Н. Ю. Прокопенко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Нижний Новгород
2018

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Н. Ю. Прокопенко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2018

ББК 32.813я73
П78
УДК 004.89(075.8)

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:
М. К. Тюсова– канд. соц. наук, доцент кафедры математики и системного анализа Нижегородского института управления – филиала РАНХиГС
А. В. Елесин– канд. физ.-мат. наук ведущий научный сотрудник ННИМ ННГУ

Прокопенко Н. Ю. Исследование операций [Текст]: учеб. пособие / Н. Ю. Прокопенко; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 165 с. ISBN 978-5-528-00273-6

В учебном пособии представлены модели линейного, целочисленного, динамического программирования. Приведены примеры разработки и применения рассматриваемых методов и моделей.

Для подготовки студентов бакалавриата по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика» профили «Прикладная информатика в экономике», «Прикладная информатика в менеджменте».

ББК 32.813я73

ISBN 978-5-528-00273-6

Оглавление

1. Задачи линейного программирования и методы решения

1.1. Общая постановка и примеры задач линейного программирования

Оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

Введем условные обозначения:

α – параметры модели;

x – управляющие переменные или решения;

X – область допустимых значений;

ξ – случайные или неопределенные факторы;

W – целевая функция или критерий эффективности (критерий оптимальности).

В соответствии с введенными терминами математическая модель задачи имеет следующий вид: $W=W(x,\alpha,\xi)\to\max(\min)$, $x\in X$.

Решить оптимизационную задачу – это значит найти такое оптимальное решение $x^*\in X$, чтобы при данных фиксированных параметрах α и с учетом неизвестных факторов ξ значение критерия эффективности W было по возможности максимальным (минимальным):

$$W^*=W(x^*,\alpha,\xi)=\max(\min)W(x,\alpha,\xi),\ \ x\in X.$$

Таким образом, оптимальное решение – это решение предпочтительнее других по определенному критерию эффективности (одному или нескольким).

Оптимизационная задача является неразрешимой, если она не имеет оптимального решения. В частности, задача максимизации будет неразрешима, если целевая функция не ограничена сверху на допустимом множестве.

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям, т.е. целевая функция линейна и область допустимых значений определяется системой линейных равенств или неравенств. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования (линейного планирования).

Постановка задачи линейного программирования

Максимизировать (минимизировать) функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

где x_j, j=1,…n – управляющие переменные или решения задачи; b_j, a_{ij}, i=1,…m, j=1,…n – параметры; f – целевая функция или критерий эффективности задачи.

Говорят, что задача представлена в канонической форме, если математическая модель задачи имеет вид (система ограничений – это система уравнений и все переменные неотрицательные)

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1, m};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Пример 1. Предприятие производит изделия трех видов, поставляет их заказчикам и реализует на рынке. Заказчикам требуется 1000 изделий первого вида, 2000 изделий второго вида и 2500 изделий третьего вида. Условия спроса на рынке ограничивают число изделий первого вида 2000 единицами, второго – 3000 и третьего – 5000 единицами.

Для изготовления изделий используется 4 типа ресурсов. Количество ресурсов, потребляемых для производства одного изделия, общее количество ресурсов и прибыль от реализации одного изделия каждого вида заданы в таблице.

Тип ресурсов	Вид изделий			Всего ресурсов
	1	2	3	
1	500	300	1000	25 млн
2	1000	200	100	30 млн
3	150	300	200	20 млн
4	100	200	400	40 млн
Прибыль	20	40	50	

Как организовать производство, чтобы:

1) обеспечить заказчиков;

2) не допустить затоваривания;

3) получить максимальную прибыль.

Построение математической модели

1-й этап – формирование цели.

Цель – получение максимальной прибыли.

2-й этап – определение параметров модели.

Параметрами являются все числовые данные, приведенные в условии задачи.

3-й этап – формирование управляющих переменных, изменяя значение которых, можно приближаться к поставленной цели.

Управляющие переменные:

x_1 – число изделий первого вида;

x_2 – число изделий второго вида;

x_3 – число изделий третьего вида.

4-й этап – определение области допустимых значений.

Ограничения: обеспечить заказчиков, не превысить запас ресурсов, не допустить затоваривания рынка.

В соответствии с этими ограничениями выпишем область допустимых решений задачи:

$$\begin{cases} x_1 \ge 1000 \\ x_2 \ge 2000 \\ x_3 \ge 2500 \\ x_1 \le 2000 \\ x_2 \le 3000 \\ x_3 \le 5000 \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \le 25000000 \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \le 30000000 \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \le 20000000 \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \le 40000000. \end{cases}$$

Первые три неравенства в системе соответствуют спросу заказчиков. Неравенства с четвертого по шестое формализуют спрос на рынке. Последние четыре неравенства соответствуют ограничениям по ресурсам.

5-й этап – выявление неизвестных факторов, т. е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.

Таких величин в данной задаче нет.

6-й этап – выражение цели через управляющие переменные и параметры.

$$f = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \max.$$

Буквой f обозначена прибыль, ее надо максимизировать, каждое слагаемое определяет прибыль от производства изделий каждого вида соответственно в количествах x_1, x_2, x_3.

Пример 2. Формирование минимальной потребительской корзины

Задан ассортимент продуктов, имеющихся в продаже. Каждый продукт содержит определенное количество разных питательных веществ (витаминов и калорий). Известен требуемый человеку минимум питательных веществ каждого вида. Необходимо определить требуемую потребительскую продовольственную корзину, имеющую минимальную стоимость.

Построение математической модели.

1. Целью является минимизация стоимости потребительской корзины.

2. Параметры задачи:

n – число различных продуктов, имеющихся в продаже;

m – число различных питательных веществ, необходимых человеку;

a_{ij} – содержание i-го питательного вещества в j-м продукте, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$;

b_i – количество i-го питательного вещества, необходимое человеку, $i=\overline{1,m}$;

c_j – стоимость единицы j-го продукта, $j=\overline{1,n}$.

3. Управляющие переменные x_j – количество j-го продукта, входящего в потребительскую корзину, $j=\overline{1,n}$.

4. Область допустимых решений определяется системой неравенств, содержащей условия необходимого уровня потребления каждого питательного вещества во всех продуктах и условия неотрицательности управляющих переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n} \end{cases}$$

5) Критерий оптимальности f имеет вид $f = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$.

Пример 3. Расчет оптимальной загрузки оборудования

Предприятию необходимо выполнить производственный заказ на имеющемся оборудовании. Для каждой единицы оборудования заданы: фонд рабочего времени, себестоимость изготовления единицы продукции каждого вида и производительность, т. е. число единиц продукции каждого вида, которое можно произвести в единицу времени. Нужно распределить изготовление продукции между оборудованием таким образом, чтобы себестоимость всей продукции была минимальна.

Составление математической модели.

1. Целью является минимизация себестоимости.

2. Параметры задачи:

m – номенклатура, т. е. число различных видов продукции в производственном заказе;

b_i – число единиц продукции i-го вида, $i = \overline{1, m}$;

n – число единиц оборудования;

T_j – фонд рабочего времени оборудования j-го типа, $j = \overline{1, n}$;

a_{ij} – производительность оборудования j-го типа по производству изделий i-го вида, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;

c_{ij} – себестоимость изготовления единицы продукции i-го вида на оборудовании j-го типа, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

3. Управляющие переменные x_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ – время, в течение которого оборудование j-го типа занято изготовлением продукции i-го вида.

4. Область допустимых решений определяется ограничениями по фонду времени (1), номенклатуре (2) и условиями неотрицательности x_{ij} (3).

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \le T_1 & \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} \le T_2 & (1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} \le T_n & \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} & (3) \end{cases}$$

5. Критерий оптимальности задается функцией

$f = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} a_{ij} x_{ij} \to \min$, где f – суммарная себестоимость.

Математическая модель данной задачи содержит $m \times n$ неизвестных (управляющих переменных) и $m + n$ ограничений, не считая условий (3). После расчета модели определяется оптимальная загрузка оборудования, т. е. время, в течение которого оборудование каждого типа занято изготовлением продукции каждого вида.

Пример 4. Составление плана реализации товара

Фирма реализует различные товары, используя при этом определенный набор средств (технических, людских, денежных).

Общий запас средств, число средств каждого вида, используемых при реализации единицы любого товара, и прибыль от продажи заданы. Надо сформировать план реализации товаров, приносящий фирме максимальную прибыль.

Построение математической модели.

1. Цель – максимизация прибыли.

2. Параметры задачи:

n – число различных видов реализуемых товаров;

m – число разных видов средств;

b_i – запас средств i-го вида $i=\overline{1,m}$;

a_{ij} – число средств i-го вида, используемых для реализации единицы товара j-го вида, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$;

p_i – прибыль от реализации единицы товара j-го вида, $j=\overline{1,n}$.

3. Управляющие переменные x_j, $j=\overline{1,n}$ – количество реализуемого товара j-го вида.

4. Область допустимых решений формируют ограничения по запасам средств и условия неотрицательности управляющих переменных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

5. Критерий оптимальности определяется по формуле $f=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$, где f – суммарная прибыль.

В результате расчета этой модели определяется количество реализуемых товаров каждого вида, обеспечивающее фирме максимальную прибыль.

1.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать:

– для решения задач с двумя переменными;

– решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Для применения графического метода задачу линейного программирования следует записать в канонической форме:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим задачу с двумя переменными.

Каждое из неравенств системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость с граничными прямыми:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ i = \overline{1,m};$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

В случае, если система неравенств совместна, ее область допустимых решений (ОДР) есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Множество точек пересечения данных полуплоскостей выпуклое, т. е. обладает следующим свойством: если две точки *A* и *B* принадлежат этому множеству, то и весь отрезок *AB* принадлежит этому множеству.

Целевая функция (ЦФ) f при фиксированном значении определяет на плоскости прямую линию. Изменяя значения f, мы получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня*.

Вектор-градиент линейной функции f $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2)$, перпендикулярный этим прямым, указывает направление наискорейшего возрастания f, а противоположный вектор – направление убывания f. Задача определения максимума f сводится к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая f=const, которая соответствует наибольшему значению f.

Теорема (основная теорема линейного программирования). Целевая функция линейного программирования достигает своего экстремума в вершине допустимой области. Если целевая функция достигает экстремального значения более чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин.

В общем случае возможны следующие варианты области допустимых решений (рис.1 и 2).

