} = 10^{-5} \cdot (-10^\circ + 20^\circ) / 2 \cdot (-7 / 6 \cdot 7) + 10^{-5} \cdot |-10^\circ - 20^\circ| / 0,3 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7) = -0,02491(\text{м});$$

$$\Delta_{2t} = 10^{-5} \cdot (-10^\circ + 20^\circ) / 2 \cdot (-3 / 2 \cdot 7) + 10^{-5} \cdot |-10^\circ - 20^\circ| / 0,3 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7) = -0,03203(\text{м}).$$

5. Решаем систему канонических уравнений и определяем действительные значения неизвестных.

$$\begin{cases} \frac{604,333}{EI_1} X_1 + \frac{119}{EI_1} X_2 - 0,02491 = 0 \\ \frac{119}{EI_1} X_1 + \frac{333}{EI_1} X_2 - 0,03203 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = 4,79324(\text{кН}); \quad X_2 = 17,5244(\text{кН}).$$

6. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от вычисленных значений неизвестных (рис.1.26; 1.27).

7. Строим эпюру изгибающих моментов M_t в заданной раме от изменения температурного режима (1.18) (рис.1.28).

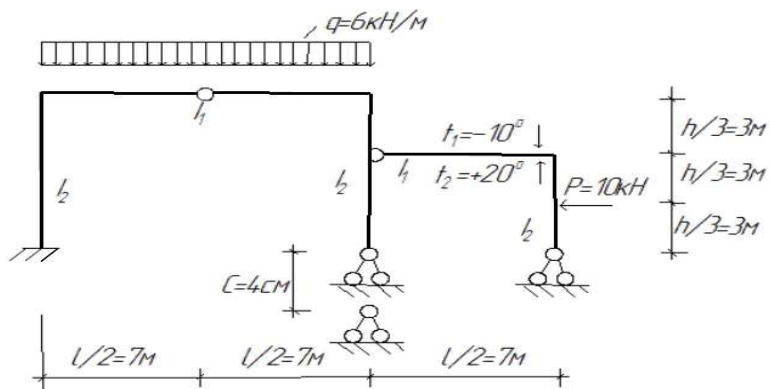


Рис.1.6

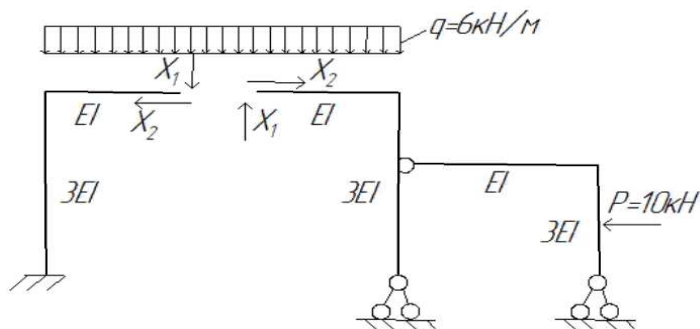


Рис 1.7

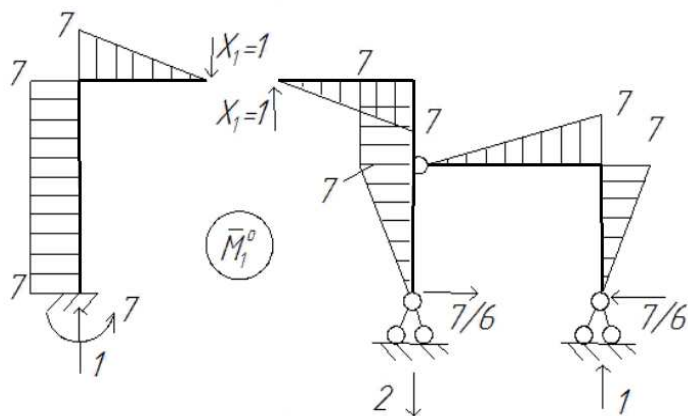


Рис 1.8

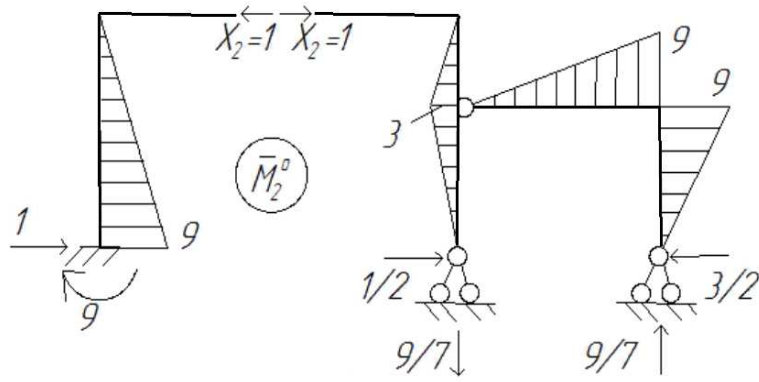


Рис 1.9

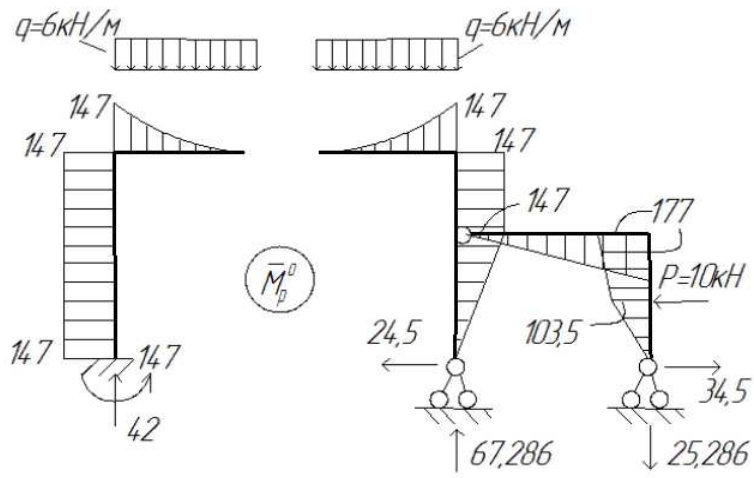


Рис 1.10

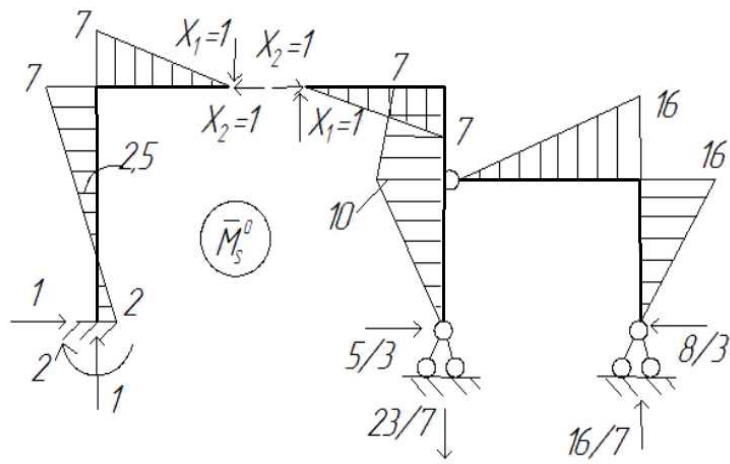


Рис 1.11

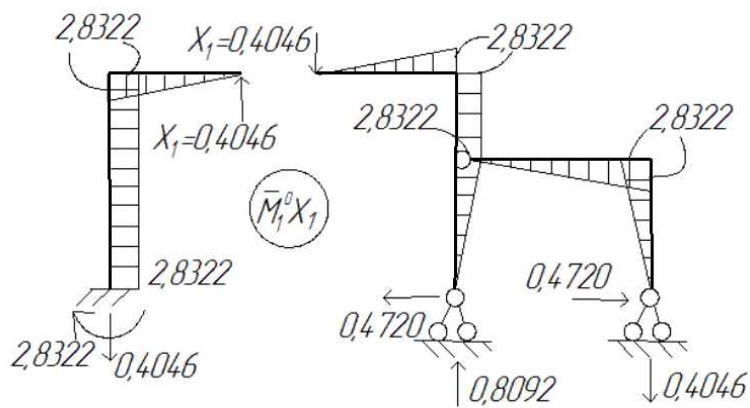


Рис 1.12

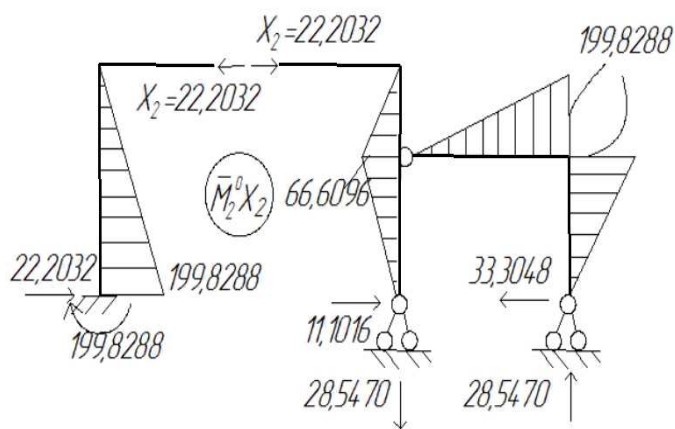


Рис 1.13

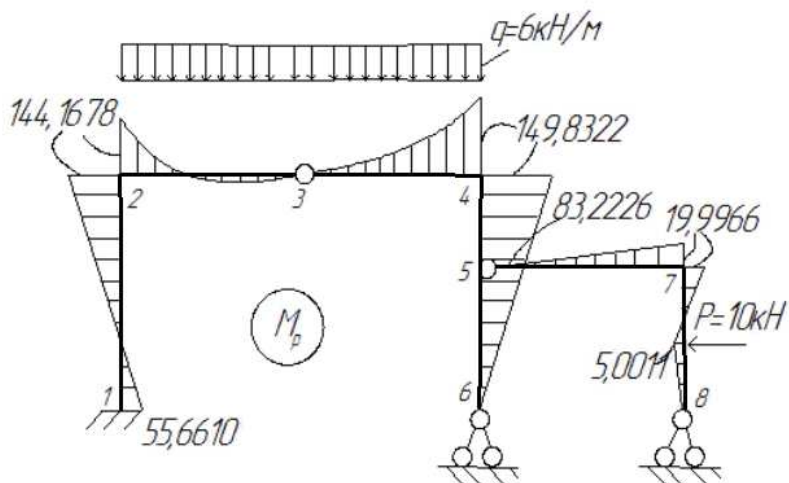


Рис 1.14

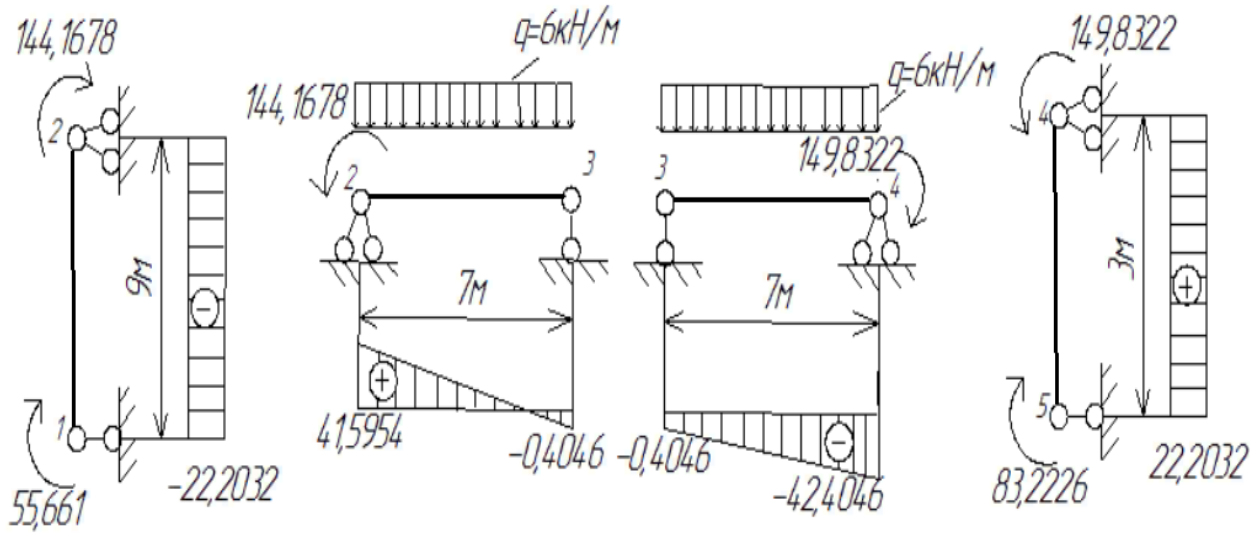


Рис 1.15

Рис 1.16

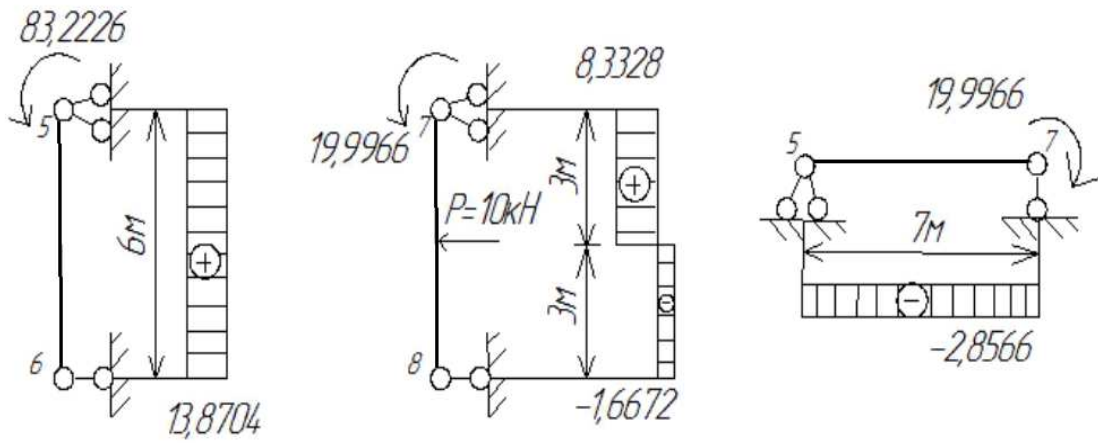


Рис 1.17

Рис 1.18

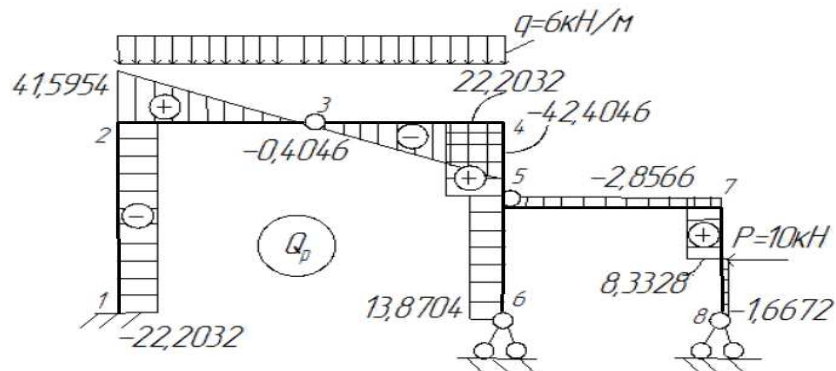


Рис 1.19

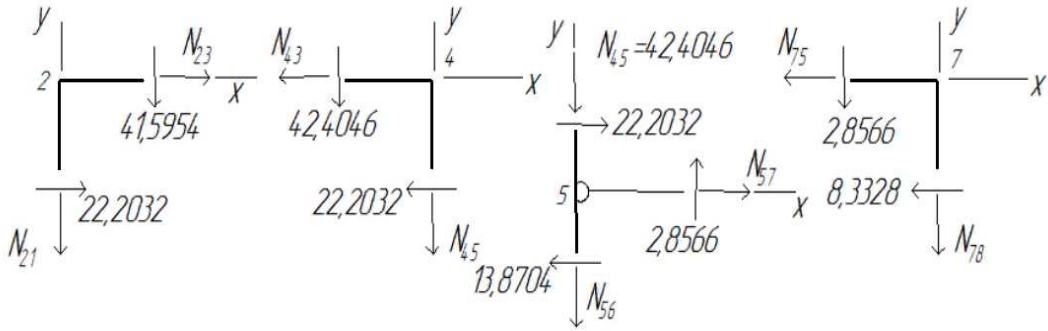


Рис 1.20

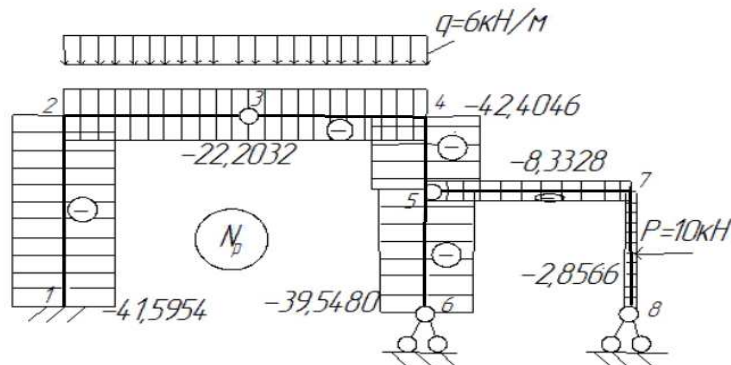


Рис 1.21

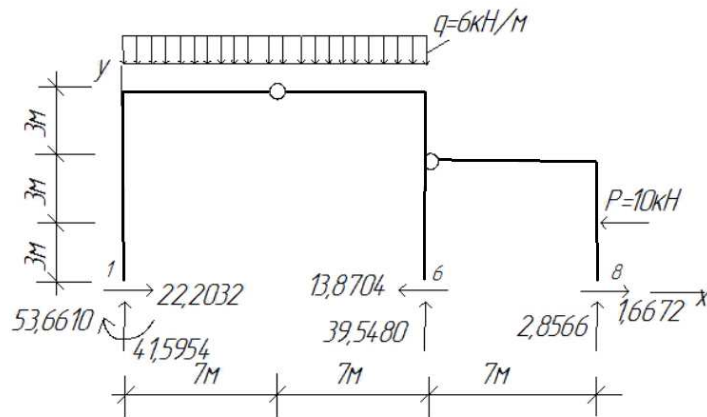


Рис 1.22

8. Выполняем кинематическую проверку решения (1.21).

$$\Delta_{1r} = 10^{-5} \cdot |-10^\circ + 20^\circ| / 2 \cdot (-7/6 \cdot 7) + 10^{-5} \cdot |-10^\circ - 20^\circ| / 0,3 \cdot (-1/2 \cdot 7 \cdot 7) - 7 \cdot 9 \cdot (124,167 - 33,553) / 2 / 3EI_1 + 1/2 \cdot 33,553 \cdot 7 \cdot 2/3 \cdot 7 / EI_1 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \cdot (33,553 + 86,126) / 2 / 3EI_1 + 1/2 \cdot 86,126 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 7 / 3EI_1 + 1/2 \cdot 191,273 \cdot 7 \cdot 2/3 \cdot 7 / EI_1 + 1/2 \cdot 191,273 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 7 / 3EI_1 = 0;$$

$$\Delta_{2r} = 10^{-5} \cdot |-10^\circ + 20^\circ| / 2 \cdot (-7 \cdot 3/2) + 10^{-5} \cdot |-10^\circ - 20^\circ| / 0,3 \cdot (-1/2 \cdot 7 \cdot 9) - 1/2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot (2/3 \cdot 124,167 - 1/3 \cdot 33,553) / 3EI_1 + 1/2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (2/3 \cdot 86,126 + 1/3 \cdot 33,553) / 3EI_1 + 1/2 \cdot 86,126 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 3 / 3EI_1 + 1/2 \cdot 191,273 \cdot 7 \cdot 2/3 \cdot 9 / EI_1 + 1/2 \cdot 191,273 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 9 / 3EI_1 = 0.$$

1.6.3 Расчет от кинематического воздействия

1. Выбираем основную систему (рис.1.29).

2. Составляем канонические уравнения метода сил (1.5).

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1c} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2c} = 0 \end{cases}$$

3. Определяем перемещения в основной системе Δ_{1c} , Δ_{2c} (1.15).

$$\Delta_{1c} = -2 \cdot 0,04 = -0,08 \text{ (м)};$$

$$\Delta_{2c} = -\frac{9}{7} \cdot 0,04 = -0,05143 \text{ (м)}.$$

4. Решаем систему канонических уравнений и определяем действительные значения неизвестных.

$$\begin{cases} \frac{604,333}{EI_1} X_1 + \frac{119}{EI_1} X_2 - 0,08 = 0 \\ \frac{119}{EI_1} X_1 + \frac{333}{EI_1} X_2 - 0,05143 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 21,937 \text{ (кН)}; X_2 = 23,0496 \text{ (кН)}.$$

5. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от вычисленных значений неизвестных (рис.1.30; 1.31).

6. Строим эпюру изгибающих моментов M_c в заданной раме от кинематического воздействия (1.19) (рис.1.32).

7. Выполняем кинематическую проверку решения (1.24).

$$\begin{aligned} \Delta_{sc} = & -23/7 \cdot 0,04 + 9/6 \cdot 3EI_1 (7 \cdot 153,559 + 4 \cdot 2,5 \cdot 49,836 + 2 \cdot 53,887) + \\ & + 1/2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2/3 \cdot 153,559 / EI_1 + 1/2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (2/3 \cdot 153,559 + 1/3 \cdot 222,708) / 3EI_1 + \\ & + 1/2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot (2/3 \cdot 222,708 + 1/3 \cdot 153,559) / 3EI_1 + 1/2 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 2/3 \cdot 361,005 / EI_1 + \\ & + 1/2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 361,005 / 3EI_1 + 1/2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 222,708 / 3EI_1 = 0. \end{aligned}$$

Пример 1.6.2. Выполнить расчет статически неопределимых рам (рис.1.33) от нагрузки, температурных и кинематических воздействий, построить эпюры изгибающих моментов. Результаты решения приведены на рис.1.33.

Пример 1.6.3. Выполнить расчет статически неопределимых рам (рис.1.34–1.37) от нагрузки, изменения температурного режима, кинематических воздействий и построить эпюры усилий самостоятельно.