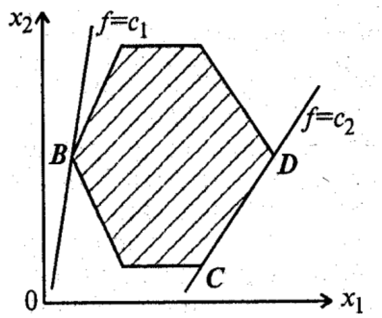


Рис.1. Область допустимых решений – замкнутое множество (многоугольник)

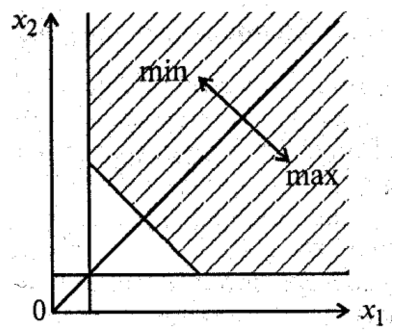
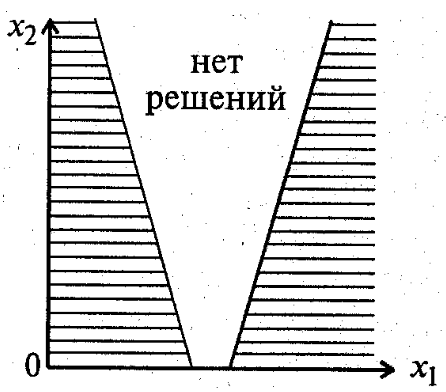


Рис. 2. Область допустимых решений – открытое множество

На рис. 1, 2 показаны варианты пересечения линии уровня целевой функции с областью допустимых решений. Может быть единственное решение – точка *B*, бесконечно много решений – отрезок *СД* (рис. 1), максимальным (минимальным) значением целевой функции может быть ∞ (рис. 2).



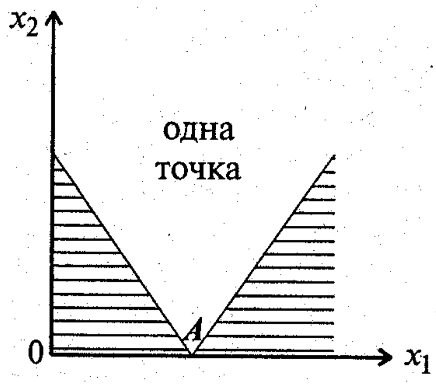


Рис.3. Область допустимых решений – пустое множество (система ограничений несовместна)

Рис. 4. Область допустимых решений состоит из единственной точки A

Алгоритм решения.

1. Построить прямые, соответствующие ограничениям.

2. Определить области, в которых выполняются ограничения задачи. Для этого выбрать произвольную точку и подставить ее координаты в первую часть одного из равенств. Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка, в противном случае искомая полуплоскость лежит с противоположной стороны от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств (ограничений).

3. Определить многоугольник решений как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям задачи.

4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции.

Это можно сделать двумя способами:

А. Построить вектор-нормаль $\vec{n}=(c_1,c_2)$ с координатами из коэффициентов ЦФ. Его направление показывает направление возрастания функции, в противоположном направлении функция убывает.

Б. Построить две линии уровня функции $f=K_1$, $f=K_2$ (K_1, K_2 – произвольные константы, $K_1\neq K_2$) и по их расположению определить направление возрастания (убывания) функции.

5. Определяют граничную точку или точки области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.

6. Вычисляют значение найденной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Пример 5. Решим геометрически следующую задачу линейного программирования: $F=2x_1-2x_2\rightarrow\min$;

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

Решение. Построим область ограничений. Строим прямую $x_1 - x_2 = -3$ по двум точкам, координаты которых удовлетворяют уравнению: (-3; 0), (0, 3) (см. рис. 5). Проверяем, какая полуплоскость удовлетворяет неравенству $x_1 - x_2 \ge -3$. Для этого выберем произвольную точку и проверим, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству: $0 - 0 \ge -3$. Неравенство верное, значит, точка с координатами (0, 0) лежит в нужной полуплоскости. Рисуем «штрихи» по направлению к этой точке. Аналогично находим полуплоскости, соответствующие оставшимся неравенствам. Пересечение получившихся плоскостей является искомым ограничением (это пятиугольник, закрашенный серым цветом).

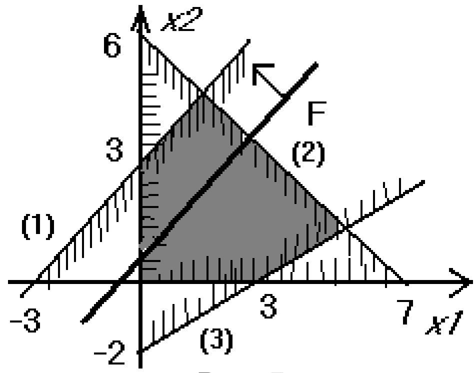


Рис. 5

Определим наклон уровней целевой функции. Для этого нарисуем прямую для конкретного значения целевой функции. Например, для F=2 уравнение целевой функции $F = 2 = 2x_1 - 2x_2$. Прямая проходит через точки (–1;0) и (0;1). Стрелка показывает направление уменьшения значения F. Оптимальное (наименьшее значение целевая функция примет «на выходе» из области ограничения. Так как линии уровня целевой функции параллельны прямой (1), то оптимальное значение целевая функция будет принимать на отрезке, а не в одной точке. Точки этого отрезка задаются уравнением $x_2 = x_1 + 3$, где $0 \le x_1 \le \frac{21}{13}$. Тогда $F_{\min} = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$.

1.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования

(впервые был предложен Дж. Данцингом в 1949 г., однако еще в 1939 г. идеи метода были разработаны Л.В. Канторовичем)

Симплекс-метод основан на следующих свойствах ЗЛП (задачи линейного программирования):

1. Не существует локального экстремума, отличного от глобального. Другими словами, если экстремум есть, то он единственный.

2. Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

3. Целевая функция достигает своего максимального значения в угловой точке многогранника решений (в его вершине). Если целевая функция принимает свое оптимальное значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих точек.

4. Каждой угловой точке многогранника решений отвечает опорный план ЗЛП.

В случае двух переменных область допустимых решений, как правило, представляет собой замкнутый многоугольник. Для n переменных областью допустимых решений является многомерный многогранник, подобный симплексу. Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника.

Данный метод представляет собой целенаправленный перебор допустимых базисных решений задачи линейного программирования, построенный таким образом, что каждое следующее анализируемое базисное решение не хуже предыдущего с точки зрения соответствующего значения целевой функции. Он позволяет за конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Три основных элемента симплексного метода:

1) нахождение начального допустимого базисного решения.

Под *допустимым базисным решением* понимается решение системы с неотрицательными компонентами, в котором неосновные переменные равны 0. *Оптимальным решением* ЗЛП называется такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает экстремума;

2) осуществление перехода от одного допустимого базисного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному;

3) определение критерия завершения процесса решения задачи, позволяющего своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения.

Для использования симплексного метода задача линейного программирования должна быть приведена к каноническому виду, т.е. система ограничений должна быть представлена в виде уравнений.

Для применения симплекс-метода задачу следует записать в канонической форме: $Z(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m.$

Будем считать, что правые части всех уравнений системы ограничений неотрицательны, иначе умножим это уравнение на (–1).

В канонической форме записи все переменные неотрицательны, ограничениями являются уравнения, и требуется найти такие значения $x_j, j = \overline{1,n}$, при которых целевая функция имеет максимум.

Переход к канонической форме записи производится следующим образом:

1) если требуется найти минимум, f заменяется на $-f$, переходят к задаче максимизации, так как $\min f = -\max(-f)$;

2) если ограничение имеет знак ≤, от него переходят к равенству, добавляя в левую часть ограничения дополнительную неотрицательную переменную;

3) если ограничение имеет знак ≥, от него переходят к равенству, вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную;

4) если в задаче какая-либо из переменных произвольна, ее заменяют разностью двух неотрицательных переменных (например, для произвольной переменной x_4, $x_4=x_5-x_6$, где $x_5\geq 0$, $x_6\geq 0$).

Пример 6. Записать в канонической форме ЗЛП.

$$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Запишем новую функцию $f_1 = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

Вычитая дополнительную неотрицательную переменную x_4 из левой части первого неравенства, переходим к уравнению.

Добавляя дополнительную неотрицательную переменную x_5 к левой части этого второго неравенства, также переходим к уравнению.

Произвольную переменную x_3 заменяем разностью двух неотрицательных переменных: $x_3=x_6-x_7$, $x_6\geq 0$, $x_7\geq 0$.

Окончательно получаем каноническую форму записи:

$$f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_6 - 3x_7 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_6 - x_7 - x_4 = 10 \\ x_1 - 8x_2 - 2x_6 + 2x_7 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_6 - 7x_7 = 20 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Алгоритм симплексного метода

На каждом шаге метода выбираются группы основных и неосновных переменных.

1. Получение начального решения.

Выбирается m переменных, называемых базисными (основными) и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 в остальные уравнения системы ограничений. На первом шаге удобно в качестве основных переменных выбрать добавочные переменные. Остальные $m-n$ переменных называют свободными (неосновными). Первоначальный опорный план имеет вид

$$X=(x_1=b_1,\ldots,x_m=b_m,x_{m+1}=0,\ldots,x_n=0).$$

Если все $b_i \geq 0$, то начальное решение является допустимым и осуществляется переход к шагу 2. В противном случае используется алгоритм нахождения допустимого начального решения.

2. На каждом следующем шаге в результате анализа функции цели и системы ограничений выбирается одна неосновная переменная, которая будет переходить в группу основных переменных, и одна основная, переходящая в группу неосновных переменных.

Если решается задача максимизации функции цели, то:

- данная неосновная переменная должна входить в формулу функции цели с положительным коэффициентом, тогда ее перевод может привести к увеличению значения функции цели;
- базисная (основная) переменная, переходящая в группу неосновных, определяется по минимальной оценке, вычисляемой по одному из оценочных отношений.

Все возможные случаи оценочных отношений для уравнения

$x_j=b_j+\ldots+a_{ij}x_i+..$, здесь b_j – свободный член, x_i – переводимая неосновная переменная.

$\Theta_i=\left|\dfrac{b_j}{a_{ij}}\right|$, если $b_j \neq 0$ и $a_{ij} \neq 0$ – разного знака;

$\Theta_i=0$, если $b_j=0$ и $a_{ij}>0$;

$\Theta_i=\infty$, если $a_{ij}=0$.

3. Затем выполняются эквивалентные преобразования системы ограничений таким образом, что каждая основная переменная будет входить только в одно, свое уравнение с единичным коэффициентом, тогда правые части системы ограничений снова будут равны значениям основных переменных.

4. Формула целевой функции записывается с помощью свободных (неосновных) переменных, тогда свободный член формулы функции цели будет показывать ее значение для анализируемого базисного решения.

5. Критерием оптимальности анализируемого допустимого базисного решения является отсутствие выбора нового базисного решения, которое оказалось бы лучше данного.

Так, *критерием оптимальности* анализируемого допустимого базисного решения при максимизации целевой функции является отсутствие положительных коэффициентов при неосновных переменных в формуле функции цели.

Критерий оптимальности при отыскании минимума целевой функции: если в выражении целевой функции через неосновные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально.

Алгоритм нахождения допустимого начального решения

1. Если начальное решение недопустимо, то рассмотрим уравнение, содержащее отрицательный свободный член (любое, если их несколько) и переведем в основные ту переменную, которая входит в это уравнение с положительным коэффициентом (любую, если их несколько). Если при этом по минимальной оценке будет получено разрешающее уравнение, не содержащее отрицательного свободного члена, то в новом базисном решении число отрицательных компонент не уменьшится. Это значит, что нужно попытаться перевести в основные другую переменную, которая входит в это же уравнение с положительным коэффициентом.

2. Шаг 1 нужно повторять до тех пор, пока не получим допустимое начальное базисное решение или пока все возможные переменные не будут про-

верены и не возникнет ситуация, когда невозможно получить разрешающее уравнение с отрицательным свободным членом.

3. Если начальное базисное решение недопустимо, а в уравнении, содержащем отрицательный свободный член, отсутствует неосновная переменная с положительным коэффициентом, то в этом случае допустимое базисное решение получить невозможно, так как условия задачи противоречивы.

Симплексные таблицы. Симплексные таблицы позволяют записать процесс решения в более удобном виде.

1-й шаг. Составляем макет таблицы (пусть решается задача на отыскание максимума):

- в первой строке – неосновные переменные, в первом столбце – основные;
- заполняем таблицу коэффициентами при неосновных переменных в системе ограничений;
- приписываем справа столбец свободных членов;
- готовим последний столбец для оценочных отношений, необходимых при расчете наибольшего возможного значения переменной;
- в последней строке, которая называется оценочной, указываются коэффициенты целевой функции с противоположным знаком.

Макет симплекс-таблицы:

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных				Свободные члены	Оценка Θ
	x_1	x_2	…	x_n		
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1	
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2	
…	…	…	…	…	…	
x_k	a_{k1}	a_{k2}	…	a_{kn}	b_k	
…	…	…	…	…	…	
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m	
Z	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	

2-й шаг. Проверка, является ли первоначальное базисное решение допустимым (все ли $b_i \geq 0$).

3-й шаг. Проверка выполнения критерия оптимальности при решении задачи на максимум – наличие в последней строке отрицательных коэффициентов.

Для проверки решения просматривается последняя *Z*-строка. Из построенной таблицы можно сделать следующие выводы (без доказательств):

1. Если все коэффициенты, стоящие при свободных переменных, неотрицательны, то полученное решение оптимально, т. е. достигнут максимум (в левом нижнем углу таблицы). Основные переменные принимают значения предпоследнего столбца, неосновные переменные равны 0.

2. Полученное решение единственно, если все эти коэффициенты положительны.

3. Если среди неотрицательных коэффициентов есть хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество решений.

4. Если в последней строке есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а в соответствующем этому коэффициенту столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция не ограничена на области допустимых решений.

5. Если хотя бы один из коэффициентов, стоящих при свободных переменных, отрицательный и в соответствующем ему столбце есть хотя бы один положительный элемент, то полученное решение может быть улучшено.

4-й шаг. *(Получение нового решения)* Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент в последней строке определяет *разрешающий столбец*.

Для выбора переменной, выводимой из списка базисных, находят отношение элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Среди этих отношений выбирают минимальное. Строка, соответствующая минимальному отношению, называется *разрешающей*. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума $F_{\max} = \infty$. Если минимум конечен, то выбираем строку, на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее *разрешающей строкой*. На пересечении разрешающего столбца и строки находится *разрешающий элемент* (обозначим его a_{kr}).

5-й шаг. Переходим к следующей таблице по правилам:

– меняем местами основную и неосновную переменную;

– на месте разрешающего элемента ставим 1, делим все элементы разрешающей строки на разрешающий элемент, делим все элементы разрешающего столбца на разрешающий элемент и меняем знак на противоположный, все остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$a'_{jj} = \frac{a_{ij} \cdot a_{kr} - a_{kj} \cdot a_{ir}}{a_{kr}}, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}; \ b'_i = \frac{b_i \cdot a_{kr} - b_k \cdot a_{ir}}{a_{kr}}, \ i = \overline{1,m}, \ i \neq k.$$

После построения новой таблицы переход к шагу 3.

1.4. Двойственность в линейном программировании. Экономическая интерпретация и свойства двойственных оценок

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*; первоначальная задача называется *исходной*, или *прямой*.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1) целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид $\leq$, а в задаче на минимум – вид $\geq$;

2) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием;

3) число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче;

4) коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи;

5) каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства ≤, соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Модель прямой задачи:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$x_j \ge 0 \quad i = \overline{1,n}.$$

Модель двойственной задачи имеет вид

$$g = \sum_{I=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n};$$

$$y_i \ge 0 \quad i = \overline{1,m}.$$

Переменные двойственной задачи y_i называются *объективно обусловленными оценками*, или *двойственными оценками*.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач находится и решение другой задачи.

Математические модели пары двойственных задач могут быть *симметричными и несимметричными*. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.

В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие не отрицательности.

Пример построения двойственной задачи.

Исходная модель

$f=3x_1+4x_2\to\max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 9 \\ 3x_1+2x_2\le 13 \\ x_1-x_2\le 1 \\ x_2\le 2 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Двойственная модель

$g=9y_1+13y_2+y_3+2y_4\to\min$

$$\begin{cases} 2y_1+3y_2+y_3\ge 3 \\ 3y_1+2y_2-y_3+y_4\ge 4 \\ y_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}. \end{cases}$$

Основные утверждения о взаимодвойственных задачах:

Теорема 1. Если исходная задача имеет конечное оптимальное решение x^*, то и двойственная к ней задача также имеет конечное оптимальное решение y^* (здесь звездочка означает, что значения переменных берутся из оптимальных решений исходной и двойственной задач), при этом

$$\sum_j c_j \cdot x_j^* = \sum_i b_i \cdot y_i^* \quad (1)$$

Теорема 2. В оптимальном решении для каждой пары сопряженных условий выполняются следующие соотношения: если одно из них выполняется как строгое равенство, то другое – как строгое неравенство и наоборот, т. е.

$$\text{если } \sum_j a_{ij} \cdot x_j^* = b_i, \text{ то } y_i^* > 0, \quad (2)$$

$$\text{если } \sum_j a_{ij} \cdot x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^* = 0, \quad (3)$$

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \sum_i a_{ij} \cdot y_i^* = c_j, \quad (4)$$

$$\text{если } x_j^* = 0, \text{ то } \sum_i a_{ij} \cdot y_i^* > c_j, \quad (5)$$

При решении симплексным методом исходной задачи для обращения системы неравенств с n переменными в эквивалентную ей систему уравнений должны быть введены m добавочных неотрицательных переменных (по числу неравенств в системе ограничений): $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$.

Система ограничений двойственной задачи состоит из n неравенств, в которых имеются m переменных. При решении этой задачи необходимо ввести n добавочных неотрицательных переменных: $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+j}, \dots, y_{m+n}$.

При этом устанавливаются следующие соответствия между переменными исходной и двойственной задачи:

$$\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
\boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \dots & \boldsymbol{x_j} & \dots & \boldsymbol{x_n} & & \boldsymbol{x_{n+1}} & \boldsymbol{x_{n+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{n+i}} & \dots & \boldsymbol{x_{n+m}} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\boldsymbol{y_{m+1}} & \boldsymbol{y_{m+2}} & \dots & \boldsymbol{y_{m+j}} & \dots & \boldsymbol{y_{m+n}} & & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{y_2} & \dots & \boldsymbol{y_i} & \dots & \boldsymbol{y_m}
\end{array}$$

Иными словами, каждой первоначальной переменной исходной задачи x_j ставится в соответствие добавочная переменная y_{m+j}, введенная в j-е неравенство двойственной задачи, а каждой добавочной переменной x_{n+i} исходной задачи, введенной в i-е неравенство исходной задачи, ставится в соответствие первоначальная переменная y_i двойственной задачи.

Теорема 3. Для взаимодвойственных ЗЛП имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственных задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$$\max f(X)=\min g(Y).$$

2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.

4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Экономический смысл двойственной задачи.

Рассмотрим задачу об использовании ресурсов.

Пусть в производстве n видов продукции используется m видов ресурсов. Известны величины a_{ij}, характеризующие расход каждого вида ресурсов на производство единицы каждого вида продукции ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$), c_j – цена реализации 1 ед. j-й продукции, b_i – запасы i-х ресурсов. Требуется найти x_j^* – оптимальный план производства каждого вида продукции, при котором расходы ресурсов не превышали бы имеющихся запасов (b_i), а общий доход при реализации всей продукции (f) был бы максимальным.

Двойственная задача к рассмотренной следующая.

Найти y_i^* – оценки единицы каждого вида ресурсов, минимизирующие суммарную оценку ресурсов, при условии, что оценка ресурсов, необходимых для производства единицы каждого вида продукции, была бы не меньше цены единицы соответствующей продукции. Иначе говоря, по какой минимальной цене предприятие может продать ресурсы, чтобы полученная от их реализации прибыль была не меньше максимально возможной прибыли в случае их использования на производство продукции при имеющихся нормах прибыли и расходовании ресурсов на единицу продукции.

В матричной форме задачи максимизации прибыли и минимизации цены будут выглядеть следующим образом:

Функция цели (полученная прибыль от реализации продукции)

$Z = C \cdot X \to \max$

при существующих ограничениях

$A \cdot X \le B$

$X \ge 0$,

где C – матрица норм прибыли на единицу продукции;

X – матрица переменных, определяющих количество единиц выпускаемой продукции каждого вида;

A – матрица норм расхода видов сырья на единицу продукции;

B – матрица запасов видов сырья.

Функция цели (полученная прибыль от продажи сырья)

$F = B^T \cdot Y \to \min$

при существующих ограничениях

$A^T \cdot Y \ge C^T$

$Y \ge 0$,

где B^T, A^T, C^T – транспортированные матрицы B, A, C;

Y – матрица переменных, определяющих цену за единицу сырья.