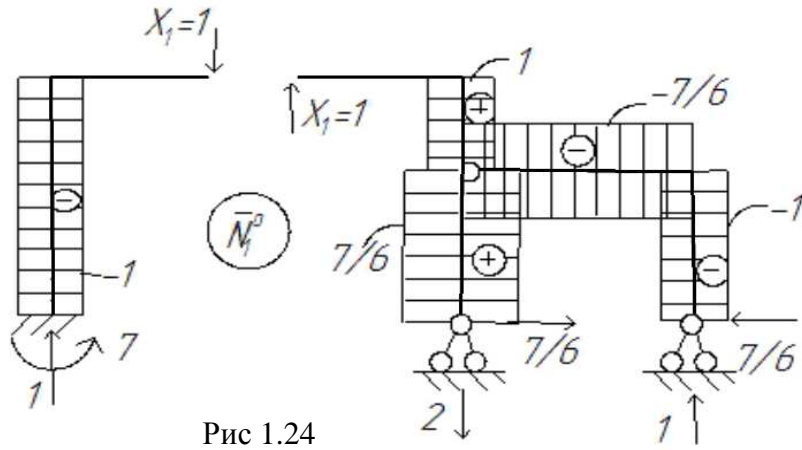


Рис 1.24

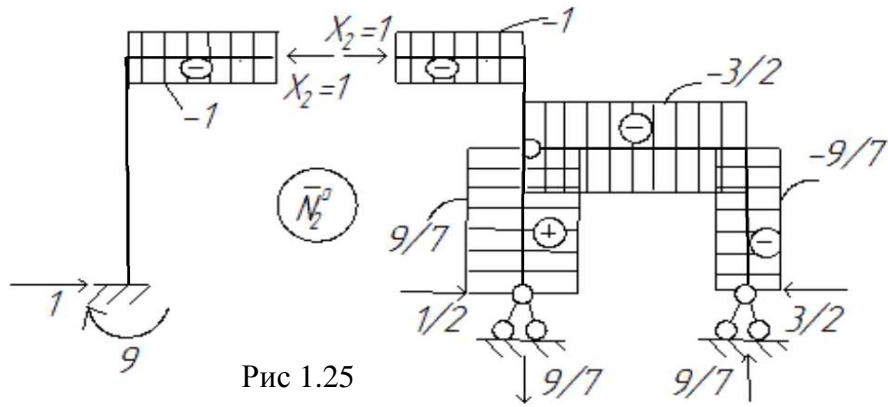


Рис 1.25

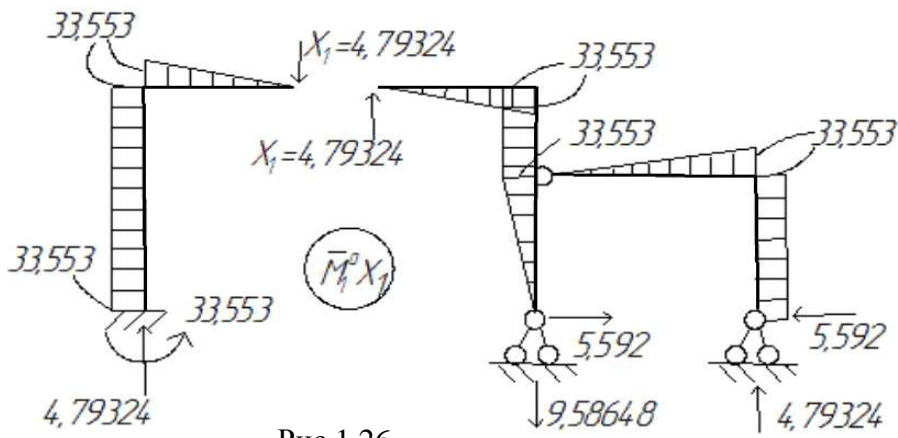


Рис 1.26

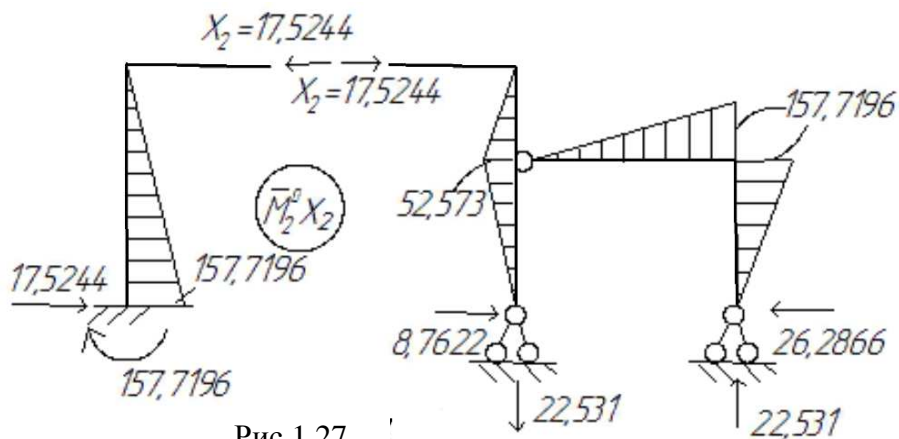


Рис 1.27

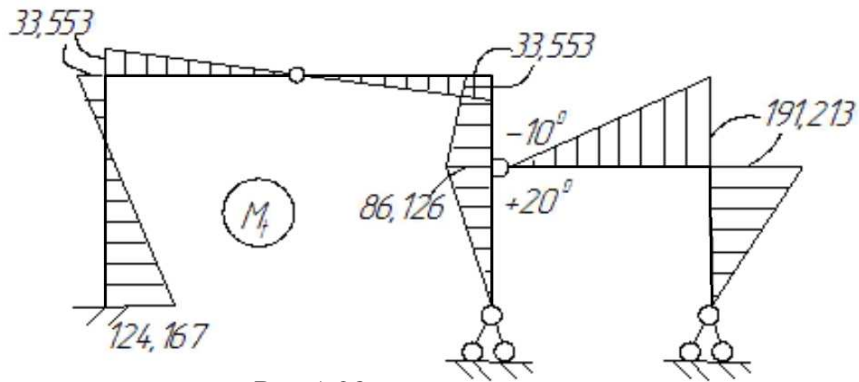


Рис 1.28

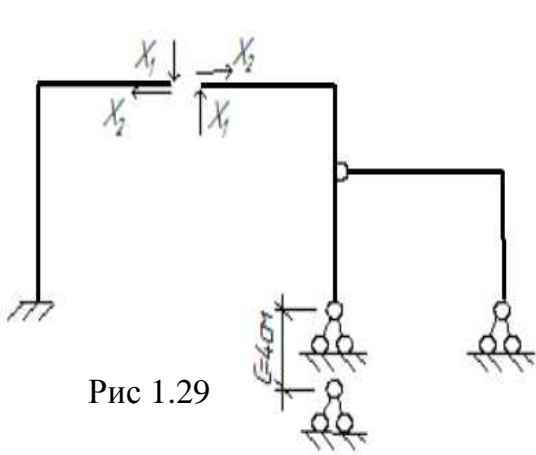


Рис 1.29

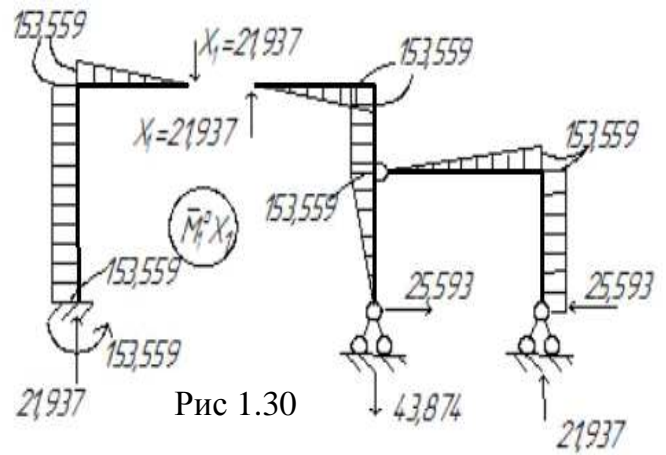


Рис 1.30

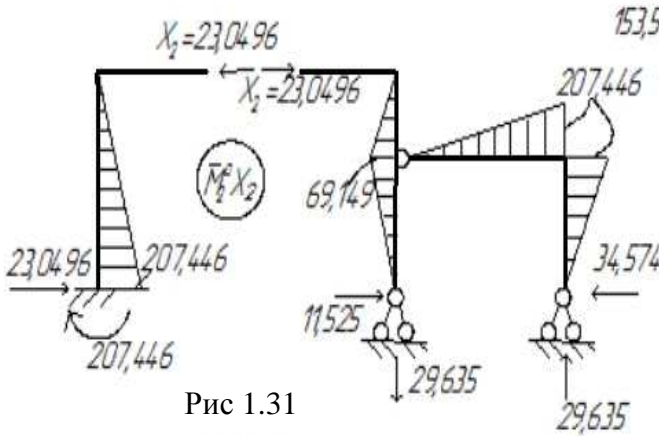


Рис 1.31

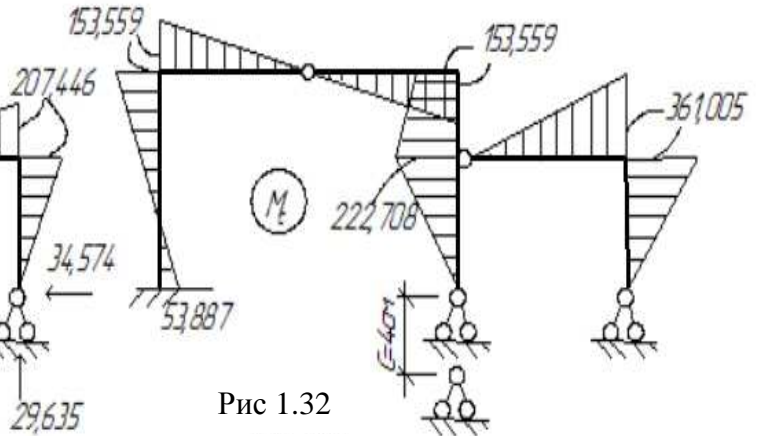


Рис 1.32

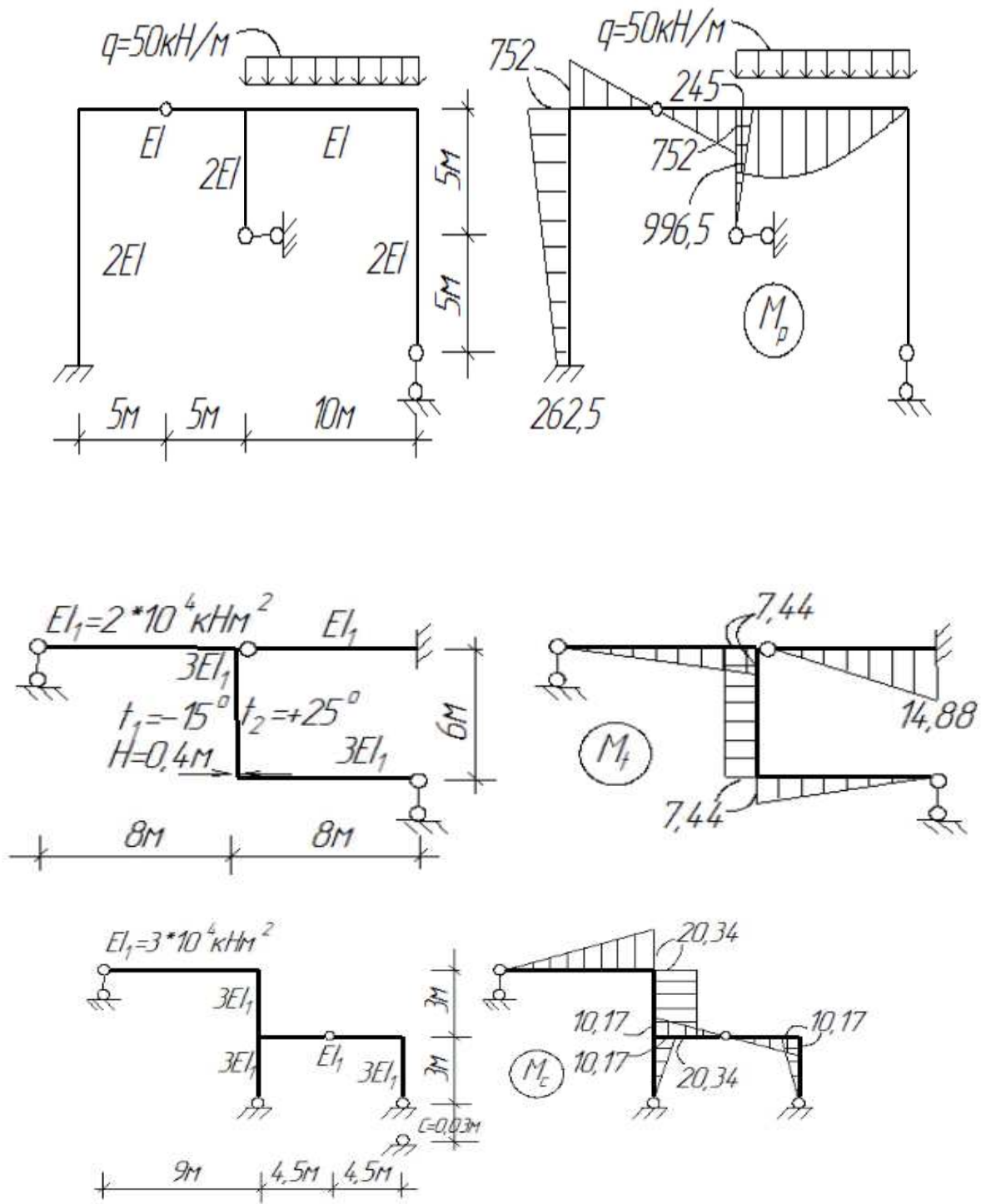


Рис 1.33

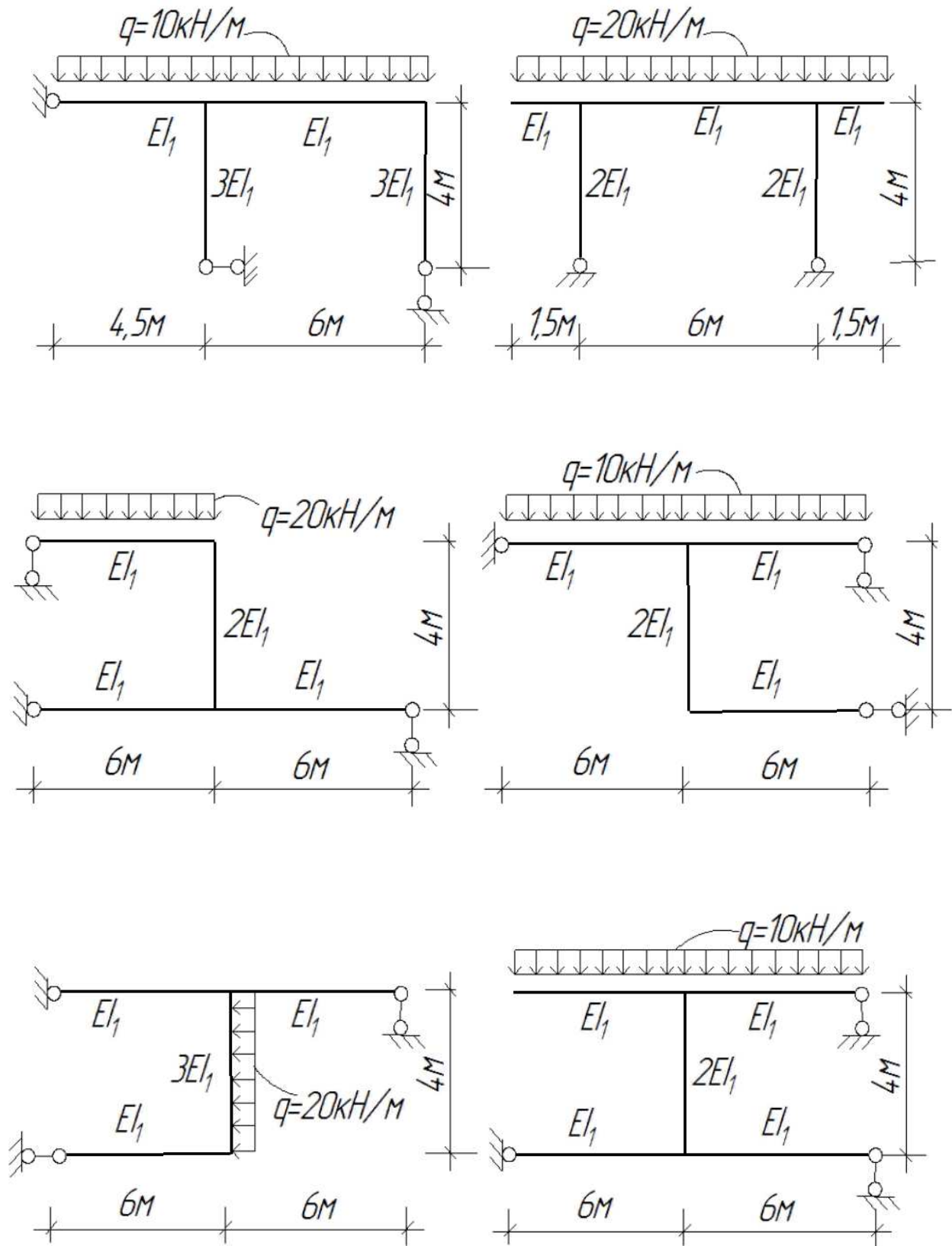


Рис 1.34

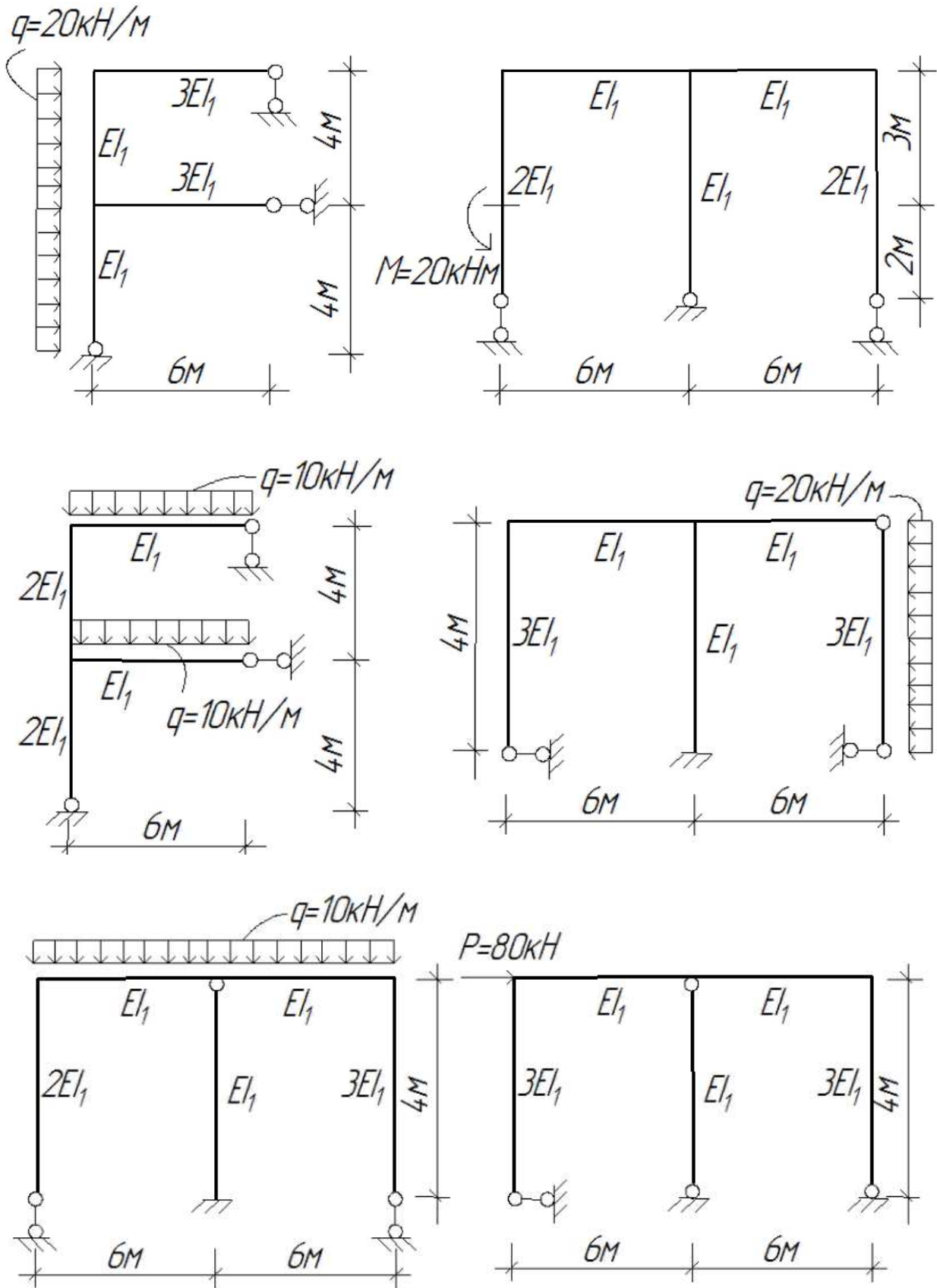


Рис 1.35

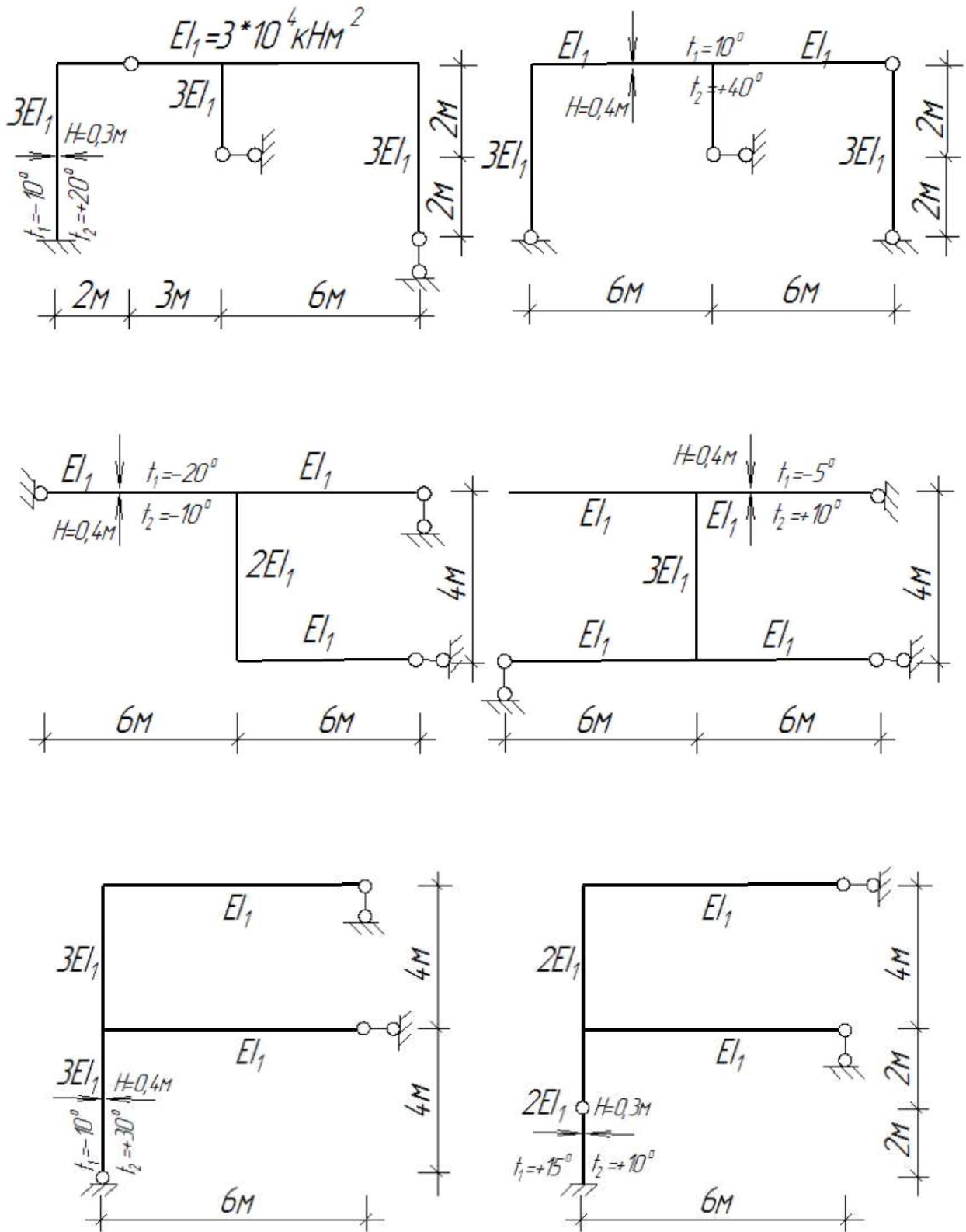


Рис 1.36

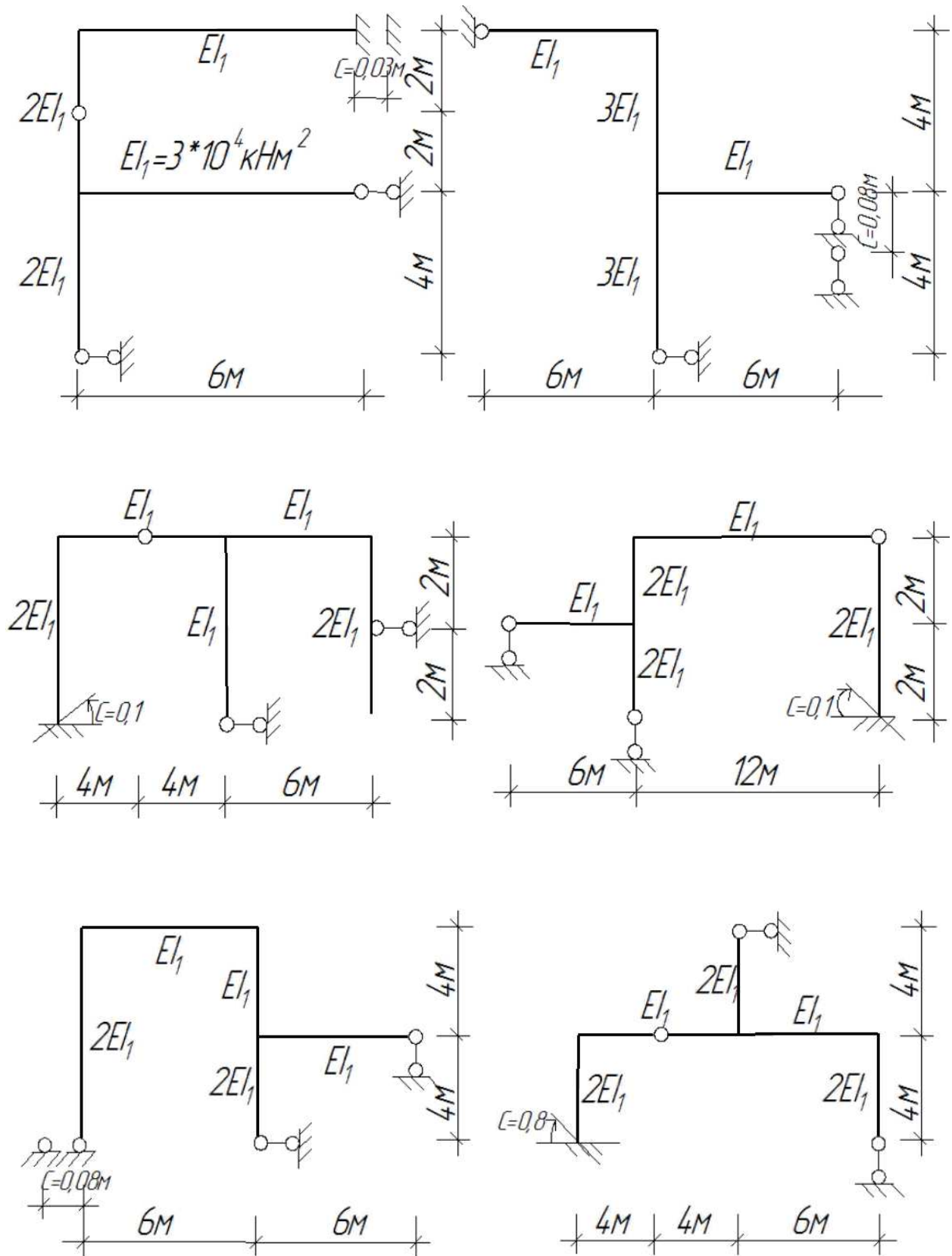


Рис 1.37

2 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Метод перемещений, наряду с методом сил, является одним из основных способов расчета статически неопределимых рам.

Как уже знаем, при расчете статически неопределимых систем методом сил исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются силы (усилия) в этих связях. После их вычисления из канонических уравнений можно определять все остальные усилия, а также перемещения, напряжения и деформации системы.

Напряженно-деформированное состояние статически неопределимых систем можно устанавливать и по-другому. В этом случае связи не исключаются, а наоборот – в систему вводятся дополнительные связи. Тогда за неизвестные принимаются перемещения во введенных связях, которые определяются из канонических уравнений. Поэтому этот метод называется *методом перемещений*

Алгоритм метода перемещений

Метод перемещений реализуется в следующей последовательности:

1. Определение степени кинематической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Построение эпюр моментов в единичных и грузовом состояниях.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений (при необходимости – их проверка).
7. Решение канонических уравнений.
8. Построение эпюр M , Q , N .
9. Проверка правильности расчета. Она проводится аналогично методу сил – статическим и кинематическим способами.

Алгоритмы метода перемещений и метода сил совпадают. Но при более подробном рассмотрении можно выявить не только сходство, но и принципиальные отличия этих методов.

Рассмотрим некоторые из них:

– в методе сил неизвестными являются силы, а в методе перемещений неизвестными являются перемещения; при расчете одной и той же системы число их неизвестных

часто бывает разным, поэтому одни системы проще рассчитывать методом сил, другие – методом перемещений;

– в методе сил основная система получается удалением связей, а в методе перемещений – введением связей; в методе сил вариантов основной системы много, а в методе перемещений она единственна;

– единичные состояния в методе сил определяются воздействием единичных сил, в методе перемещений – единичных перемещений;

– в методе сил необходимые эпюры в основной системе строятся обычным способом, а в методе перемещений – по готовой таблице;

– коэффициенты канонических уравнений в методе перемещений определяются проще (из уравнений статики);

2.1 Основная система метода перемещений.

Определение числа неизвестных метода перемещений

Основная система метода перемещений должна быть кинематически определимой. Значит, для ее получения в заданную систему следует ввести столько дополнительных связей, чтобы концы всех стержней были закреплены и исключены их перемещения. Поэтому общее число вводимых связей будет равно числу неизвестных метода перемещений.

Однако число вводимых связей (а значит и число неизвестных метода перемещений) может быть весьма большим. Например, рама на рис.2.1а состоит из пяти стержней.

При расчете рам методом перемещений определяется общее число неизвестных, которыми являются углы поворота и линейные смещения узлов системы. Следовательно, общее число неизвестных n будет равно сумме неизвестных углов поворота жестких узлов $n_{\text{уг}}$ и неизвестных линейных перемещений узлов $n_{\text{л}}$, то есть степень ее кинематической неопределимости (или число неизвестных метода перемещений) будет $5 \cdot 3 = 15$.

Это число можно уменьшить, если принять следующие **гипотезы**:

- 1) поперечные и продольные деформации стержней малы;
- 2) длина хорды, соединяющей концы изогнутого стержня, равна первоначальной длине стержня;
- 3) в упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

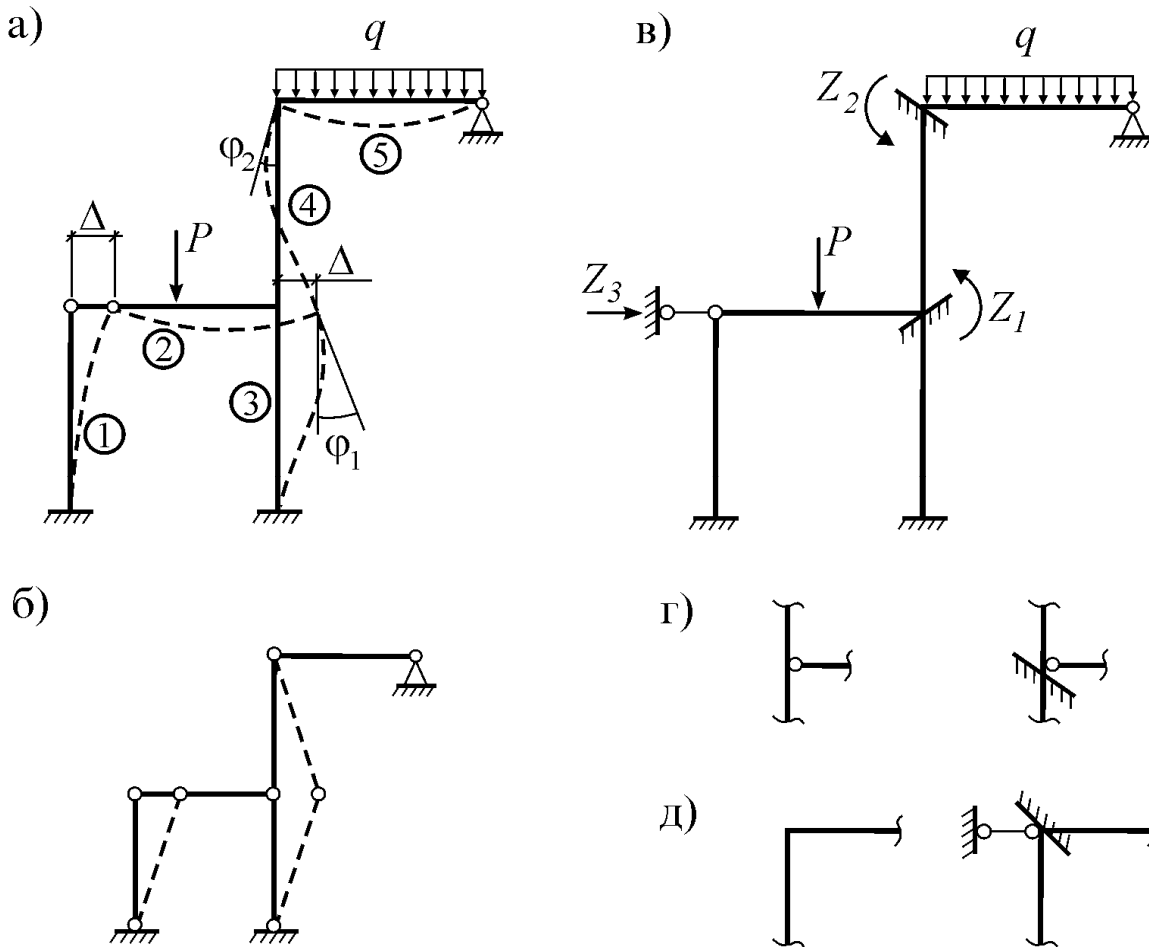


Рис. 2.1

Действительно, в этом случае в данной раме достаточно будет знать только три перемещения – поступательное перемещение Δ и два угловых перемещения ϕ_1 и ϕ_2 (рис.2.1а). Таким образом, число неизвестных уменьшилось немало – с пятнадцати до трех.

Из третьей гипотезы следует, что число неизвестных угловых перемещений определяется числом свободных жестких узлов, обладающих независимыми угловыми перемещениями.

Например, для рам (рис.2.2) узлы 1, 2 (схема а), т.е. $n_{\text{уг}}=2$; узлы 1, 2, 3 (схемы б, в, г), т.е. $n_{\text{уг}}=3$; узел 3 (схемы д, е), т.е. $n_{\text{уг}}=1$.

$$n_{\text{угл}} = \text{числу упругих рамных узлов.}$$

Для определения числа линейных перемещений следует заменить заданную систему ее шарнирно-стержневой схемой путем введения полных шарниров во все

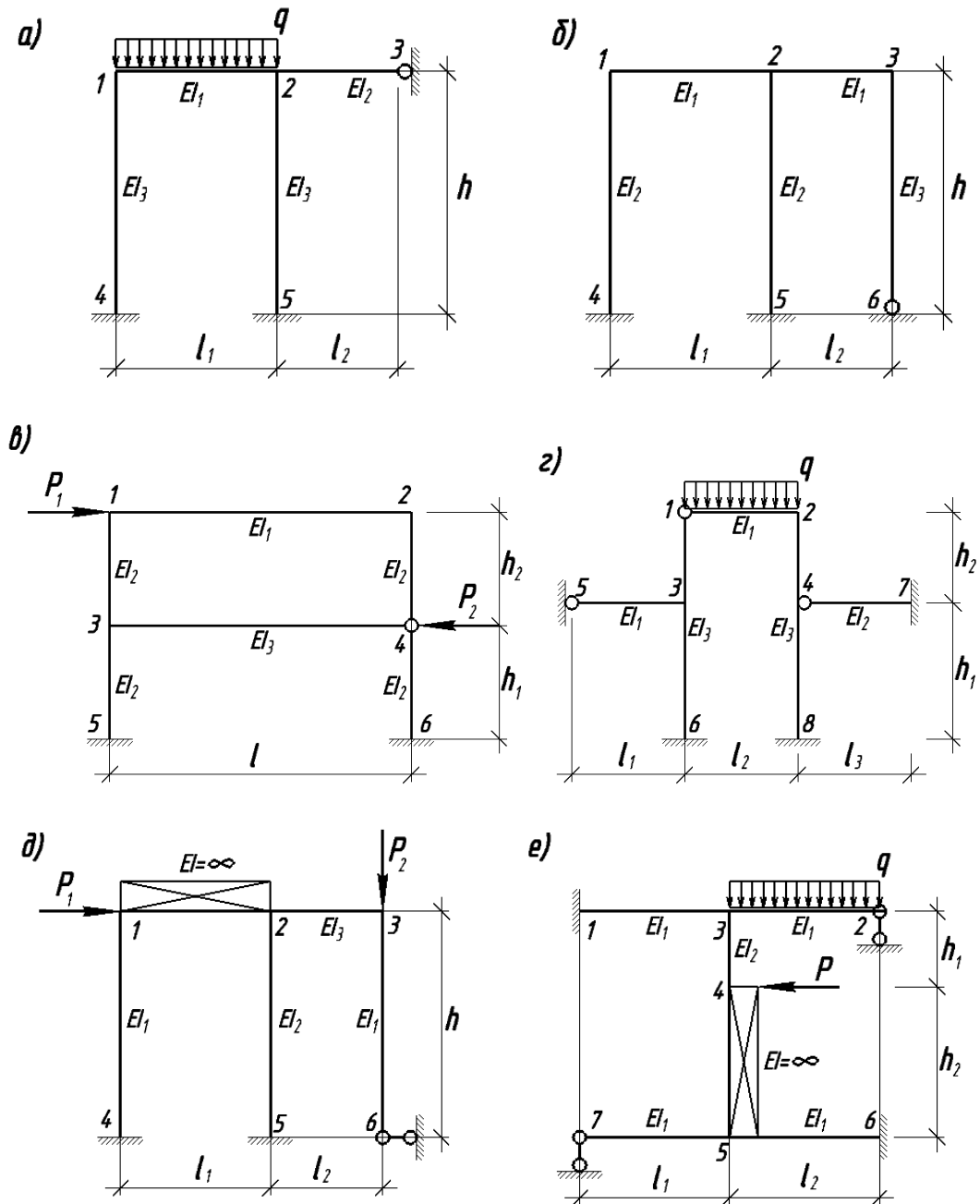


Рис 2.2

жесткие узлы. Количество независимых линейных перемещений узлов такой схемы будет равно степени ее геометрической изменяемости

$$W = 2Y - C - C_0, \quad (2.2)$$

где Y – число узлов, C – число стержней, C_0 – число опорных стержней.