Свойства двойственных оценок (значений переменных двойственной задачи при оптимальном решении)

Двойственные оценки – значения переменных y_i^* – называют также *теневыми ценами*.

1. Двойственные оценки характеризуют дефицитность ресурсов. Если ресурс в оптимальном плане израсходован полностью, то его оценка положительна (см. п. 2), если же ресурс не полностью израсходован в оптимальном плане, то его оценка равна нулю (см. п. 3). В первом случае ресурс будем называть дефицитным, во втором – недефицитным, т. е. для недефицитного ресурса $y_i^* = 0$. Для недефицитного ресурса значение со-

ответствующей балансовой переменной в оптимальном решении покажет его остаток после выполнения оптимального плана.

2. Чем больше оценка ресурса, тем выше дефицитность ресурса с точки зрения его вклада в целевую функцию.

   Оценка (y_i^*) i-го ресурса показывает, на сколько изменится оптимальное значение целевой функции $Z_{\max}$ исходной задачи (доход от реализации продукции), если объем соответствующего ресурса изменить на единицу. Если же объем i-го ресурса изменить на k единиц, то целевая функция изменится на величину ($k \cdot y^*$) в случае, если это изменение не выйдет за границы устойчивости двойственных оценок.
3. Двойственные оценки показывают, как влияют изменения правой части ограничений (запасов ресурсов) на значение целевой функции. Практический интерес представляют границы (нижняя и верхняя) изменения ресурсов, в которых величины оценок остаются неизменными).
4. Двойственные оценки являются показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиции критерия оптимальности. С этой точки зрения в оптимальный план может быть включена лишь та продукция j-го вида, для которой выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j ,$$

   где y_i – оптимальное значение двойственной оценки i-го ресурса; a_{ij} – технологические коэффициенты; c_{ij} – доход, получаемый с единицы продукции j-го вида; m – количество видов ресурсов.
5. Двойственные оценки позволяют провести сравнение суммарных условных затрат и результатов. Из принципа двойственности ($\max f = \min g$) следует, что оценка всех затрат производства должна равняться оценке произведенного продукта.

1.5. Целочисленные задачи линейного программирования

Целочисленное программирование ориентировано на решение задач математического программирования, в которых все или некоторые переменные должны принимать только целочисленные значения.

Задача называется полностью целочисленной, если условие целочисленности наложено на все ее переменные; когда это условие относится лишь к некоторым переменным, задача называется частично целочисленной. Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, линейные, то задача является линейной целочисленной.

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по производству неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к решению, далекому от оптимального целочисленного решения.

Методы решения задач целочисленного программирования можно классифицировать как (1) методы отсечений и (2) комбинаторные методы.

Исходной задачей для демонстрации возможностей методов отсечений, используемых при решении линейных целочисленных задач, является задача с ослабленными ограничениями, которая возникает в результате исключения требования целочисленности переменных. По мере введения специальных дополнительных ограничений, учитывающих требование целочисленности, многогранник допустимых решений ослабленной задачи постепенно деформируется до тех пор, пока координаты оптимального решения не станут целочисленными. Название «методы отсечений» связано с тем, что вводимые дополнительные ограничения отсекают (исключают) некоторые области многогранника допустимых решений, в которых отсутствуют точки с целочисленными координатами. (Отсекается область, содержащая оптимальное решение и не содержащая целочисленных точек.)

В основе комбинаторных методов лежит идея перебора всех допустимых целочисленных решений. Наиболее известным комбинаторным методом является метод ветвей и границ, который также опирается на процедуру решения задачи с ослабленными ограничениями. Метод ветвей и границ непосредственно применим как к полностью, так и к частично целочисленным задачам.

Метод Гомори

Целочисленное решение может быть найдено с использованием алгоритма Гомори, который состоит в следующем: симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно нецелочисленное и содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если и оно является нецелочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение $\bar{x}_{цел} = (f_1, f_2, \ldots, f_r, 0, 0, \ldots, 0)$, которое не является целочисленным, тогда последний шаг симплексной таблицы имеет следующий вид:

x_1	$\ldots$	h_{1r+1}	$\ldots$	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	$\ldots$	h_{ir+1}	$\ldots$	b_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_r	$\ldots$	h_{rr+1}	$\ldots$	b_r

где r – ранг системы ограничений; h_{ir+1} – коэффициент симплексной таблицы i-й строки, $(r + 1)$-го столбца; b_i – свободный член i-й строки.

Пусть b_i и хотя бы одно h_{ij} – дробные числа.

Обозначим $[b_i]$ и $[h_{ij}]$ – целые части чисел b_i и h_{ij}.

Целой частью числа b_i называют наибольшее целое число, не превосходящее числа b_i.

Дробную часть чисел b_i и h_{ij} обозначим $\{b_i\}$ и $\{h_{ij}\}$, она определяется следующим образом: $\{b_i\}=b_i-[b_i]$, $\{h_{ij}\}=h_{ij}-[h_{ij}]$.

Если b_i и хотя бы одно значение h_{ij} дробное, то с учетом введенных обозначений целых и дробных чисел дополнительное ограничение по целочисленности примет вид $\{h_{ir+1}\}x_{r+1}+\{h_{ir+2}\}x_{r+2}+\{h_{in}\}x_n>\{b_i\}$. Это неравенство называют сечением Гомори.

Примечания.

1. Если b_i дробное, а все h_{ij} целые, то задача не имеет целочисленного решения.
2. Ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть. В этом случае задача является частично целочисленной.

Пример 7. (Решение целочисленной задачи методом Гомори)

Целочисленная задача линейного программирования задана следующей математической моделью:

$$Z=3x_1+x_2\to\max;$$
$$2x_1+3x_2\le 6;$$
$$2x_1-3x_2\le 3;$$
$$x_1,\ x_2\in Z;$$
$$x_1,\ x_2\ge 0.$$

Решение. Сначала решаем задачу симплекс-методом без ограничений целочисленности. Приводим задачу к каноническому виду:

$$Z=3x_1+x_2\to\max;$$

$$2x_1+3x_2+x_3=6;$$

$$2x_1-3x_2+x_4=3.$$

Строим симплекс-таблицу:

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	6	2	3	1	0
x_4	3	2	-3	0	1
Z	0	-3	-1	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (x_1), а затем разрешающий элемент по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (x_4). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым). Аналогично будем повторять шаги.

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	0	6	1	-1
x_1	3/2	1	-3/2	0	1/2
Z	9/2	0	-11/2	0	3/2

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	1/2	0	0	1/6	-1/6
x_1	9/4	1	1	1/4	1/4
Z	29/4	0	0	11/12	7/12

В последней строке нет отрицательных оценок, поэтому оптимальное решение найдено: $x_1 = 9/4$, $x_2 = 1/2$, $\max Z = 29/4$.

Продолжим решение, используя алгоритм Гомори.

Найдем целые части оптимального решения: $\left[\frac{9}{2}\right] = 2$ и $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$.

Дробные части $\left\{\frac{9}{2}\right\} = \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{4}$ и $\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_2 (дробная часть 1/2).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$$0x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}, \text{ откуда } \frac{1}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \text{ или } -\frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

x_2	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
x_1	9/4	1	0	1/4	1/4	0
x_5	-1/2	0	0	-1/6	-5/6	1
Z	29/4	0	0	11/12	7/12	0

Переходим к следующей таблице:

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	6/10	0	1	1/5	0	-1/5
x_1	21/10	1	0	1/5	0	3/10
x_4	3/5	0	0	1/5	1	-6/5
Z	69/10	0	0	4/5	0	7/10

Получили нецелочисленное решение. Поэтому выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_2 (дробная часть 3/5).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$\frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geq \frac{3}{5}$, откуда $\frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 - x_6 = \frac{3}{5}$ или $-\frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + x_6 = -\frac{3}{5}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	6/10	0	1	1/5	0	-1/5	0
x_1	21/10	1	0	1/5	0	3/10	0
x_4	3/5	0	0	1/5	1	-6/5	0
x_6	-7/10	0	0	-1/5	0	-4/5	1
Z	69/10	0	0	4/5	0	7/10	0

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	3/4	0	1	1/4	0	0	-1/4
x_1	15/8	1	0	1/8	0	0	3/8
x_4	3/2	0	0	1/2	1	0	-3/2
x_5	3/4	0	0	1/4	0	1	-5/4
Z	51/8	0	0	5/8	0	0	7/8

Получили нецелочисленное решение. Поэтому выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_1 (дробная часть 7/8).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$\frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_6 \geq \frac{7}{8}$, откуда $\frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_6 - x_7 = \frac{7}{8}$ или $-\frac{1}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_6 + x_7 = -\frac{7}{8}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	3/4	0	1	1/4	0	0	-1/4	0
x_1	15/8	1	0	1/8	0	0	3/8	0
x_4	3/2	0	0	1/2	1	0	-3/2	0
x_5	3/4	0	0	1/4	0	1	-5/4	0
x_7	-7/8	0	0	-1/8	0	0	-3/8	1
Z	51/8	0	0	5/8	0	0	7/8	0

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	4/3	0	1	1/3	0	0	0	-2/3
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1
x_4	5	0	0	1	1	0	0	-4
x_5	11/3	0	0	2/3	0	1	0	-10/3
x_6	7/3	0	0	1/3	0	0	1	-8/3
Z	13/3	0	0	1/3	0	0	0	7/3

Получили нецелочисленное решение. Поэтому выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_5 (дробная часть 2/3).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_7 \geq \frac{2}{3}$, откуда $\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_7 - x_8 = \frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_7 + x_8 = -\frac{2}{3}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	4/3	0	1	1/3	0	0	0	-2/3	0
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
x_4	5	0	0	1	1	0	0	-4	0
x_5	11/3	0	0	2/3	0	1	0	-10/3	0
x_6	7/3	0	0	1/3	0	0	1	-8/3	0
x_8	-2/3	0	0	-2/3	0	0	0	-2/3	1
Z	13/3	0	0	1/3	0	0	0	7/3	0

Базис	**План**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

x_2	1	0	1	0	0	0	0	-1	1/2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
x_4	4	0	0	0	1	0	0	-5	3/2
x_5	3	0	0	0	0	1	0	-4	1
x_6	2	0	0	0	0	0	1	-3	1/2
x_3	1	0	0	1	0	0	0	1	-3/2
Z	4	0	0	1/3	0	0	0	2	1/2

Получаем оптимальное целочисленное решение $x_1=1$, $x_2=1$, max $Z = 4$.