В рассматриваемой раме имеем $n_{\text{лин}} = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$.

Например, для рам (рис. 2.2) образуем шарнирно-стержневые схемы (рис. 2.3), степени геометрической изменяемости которых равны: $W = 2 \cdot 5 - 4 - 6 = 0$ (схема а),

$W = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$ (схема б), $W = 2 \cdot 6 - 6 - 4 = 2$ (схема в), $W = 2 \cdot 8 - 7 - 8 = 1$ (схема г), $W = 2 \cdot 6 - 5 - 5 = 2$ (схема д) и $W = 2 \cdot 7 - 6 - 6 = 2$ (схема е).

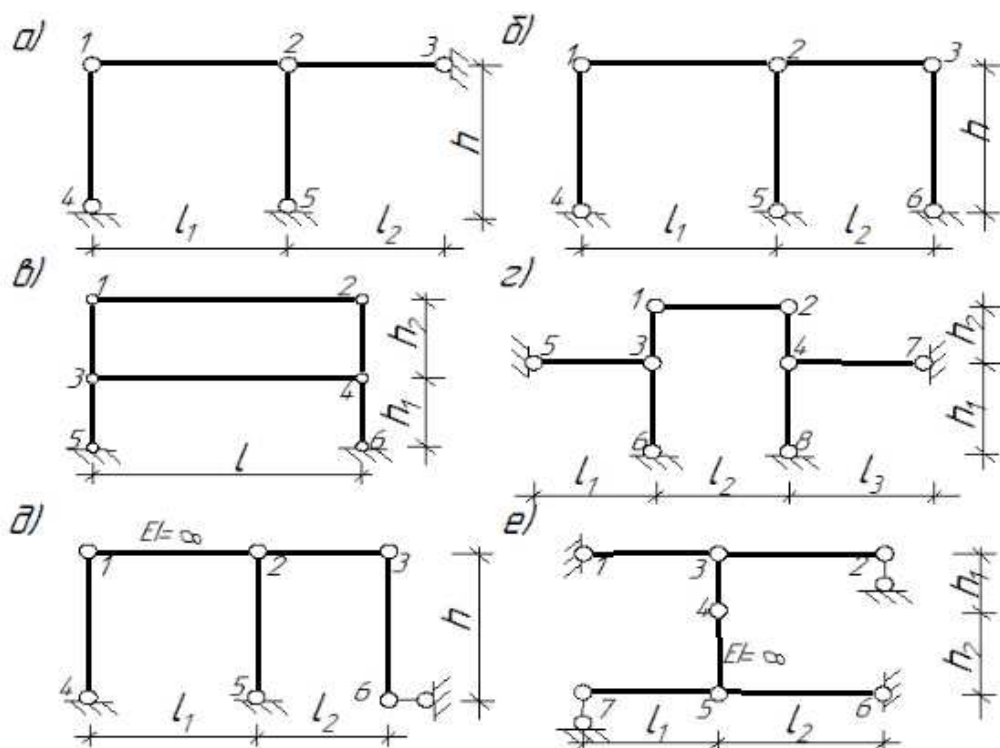


Рис 2.3

Общее число всех неизвестных перемещений определяется по формуле

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}}$$

и называется **степенью кинематической неопределенности**. Сами неизвестные перемещения обозначаются однотипно: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$.

После определения числа неизвестных в заданной системе следует вводить столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней. Например, в рассмотренную раму введем две заделки и одну опорную связь. Полученная схема (рис. 2.1 в) будет **основной системой метода перемещений**.

Таким образом, для получения основной системы метода перемещений необходимо:

– в упругие рамные узлы заданной системы ввести $n_{\text{угл}}$ жёстких связей;

– в направлении линейных перемещений узлов заданной системы ввести $n_{\text{лин}}$ опорных связей (они вводятся так, чтобы шарнирно - стержневая система на рис.2.3 стала геометрически неизменяемой).

При введении связей необходимо помнить, что, во-первых, введенная жесткая связь исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность линейного смещения; во-вторых, введенная опорная связь исключает только линейное перемещение узла, оставляя возможность поворота (рис. 2.1 г, д).

При соблюдении этих требований основная система метода перемещений будет единственной.

Например, основные системы для схем (рис.2.2) приведены на рис.2.4. При таком выборе основной системы заданная система расчленяется на два типа стержневых элементов:

- стержни с жестко заземленными концами,
- стержни с одним жестким и другим шарнирным узлами,

которые могут находиться под действием кинематических воздействий в виде угловых и относительных линейных перемещений своих концов, а также под действием нагрузки. Это существенно упрощает реализацию метода перемещений, если предварительно произвести расчет выделенных элементов на указанные воздействия методом сил и определить концевые усилия в них. Результаты расчетов приведены в табл. 2.1.

2.2 Канонические уравнения метода перемещений

Основная система метода перемещений, как указывалось выше, образуется из заданной путем введения n -моментных и силовых связей.

Следовательно, основная система по своему состоянию будет отличаться от заданной. Для приведения ее работы к работе заданной системы вновь введенным связям в основной системе придадим соответствующие перемещения Z_j и потребуем, чтобы реакции в этих связях, вызванные перемещениями Z_j и действующей нагрузкой, были равны нулю, то есть

$$\begin{aligned}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0, \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0, \\
 \dots & \\
 r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

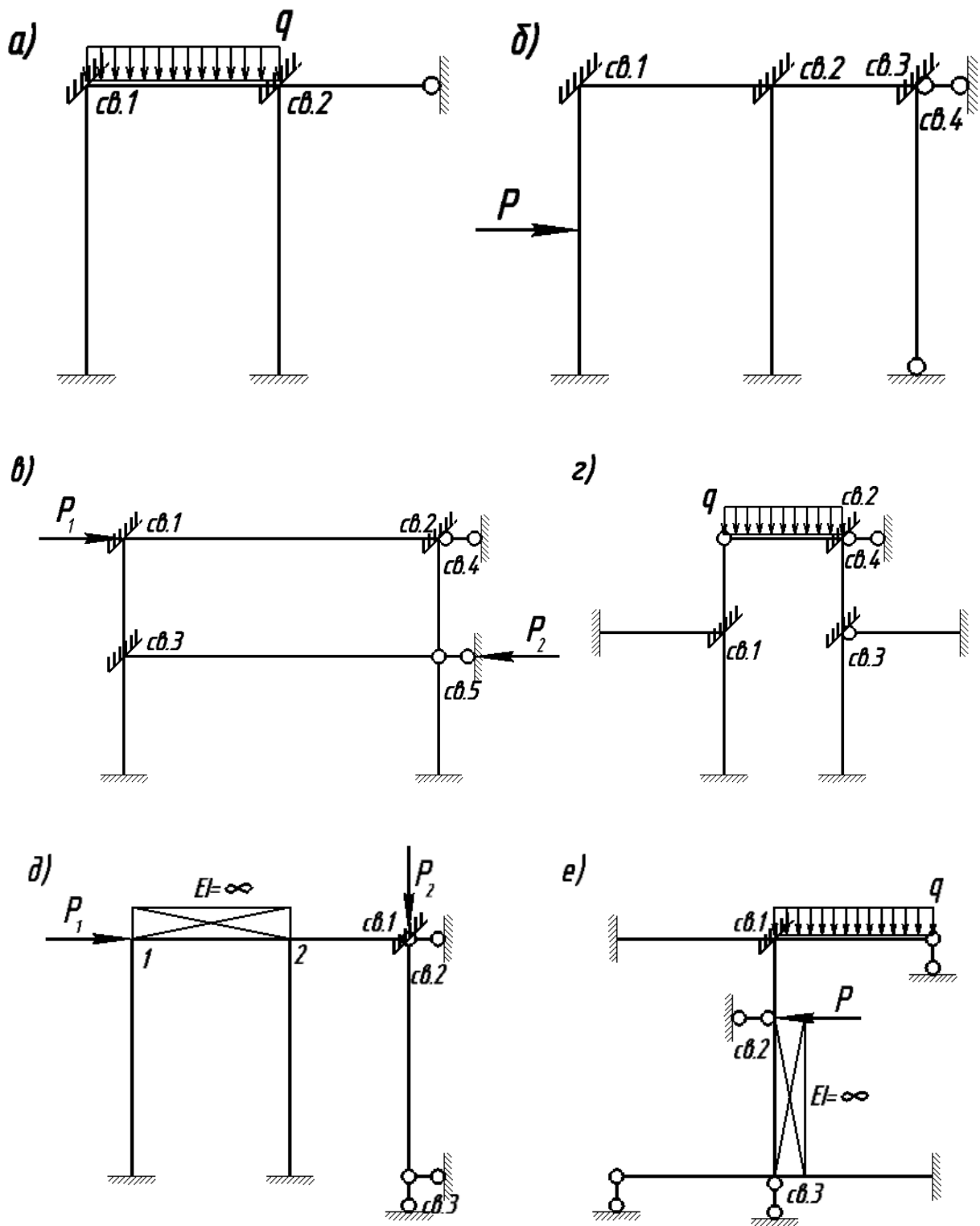


Рис 2.4

Таблица 2.1 Концевые реактивные усилия

№ п/п	Тип элемента, характер воздействия, эюры внутренних усилий	Концевые реактивн. усилия			
		Моменты		Поперечные силы	
		M_{ab}	M_{ba}	Q_{ab}	Q_{ba}
1	2	3	4	5	6
1		$\frac{4EI}{l}$	$\frac{2EI}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$
		$4i$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$
2		$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{12EI}{l^3}$
		$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$	$\frac{12i}{l^2}$	$\frac{12i}{l^2}$
3		$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
4		$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$

продолжение таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6
1		$\frac{3EI}{l}$	0	$-\frac{3EI}{l^2}$	$-\frac{3EI}{l^2}$
2		$-\frac{3EI}{l^2}$	0	$\frac{3EI}{l^3}$	$\frac{3EI}{l^3}$
3		$-\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
4		$-\frac{3Pl}{16}$	0	$\frac{11P}{16}$	$-\frac{5P}{16}$

Канонические уравнения метода перемещений (2.3) имеют статический смысл, поскольку выражают отсутствие реакций во введенных связях основной системы от единичных перемещений введенных связей и от заданной нагрузки.

Коэффициенты при неизвестных r_{ij} в уравнениях представляют собой удельные реакции, то есть реакции в связи i основной системы от $Z_j=1$, определяемые в общем случае для систем с m -стержнями по формуле

$$r_{ij} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^* \bar{M}_j^*}{EI} ds. \quad (2.4)$$

Удельные реакции r_{ij} разделяются на главные удельные реакции r_{ii} , r_{ij} , которые положительны, и побочные удельные реакции r_{ik} ($i \neq k$), которые принимают произвольные значения. Поскольку побочные удельные реакции по теореме Релея обладают свойством взаимности $r_{ik} = r_{ki}$, то матрица системы канонических уравнений (2.3) будет всегда симметрична по отношению к главной диагонали. Свободные члены R_{ip} уравнений (2.3) представляют собой реакции во вновь введенных связях основной системы от действующей нагрузки и определяются по формуле

$$R_{ip} = - \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^* M_p^*}{EI} ds, \quad (2.5)$$

где \bar{M}_i^* , \bar{M}_j^* – изгибающие моменты от единичных перемещений $Z_i=1$, $Z_j=1$, в основной системе метода перемещений; M_p^* – изгибающий момент в любой статически определимой системе, полученной из заданной путем устранения избыточных связей.

Построение эпюр изгибающих моментов от указанных воздействий выполняется в соответствии с таблицей концевых реактивных усилий и статическим способом вырезания узлов и простых сечений. Для вычисления реакций r_{ij} , R_{ip} можно применить правило Верещагина [6]

$$r_{ij} = \sum_{v=1}^m \frac{\omega_i Y_{0j}}{EI_v}; \quad R_{ip} = -\sum_{v=1}^m \frac{\omega_p Y_{0i}}{EI_v}. \quad (2.6)$$

Наряду с общим способом имеется статический метод определения реакций r_{ij} , R_{ip} . Он основан на применении уравнений статики, поскольку коэффициенты и свободные члены уравнений представляют собой реакции связей основной системы. Реакцию в моментной связи можно определить из условия равновесия вырезанного узла основной системы в виде суммы моментов, приложенных к узлу. Реакция в линейной связи определяется из уравнения равновесия отсеченной части основной системы, содержащей эту силовую связь. Положительное направление определяемых силовых и моментных реакций совпадает с положительным направлением единичного перемещения данной связи в основной системе. Статический способ удобно применять при определении моментных реакций во всех случаях и силовых реакций в рамах с параллельными стойками. Для рам с наклонными или непараллельными стержнями в уравнения равновесия необходимо включить не только поперечные, но и продольные силы в сечениях, что усложняет решение. Поэтому в этом случае удобно пользоваться общим способом определения коэффициентов посредством перемножения эпюр.

Для проверки правильности определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений существуют следующие проверки:

1. Построчная

$$r_{sj} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^* \bar{M}_j}{EI} ds = r_{j1} + r_{j2} + \dots + r_{jn}, \quad (2.7)$$

выполняемая для каждой строки системы уравнений (2.3).

Здесь $\bar{M}_s^* = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i^*$ – изгибающий момент от единичного перемещения всех

введенных связей $Z_1=1, \dots, Z_n=1$ в основной системе метода перемещений.

2. Универсальная

$$r_{ss} = \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{(\bar{M}_s^*)^2}{EI} ds = \sum_{i=1}^n r_{ii} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n r_{ij}, \quad (i \neq j). \quad (2.8)$$

3. Свободных членов

$$R_{sp} = - \sum_{v=1}^m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_p^{0*}}{EI} ds = R_{1p} + \dots + R_{np}. \quad (2.9)$$

Решение системы канонических уравнений (2.3) с симметричной матрицей коэффициентов при неизвестных выполняется одним из методов линейной алгебры.

2.3 Построение эпюр усилий в заданной системе от нагрузки

Решением системы уравнений (2.3) определяем действительные значения неизвестных, которые позволяют вычислить концевые реактивные моменты и построить эпюру изгибающих моментов от нагрузки M_p . Для стержня с жесткими узлами по концам (рис.2.5а) концевые реактивные моменты будут:

$$\begin{aligned} M_{ab} &= 2 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} (2Z_a + Z_b - 3 \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}}) + M_{ab}^*, \\ M_{ba} &= 2 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} (Z_a + 2Z_b - 3 \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}}) + M_{ba}^*. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для стержня с одним жестким и другим шарнирным узлами (рис.2.4б) эти выражения имеют вид:

$$M_{ab} = 3 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} (Z_a - \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}}) + M_{ab}^*, \quad M_{ba} = 0. \quad (2.11)$$

Здесь M_{ab}^* и M_{ba}^* – табличные значения концевых моментов от нагрузки.

Изгибающие моменты M_p в заданной системе от нагрузки также могут быть вычислены и в соответствии с принципом независимости действия сил

$$M_p = M_p^* + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i^* Z_i, \quad (2.12)$$

где M_p^* – изгибающий момент от нагрузки в основной системе метода перемещений.

Построенная эпюра изгибающих моментов M_p должна удовлетворять условиям равновесия узлов и кинематической проверке (1.20).

Определение поперечных сил в сечениях заданной рамы от нагрузки и построение эпюры Q_p можно выполнять по значениям концевых поперечных сил. Для стержня с жесткими узлами по концам (рис.2.5а) концевые поперечные силы будут:

$$\begin{aligned}
 Q_{ab} &= -6 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \left(Z_a + Z_b - 2 \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}} \right) + Q_{ab}^*, \\
 Q_{ba} &= -6 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \left(Z_a + Z_b - 2 \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}} \right) + Q_{ba}^*.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Для стержня с одним жестким и другим шарнирным узлами (рис.2.5б) эти выражения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 Q_{ab} &= -3 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \left(Z_a - \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}} \right) + Q_{ab}^*, \\
 Q_{ba} &= -3 \frac{EI_{ab}}{l_{ab}} \left(Z_a - \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}} \right) + Q_{ba}^*.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Здесь Q_{ab}^* и Q_{ba}^* – табличные значения концевых поперечных сил от нагрузки.

Эпюру Q_p можно построить и по известной эпюре изгибающих моментов M_p , рассматривая равновесие всех вырезанных из системы стержней (рис.1.4 и 1.27). Построение эпюры продольных сил N_p в заданной раме от нагрузки можно вычислять по эпюре Q_p , рассматривая равновесие ее узлов (рис.1.5 и 1.28). Для оценки правильности вычислений усилий и построения эпюр выполняется статическая проверка (1.29).

2.4 Примеры расчета статически неопределимых рам методом перемещений

Пример 2.4.1. Выполнить расчет статически неопределимой рамы (рис.2.5в), вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от нагрузки при $I_1 : I_2 = 3 : 4$.

Решение

1. Определяем число неизвестных метода перемещений.

$$n = n_{\text{уг}} + n_{\text{л}} = 2 + 1 = 3.$$

2. Выбираем основную систему (рис.2.5г).

3. Составляем канонические уравнения метода перемещений.

$$\begin{cases}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}\delta_3 + R_{1p} = 0 \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}\delta_3 + R_{2p} = 0 \\
 r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}\delta_3 + R_{3p} = 0
 \end{cases}$$

4. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от неизвестных $Z_1=1$, $Z_2=1$, $\delta_3=1$ и от заданной нагрузки (рис.2.5д; 2.6а).

5. Определяем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений (рис.2.5 д; 2.6).

$$r_{11} = EI_2 + \frac{3}{8}EI_2 + \frac{1}{4}EI_2 = \frac{13}{8}EI_2; \quad r_{12} = \frac{1}{8}EI_2; \quad r_{13} = \frac{1}{2}EI_2 - \frac{1}{16}EI_2 = \frac{7}{16}EI_2; \quad R_{1p} = 36;$$

$$r_{21} = \frac{1}{8}EI_2; \quad r_{22} = \frac{1}{4}EI_2 + \frac{1}{2}EI_2 = \frac{3}{4}EI_2; \quad r_{23} = -\frac{1}{8}EI_2; \quad R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} = \frac{1}{2}EI_2 - \frac{1}{16}EI_2 = \frac{7}{16}EI_2; \quad r_{32} = -\frac{1}{8}EI_2; \quad r_{33} = \frac{1}{3}EI_2 + \frac{1}{96}EI_2 + \frac{1}{24}EI_2 = \frac{37}{96}EI_2; \quad R_{3p} = -22.$$

6. Строим эпюры изгибающих моментов \bar{M}_s^*, M_p^{0*} (рис.2.7) и выполняем проверку правильности вычисления реакций (2.7 – 2.9).

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \sum_{j=1}^{m=4} \frac{(\bar{M}_s^*)^2}{EI} ds = \frac{1}{2}EI_2 \cdot 1,2 \cdot \frac{2}{3}EI_2 \cdot \frac{4}{3EI_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}EI_2 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}EI_2 \cdot \frac{4}{3EI_2} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16}EI_2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16}EI_2 \cdot \frac{4}{3EI_2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}EI_2 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}EI_2 \cdot \frac{1}{EI_2} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}EI_2 \cdot 4,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}EI_2 \cdot \frac{4}{3EI_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}EI_2 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}EI_2 \cdot \frac{4}{3EI_2} = 3,6354EI_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{ss} &= (r_{11} + r_{22} + r_{33}) + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = \frac{13}{8}EI_2 + \frac{3}{4}EI_2 + \frac{37}{96}EI_2 + 2\left(\frac{1}{8}EI_2 + \frac{7}{16}EI_2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8}EI_2\right) = 3,6354EI_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{sp} &= -\sum_{j=1}^{m=4} \int_0^l \frac{\bar{M}_s^* M_p^{0*}}{EI} ds = -\left(\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 3\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16}EI_2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{32}EI_2\right) \frac{4}{3EI_2} - 96 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}EI_2 \frac{1}{EI_2} + \right. \\ &+ 96 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}EI_2 \frac{1}{EI_2} - \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}EI_2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}EI_2\right) \frac{4}{3EI_2} - \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}EI_2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}EI_2\right) \frac{4}{3EI_2}\left.) = 14; \end{aligned}$$

$$R_{sp} = R_{1p} + R_{2p} + R_{3p} = 36 + 0 - 22 = 14.$$

7. Формируем и решаем систему канонических уравнений.

$$\begin{cases} \frac{13}{8}EI_2Z_1 + \frac{1}{8}EI_2Z_2 + \frac{7}{16}EI_2\delta_3 + 36 = 0 \\ \frac{1}{8}EI_2Z_1 + \frac{3}{4}EI_2Z_2 - \frac{1}{8}EI_2\delta_3 + 0 = 0 \\ \frac{7}{16}EI_2Z_1 - \frac{1}{8}EI_2Z_2 + \frac{37}{96}EI_2\delta_3 - 22 = 0 \end{cases}$$

$$Z_1 = -\frac{61,9184}{EI_2}; Z_2 = \frac{33,3530}{EI_2}; \delta_3 = \frac{138,1840}{EI_2}.$$

8. Определяем значения концевых реактивных изгибающих моментов (2.10; 2.11) и строим эпюру M_p (рис.2.8а).

$$M_{12} = 4 \frac{EI_2}{16} \left(-\frac{61,9184}{EI_2}\right) + 2 \frac{EI_2}{16} \cdot \frac{33,353}{EI_2} - 6 \frac{EI_2}{16^2} \cdot 0 + 0 = -11,31 \text{ (кНм)};$$

$$M_{21} = 4 \frac{EI_2}{16} \cdot \frac{33,353}{EI_2} + 2 \frac{EI_2}{16} \left(-\frac{61,9184}{EI_2}\right) - 6 \frac{EI_2}{16^2} \cdot 0 + 0 = 0,60 \text{ (кНм)};$$

$$M_{25} = 4 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{33,353}{EI_2} + 2 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6} \cdot 0 - 6 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6^2} \cdot \frac{138,184}{EI_2} + 0 = -0,60 \text{ (кНм)};$$

$$M_{52} = 4 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6} \cdot 0 + 2 \frac{3EI_2}{EI_2} - 6 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6^2} \cdot \frac{138,184}{EI_2} + 0 = -8,94 \text{ (кНм)};$$

$$M_{13} = 4 \frac{3EI_2}{4 \cdot 3} \cdot \left(-\frac{61,9184}{EI_2}\right) + 2 \frac{3EI_2}{4 \cdot 3} \cdot 0 + 6 \frac{3EI_2}{4 \cdot 3^2} \cdot \frac{138,184}{EI_2} + 0 = 7,17 \text{ (кНм)};$$

$$M_{31} = 4 \frac{3EI_2}{4 \cdot 3} \cdot 0 + 2 \frac{3EI_2}{4 \cdot 3} \left(-\frac{61,9184}{EI_2}\right) + 6 \frac{3EI_2}{4 \cdot 3^2} \cdot \frac{138,184}{EI_2} + 0 = 38,13 \text{ (кНм)};$$

$$M_{14} = 3 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6} \cdot \left(-\frac{61,9184}{EI_2}\right) - 3 \frac{3EI_2}{4 \cdot 6^2} \cdot \frac{138,184}{EI_2} + \frac{3}{16} \cdot 32 \cdot 6 = 4,14 \text{ (кНм)};$$

$$M_{41} = 0.$$

9. Выбираем из заданной рамы произвольную статически определимую систему (рис.2.7б), строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_3^0 (рис.2.8в) и производим кинематическую проверку эпюры M_p .

$$\Delta_{3p}^0 = \sum_{j=1}^{m=4} \int_0^l \frac{\bar{M}_3^0 M_p}{EI} ds = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 38,13 - \frac{1}{3} \cdot 7,17\right) \frac{4}{3EI_2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot 8,94 - \frac{1}{3} \cdot 0,6\right) \frac{4}{3EI_2} = 0.$$

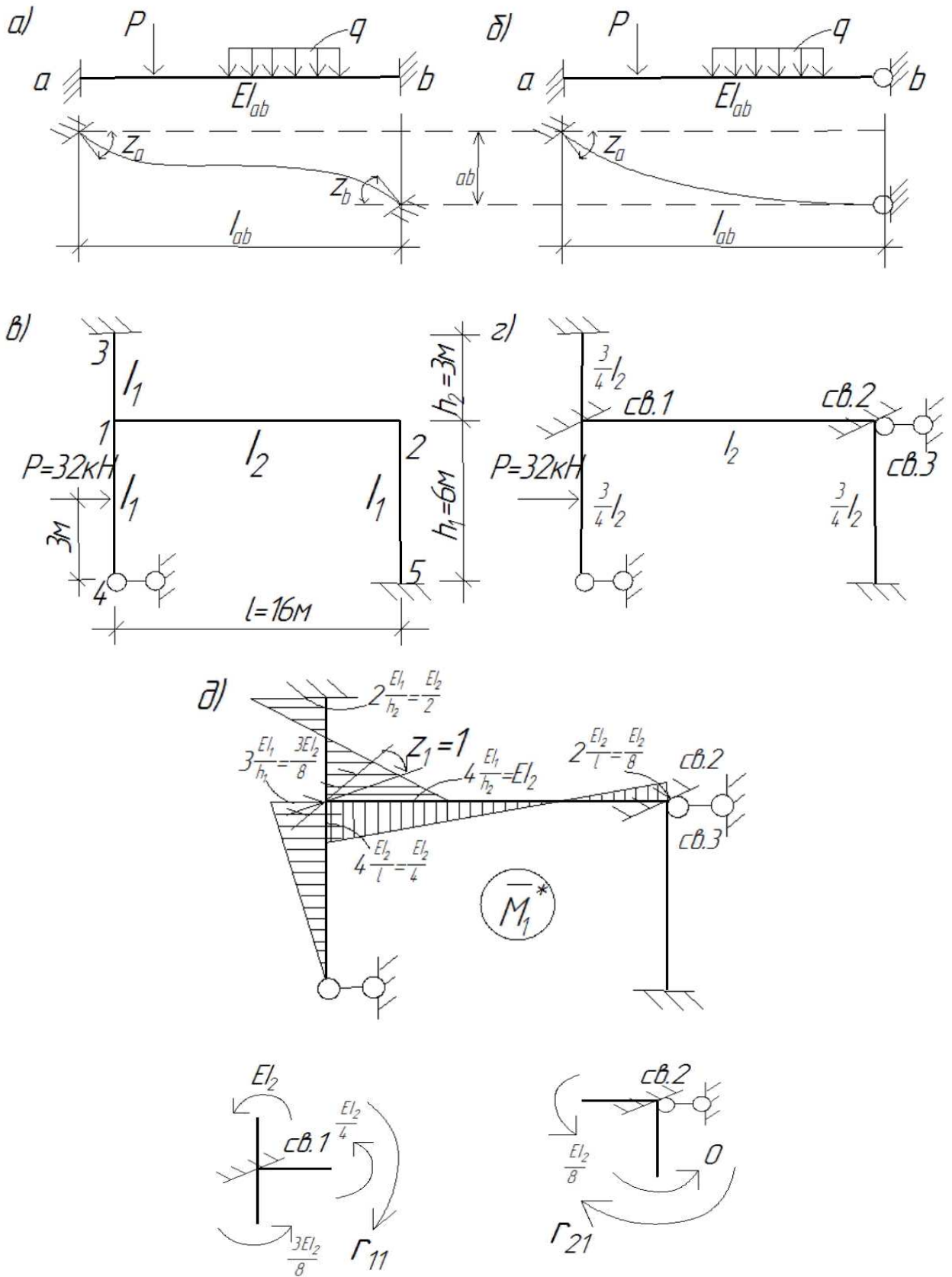


Рис 2.5

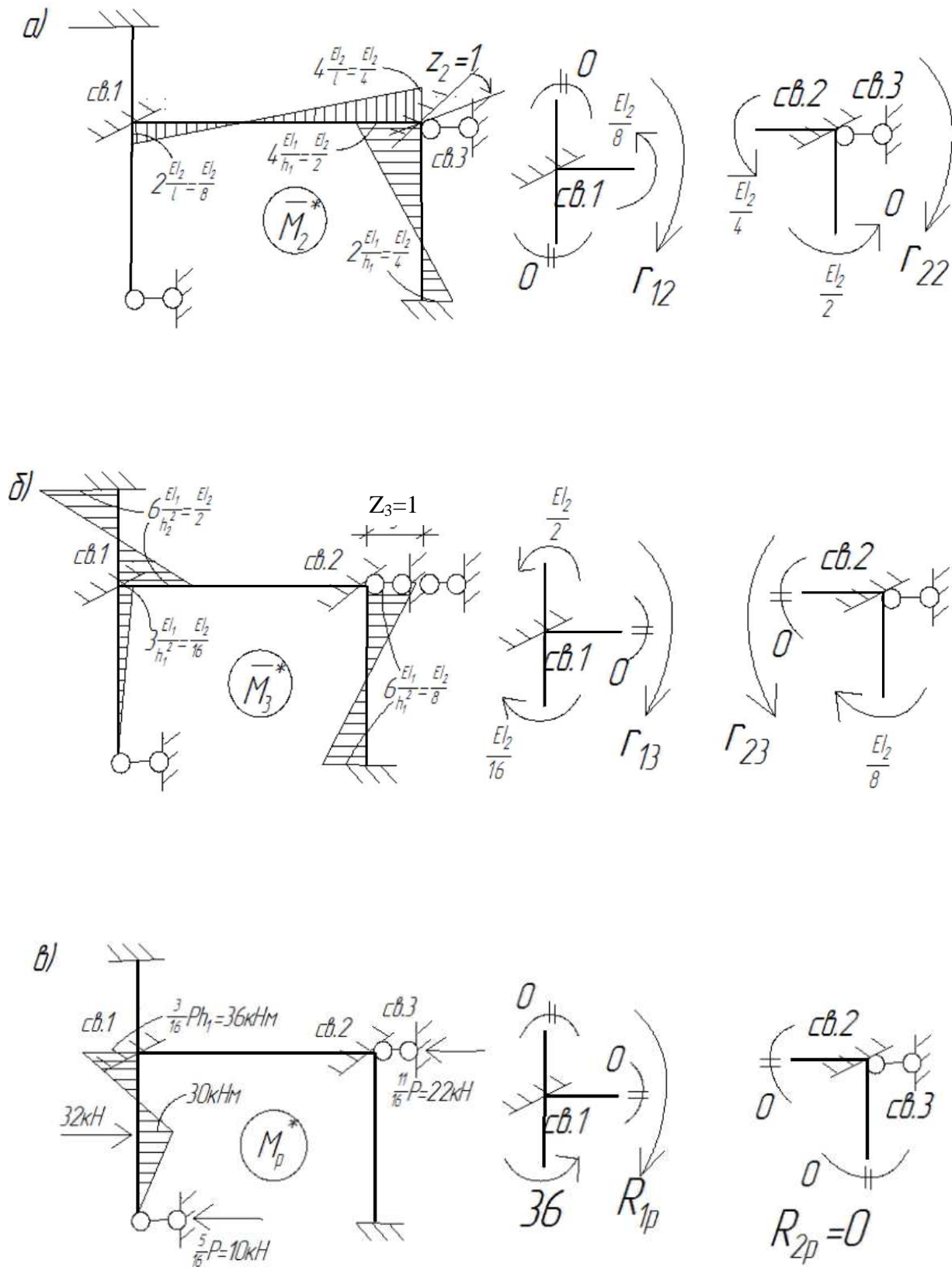


Рис 2.6

10. Определяем значения концевых поперечных сил (2.13; 2.14) и строим эпюру Q_p (рис.2.8г).

$$Q_{12} = -\frac{6EI_2}{16^2} \left(-\frac{61,9184}{EI_2} + \frac{33,353}{EI_2} - 2 \cdot \frac{0}{16} \right) + 0 = 0,67 \text{ (кН)};$$

$$Q_{21} = -\frac{6EI_2}{16^2} \left(-\frac{61,9184}{EI_2} + \frac{33,353}{EI_2} - 2 \cdot \frac{0}{16} \right) + 0 = 0,67 \text{ (кН)};$$

$$Q_{25} = -\frac{6 \cdot 3EI_2}{4 \cdot 6^2} \left(\frac{33,353}{EI_2} + 0 - 2 \cdot \frac{138,184}{6} \right) + 0 = 1,59 \text{ (кН)};$$

$$Q_{52} = -\frac{6 \cdot 3EI_2}{4 \cdot 6^2} \left(\frac{33,353}{EI_2} - 0 - 2 \cdot \frac{138,184}{6} \right) + 0 = 1,59 \text{ (кН)};$$

$$Q_{13} = -\frac{6 \cdot 3EI_2}{4 \cdot 3^2} \left(-\frac{61,9184}{EI_2} + 0 + 2 \cdot \frac{138,184}{3} \right) + 0 = -15,10 \text{ (кН)};$$

$$Q_{31} = -\frac{6 \cdot 3EI_2}{4 \cdot 3^2} \left(-\frac{61,9184}{EI_2} + 0 + 2 \cdot \frac{138,184}{3} \right) + 0 = -15,10 \text{ (кН)};$$

$$Q_{14} = -\frac{3 \cdot 3EI_2}{4 \cdot 6^2} \left(-\frac{61,9184}{EI_2} - \frac{138,184}{6} \right) - \frac{11}{16} \cdot 32 = -16,69 \text{ (кН)};$$

$$Q_{41} = -\frac{3 \cdot 3EI_2}{4 \cdot 6^2} \left(-\frac{61,9184}{EI_2} - \frac{138,184}{6} \right) + \frac{5}{16} \cdot 32 = 15,31 \text{ (кН)}.$$

11. Определяем значения продольных сил в стержнях рамы (1.28) и строим эпюру N_p (рис.2.7д).

12. Производим статическую проверку решения (1.29) (рис.2.8е).

$$\sum X = 0; -15,1 - 15,31 - 1,59 + 32 = 0;$$

$$\sum Y = 0; 0,67 - 0,67 = 0;$$

$$\sum M_6 = 0; 0,67 \cdot 8 - 15,1 \cdot 3 + 38,13 - 32 \cdot 3 + 15,31 \cdot 6 + 1,59 \cdot 6 + 0,67 \cdot 8 - 8,94 = 0.$$

Пример 2.4.2. Выполнить расчет статически неопределимых рам (рис.2.9) от нагрузки и построить эпюры изгибающих моментов. Результаты решения приведены на рис.2.9.

Пример 2.4.3. Выполнить расчет статически неопределимых рам (рис.2.10; 2.11) от нагрузки и построить эпюры усилий самостоятельно.

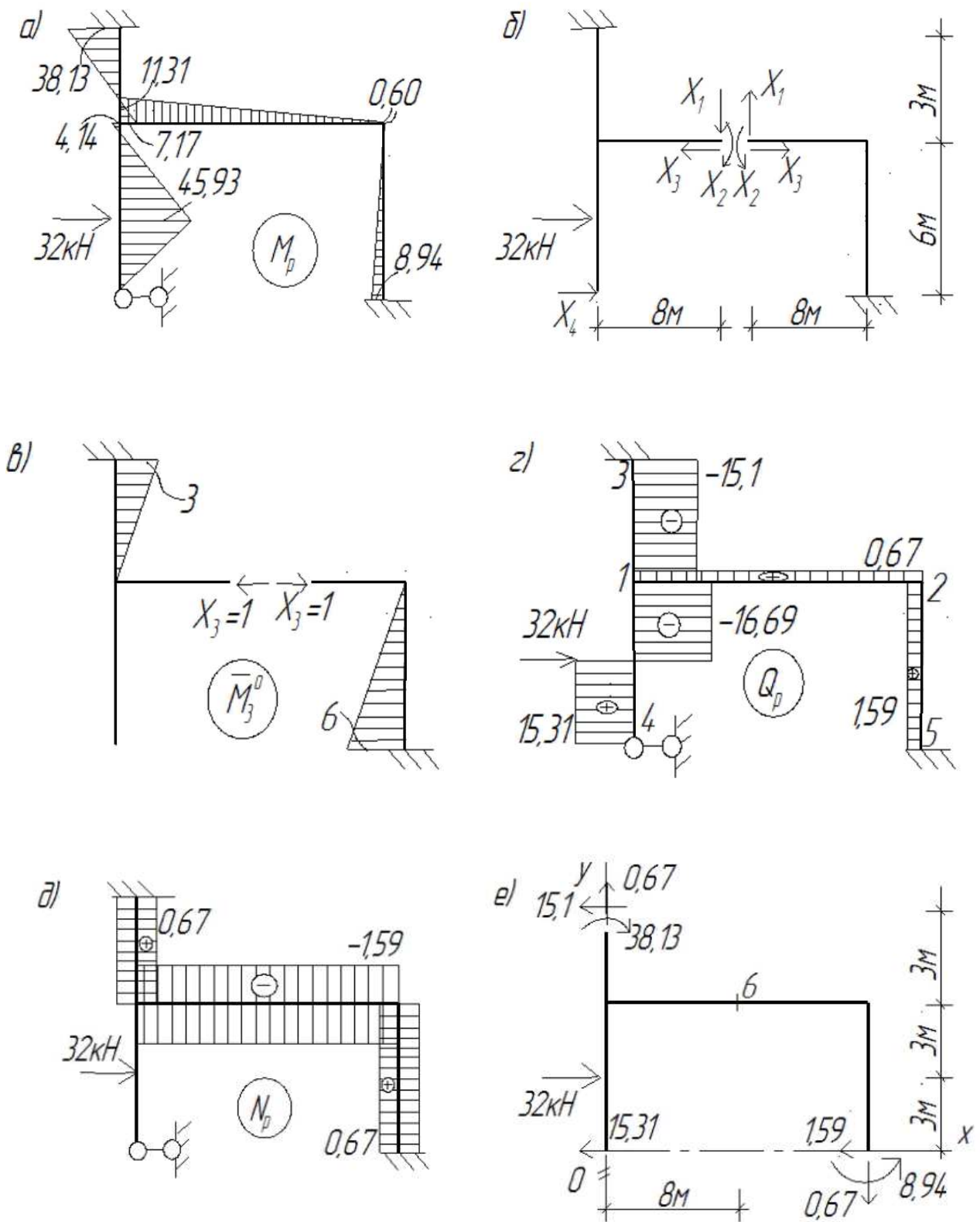


Рис 2.8

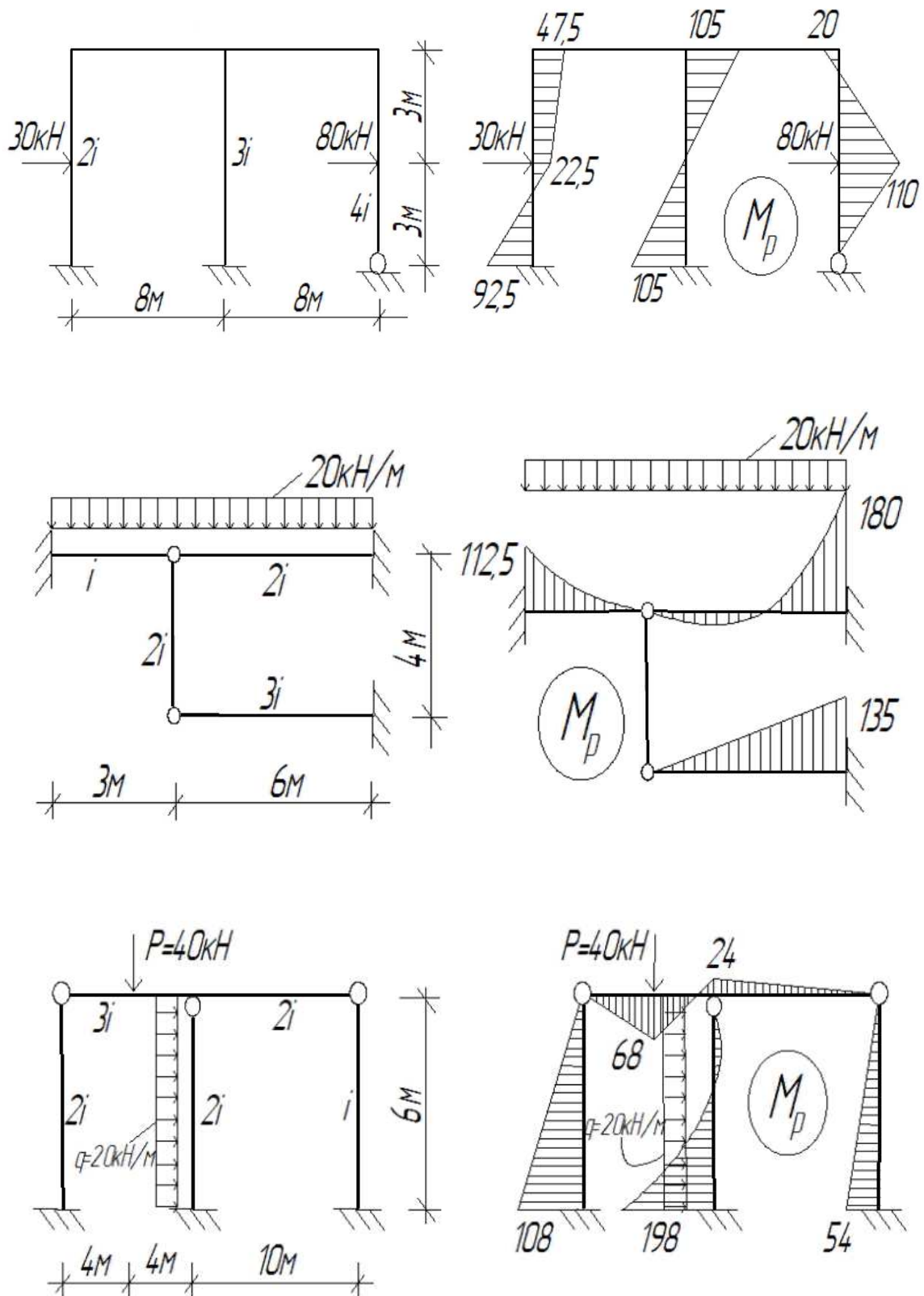


Рис 2.9

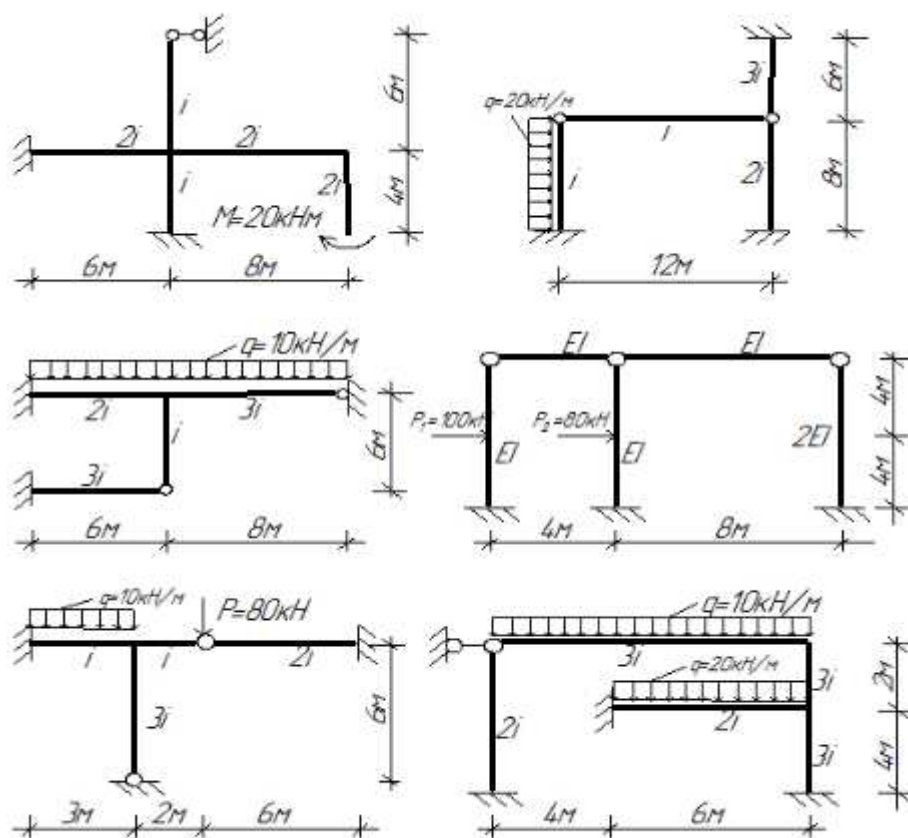


Рис 2.10

В о п р о с ы

Какими способами определяются коэффициенты канонических уравнений метода перемещений?

1. Из каких этапов состоит алгоритм метода перемещений?
2. Какие сходства и различия имеют метод сил и метод перемещений? Какие величины являются неизвестными метода перемещений?
3. Что такое степень кинематической неопределимости?
4. Какие гипотезы принимаются при расчете рам методом перемещений?
5. Как определяется основная система метода перемещений?
6. В чем заключается сущность метода перемещений?
7. Как записывается система канонических уравнений метода перемещений?

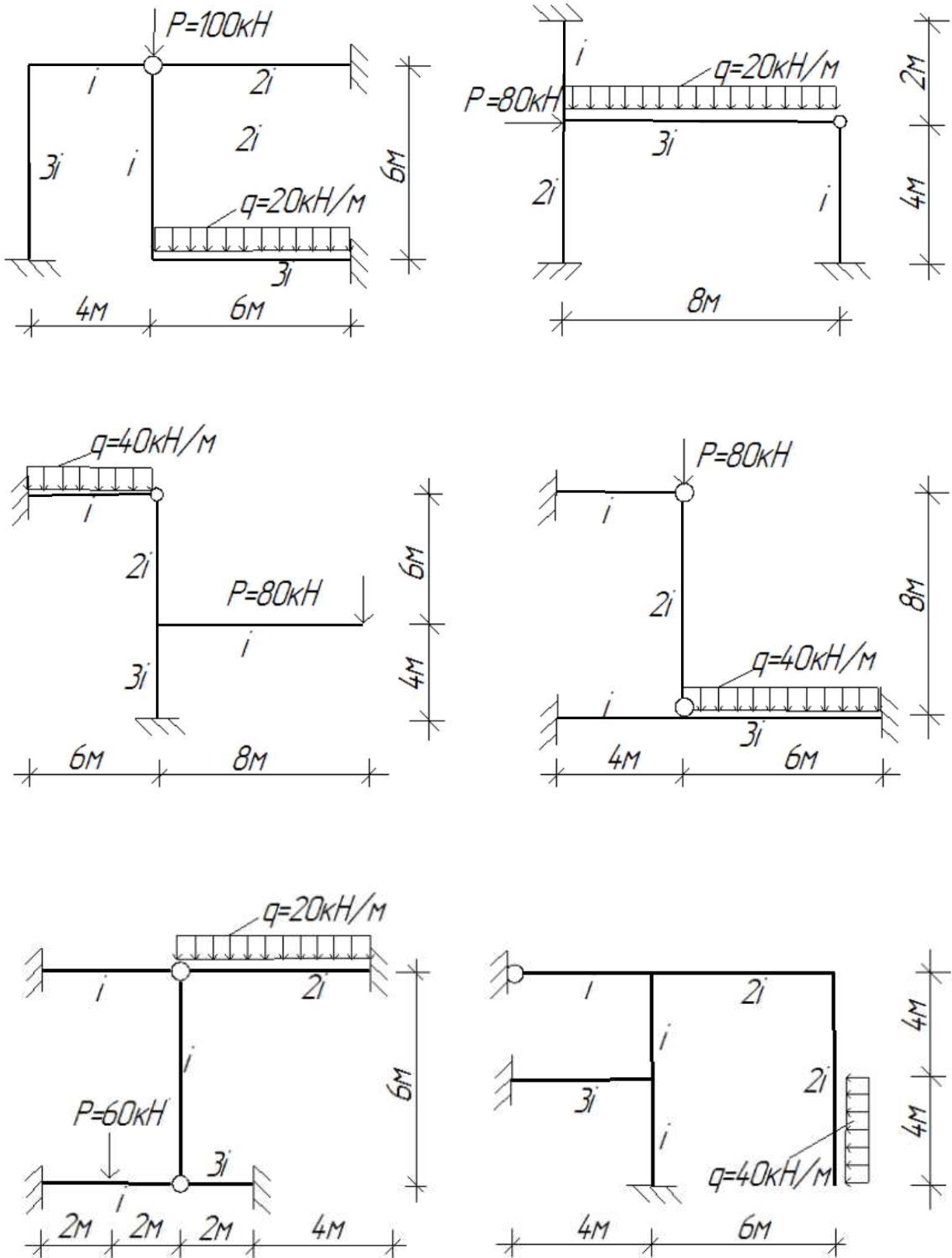


Рис 2.11

3 РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Неразрезными балками будем называть статически неопределимые балки, имеющие более двух опор.

3.1 Степень статической неопределимости

Степень статической неопределимости неразрезных балок L , как и любых статически неопределимых систем, определяется числом лишних связей

$$L = C_0 - 3. \quad (3.1)$$

Однако при вертикальной нагрузке степень статической неопределимости удобно оценивать числом промежуточных опор $C_{оп}$, рассматривая каждую заделку, как дополнительную промежуточную опору с примыкающим пролетом нулевой длины, то есть

$$L = C_{оп}. \quad (3.2)$$

Степень статической неопределимости для балок (рис.3.1) равна $L=6$, $L=4$, $L=5$ и $L=3$ соответственно.

3.2 Уравнение трех моментов

При расчете неразрезных балок методом сил вид канонических уравнений существенно зависит от выбора основной системы. Для основной системы, выбранной устранением лишних опорных линейных связей, канонические уравнения содержат все неизвестные и будут трудоемки для решения.

Поэтому основную систему рекомендуется выбирать в виде кинематической цепи однопролетных статически определимых балок, устраняя моментные связи в сечениях над промежуточными опорами. Неизвестными метода сил в этом случае являются только опорные моменты (рис.3.2). Каждое каноническое уравнение содержит не более трех неизвестных опорных моментов и называется уравнением трех моментов.

При расчете от нагрузки уравнение трех моментов для промежуточной опоры i (рис.3.4) имеет вид

$$\frac{l_i}{EI_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{l_i}{EI_i} + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} M_{i+1} = -6 \left(\frac{\omega_i \bar{a}_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} \bar{b}_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}} \right) \quad (3.3)$$

$$\text{или} \quad \lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} = -6 \left(\frac{\omega_i \bar{a}_i \lambda_i}{l_i^2} + \frac{\omega_{i+1} \bar{b}_{i+1} \lambda_{i+1}}{l_{i+1}^2} \right) \quad (3.4),$$

где

M_{i-1}, M_i, M_{i+1} – неизвестные опорные моменты;

$l_i, EI_i, l_{i+1}, EI_{i+1}$ – длины и жесткости примыкающих к опоре i пролетов;

ω_i, ω_{i+1} – площади эюр изгибающих моментов M_p^0 (рис.3.5) в основной системе от местной пролетной нагрузки в i и $i+1$ пролетах;

\bar{a}_i, \bar{b}_{i+1} – координаты центров тяжести площадей эюр ω_i и ω_{i+1} ; $\lambda_i = \frac{EI_0 l_i}{EI_i}$ –

приведенная длина i -го пролета балки; EI_0 – жесткость пролета, принятая за исходную.

В неразрезных балках с шарнирными крайними опорами или с консолями по концам количество неизвестных опорных моментов равно числу промежуточных опор, так как моменты на крайних опорах являются известными величинами (рис.3.2; 3.3).

При жестко защемленных крайних опорах неизвестными являются моменты на промежуточных опорах, включая защемленные по концам опоры с примыкающими к ним дополнительными пролетами нулевой длины (рис.3.2). Составляя для каждой промежуточной опоры уравнение трех моментов (3.4), получим совместную систему уравнений, решением которой определяем неизвестные опорные моменты. Изгибающие моменты M_x и поперечные силы Q_x в сечениях i -го пролета неразрезной балки от заданной нагрузки выражаются по принципу независимости действия сил в виде

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}, \quad (3.5)$$

$$M_x = M_x^0 + \frac{l_i - x}{l_i} M_{i-1} + \frac{x}{l_i} M_i, \quad (3.6)$$

где M_x^0 и Q_x^0 – усилия в сечениях i -го пролета основной системы от нагрузки.

При расчете неразрезных балок от осадки опор уравнение трех моментов для промежуточной опоры имеет вид

$$\frac{l_i}{EI_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{l_i}{EI_i} + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} M_{i+1} = -6 \left(\frac{c_{i-1} - c_i}{l_i} + \frac{c_{i+1} - c_i}{l_{i+1}} \right) \quad (3.7)$$

или

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} = -6 EI_0 \left(\frac{c_{i-1} - c_i}{l_i} + \frac{c_{i+1} - c_i}{l_{i+1}} \right), \quad (3.8)$$

где c_{i-1}, c_i, c_{i+1} – положительные осадки опор при перемещениях, направленных вниз (рис.3.6).

Уравнения (3.8) составляются для всех промежуточных опор неразрезной балки. Решением полученной системы уравнений определяются опорные моменты и усилия в промежуточных сечениях согласно (3.5 и 3.6), в которых отсутствуют изгибающие моменты M_p^0 и поперечные силы Q_x^0 от нагрузки.

3.3 Уравнение трех углов для расчета неразрезных балок от нагрузки

Расчет неразрезных балок может выполняться и методом перемещений. Основными неизвестными в этом способе являются угловые перемещения сечений над промежуточными опорами балки. Основная система метода перемещений выбирается из заданной системы путем введения дополнительных моментных связей в сечения над промежуточными опорами (рис.3.7). Поэтому количество неизвестных, равное числу введенных связей, будет всегда равно количеству промежуточных опор, независимо от характера закреплений крайних пролетов. Каждое каноническое уравнение метода перемещений (2.3) содержит не более трех неизвестных угловых перемещений и называется уравнением трех углов. При расчете от нагрузки уравнение трех углов для промежуточной опоры i (рис.3.8) имеет вид:

$$r_{i,i-1} z_{i-1} + r_{ii} z_i + r_{i,i+1} z_{i+1} + R_{ip}^0 = 0, \quad (i=1, 2, n-1). \quad (3.9)$$

Коэффициенты $r_{i,i-1}, r_{ii}, r_{i,i+1}$ и свободные члены R_{ip}^0 уравнений (3.9) определяются перемножением соответствующих эпюр (2.4) или статическим

способом. Решением системы уравнений трех углов определяем неизвестные угловые перемещения опорных сечений неразрезной балки.

Значения опорных изгибающих моментов и поперечных сил в заданной балке от нагрузки вычисляются согласно (2.6 и 2.7) при отсутствии относительных линейных перемещений концов стержней $\delta_{ab} = 0$.

Усилия M_x , Q_x в сечениях i -го пролета неразрезной балки от заданной нагрузки выражаются в виде (3.5 и 3.6).

3.4 Примеры расчета неразрезных балок с помощью уравнения трех моментов

Пример 3.4.1. Выполнить расчет неразрезной балки от нагрузки (рис.3.9), вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Решение

1. Определяем число неизвестных опорных моментов

$$L=C_{\text{оп}}=2.$$

2. Выбираем основную систему, устраняя моментные связи над промежуточными опорами 1 и 2 (рис.3.9б).

3. Строим эпюру изгибающих моментов от нагрузки в основной системе M_p^0 (рис.3.9в).