Метод ветвей и границ

Согласно общей идее метода, сначала решается задача с ослабленными ограничениями (задача линейного программирования без условия целочисленности).

Пусть $x_к$ – целочисленная переменная, значение которой $x_к^*$ в оптимальном решении ослабленной задачи является дробным. Интервал $[x_к^*] < x_к < [x_к^*]+1$ не содержит допустимых целочисленных компонент решения. Поэтому допустимое целое значение $x_к$ должно удовлетворять одному из неравенств $x_к \le [x_к^*]$ или $x_к \ge [x_к^*]+1$.

Введение этих условий в задачу с ослабленными ограничениями порождает две не связанные между собой задачи. В таком случае говорят, что исходная задача разветвляется (или разбивается) на две подзадачи. Осуществляемый в процессе ветвления учет необходимых условий целочисленности позволяет исключить части многогранника допустимых решений, не содержащие точек с целыми координатами.

Затем каждая подзадача решается как задача линейного программирования (с целевой функцией исходной задачи). Если полученный оптимум оказывается допустимым для целочисленной задачи, такое решение следует зафиксировать как наилучшее. При этом нет необходимости продолжать «ветвление» подзадачи, поскольку улучшить полученное решение не удастся. В противном случае подзадача, в свою очередь, должна быть разбита на две подзадачи опять при учете условия целочисленности переменных, значения которых в оптимальном решении не являются целыми. Как только полученное допустимое целочисленное решение одной из подзадач оказывается лучше имеющегося, оно фиксируется вместо зафиксированного ранее. Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока каждая подзадача не приведет к целочисленному решению или пока не будет установлена невозможность улучшения имеющегося решения. В этом случае зафиксированное допустимое решение является оптимальным.

Эффективность вычислительной схемы метода можно повысить, введя в рассмотрение понятие границы, на основе которого делается вывод о необходимости дальнейшего разбиения каждой из подзадач. Если оптимальное решение подзадачи с ослабленными ограничениями обеспечивает худшее значение целевой функции, чем имеющееся решение, эту подзадачу далее рассматривать не следует. В таких случаях говорят, что подзадача прозондирована и ее можно вычеркнуть из списка подзадач, порожденных исходной задачей. Иными словами, как только получено допустимое целочисленное решение некоторой подзадачи, соответствующее значение целевой функции может быть использовано в качестве (верхней в случае минимизации и нижней в случае максимизации) границы, наличие которой позволяет формализовать процедуру исключения прозондированных подзадач.

Пример 8.

На двух небольших заводах по сборке автомашин выпускаются грузовики и микроавтобусы. Затраты на сборку одного грузовика на первом заводе составляют 5 человеко-дней, а на сборку одного микроавтобуса – 2 человеко-дня. На втором заводе аналогичные затраты составляют по 3 человеко-дня на грузовик и на микроавтобус. Мощности заводов ограничены и составляют для первого завода 180 чел-дней в неделю, для второго – 125. Каждый грузовик стоит 3000 у.е., микроавтобус – 2000 у.е. Необходимо определить, сколько всего нужно выпускать грузовиков и микроавтобусов, чтобы еженедельный доход от продажи продукции был максимальным.

Математическая модель имеет вид:

$3x_1 + 2x_2 \to \max;$

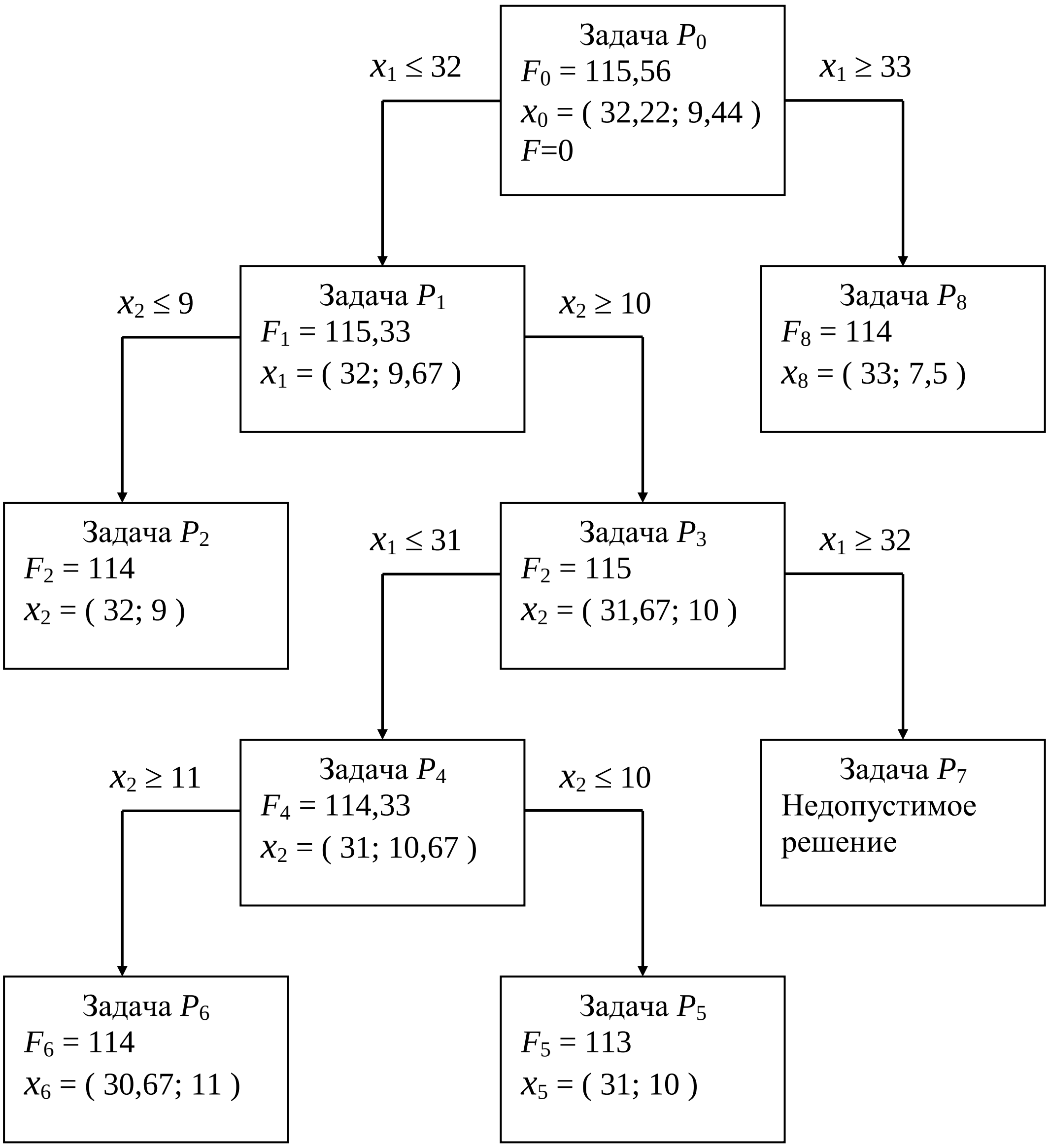
$x_1 + 2x_2 \leq 180;$

$3x_1 + 3x_2 \leq 125;$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$

$x_1, x_2 \in Z.$

<u>Решение методом ветвей и границ</u>



1.6. Специальные задачи линейного программирования

Подобные задачи являются задачами со специальной структурой: транспортная задача и задача о назначениях.

Экономико-математическая модель ТЗ

Постановка задачи. Имеются m поставщиков и n потребителей. Заданы мощности поставщиков M_i, $i = 1,...,m$, мощности потребителей N_j, $j = 1,...,n$ и затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик – потребитель» c_{ij} (коэффициент затрат). Требуется найти объем перевозок для каждой пары «поставщик – потребитель», чтобы:

1) мощности всех поставщиков были реализованы;
2) спрос всех потребителей был удовлетворен;
3) суммарные затраты на перевозку были бы минимальные.

Для удобства записи данные заносятся в таблицу:

Поставщики	Мощность поставщика	Потребители и их спрос			
		1	2	…	n
		N_1	N_2	…	N_n
1	M_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
2	M_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
m	M_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Сформулируем математическую модель задачи.

Обозначим x_{ij} – искомый объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю, $x_{ij} \geq 0$. Заданные мощности поставщиков и спрос потребителей накладывают ограничения на значения неизвестных x_{ij}.

Например, $x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = M_1$ – уравнение баланса по первой строке.

Суммарные затраты F на перевозку выражаются через коэффициент затрат и поставку следующим образом

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (1)$$

Система ограничений примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M_i\,,\ i = 1,2,\ldots m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j\,,\ \ j = 1,2,\ldots n. \qquad (2)$$

Ограничения (2) соответствуют тому, что вся продукция от i-го поставщика должна быть вывезена полностью (для всех поставщиков). Ограничения (2) соответствуют тому, что количество продукции, ввозимой j-му потребителю, должно полностью удовлетворять его спрос (для всех потребителей).

Формулировка транспортной задачи в общей постановке будет следующей: на множестве допустимых решений системы ограничений (2) найти такое решение $X = \left(x_{11},\ldots,x_{1n},x_{21},\ldots,x_{ij},\ldots,x_{mn}\right)$, при котором значение линейной функции (1) минимально.

Совокупность чисел (x_{ij}), i=1,…m; j=1,…n, удовлетворяющая ограничениям (2) – (3), доставляющая минимум целевой функции (1), называется *планом перевозок*, или *планом транспортной задачи*. План X^*, при котором целевая функция обращается в минимум, называется *оптимальным*.

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса: $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$.

Выделяют два вида транспортных задач (ТЗ):

1) закрытая ТЗ: суммарная мощность поставщиков равна сумме мощности потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$;

2) в противном случае транспортная задача называется открытой.

Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности: $\sum_{i=1}^{m} M_i > \sum_{j=1}^{n} N_j$.

Открытая модель решается приведением к закрытой модели. В этом случае вводится фиктивный потребитель, потребность которого равна

$$N_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} M_i - \sum_{j=1}^{n} N_j .$$

b) суммарные потребности превышают суммарные запасы: $\sum_{i=1}^{m} M_i < \sum_{j=1}^{n} N_j$.

В этом случае вводится фиктивный поставщик, запасы которого составляют $M_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} N_j - \sum_{i=1}^{m} M_i$.

Коэффициент затрат для добавленной строки (столбца) определяется издержками ввиду недогрузки мощностей потребителей (или поставщиков). Если информация об этих издержках отсутствует, то их принимают равными одному и тому же числу, например, 0 в задачах на максимум или какое-либо большое число, превышающее все известные тарифы.