4. Определяем площади эпюр M_p^0 и координаты их центров тяжести:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} 120 \cdot 4 = 240; \omega_2 = \frac{2}{3} 90 \cdot 6 = 360; \omega_3 = \frac{1}{2} 40 \cdot 1,5 = 30; \omega_3' = -\frac{1}{2} 40 \cdot 1,5 = -30;$$

$$\bar{a}_1 = \bar{b}_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ (м)}; \bar{a}_2 = \bar{b}_2 = \frac{6}{2} = 3 \text{ (м)}; \bar{a}_3 = \bar{b}_3 = 1,5 + \frac{1}{3} 1,5 = 2 \text{ (м)}; \bar{a}_3' = \bar{b}_3' = \frac{2}{3} 1,5 = 1 \text{ (м)}.$$

5. Составляем уравнения трех моментов (3.3)

$$\text{для опоры 1: } \frac{4}{2EI} \cdot 0 + 2 \left(\frac{4}{2EI} + \frac{6}{3EI} \right) M_1 + \frac{6}{3EI} M_2 = -6 \left(\frac{240 \cdot 2}{4 \cdot 2EI} + \frac{360 \cdot 3}{6 \cdot 3EI} \right),$$

$$\text{для опоры 2: } \frac{6}{3EI} \cdot M_1 + 2 \left(\frac{6}{3EI} + \frac{3}{EI} \right) M_2 + \frac{3}{EI} \cdot 0 = -6 \left(\frac{360 \cdot 3}{6 \cdot 3EI} + \frac{30 \cdot 2}{3 \cdot EI} - \frac{30 \cdot 1}{3EI} \right).$$

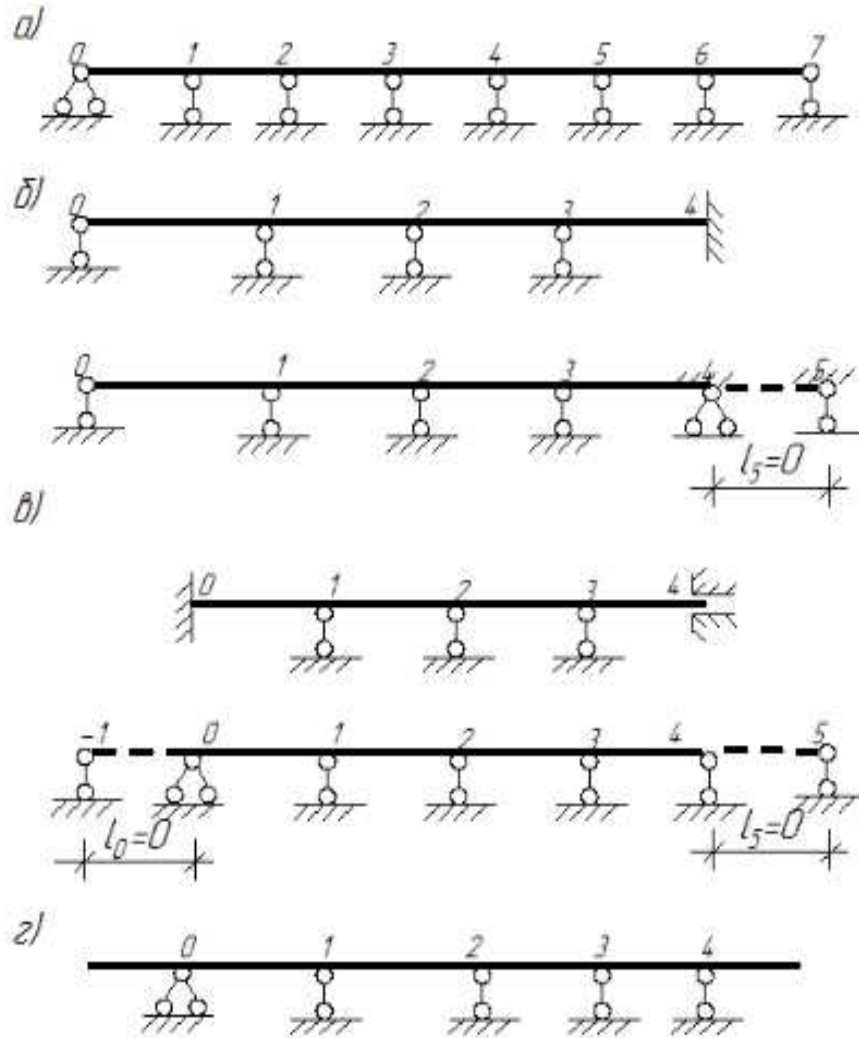


Рис 3.1

6. Решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 8M_1 + 2M_2 = -720 \\ 2M_1 + 10M_2 = -420, \end{cases}$$

$$M_1 = -83,684 \text{ (кНм)}, \quad M_2 = -25,263 \text{ (кНм)}.$$

7. Вычисляем изгибающие моменты M_x в сечениях неразрезной балки (3.5) и строим эпюру изгибающих моментов от нагрузки M_p (рис.3.9г).

$$M_{x=2} = 120 + \frac{4-2}{4} \cdot 0 + \frac{2}{4} (-83,684) = 78,158 \text{ (кНм)};$$

$$M_{x=7} = 90 + \frac{6-3}{6} \cdot (-83,684) + \frac{3}{6} (-25,263) = 35,5265 \text{ (кНм)};$$

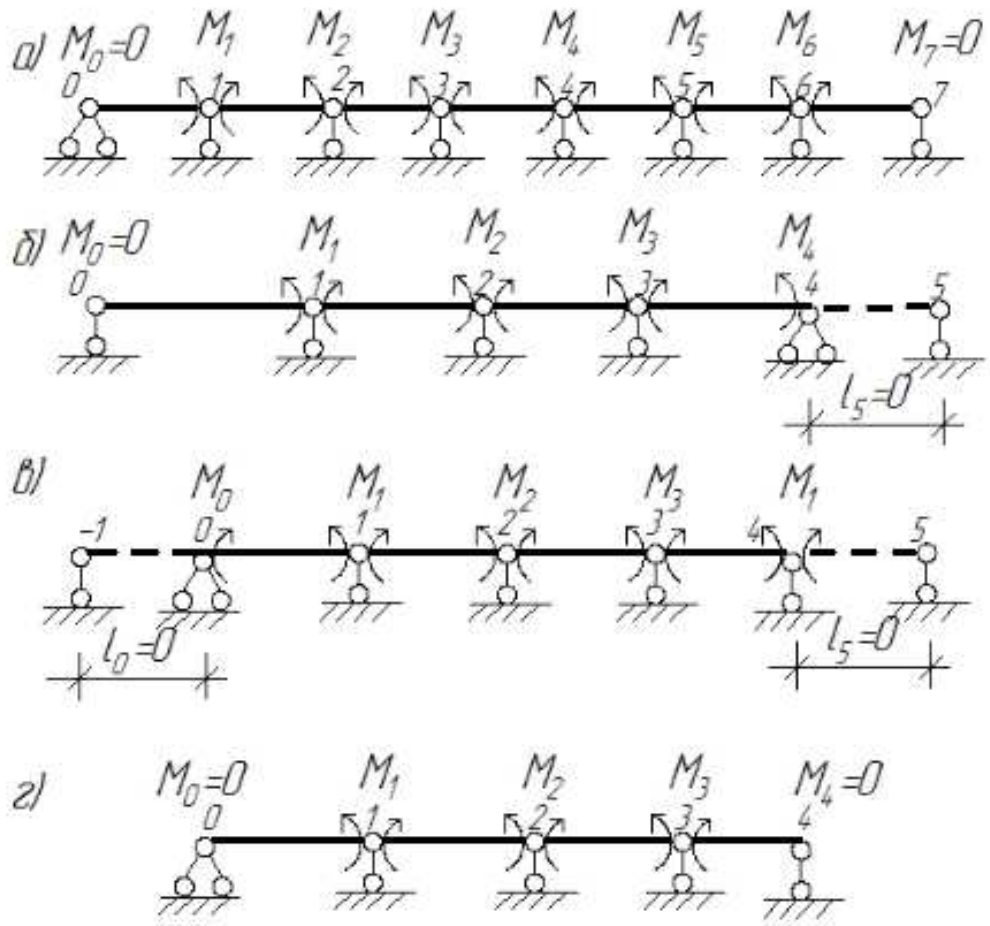


Рис 3.2

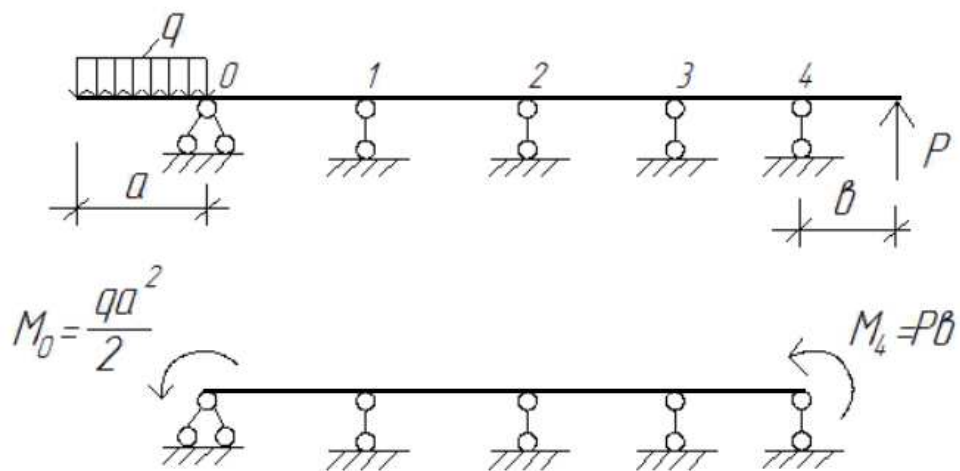


Рис 3.3

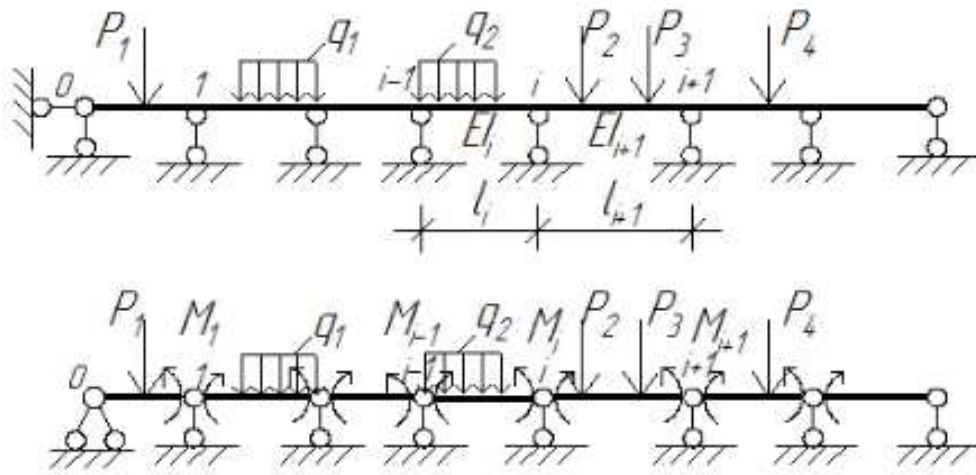


Рис 3.4

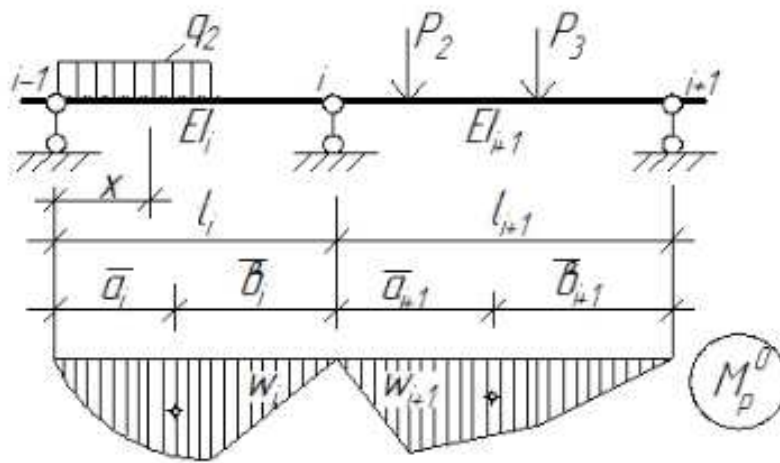


Рис 3.5

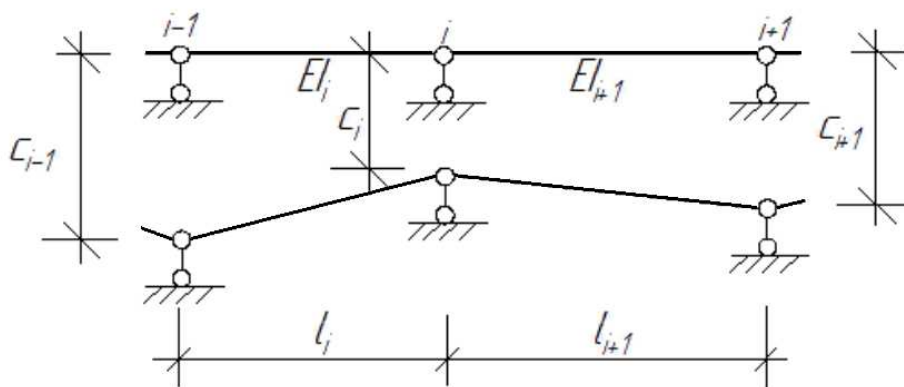


Рис 3.6

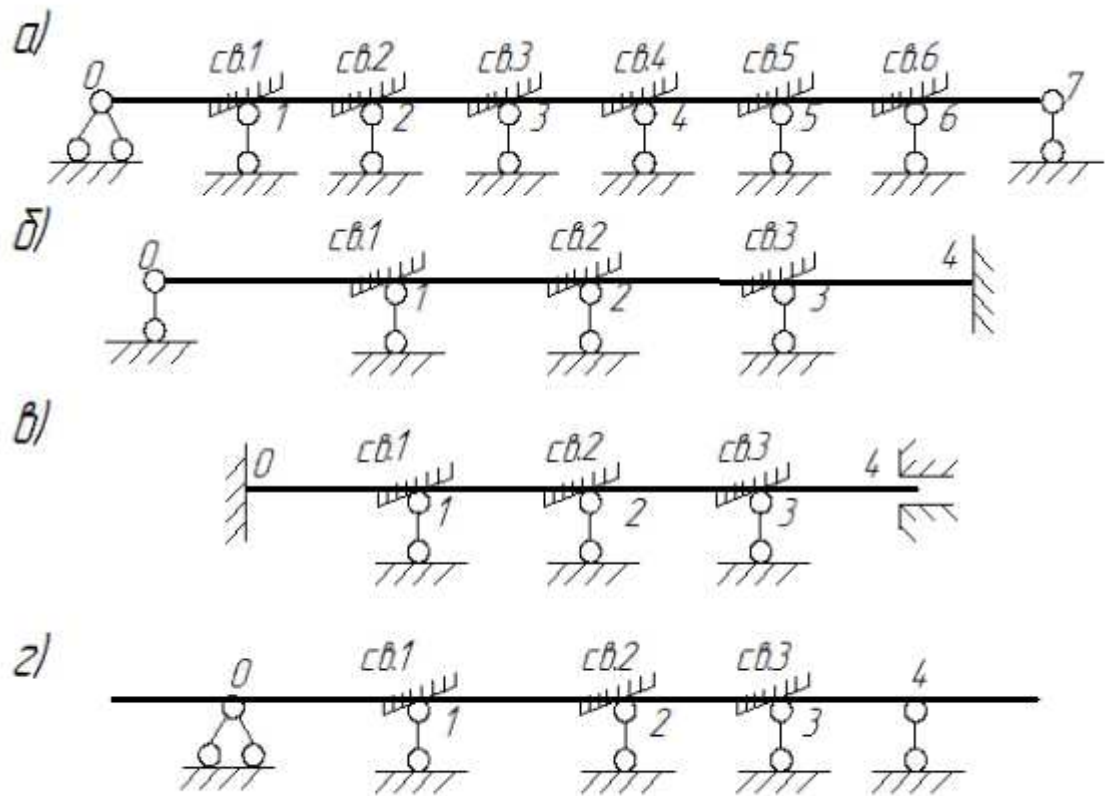


Рис 3.7

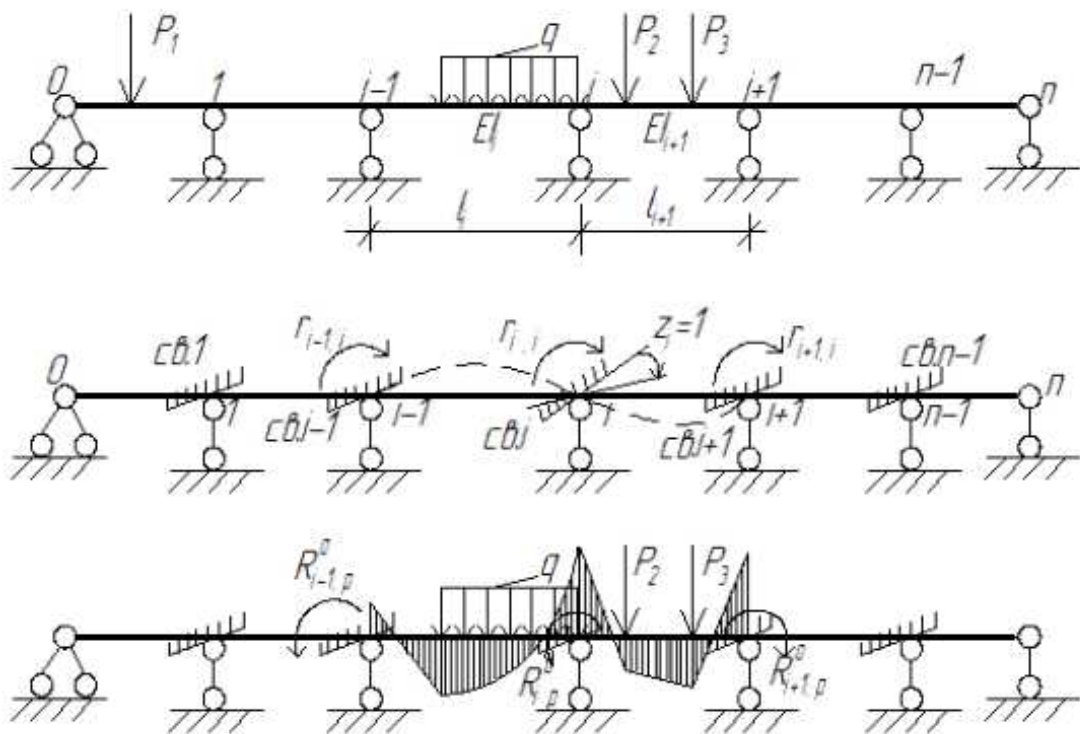


Рис 3.8

$$M_{x=2,5}^n = 40 + \frac{3-1,5}{3} \cdot (-25,263) = 27,3685 \text{ (кНм)};$$

$$M_{x=2,5}^{np} = -40 + \frac{3-1,5}{3} \cdot (-25,263) = -52,6315 \text{ (кНм)}.$$

8. Выполняем кинематическую проверку (1.20) (рис.3.9е).

$$\begin{aligned} \Delta_{sp} &= \sum_1^3 \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_s^0}{EI} dx = \left(-\frac{1}{2} 83,684 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 15 + \frac{1}{2} 120 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} 15 \right) \frac{1}{2EI} + \\ &+ \left[-\frac{1}{2} 83,684 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} 15 + \frac{1}{3} 3 \right) - \frac{1}{2} 25,263 \cdot 6 \left(\frac{1}{3} 15 + \frac{2}{3} 3 \right) + \frac{2}{3} 90 \cdot 6 \cdot \frac{15+3}{2} \right] \frac{1}{3EI} + \\ &+ \left[\frac{1}{2} 25,263 \cdot 1,5 \left(\frac{2}{3} 3 + \frac{1}{3} 1,5 \right) + \frac{1}{2} 27,3685 \cdot 1,5 \left(\frac{2}{3} 1,5 + \frac{1}{3} 3 \right) - \frac{1}{2} 52,6315 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} 1,5 \right] \frac{1}{EI} = \\ &= -\frac{2021,047}{EI} + \frac{2021,053}{EI} = \frac{0,006}{EI} < 1\%. \end{aligned}$$

9. Вычисляем поперечные силы Q_x в сечениях балки (3.6) и строим эпюру поперечных сил от нагрузки Q_p (рис.3.9д).

$$Q_0 = 60 + \frac{-83,684 - 0}{4} = 39,079 \text{ (кН)};$$

$$Q_1^n = -60 + \frac{-83,684 - 0}{4} = -80,921 \text{ (кН)};$$

$$Q_1^{np} = \frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{-25,263 - (-83,684)}{6} = 69,737 \text{ (кН)};$$

$$Q_2^n = -\frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{-25,263 - (-83,684)}{6} = -50,263 \text{ (кН)};$$

$$Q_2^{np} = \frac{80}{3} + \frac{0 - (-25,263)}{3} = 35,088 \text{ (кН)};$$

$$Q_3 = \frac{80}{3} + \frac{0 - (-25,263)}{3} = 35,088 \text{ (кН)};$$

10. Определяем опорные реакции.

$$R_i = Q_i^{np} - Q_i^n;$$

$$R_0 = Q_0^{np} = 39,079 \text{ (кН)};$$

$$R_1 = Q_1^{np} - Q_1^n = 80,921 + 69,737 = 150,658 \text{ (кН)};$$

$$R_2 = Q_2^{np} - Q_2^n = 50,263 + 35,088 = 85,351 \text{ (кН)};$$

$$R_3 = -Q_3^n = -35,088 \text{ (кН)}.$$

11. Производим статическую проверку (1.29).

$$\sum Y = 0; \quad 39,079 + 150,658 + 85,351 - 35,088 - 120 \cdot 20 \cdot 6 = 0.$$

$$\sum M_0 = 0; \quad -120 \cdot 2 + 150,658 \cdot 4 - 20 \cdot 6 \cdot 7 + 85,351 \cdot 10 + 80 - 35,088 \cdot 13 = 0.$$

Пример 3.4.2. Выполнить расчет неразрезной балки от осадки опор (рис.3.10), вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил при $EI = 10^4$ (кНм²).

Решение.

1. Определяем число неизвестных опорных моментов.

$$L = C_{\text{оп}} = 2.$$

2. Выбираем основную систему, устраняя моментные связи над промежуточными опорами 0 и 1 (рис.3.10б).

3. Составляем уравнения трех моментов (3.7)

для опоры 0:

$$0 + 2 \left(0 + \frac{6}{2EI} \right) M_0 + \frac{6}{2EI} M_1 = -6 \left(0 + \frac{0,04 - 0}{6} \right),$$

для опоры 1:

$$\frac{6}{2EI} M_0 + 2 \left(\frac{6}{2EI} + \frac{4}{EI} \right) M_1 + \frac{4}{EI} \cdot 0 = -6 \left(\frac{0 - 0,04}{6} + \frac{-0,02 \cdot 0,04}{4} \right).$$

4. Решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 6M_0 + 3M_1 = -400 \\ 3M_0 + 14M_1 = 1300, \end{cases}$$

$$M_0 = -126,67 \text{ (кНм)}; \quad M_1 = 120 \text{ (кНм)}.$$

5. Строим эпюру изгибающих моментов в неразрезной балке от заданного смещения опор M_c (рис.3.10в).

6. Выполняем кинематическую проверку (1.24) (рис.3.10д).

$$\begin{aligned} \Delta_{sc} = & -(2,25 \cdot 0,04 + 1,25 \cdot 0,02) + \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 126,67 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \\ & \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = 0,134 - 0,134 = 0. \end{aligned}$$

7. Вычисляем поперечные силы Q_x в сечениях балки (3.6) и строим эпюру поперечных сил Q_c от смещения опор (рис.3.10г).

$$Q_0 = Q_1^x = \frac{120 - (-126,67)}{6} = 41,10 \text{ (кН)};$$

$$Q_1^{np} = Q_2 = \frac{0 - 120}{4} = -30 \text{ (кН)}.$$

8. Определяем опорные реакции.

$$R_0 = Q_0 = 41,10 \text{ (кН)};$$

$$R_1 = Q_1^{np} - Q_1^x = -(41,1 + 30) = -71,1 \text{ (кН)};$$

$$R_2 = Q_2 = -30 \text{ (кН)}.$$

9. Производим статическую проверку (1.29).

$$\sum Y = 0; 41,1 - 71,1 + 30 = 0.$$

$$\sum M_0 = 0; 126,67 - 71,1 \cdot 6 + 30 \cdot 10 = 0.$$

Пример 3.4.3. Выполнить расчет неразрезной балки от нагрузки (рис.3.11 – 3.15), вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Результаты решения приведены на рисунках.

Пример 3.4.4. Вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от нагрузок в неразрезных балках (рис.3.16 – 3.19) самостоятельно.