Пример транспортной таблицы для открытой ТЗ:

	45	35	55	65
40	4	1	2	5
60	3	2	3	7
90	4	4	5	2

Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования, однако ее специфическая структура позволяет так модифицировать симплекс-метод, что вычислительные процедуры становятся более эффективными

Особенности экономико-математической модели транспортной задачи:

1) коэффициенты целевой функции неотрицательны (стоимости перевозок не могут быть отрицательными величинами);

2) коэффициенты правых частей ограничений неотрицательны (запасы и потребности продукта);

3) коэффициенты при переменных системы в ограничениях принимают только два значения, это нули и единицы;

4) система ограничений есть система уравнений (т. е. транспортная задача задана в канонической форме).

Наиболее распространенными методами решения транспортных задач являются *метод потенциалов и распределительный метод*.

Решение задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. *Разработка начального плана (опорного решения)*.

Для транспортной задачи существует несколько методов поиска начального плана (опорного решения):

- *метод северо-западного угла;*
- *метод минимальной стоимости;*
- *метод двойного предпочтения и т. д.*

2. *Расчет потенциалов*.
3. *Проверка плана на оптимальность*.
4. *Поиск максимального звена неоптимальности (если условие п. 3 не было достигнуто)*.
5. *Составление контура перераспределения ресурсов*.
6. *Определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение ресурсов по контуру*.
7. *Получение нового плана.*

Описанная процедура повторяется несколько раз (итераций), пока не будет найдено оптимальное решение. Вычислительный алгоритм для каждой итерации не меняется.

Распределительный метод решения транспортной задачи

Алгоритм:

1. Находим базисное распределение поставок (методом северо-западного угла или наименьших затрат).

2. Для данного базисного распределения поставок подбираем потенциалы строк и столбцов таблицы поставок так, чтобы коэффициенты затрат заполненных клеток стали равны 0. Составляем матрицу оценок.

3. Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то найденное распределение оптимально – решение закончено. Если среди оценок свободных

клеток есть отрицательные, то выбираем одну из них для передачи в нее поставки.

4. Для избранной свободной клетки строится означенный цикл пересчета. Поставка, передаваемая по циклу, определяется как минимальная среди поставок в клетках со знаком «-». Найденная поставка передвигается по циклу. Клетка, поставка в которой при этом станет равной 0, считается свободной, остальные клетки цикла – заполненными. Таким образом, получено новое базисное распределение поставок.

5. Переходим к шагу 2 алгоритма.

Обоснование методов решения ТЗ.

Существует общий критерий оптимального решения задачи линейного программирования. Для чего сначала следует выразить линейную функцию задачи через неосновные (свободные) переменные. Так как транспортная задача – задача на минимум, поэтому оптимум будет достигнут тогда и только тогда, когда все коэффициенты при неосновных переменных в выражении линейной функции неотрицательны.

Теорема. Пусть на каждом шаге заполнения таблицы поставок появляется одна заполненная клетка, причем из рассмотрения на каждом (кроме последнего) шаге выпадает либо одна строка, либо один столбец. Тогда переменные, соответствующие заполненным клеткам, можно принять за базисные.

Коэффициент β_{ij} при свободных переменных x_{ij} в выражении линейной функции F через свободные переменные в транспортной задаче *называются оценкой свободной клетки.*

Критерий оптимальности. Базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны.

Задача о нахождении оценки свободных клеток.

Пусть зафиксировано некоторое базисное распределение поставок, при этом клетка (i,j) – свободная (переменная x_{ij} – свободная), β_{ij} – оценка клетки, т. е. коэффициент при x_{ij} в выражении минимума функции F через свободные переменные, т. е. $F = F_0 + \beta_{ij} x_{ij} + \ldots$.

F_0 – суммарные затраты на перевозку поставок данного распределения; β_{ij} равно приращению суммарных затрат на перевозку при переходе в клетку (i,j) единичной поставки (увеличение переменной x_{ij} от 0 до 1) – экономический смысл оценки свободной клетки.

Для нахождения «правила знаков» удобно пользоваться «означенным циклом пересчета».

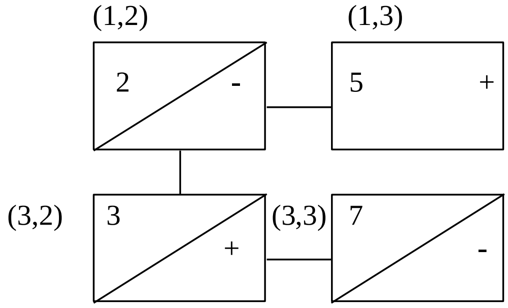


Рис. 6. Пример цикла пересчета

Правило 1 нахождения оценки свободных клеток: для свободной клетки следует построить цикл пересчета, в вершинах этого цикла расставить последовательно чередующиеся знаки, начиная со знака «+» в свободной клетке.

Определение. *Цикл матрицы* – это ломаная с вершинами в клетках с звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов матрицы, удовлетворяющая условиям:

- ломаная должна быть связной, т. е. из каждой вершины можно попасть в каждую другую вершину по звеньям ломаной;
- в каждой вершине ломаной встречаются два звена, одно из которых располагается по строке, другое по столбцу.

Циклом пересчета называется такой цикл в таблице с базисным распределением поставок, при котором одна из его вершин лежит в свободной клетке, остальные в заполненных.

Для каждой свободной клетки базисного распределения поставок существует, и при этом единственный, цикл пересчета.

Пример цикла пересчета для клетки (1,1) представлен на рис. 7.

Теорема (о потенциалах). Оценка свободной клетки не изменится, если к коэффициентам затрат некоторой строки (столбца) таблицы поставок прибавить некоторое число. Это число, прибавляемое к коэффициенту затрат выделенной строки (столбца), будем называть *потенциалом данной строки (столбца)*.

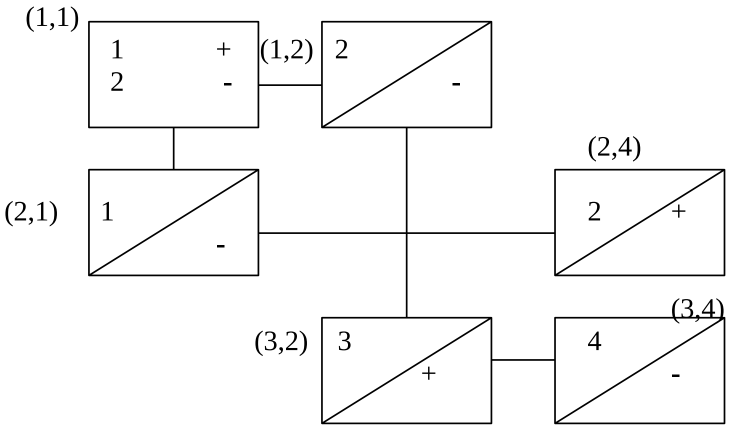


Рис. 7. Пример цикла пересчета для клетки (1,1)

Правило 2 нахождения оценки свободных клеток: к коэффициентам затрат таблицы поставок в каждой строке и столбце надо прибавить такие числа (потенциалы), чтобы коэффициенты затрат в заполненных клетках стали равными 0. Полученные при этом коэффициенты затрат свободных клеток равны оценкам этих клеток.

Пример 9. **Применение вычислительного алгоритма метода потенциалов.**

Рассмотрим задачу прикрепления пунктов отправления A_1, A_2, A_3 к пунктам назначения B_1, B_2, B_3, B_4, исходные данные задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1. Исходные данные

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100

Потребности	40	60	80	60	240

Начальный план можно составить одним из перечисленных выше методов. Воспользуемся методом северо-западного угла. В соответствии с этим методом загрузка клеток (распределение мощностей пунктов отправления по пунктам назначения) начинается с верхней левой клетки ("северо-западная" часть таблицы) и продолжается вниз и вправо (по диагонали).

По указанному правилу загружаем первую клетку (1, 1) на основании следующего условия: $min\ \{60; 40\} = 40$.

Таким образом, первый пункт назначения загружен, а первый пункт отправления имеет остатки груза 60 – 40 = 20, которые и распределяем на второй пункт назначения: $min\ \{20; 60\} = 20$.

Продолжая преобразования аналогичным образом, приходим к табл. 2.

Таблица 2. Начальный план перевозок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	α_i
A_1	1 40	2 20	3	4	60	0
A_2	4	3 40	2 40	0	80	1
A_3	0	2	2 40	1 60	100	1
Потребности	40	60	80	60	240	
β_j	1	2	1	0		

Улучшение плана. В процессе решения после каждой итерации (в том числе и после получения допустимого решения) по загруженным клеткам проверяется выполнение следующего условия: $N=m+n-1$ (1), где N – число активных (занятых) клеток.

В нашем примере $m=3$, $n=4$, а число загруженных клеток равно 6, т. е. соответствует условию (1): $N=3+4-1=6$. Если условие (1) не выполняется, план называется *вырожденным*. В этом случае в любые свободные клетки надо поставить столько нулей, чтобы с их учетом выполнялось условие (1). Клетка, в которой стоит ноль, считается занятой. Значение целевой функции по результатам расчета допустимого плана:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 1\cdot 40 + 2\cdot 20 + 3\cdot 40 + 2\cdot 40 + 2\cdot 40 + 1\cdot 60 = 420.$$

Расчет потенциалов выполняют по загруженным клеткам, для которых должно выполняться следующее равенство: $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ (2), где α_i – потенциал i-й строки, β_j – потенциал j-го столбца.

Вычисляя потенциалы по выражению (2), принимаем для первой строки $\alpha_1 = 0$. Используя загруженные клетки (i , j): (1, 1), (1, 2), получаем:

$\alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 0 + \beta_1 = 1;\ \beta_1 = 1;$

$\alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 0 + \beta_2 = 2;\ \beta_2 = 2.$

Далее по загруженным клеткам (2, 2), (2, 3) определяем другие потенциалы:

$\alpha_2 + \beta_2 = 3;\ \alpha_2 + 2 = 3;\ \alpha_2 = 1;$

$\alpha_1 + \beta_3 = 2;\ 1 + \beta_3 = 2;\ \beta_3 = 1.$

Проверяем план на оптимальность по незагруженным клеткам, используя следующее неравенство:

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \qquad (3)$$

Если для незагруженных клеток условие (3) выполняется, то план – оптимальный. По табл. 2 осуществляем проверку начального плана на оптимальность:

$(i\text{-}j) = (1\text{-}3),\ 0 + 1 \le 3;$

$(i\text{-}j) = (1\text{-}4),\ 0 + 0 \le 4;$

$(i\text{-}j) = (2\text{-}1),\ 1 + 1 \le 4;$

$(i\text{-}j) = (2\text{-}4),\ 1 + 0 \le 0;$

$(i\text{-}j) = (3\text{-}1),\ 1 + 1 \le 0;$

$(i\text{-}j) = (3\text{-}2),\ 1 + 2 \le 2.$

Итак, по трем последним клеткам условие (3) не выполняется. Следовательно, начальный план требует улучшения. В нашем примере наибольшую экономию можно получить по клетке $(i, j) = (3,1)$. Следовательно, клетку (3,1) необходимо загрузить за счет перераспределения ресурсов из других загруженных клеток. В табл.3 клетку (3,1) помечаем знаком "+", так как здесь в начальном плане находится вершина максимальной неоптимальности.