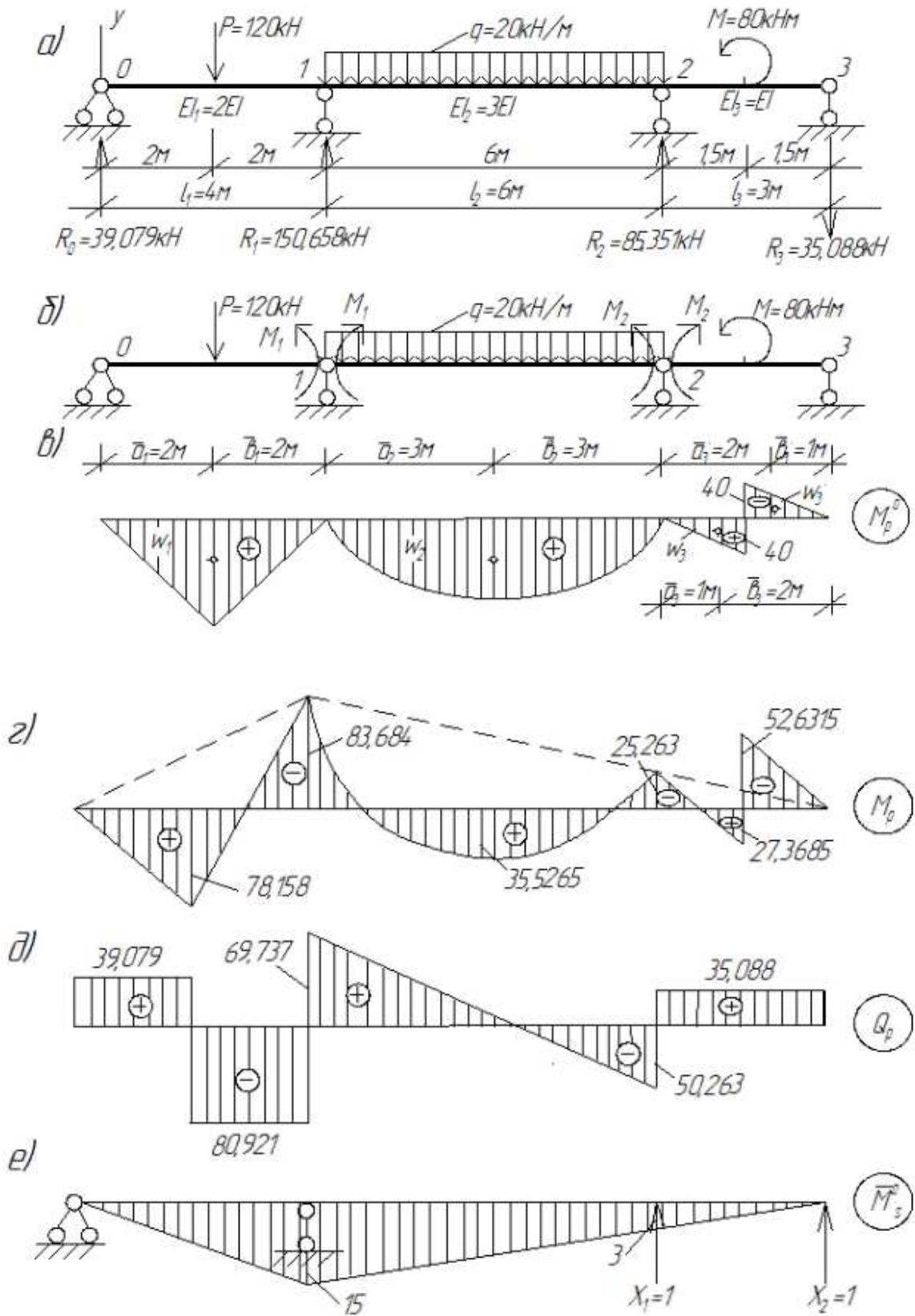


Рис 3.9

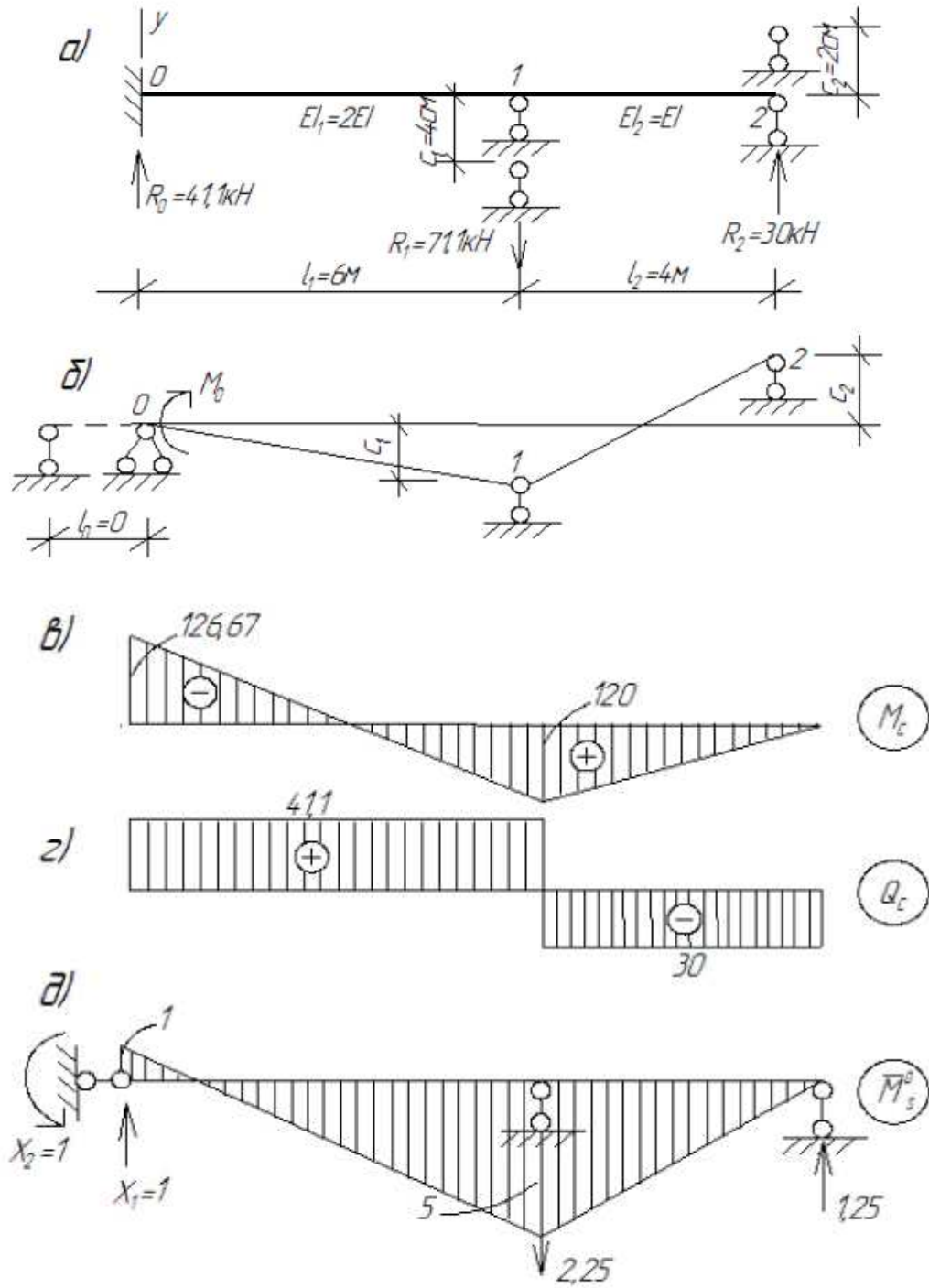


Рис 3.10

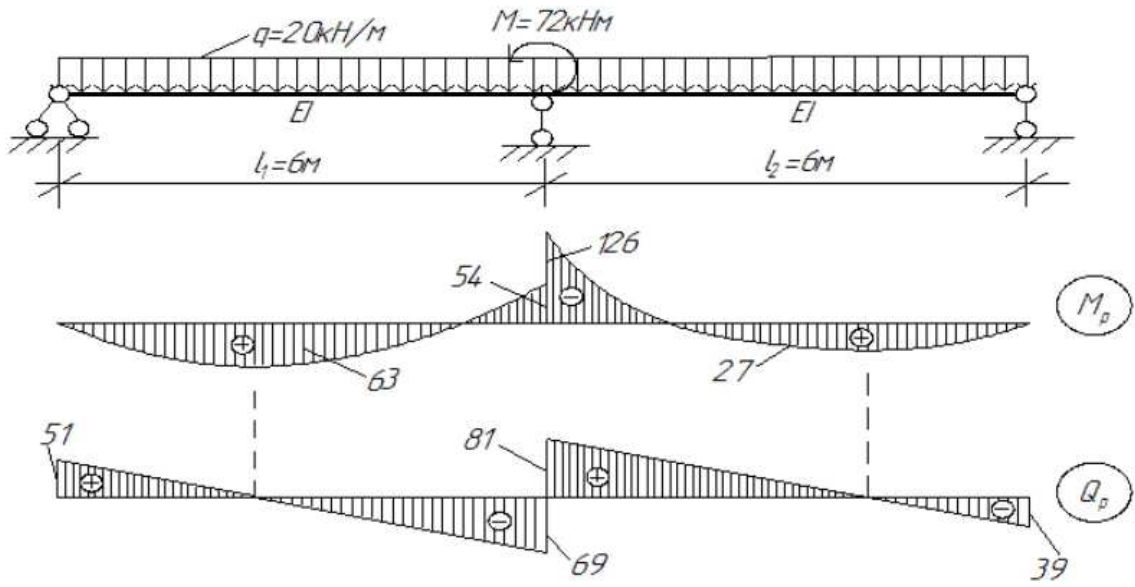


Рис 3.11

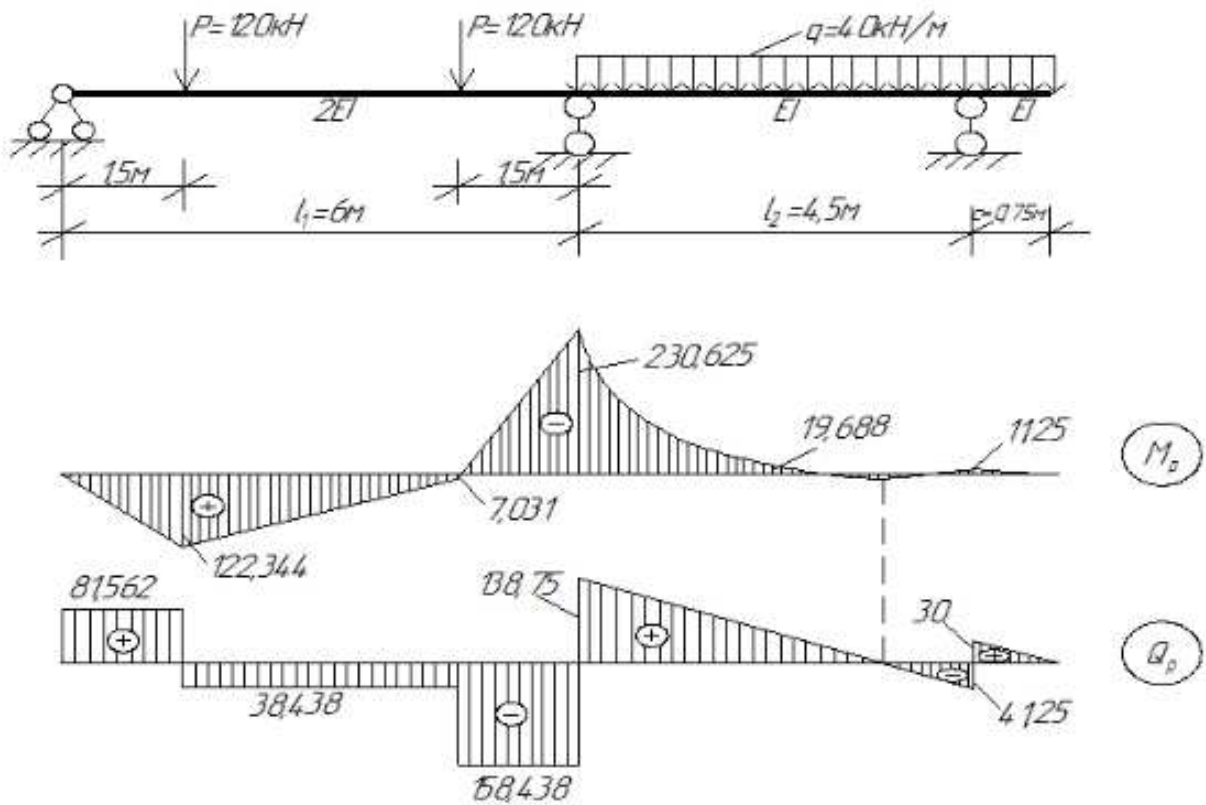


Рис 3.12

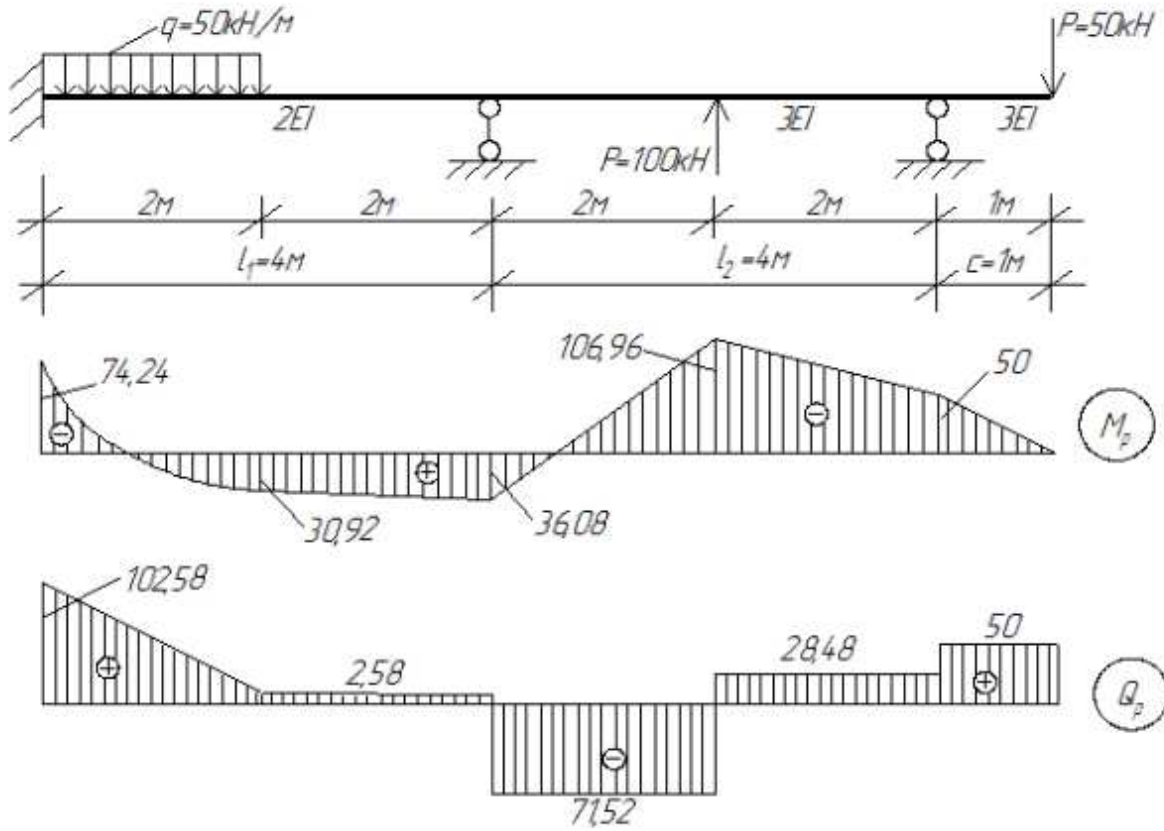


Рис 3.13

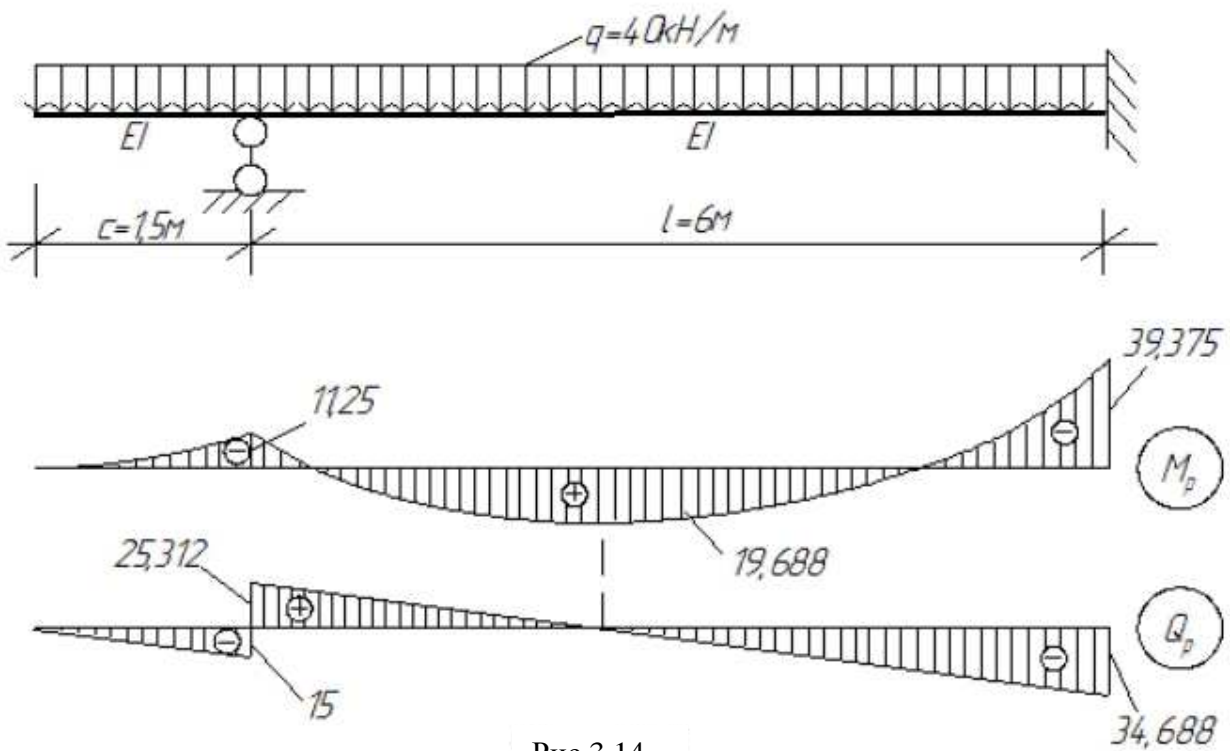


Рис 3.14

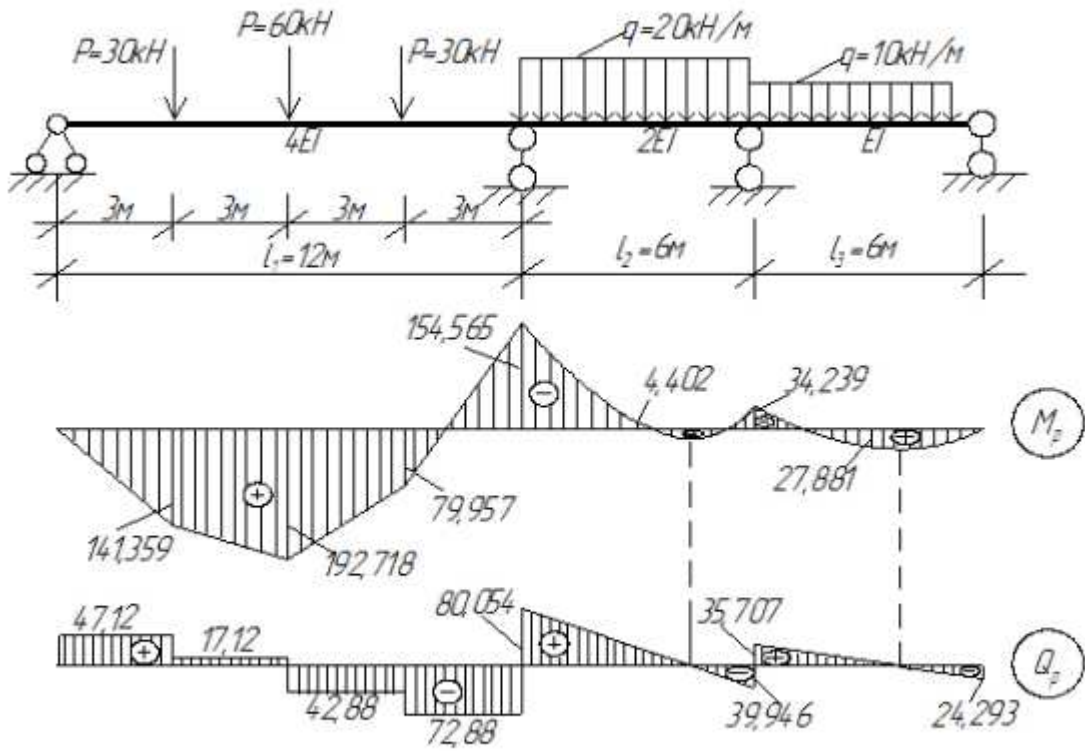


Рис 3.15

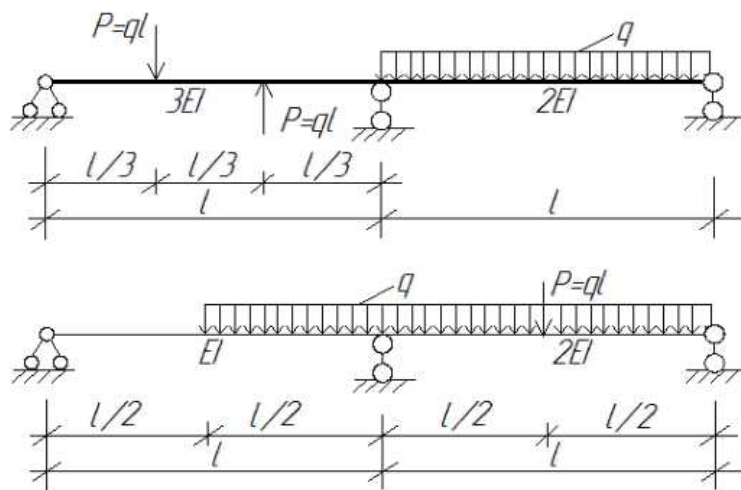


Рис 3.16

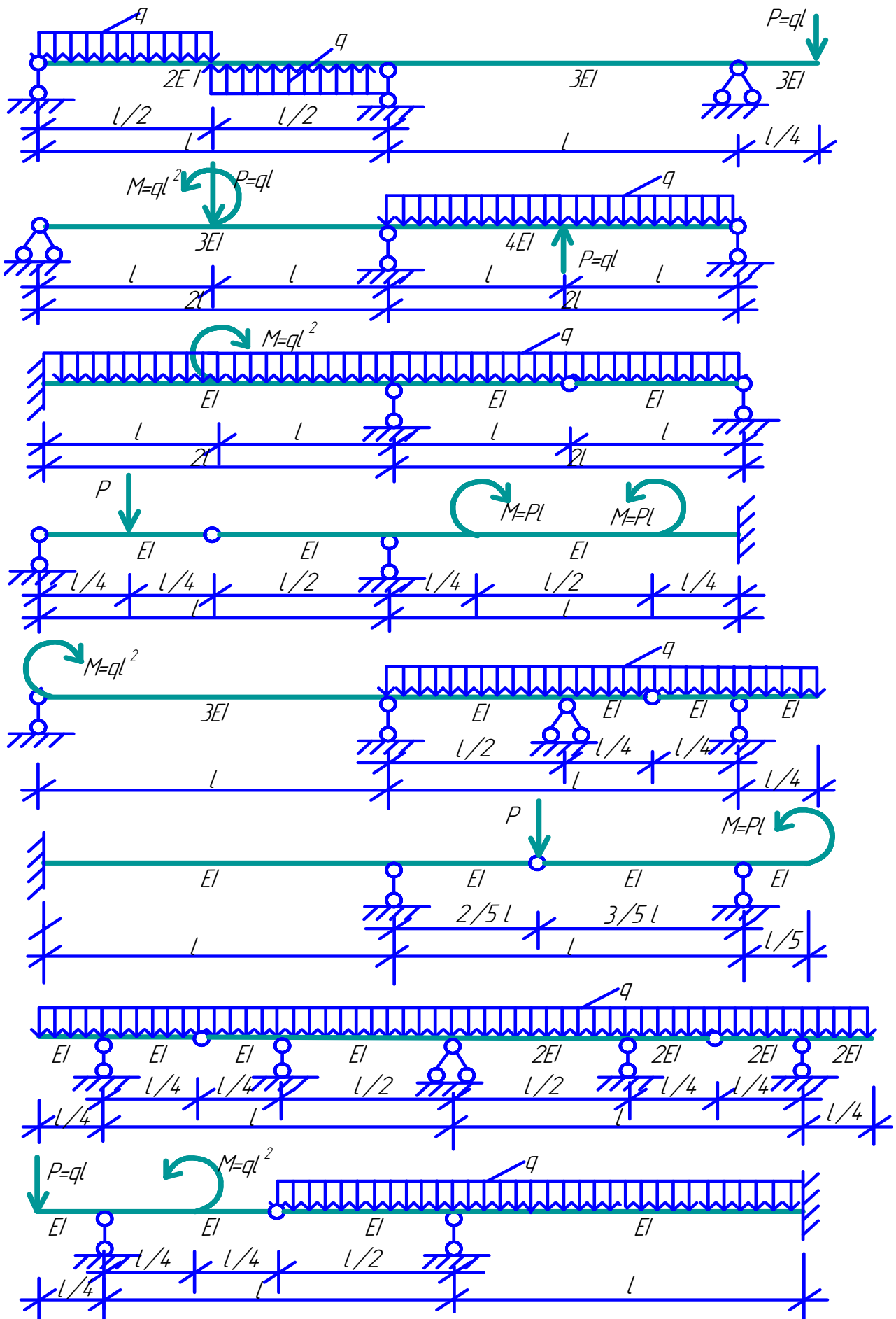


Рис 3.17

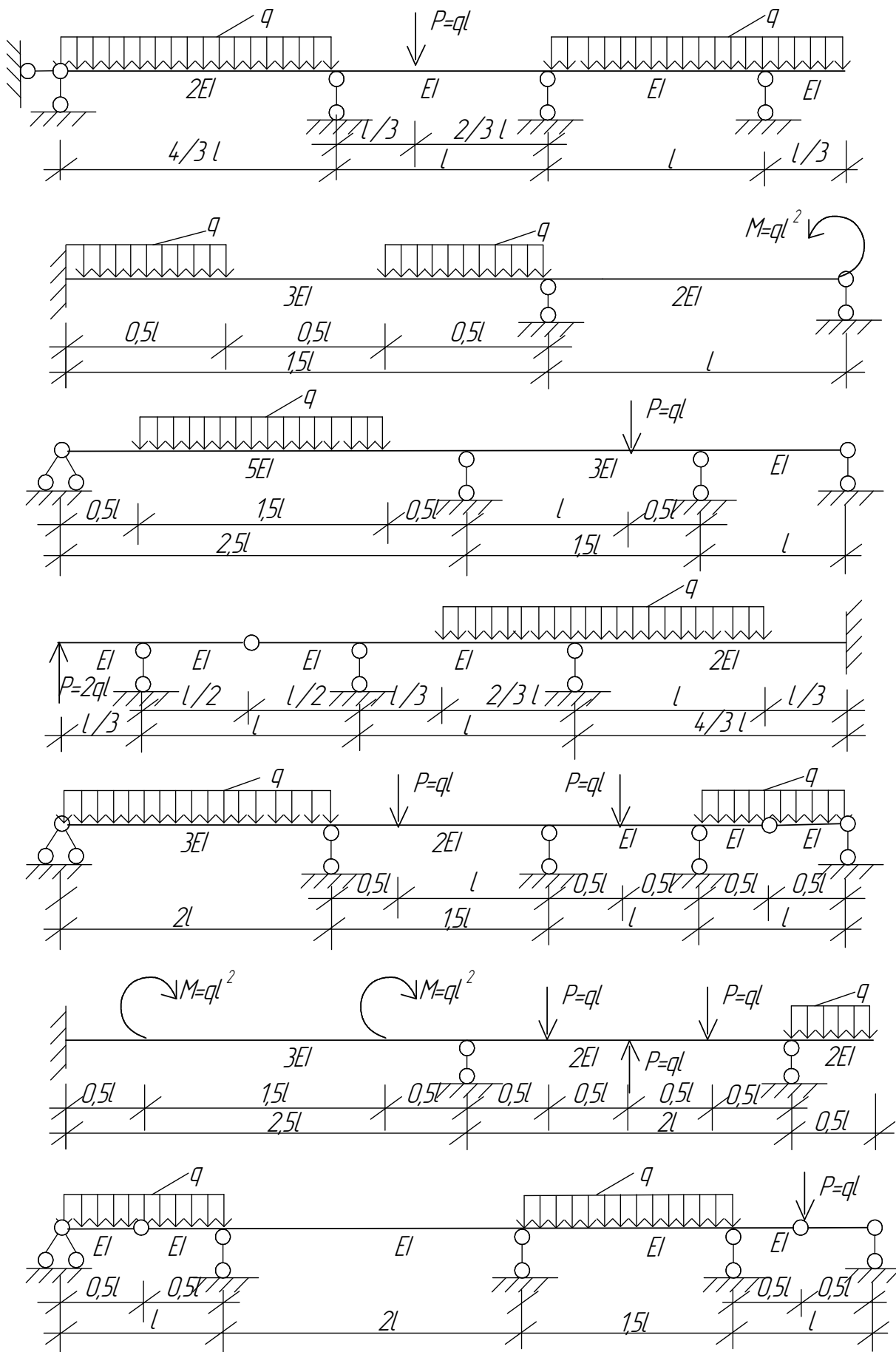


Рис. 3.18

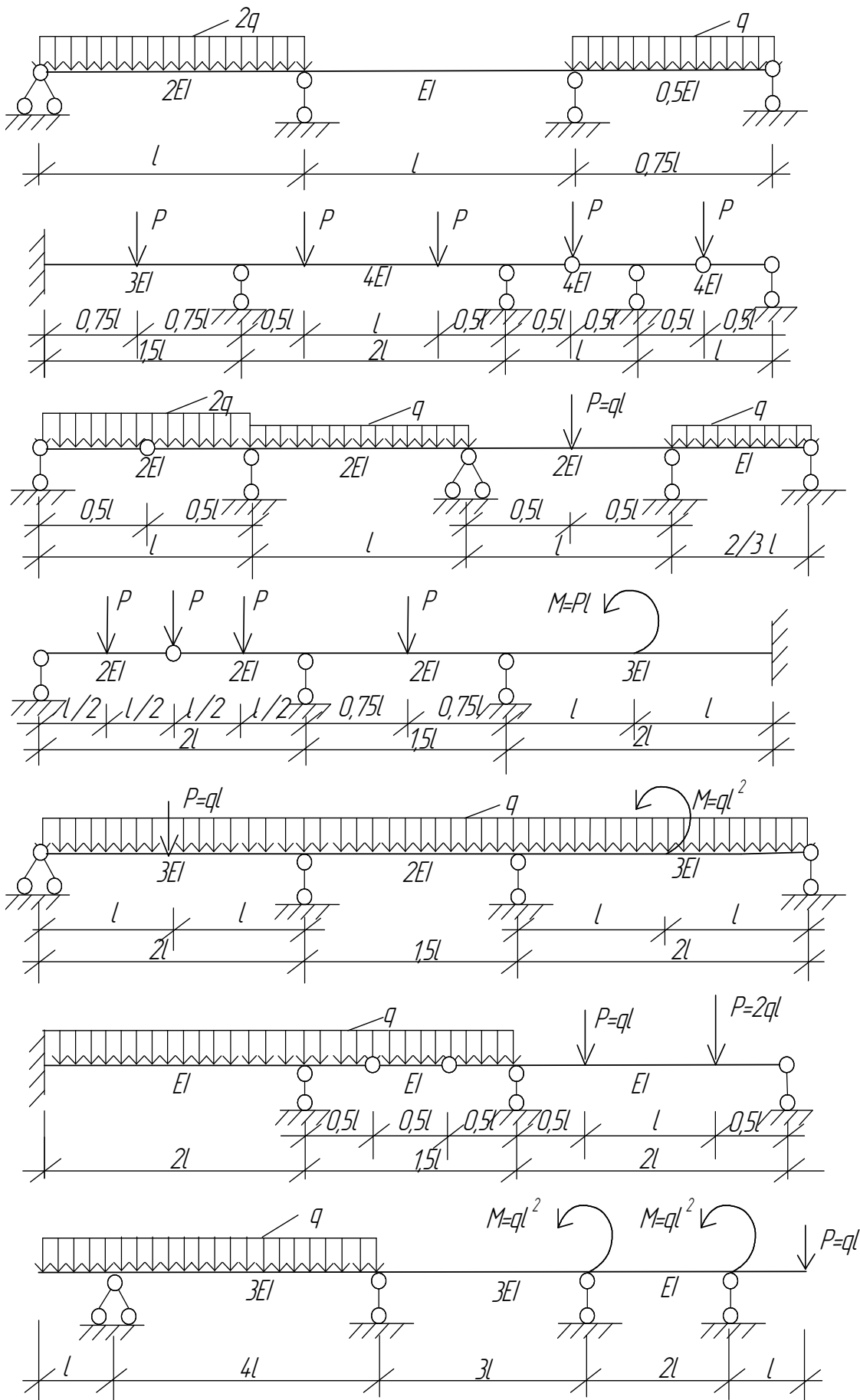


Рис 3.19

4 КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Для расчета симметричных статически неопределимых систем удобно применять комбинированный метод, позволяющий понизить количество неизвестных и существенно упростить решение.

К симметричным будем относить системы с симметричной геометрической схемой, жесткостями стержней и симметричными опорными закреплениями (рис.4.1).

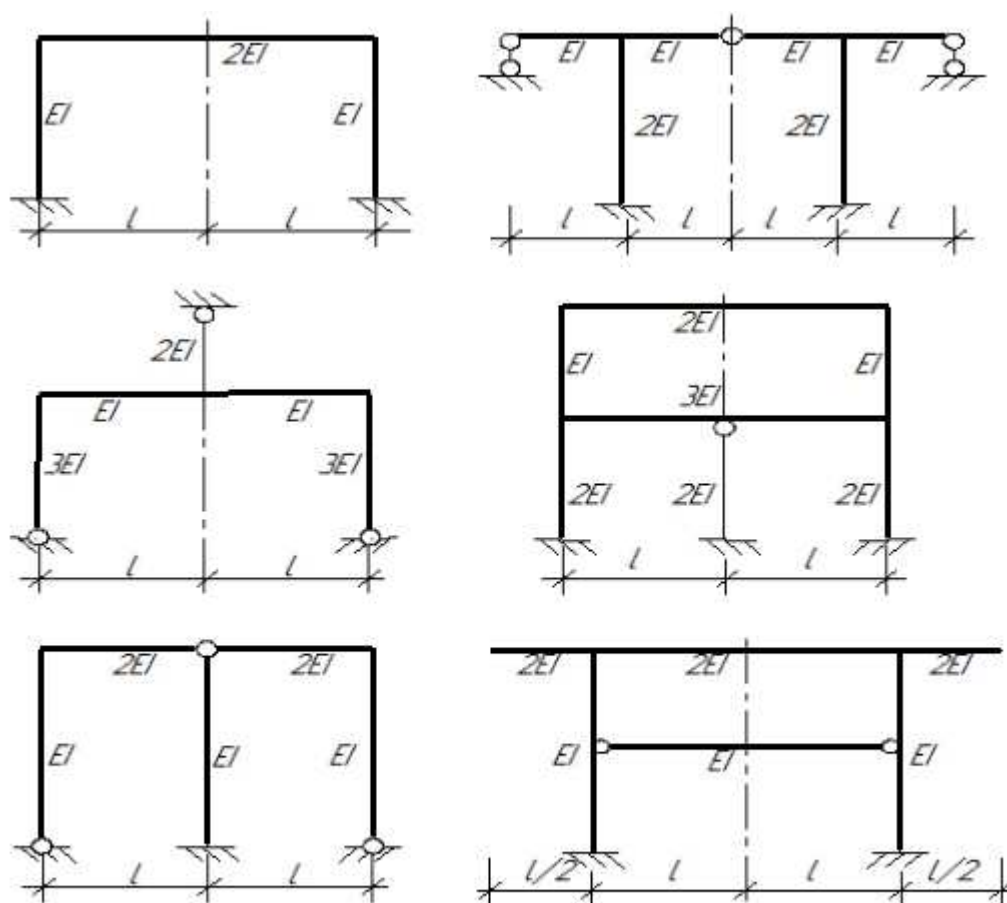


Рис 4.1

4.1 Основные свойства симметричных систем при симметричной и обратнoсимметричной нагрузках

В симметричных системах при действии симметричной нагрузки деформации, перемещения и характер распределения усилий симметричны (рис.4.2). Поэтому они обладают следующими свойствами:

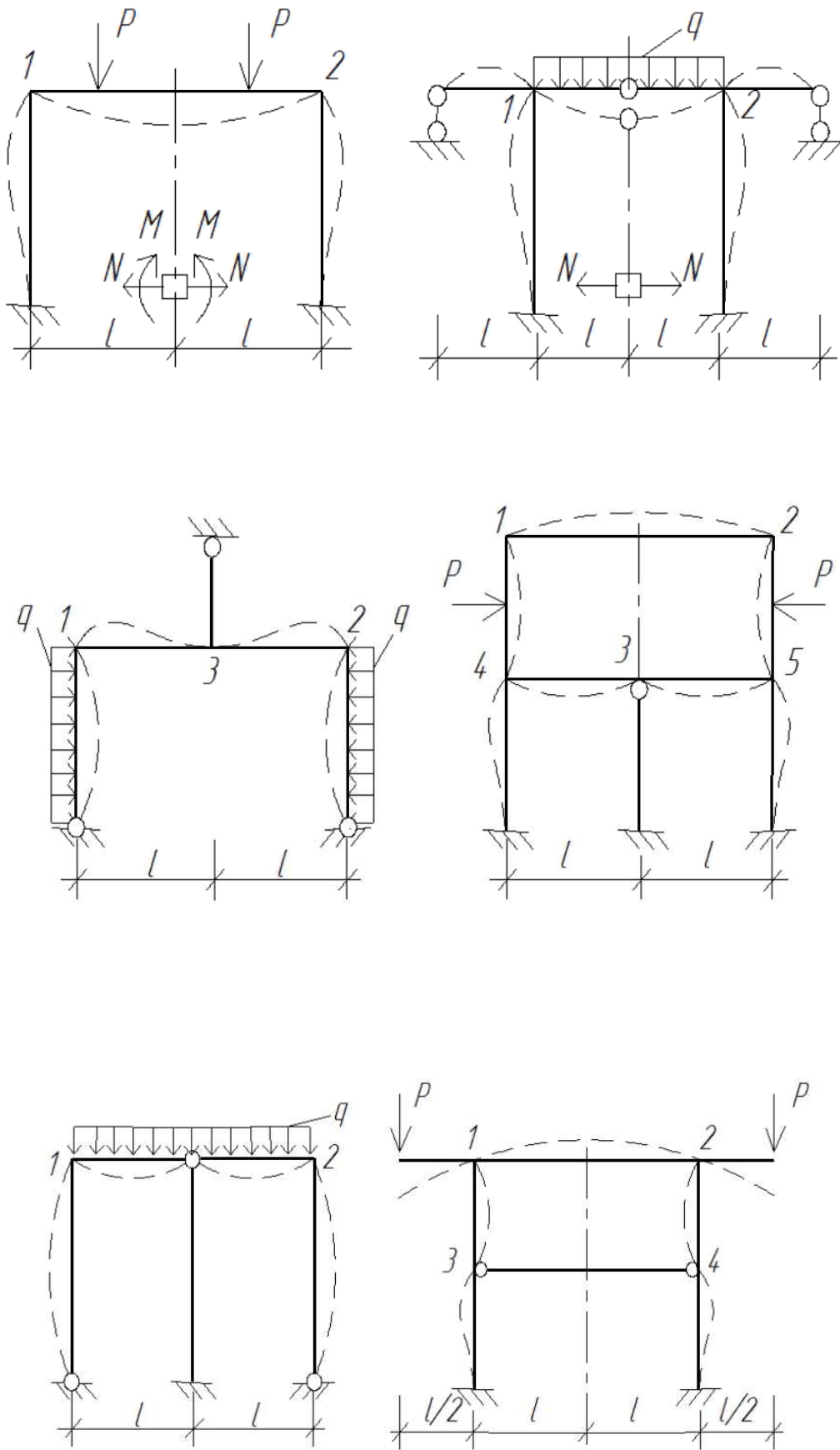


Рис 4.2

1. Угловые перемещения симметрично расположенных жестких узлов равны по величине и противоположны по знаку ($Z_1 = -Z_2$).

2. Жесткие узлы, совпадающие с осью симметрии, не имеют угловых перемещений ($Z_3 = 0$).

3. Линейные смещения узлов возможны лишь в направлении оси симметрии.

4. Перемещения точек, расположенных на оси симметрии, возникают только по оси симметрии.

5. В сечениях, совпадающих с осью симметрии, развиваются симметричные усилия M и N , обратно симметричные усилия отсутствуют $Q=0$.

В симметричных системах при действии обратносимметричной нагрузки деформации, перемещения и распределение усилий обратно симметричны (рис.4.3). Поэтому они обладают следующими свойствами:

1. Угловые перемещения симметрично расположенных жестких узлов равны по величине и по знаку ($Z_1 = Z_2$).

2. Линейные смещения узлов возможны только в направлении, перпендикулярном оси симметрии.

3. Перемещения точек, расположенных на оси симметрии, возможны лишь в направлении, ортогональном оси симметрии.

4. В сечениях, совпадающих с осью симметрии, возникают обратно симметричные усилия Q , а симметричные усилия отсутствуют – $M = N = 0$.

Применяя эти свойства, можно выполнять расчет всей симметричной рамы, уменьшая количество неизвестных, или выбирать расчетную схему, рассматривая лишь одну из симметричных частей рамы (рис.4.4; 4.5). Это позволяет достаточно легко вычислять усилия в сложных симметричных системах при симметричных и обратно симметричных нагрузках.

Примеры разложения нагрузки на симметричную и обратносимметричную приведены на рис.4.6-4.7.

Выбор основной системы с учетом симметрии системы, внешней нагрузки и особенностей конкретной расчетной схемы (рис.4.6-4.7) приведены на рис.4.8-4.11

4.2 Примеры расчета симметричных статически неопределимых рам комбинированным методом

Пример 4.3.1. Выполнить расчет статически неопределимой симметричной рамы (рис.4.12а), вычислить усилия и построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от нагрузки $q=20(\text{кН/м})$.

Решение

1. Заданную нагрузку представляем в виде симметричной и обратно симметричной (рис.4.12 б, в).
2. Выбираем расчетную схему и основную систему метода перемещений при симметричной нагрузке (рис.4.13).
3. Составляем каноническое уравнение метода перемещений.

$$r_{11}Z_1 + R_{1p}^0 = 0.$$

4. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от $Z_1=1$ и заданной нагрузки.

5. Определяем коэффициент r_{11} и свободный член канонического уравнения R_{1p}^0 .

$$\sum M_1^{y3} = 0, \quad r_{11} - \frac{2EI}{4} - \frac{3EI}{4} - \frac{3EI}{4} = 0, \quad r_{11} = \frac{8EI}{4} = 2EI;$$

$$\sum M_1^{y3} = 0, \quad R_{1p}^0 - 20 = 0, \quad R_{1p}^0 = 20.$$

6. Определяем значение неизвестного.

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}^0}{r_{11}} = -\frac{20}{2EI} = -\frac{10}{EI}.$$

7. Строим эпюру изгибающих моментов в расчетной схеме от нагрузки (4.10) (рис.4.13).
8. Строим эпюру изгибающих моментов в заданной раме от симметричной нагрузки (рис.4.13).
9. Выбираем расчетную схему и основную систему метода сил при обратносимметричной нагрузке (рис.4.14).
10. Составляем каноническое уравнение метода сил.

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p}^0 = 0$$

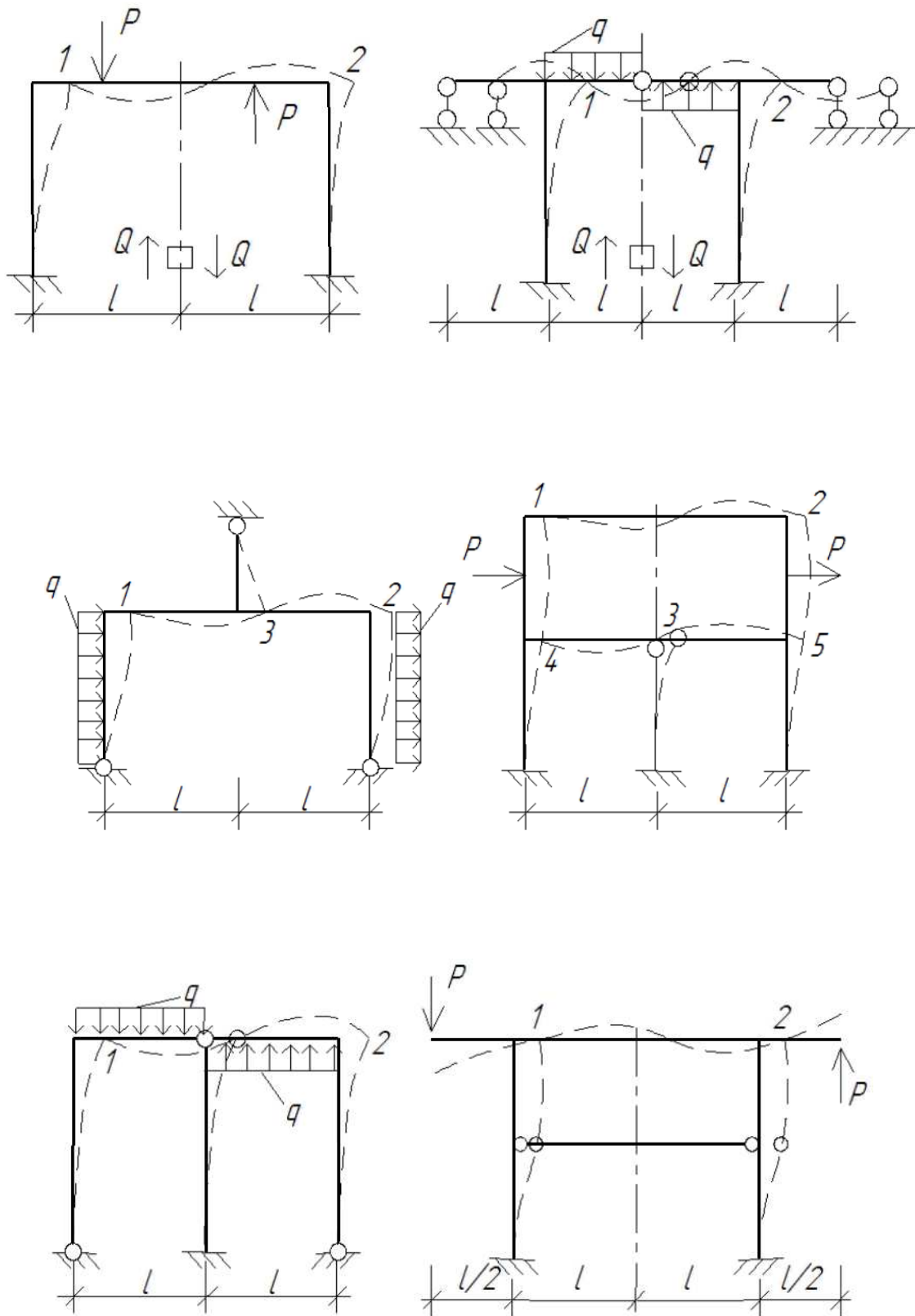


Рис 4.3

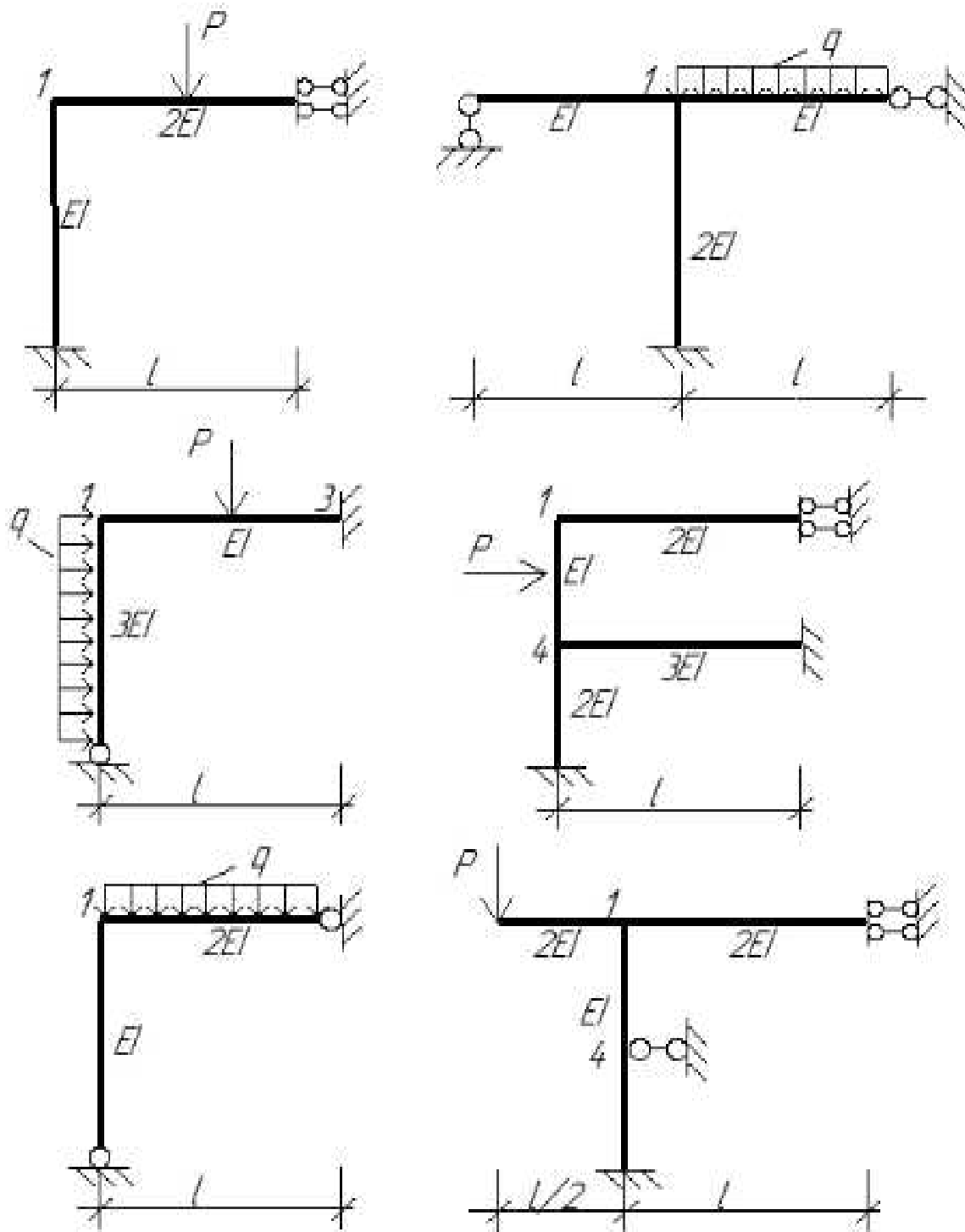


Рис 4.4

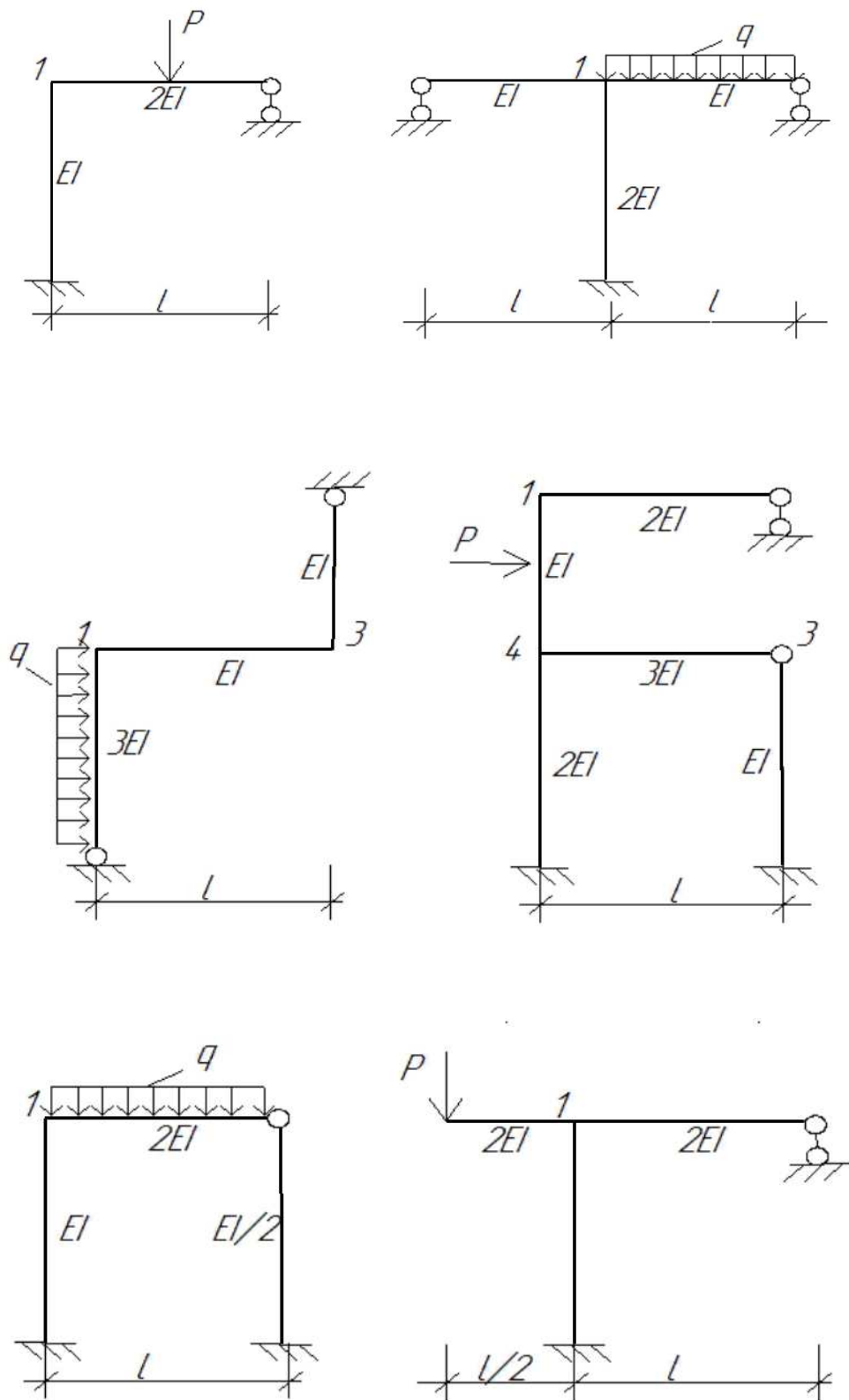


Рис 4.5

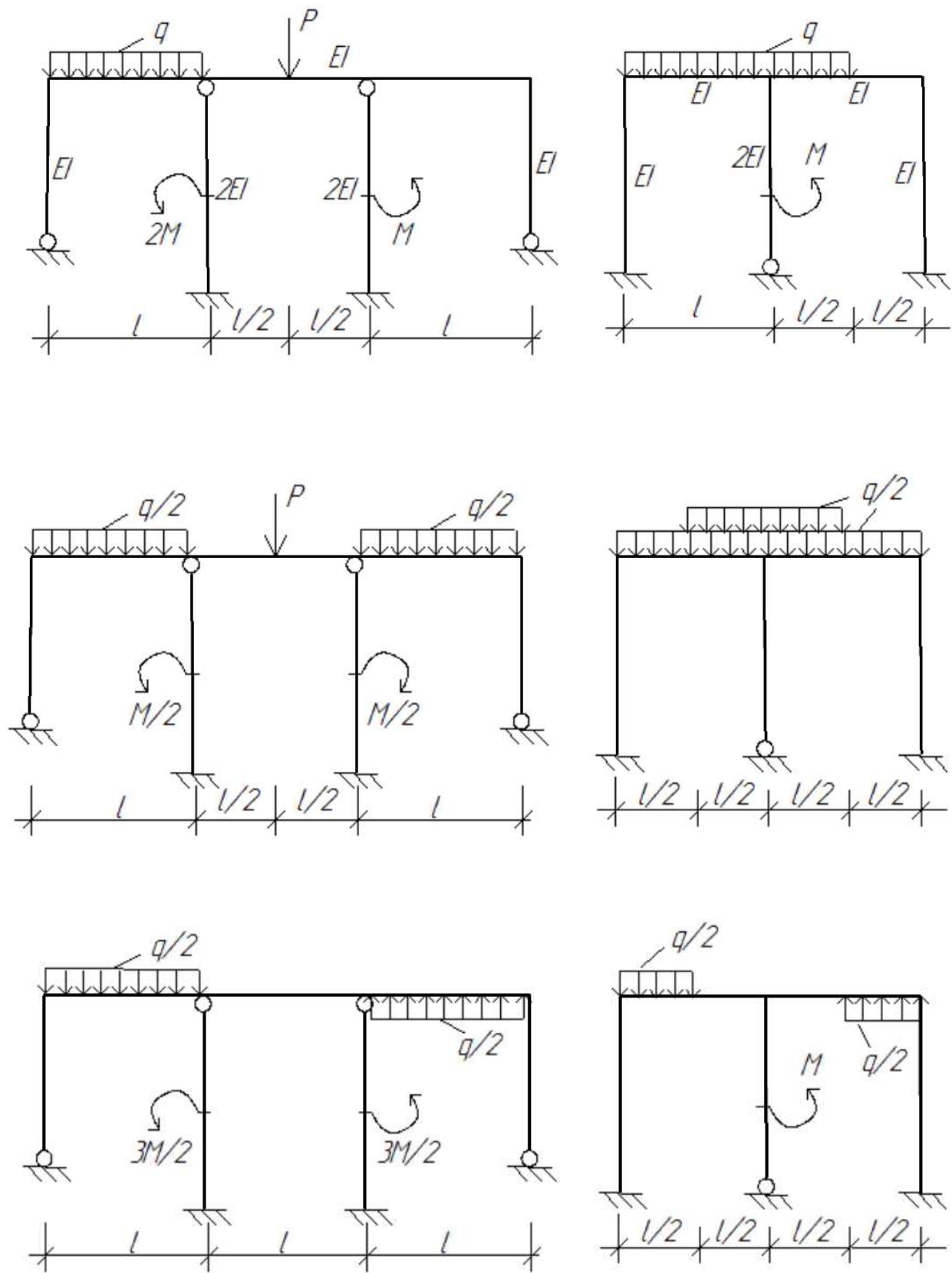


Рис 4.6

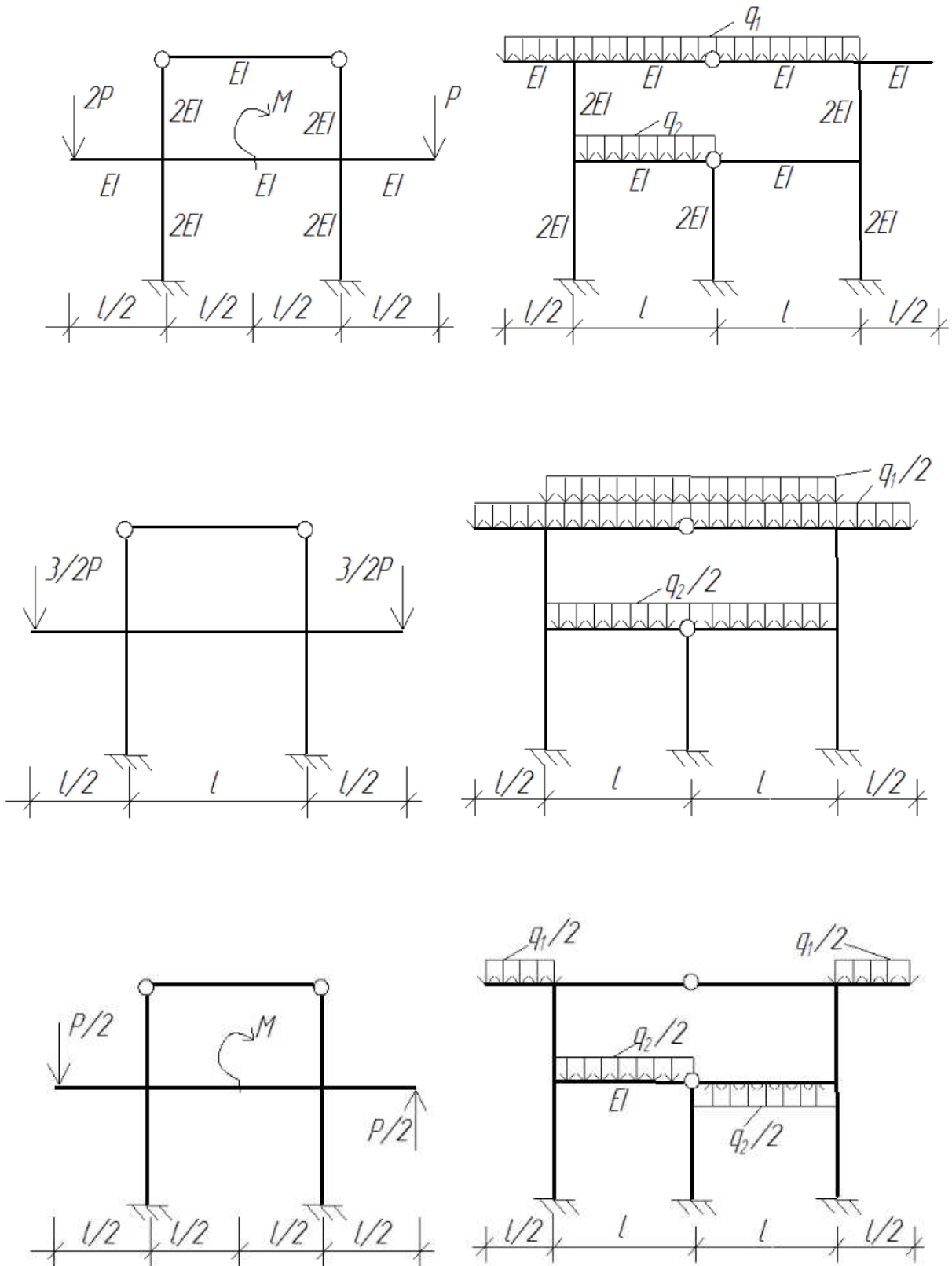


Рис 4.7

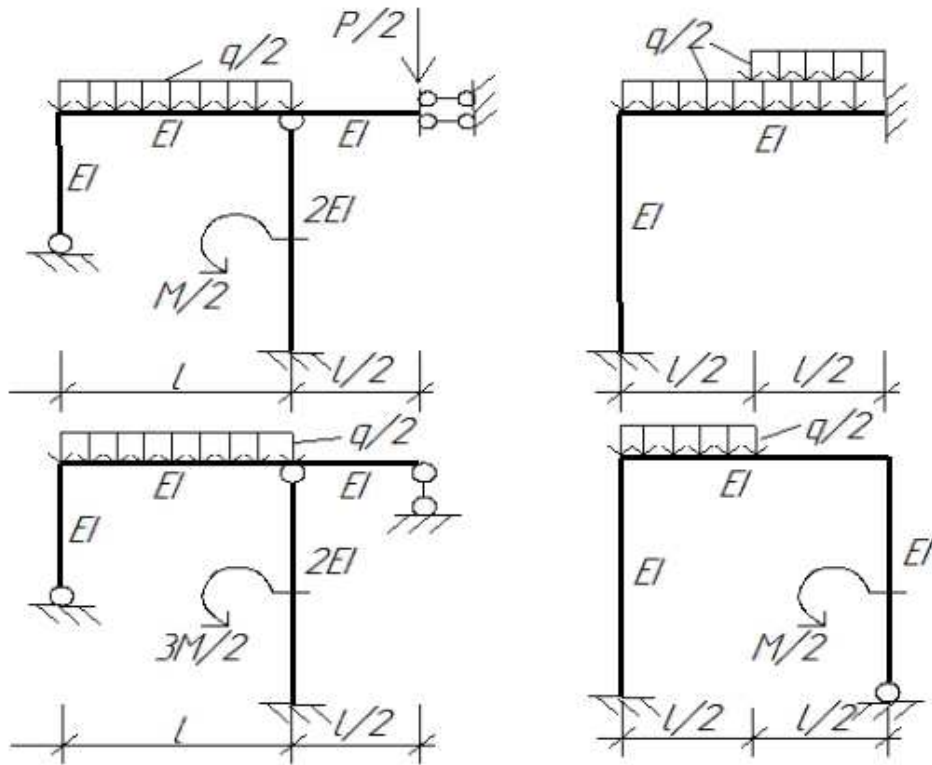


Рис 4.8

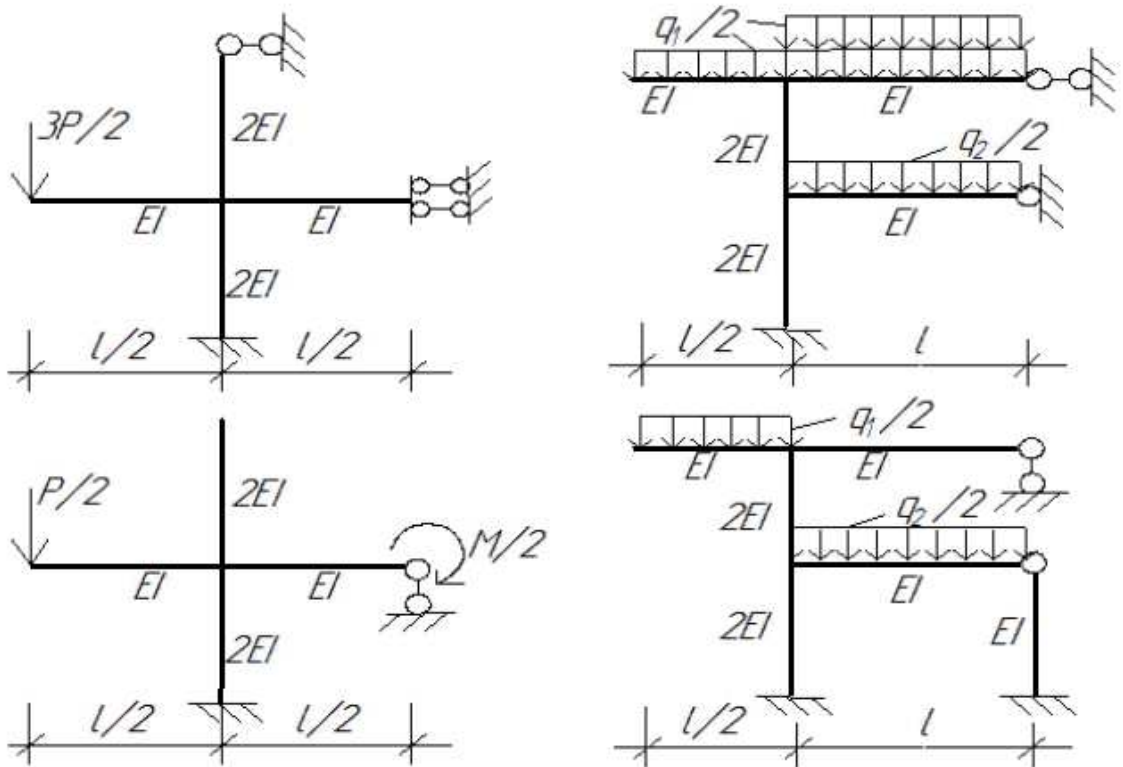


Рис 4.9

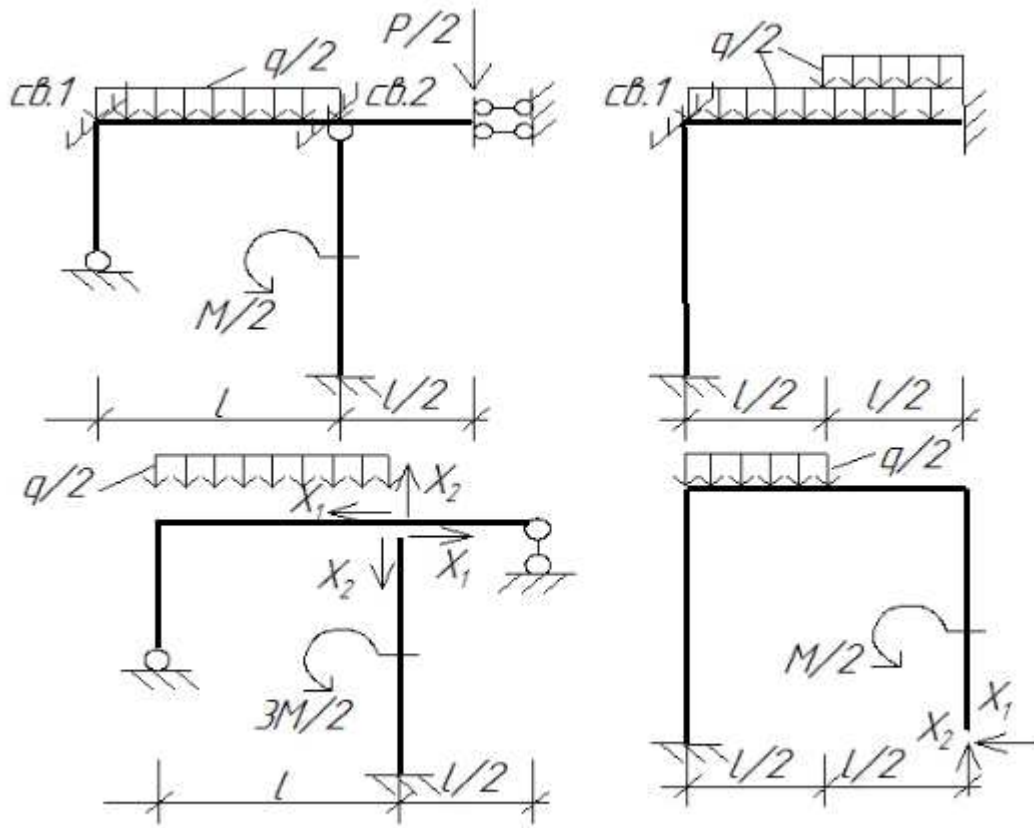


Рис 4.10

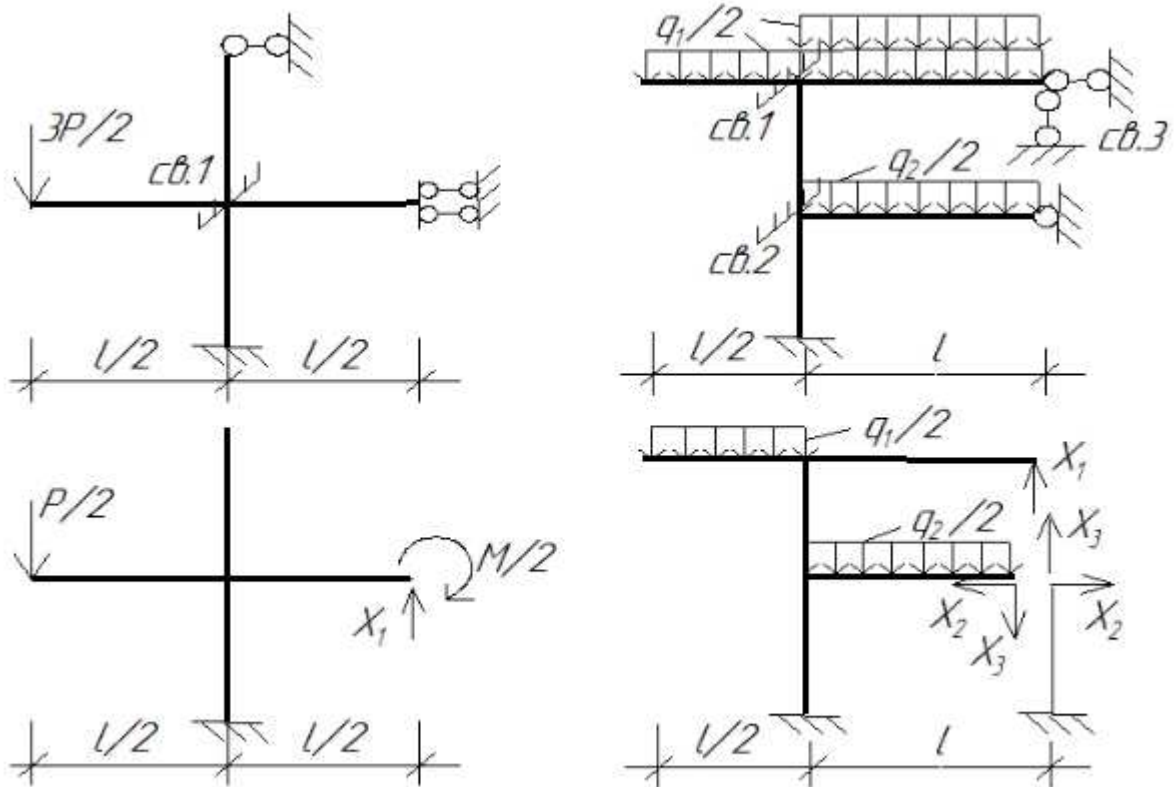


Рис 4.11

11. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от $X_1=1$ и заданной нагрузки.