Контур перераспределения ресурсов составляют по следующим правилам:

- этот контур представляет замкнутый многоугольник с вершинами в загруженных клетках, за исключением клетки с вершиной максимальной неоптимальности "+", и звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов матрицы;
- ломаная линия должна быть связной в том смысле, что из любой ее вершины можно попасть в любую другую вершину по звеньям ломаной цепи (по строке или по столбцу);
- в каждой вершине контура встречаются только два звена, одно из них располагается по строке, другое – по столбцу;
- число вершин контура четное, все они в процессе перераспределения делятся на загружаемые и разгружаемые;
- в каждой строке (столбце) имеются две вершины: одна – загружаемая, другая – разгружаемая.

В этой клетке намечаем одну из вершин контура и далее по вышеизложенным правилам строим контур, вершины которого будут находиться в клетках (3,1) – (1,1) – (1,2) – (2,2) – (2,3) – (3,3). Вершины контура последовательно подразделяем на загружаемые (З) и разгружаемые (P), начиная с вершины максимальной неоптимальности "+" (табл. 2).

Перераспределение ресурсов по контуру осуществляется с целью получения оптимального плана. В процессе перераспределения ресурсов по контуру в соответствии с условием неотрицательности переменных x ни одно из этих значений не должно превратиться в отрицательное число. Поэтому анализируют только клетки, помеченные знаком P, из которых выбирают клетку с минимальным объемом перевозок. В нашем примере это 40. Следовательно, клетки (1,1), (2,2), (3,3) полностью разгружаются. В клетке (1,2) загрузка увеличится на 40 и достигнет 60, в клетке (2,3) загрузка составит 40+40=80, и клетка (3,1) загрузится на 40 (табл. 3).

Проверяем условие $N = m + n - 1$. В нашем примере $m = 3$, $n = 4$, а число загруженных клеток равно 4, т. е. условие не выполняется и 6 не равно 4. В процессе перераспределения ресурсов произошла полная разгрузка трех клеток, а мы должны освободить только одну клетку. В этом случае следует в две клетки проставить нули (нулевой ресурс) и считать их условно загруженными. Например, в клетки (1,1) и (3,3) проставим нулевой ресурс (табл. 4). Получение нового плана (итерации) осуществляется в том же порядке, который был рассмотрен выше. т. е.

- по загруженным клеткам (в соответствии с новой загрузкой) вычисляются потенциалы α_i и β_j;
- по незагруженным клеткам производится проверка плана на оптимальность;
- находится вершина максимальной неоптимальности, и строится новый контур перераспределения и т. д. до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, удовлетворяющее неравенству (3).

Таблица 3. Первый план перевозок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	α_i
A_1	1 0	2 60	3	4	60	0
A_2	4	3	2 80	0	80	-1
A_3	0 40	2	2 0	1 60	100	-1
Потребности	40	60	80	60	240	
β_j	1	2	3	2		

По результатам первой итерации имеем:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=2\cdot 60+2\cdot 80+1\cdot 60+0\cdot 40=340.$$

Ниже приведены расчеты по второй итерации и оптимальный план.

Поиск потенциалов следующий:

$\alpha_1+\beta_1=1;\ 0+\beta_1=1;\ \ \beta_1=1;$
$\alpha_1+\beta_2=2;\ 0+\beta_2=2;\ \ \beta_2=2;$
$\alpha_2+\beta_3=2;\ \alpha_2+3=2;\ \ \alpha_2=-1;$
$\alpha_3+\beta_1=0;\ \alpha_3+1=0;\ \ \alpha_3=-1;$
$\alpha_3+\beta_3=2;\ -1+\beta_3=2;\ \ \beta_3=3;$
$\alpha_3+\beta_4=1;\ -1+\beta_4=1;\ \ \beta_4=2.$

Проведем проверку на оптимальность:

$(i\text{-}j)=(1\text{-}3),\ 0+3\le 3;$
$(i\text{-}j)=(1\text{-}4),\ 0+2\le 4;$
$(i\text{-}j)=(2\text{-}1),\ 1-1\le 4;$
$(i\text{-}j)=(2\text{-}2),\ 2\text{-}1\le 3;$
$(i\text{-}j)=(3\text{-}2),\ 2-1\le 2;$
$(i\text{-}j)=(2\text{-}4),\ 2-1\le 0.$

Клетку (2,4) необходимо загрузить, так как последнее неравенство ложно.

В соответствии с перераспределением ресурсов по контуру получаем табл. 4, для которой вновь рассчитываем потенциалы поставщиков и потребителей, и последовательность вычислений повторяется.

Таблица 4. Оптимальный план перевозок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	α_i
A_1	1 0	2 60	3	4	60	0
A_2	4	3	2 20	0 60	80	-1
A_3	0 40	2	2 60	1	100	-1
Потребности	40	60	80	60	240	
β_j	1	2	3	1		

Для распределения объемов перевозок, полученных в табл. 4, условие оптимальности выполняется, следовательно, полученный план является оптимальным.

Транспортные издержки по оптимальному плану следующие:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=1\cdot 0+2\cdot 60+2\cdot 20+0\cdot 60+0\cdot 40+2\cdot 20=280.$$

Таким образом, построением начального плана с последующим расчетом двух итераций получено оптимальное решение по прикреплению пунктов отправления грузов к пунктам назначения.

Задача о назначениях

Имеется n работ и n кандидатов для их выполнения. Задана матрица затрат каждого кандидата на выполнение каждой работы c_{ij} $(i,j=1,\dots n)$. Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работ минимальны.

Пусть x_{ij} – переменная, значение которой равно 1, если i-й кандидат выполняет j-ю работу, и 0 в противном случае. Тогда условие, что каждый кандидат выполняет только одну работу, запишется в виде: $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}$.

Условие, что каждая работа может выполняться одним кандидатом, запишется в виде $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}$.

Целевая функция имеет вид $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\to\min$.

К ограничениям следует добавить $x_{ij}\in\{0,1\},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$.

Способы решения задачи о назначениях:

1. Как транспортная задача.
2. Венгерский метод.

Идея метода была высказана венгерским математиком Эгервари и состоит в следующем. Строится начальный план перевозок, не удовлетворяющий в общем случае всем условиям задачи (из некоторых пунктов производства не весь продукт вывозится, потребность части пунктов потребления не полностью удовлетворена). Далее осуществляется переход к новому плану, более близкому к оптимальному. Последовательное применение этого приема за конечное число итераций приводит к решению задачи.

Алгоритм:

1. Решаем задачу на минимум.

Цель данного шага – получение максимально возможного числа нулей в матрице *C*. Для этого находим в матрице *C* в каждой строке минимальный элемент и вычитаем его из каждого элемента соответствующей строки. Если задана не квадратная матрица, то делаем её квадратной, проставляя стоимости равными максимальному числу в заданной матрице, находим в матрице *C* в каждой строке минимальный элемент и вычитаем его из каждого элемента соответствующей строки. Аналогично в каждом столбце вычитаем соответствующий минимальный элемент.

2. Если после выполнения первого шага можно произвести назначения, то есть в каждой строке и столбце выбрать нулевой элемент, то полученное решение будет оптимальным. Если назначения провести не удалось, то переходим к третьему шагу.

3. Минимальным числом прямых вычёркиваем все нули в матрице и среди невычеркнутых элементов выбираем минимальный, прибавляем его к элементам, стоящим на пересечении прямых и отнимаем от всех невычеркнутых элементов. Далее переходим к шагу 2.

Венгерский метод наиболее эффективен при решении транспортных задач с целочисленными объемами производства и потребления.

Пример 10.

Дана матрица:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{bmatrix}$$

Найдём минимальный элемент в каждой строке и вычтем его из каждого элемента данной строки.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Назначение провести нельзя, найдём минимальный элемент в каждом столбце и вычтем его из каждого элемента данного столбца

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

Назначение провести нельзя, вычеркнем минимальным количеством прямых все нули в матрице, среди невычеркнутых элементов выберем минимальный. Прибавим его к элементам, стоящим на пересечении прямых и отнимем от невычеркнутых элементов.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Можно провести назначение:

$x_{13}=1$; $x_{22}=1$; $x_{34}=1$; $x_{41}=1$

2. Элементы теории матричных игр

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т. е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино и т.д., относятся к конфликтным: результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника, цель игры – выигрыш одного из партнеров. В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто и имеют многообразный характер. К ним относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом. Во всех этих примерах конфликтная ситуация возникает из-за различия интересов партнеров и стремления каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которая носит название *теория игр.*

Ознакомимся с основными понятиями теории игр. Математическая модель конфликтной ситуации называется *игрой,* стороны, участвующие в конфликте, – *игроками,* а исход конфликта – *выигрышем.* Для каждой формализованной игры вводятся *правила,* т.е. система условий, определяющая: 1) варианты действий игроков; 2) объем информации каждого игрока о поведении партнеров; 3) выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий. Как правило, выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш нулем, выигрыш – единицей, а ничью – 1/2.

Игра называется *парной,* если в ней участвуют два игрока, и *множественной,* если число игроков больше двух. Мы будем рассматривать только парные игры. В них участвуют два игрока A и B, интересы которых противоположны, а под игрой будем понимать ряд действий со стороны A и B.

Игра называется *игрой с нулевой суммой,* или *антагонистической,* если выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т. е. для полного задания игры достаточно указать величину одного из них. Если обозначить a – выигрыш одного из игроков, b – выигрыш другого, то для игры с нулевой суммой $b = -a$, поэтому достаточно рассматривать, например a.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется *ходом* игрока. Ходы могут быть личными и случайными. *Личный ход* – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). *Случайный ход* – это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы. Игра называется *конечной,* если у каждого игрока имеется конечное число стратегий, и *бесконечной* – в противном случае.