12. Определяем коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1p}^0 канонического уравнения.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{EI} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{2EI} = \frac{32}{EI},$$

$$\Delta_{1p}^0 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{EI} = \frac{320}{3EI}.$$

13. Определяем значение неизвестного.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}^0}{\delta_{11}} = -\frac{320}{3EI} / \frac{32}{EI} = -\frac{10}{3}.$$

14. Строим эпюры изгибающих моментов в расчетной схеме от нагрузки (1.17) (рис.4.14).

15. Строим эпюру изгибающих моментов в заданной раме от обратносимметричной нагрузки (рис.4.14).

16. Строим эпюру изгибающих моментов M_p в заданной раме от заданной нагрузки (4.1) (рис.4.12г).

17. Выполняем кинематическую проверку решения (1.20).

$$\begin{aligned} \Delta_{1p}^0 &= \sum_1^5 \frac{M_p \bar{M}_1}{EI} ds = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25,833 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \\ &+ \frac{8}{6 \cdot 2EI} (-18,333 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 0 - 8,333 \cdot 4) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,833 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \\ &= (213,334 - 213,328) / EI < 1\%. \end{aligned}$$

18. Определяем поперечные (1.27) и продольные (1.28) силы в стержнях рамы и строим эпюры поперечных Q_p и продольных N_p сил (рис.5.12д, е).

19. Выполняем статическую проверку (1.29), рассматривая равновесие отсеченной сечением I – I части рамы (рис.4.12д).

$$\sum X = 0, \quad 1,875 - 1,875 = 0;$$

$$\sum Y = 0, \quad 33,542 - 20 \cdot 4 + 0,208 + 49,791 - 3,541 = 0;$$

$$\sum M_3 = 0, \quad -20 \cdot 4 \cdot 2 + 0,208 \cdot 16 - 1,875 \cdot 4 + 1,875 \cdot 4 + 49,791 \cdot 4 - 3,541 \cdot 12 = 0.$$

Пример 4.3.2. Выполнить расчет статически неопределимой симметричной рамы (рис.4.15) от нагрузки комбинированным методом и построить эпюру изгибающих моментов. Результаты решения приведены на рис.4.15.

Пример 4.3.3. Выполнить расчет статически неопределимых симметричных рам (рис.4.16; 4.17) от нагрузки комбинированным методом и построить эпюры изгибающих моментов самостоятельно.

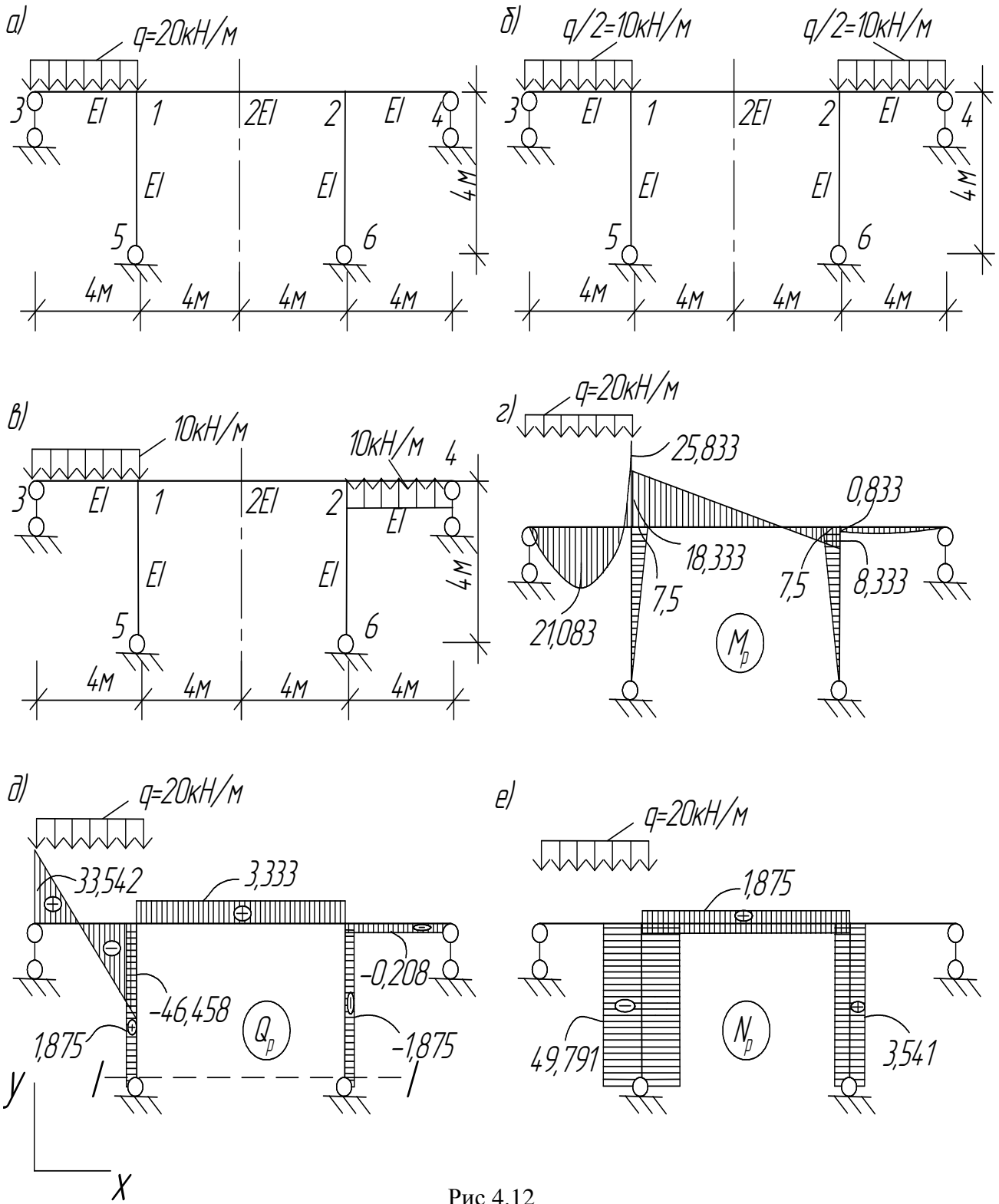


Рис 4.12

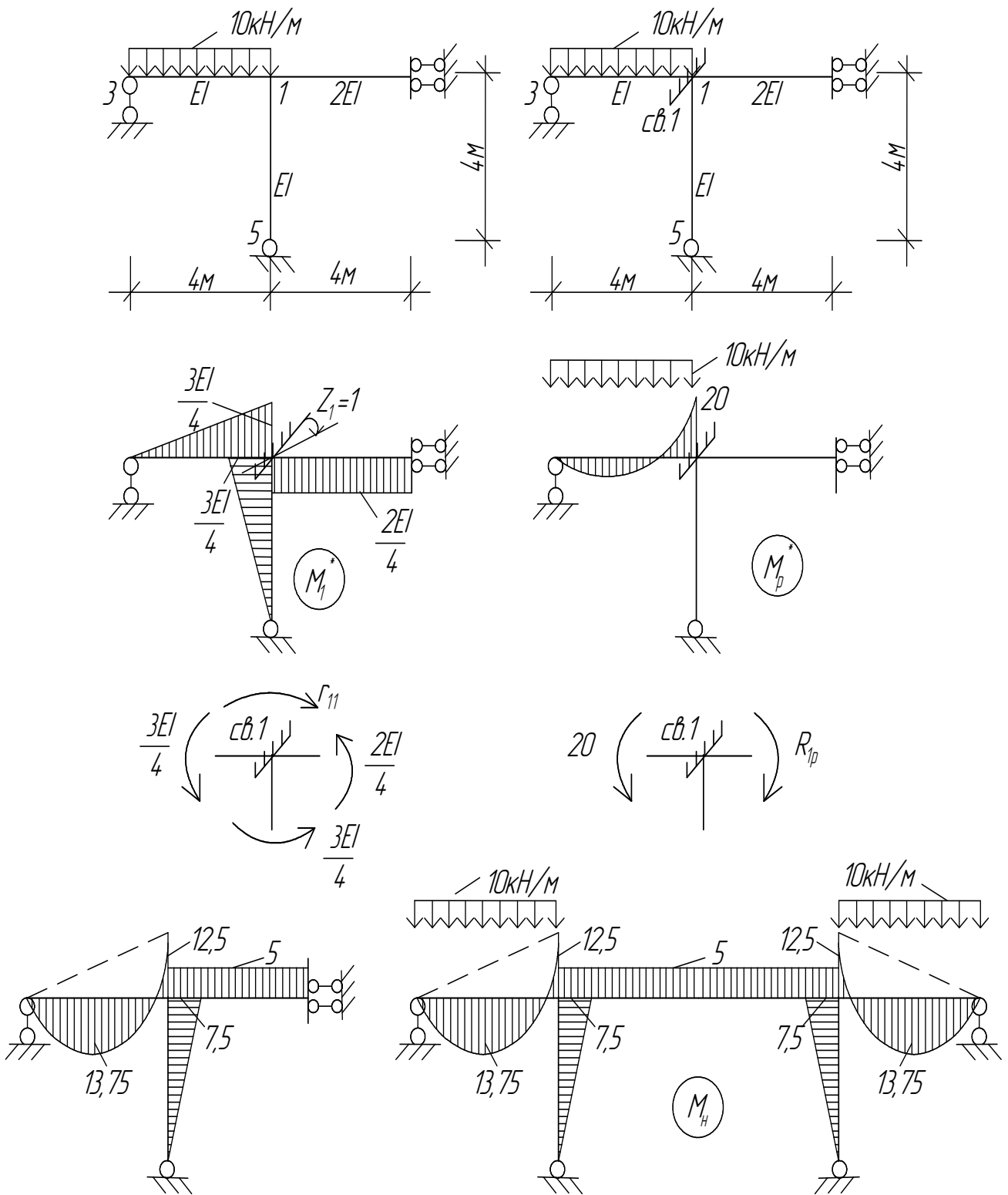


Рис 4.13

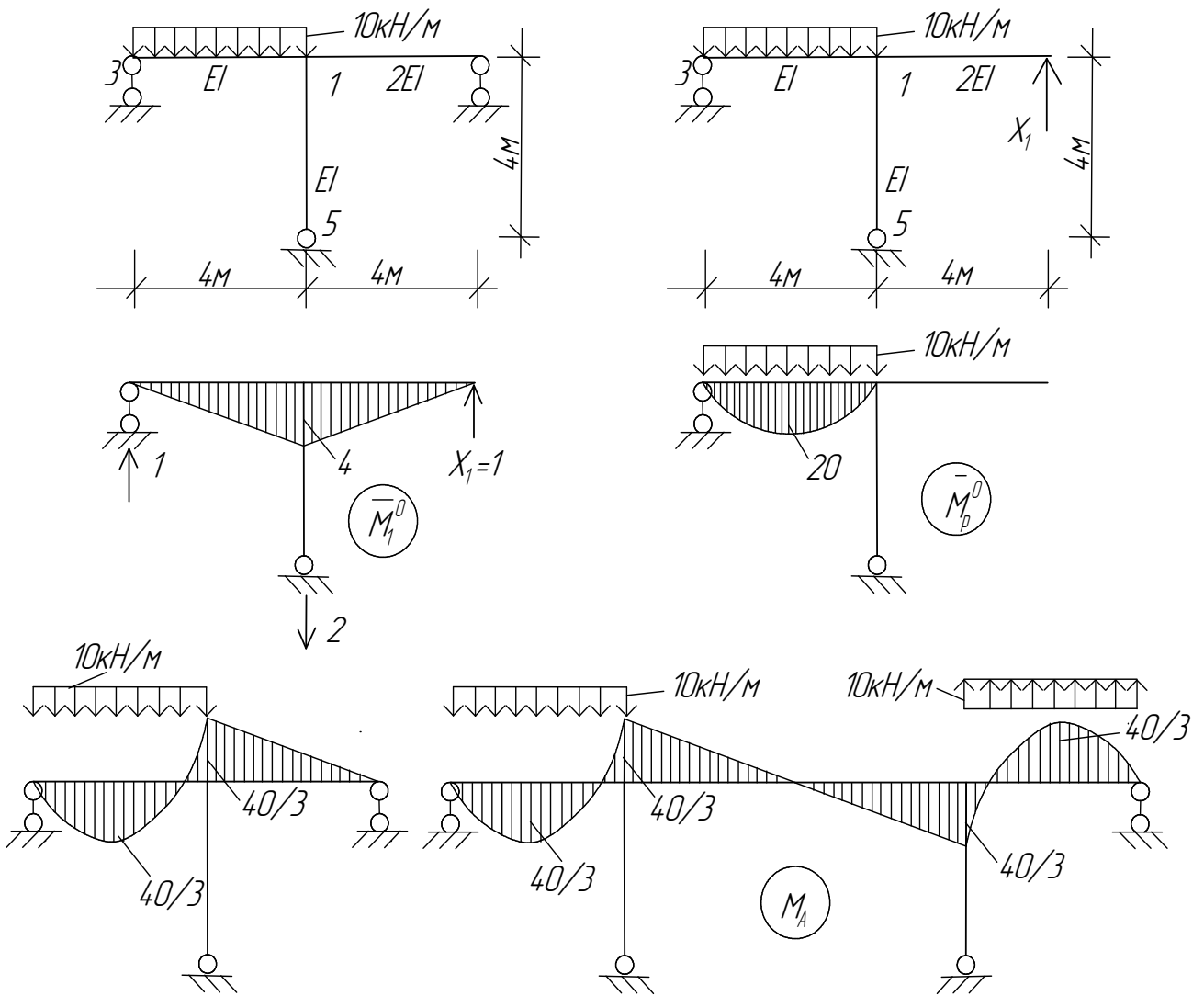


Рис 4.14

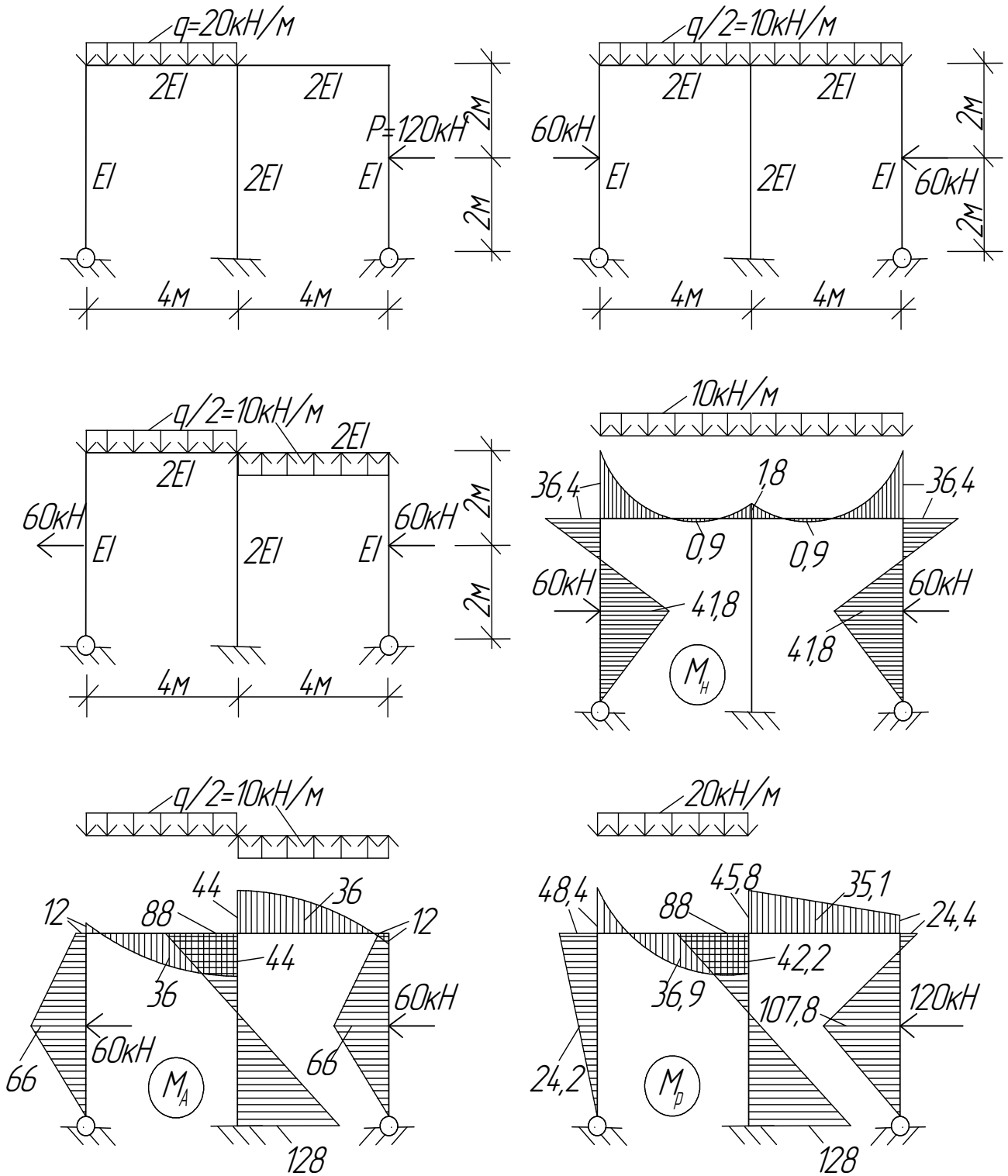


Рис 4.15

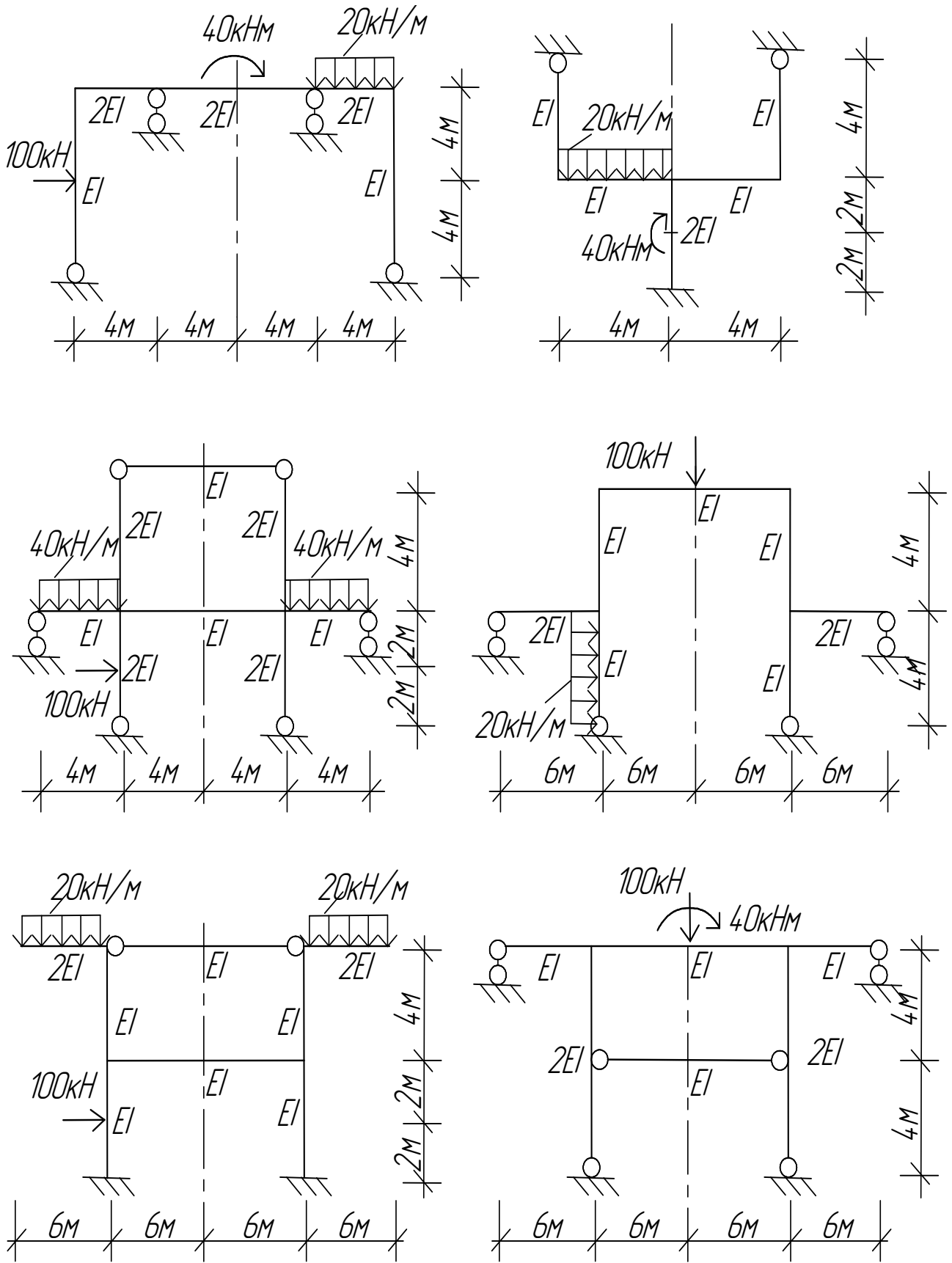


Рис 4.16

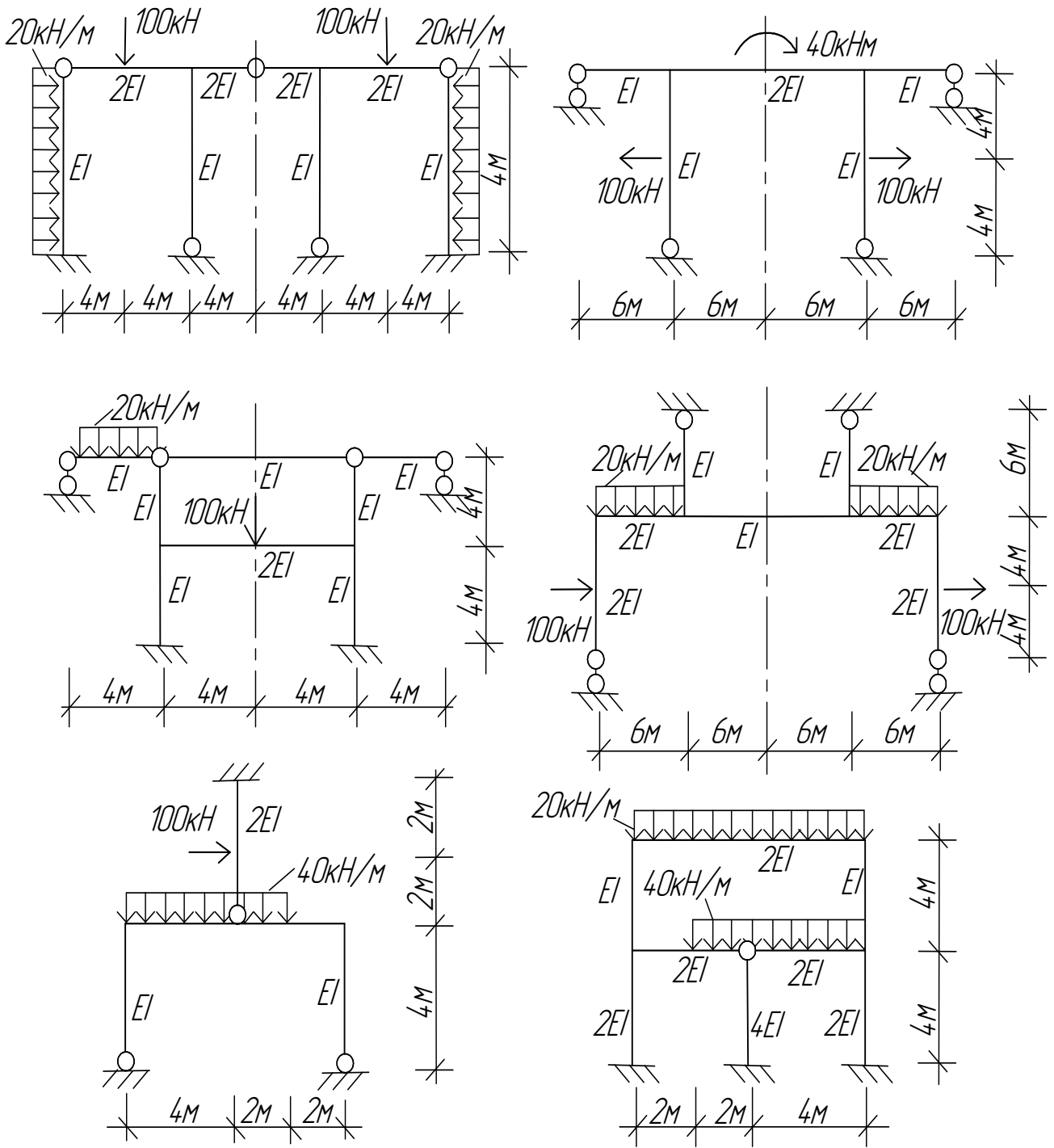


Рис 4.17

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Строительная механика: учеб. для студентов вузов по направлению 270100 "Строительство". Шеин А.И.. М. : Изд. Дом "БАСТЕТ", 2011. - 272 с.
3. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – Санкт-Петербург, изд. Лань, 2010. – 606 с.
4. Строительная механика / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
6. Сборник задач и упражнений по строительной механике. Ч. I / Б.Б. Лампси, Н.Ю. Трянина, А.А. Юлина, С.Г. Юдников, И.В. Половец, Б.Б. Лампси, П.А.Хазов – Н.Новгород, 2015. – 135 с.
7. Строительная механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов по строит. спец. Ч.2 : Статически неопределимые системы / Д.Н. Соболев, Н.Н. Анохин. – М.: АВС, 2010. – 542с.
8. Строительная механика в примерах и задачах / Н.Н. Анохин. – М.: АВС, 2010. – 454 с.

Борис Борисович Лампси
Надежда Юрьевна Трянина
Сергей Георгиевич Юдников
Анна Александровна Юлина
Ирина Владимировна Половец
Борис Борисович Лампси
Павел Алексеевич Хазов

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

Часть II. Статически неопределимые системы

Учебное пособие

Редактор Д.М.Фетюкова

Подписано в печать

Формат 60x90 1/16. Бумага газетная.

Печать офсетная. Уч.-изд.л. 5,9 .Усл.печ.л. 6,5 .

Тираж 500 экз. Заказ №

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
603950, Нижний Новгород, Ильинская, 65

Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, Ильинская, 65