Для того чтобы *решить* игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию *оптимальности,* т.е. один из игроков должен получать *максимальный выигрыш,* когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь *минимальный проигрыш,* если первый придерживается своей стратегии. Такие *стратегии* называются *оптимальными.* Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию *устойчивости,* т. е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а *средний выигрыш (проигрыш)* во всех партиях.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов.

Важнейшее ограничение теории игр – единственность выигрыша как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных экономических задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, в экономике, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические. Развитие аппарата теории игр для решения задач со многими участниками, имеющими непротиворечивые интересы, выходит за рамки нашего курса.

Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры

Рассмотрим парную конечную игру. Пусть игрок A располагает m личными стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2, ..., A_m$. Пусть у игрока B имеется n личных стратегий, обозначим их $B_1, B_2, ..., B_n$. Говорят, что игра имеет размерность m х n. В результате выбора игроками любой пары стратегий A_I и B_j (i = 1, 2, ..., m, j= 1, 2, ..., n) однозначно определяется исход игры, т. е. выигрыш a_{ij} игрока A (положительный или отрицательный) и проигрыш ($-a_{ij}$) игрока B. Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j). Матрица $P = (a_{ij})$, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_J, называется *платежной матрицей*, или *матрицей игры*.

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Строки этой таблицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B.

Составим платежную матрицу для следующей игры.

Игра «Поиск». Игрок A может спрятаться в одном из двух убежищ. Игрок B ищет игрока A и если найдет, то получает штраф 1 ден. ед. от A, в противном случае платит игроку A 1 ден. ед. Необходимо построить платежную матрицу игры.

Решение. Для составления платежной матрицы следует проанализировать поведение каждого из игроков. Игрок A может спрятаться в первом убежище – обозначим эту стратегию через A_1 или во втором убежище – стратегия A_2.

Игрок B может искать первого игрока в первом убежище – стратегия B_1, либо во втором убежище – стратегия B_2. Если игрок A находится в первом убежище и там его обнаруживает игрок B, т. е. осуществляется пара стратегий (A_1, B_1), то игрок A платит штраф, т.е. $a_{11} = -1$. Аналогично получаем $a_{22} = -1$ для пары стратегий (A_2, B_2). Очевидно, что стратегии (A_1, B_2) и (A_2, B_1) дают игроку A выигрыш 1, поэтому $a_{12} = a_{21} = 1$. Таким образом, для игры «поиск» размера 2 x 2 получаем платежную матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим игру m x n с матрицей $P = (a_{ij})$, i ==1, 2, ..., m, j=1, 2, ..., n и определим наилучшую среди стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$. Выбирая стратегию A_i, игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на нее той из стратегий B_j, для которой выигрыш для игрока A минимален (игрок B стремится «навредить» игроку A).

Обозначим через α_i наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока B (наименьшее число в i-й строке платежной матрицы), т. е $\min\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = a_i$.

Среди всех чисел a_i, $i = \overline{1,m}$ выберем наибольшее: $\alpha = \max\limits_{i=1,\ldots,m} a_i$. Назовем α *нижней ценой игры*, или *максимальным выигрышем* (*максимином*). Это *гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B.* Следовательно,

$$\alpha = \max_{i=1,\ldots,m} (\min_{j=1,\ldots,n} a_{ij}).$$

Стратегия, соответствующая максимину, называется *максиминной стратегией.* Игрок B заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока A, выбирая стратегию B_j, он учитывает максимально возможный при этом выигрыш для A. Обозначим $\max\limits_{i=1,\ldots,m} a_{ij} = \beta_i$.

Среди всех чисел β_j выберем наименьшее $\beta = \min\limits_{j=1,\ldots,n} \beta_j$ и назовем β *верхней ценой игры*, или *минимаксным выигрышем* (*минимаксом*). Это *гарантированный проигрыш игрока B*. Следовательно, $\beta = \min\limits_{j=1,\ldots,n} (\max\limits_{i=1,\ldots,m} a_{ij})$.

Стратегия, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной стратегией.*

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется *принципом минимакса.* Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника. Определим нижнюю и верхнюю цену игры и соответствующие стратегии**.** Рассмотрим платежную матрицу: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

При выборе стратегии A_1 (первая строка матрицы) минимальный выигрыш равен α_1 = min(–l;l) = –1 и соответствует стратегии β_1 игрока B. При выборе стратегии A_2 (вторая строка матрицы) минимальный выигрыш равен
α_1=min(–1;1)= –1, он достигается при стратегии B_2.

Гарантируя себе максимальный выигрыш при любой стратегии игрока B, т.е. нижнюю цену игры α = max(α_1,α_2) = max(–l; –l) = –1, игрок A может выбирать любую стратегию: A_1 или A_2, т. е. любая его стратегия является максиминной.

Выбирая стратегию B_1 (столбец 1), игрок B понимает, что игрок A ответит стратегией A_2, чтобы максимизировать свой выигрыш (проигрыш B).

Следовательно, максимальный проигрыш игрока B при выборе им стратегии B_1 равен β_1= max(–1; 1) = 1.

Аналогично максимальный проигрыш игрока *B* (выигрыш *A)* при выборе им стратегии B_2 (столбец 2) равен β_2 = max(1; –1) = 1.

Таким образом, при любой стратегии игрока *A* гарантированный минимальный проигрыш игрока *B* равен $\beta=\min(\beta_1,\beta_2)= \min(1; 1) = 1$ – верхней цене игры.

Любая стратегия игрока *B* является минимаксной. Дополнив платежную матрицу строкой β_j и столбцом α_i, на пересечении дополнительных строки и столбца будем записывать верхнюю и нижнюю цены игр.

В задаче**,** рассмотренной выше, верхняя и нижняя цены игры различны: $\alpha\neq\beta$.

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены игры $\alpha=\beta = v$ называется *чистой ценой игры,* или *ценой игры.* Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются *оптимальными стратегиями,* а их совокупность – *оптимальным решением,* или *решением* игры. В этом случае игрок *A* получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока *B*) выигрыш v, а игрок *B* добивается минимального гарантированного (вне зависимости от поведения игрока *A)* проигрыша v. Говорят, что решение игры обладает *устойчивостью,* т. е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара чистых стратегий A_i и B_j дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется *седловой точкой* (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз – в другом).

Пример 11. Найти решение игры *G* (3x4), платежная матрица которой имеет вид

B_j					

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	6
A_2	8	4	3	4	3
A_3	7	6	8	6	6
β_j	8	6	9	6	

Определим α_i и β_j и запишем их в таблицу.

Находим нижнюю и верхнюю цену игры:

$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = 6$; $\beta = \min\limits_j \beta_j = 6$. Видно, что игра имеет четыре седловые точки с соответствующими парами оптимальных стратегий: A_1B_2; A_1B_4; A_3B_2 и A_3B_4. Цена игры равна 6.

Обозначим A^* и B^* – пару чистых стратегий, на которых достигается решение игры в задаче с седловой точкой. Введем функцию выигрыша первого игрока на каждой паре стратегий: $P(A_i, B_j) = a_{ij}$. Тогда из условия оптимальности в седловой точке выполняется двойное неравенство: $P(A_i, B^*) \le P(A^*, B^*) \le P(A^*, B_j)$, которое справедливо для всех $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Действительно, выбор стратегии A^* первым игроком при оптимальной стратегии B^* второго игрока максимизирует минимальный возможный выигрыш: $P(A^*, B^*) > P(A, B^*)$, а выбор стратегии B^* вторым игроком при оптимальной стратегии первого минимизирует максимальный проигрыш: $P(A^*, B^*) \le P(A^*, B)$.

Решение игр в смешанных стратегиях

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_i ,..., A_n$, с вероятностями $p_1, p_i, ..., p_n$, причем сумма вероятностей равна 1: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы: $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$ или в виде строки $S_A = (p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_m)$.

Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать строкой, в которой 1 соответствует чистой стратегии. На основании принципа минимакса определяется *оптимальное решение* (или *решение)* игры: это пара оптимальных стратегий S_A^*, S_B^* в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется *ценой игры v.* Цена игры удовлетворяет неравенству: $\alpha \le v \le \beta$, где α и β – нижняя и верхняя цены игры.

Справедлива следующая основная теорема теории игр – *теорема Неймана*: *Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.*

Пусть $S_A^* = (p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_m)$ и $S_B^* = (q_1 \quad q_2 \quad \ldots \quad q_n)$ – пара оптимальных стратегий. Средний выигрыш (математическое ожидание) игрока А определяется соотношением $W = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_j$. Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока В равен такой же величине.

Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется *активной.*

Справедлива <u>теорема об активных стратегиях:</u> *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры* v, *если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Эта теорема имеет большое практическое значение – она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях так же, как и решение в чистых стратегиях, обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Эта пара стратегий образует в игре положение равновесия: один игрок хочет обратить выигрыш в максимум, другой – в минимум, каждый «тянет» в свою сторону, и при оптимальном поведение обоих устанавливается равновесие и устойчивый выигрыш v.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными p_i и q_j.

Решение матричной игры (2x2)

Пусть матричная игра G (2x2) имеет платежную матрицу

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$. При наличии седловой точки решение очевидно.

В соответствии с основной теоремой игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A = ||p_1,\ p_2||$ и $S_B = ||q_1,\ q_2||$, где вероятности применения (относительные частоты) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$p_1 + p_2 = 1, \quad (1)$$
$$q_1 + q_2 = 1. \quad (2)$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях оптимальная смешанная стратегия обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок *A* использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок *B* – свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры ν равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \quad (3)$$

а при использовании игроком *B* чистой активной стратегии B_2, выигрыш будет равен

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu. \quad (4)$$

Уравнения (1), (3) и (4) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: p_1, p_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \quad (5)$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \quad (6)$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \quad (7)$$

Если игрок *B* использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок *A* – свою чистую активную стратегию A_1, то цена игры ν равна

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu, \quad (8)$$

а при использовании игроком *A* чистой активной стратегии A_2, выигрыш будет равен

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu. \quad (9)$$

Уравнения (2), (8) и (9) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: q_1; q_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{10}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{11}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \tag{12}$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры в выражениях (7) и (12) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (5), (6), (7), (10), (11), (12) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Тогда $0<p_1<1$; $0<p_2<1$; $0<q_1<1$; $0<q_2<1$.

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырех выигрышей a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Решения системы уравнений (5), (6), (7) и (10), (11), (12), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рис. 8). Для нахождения вероятностей p_1, p_2 и цены игры v в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока A.

При p_1=0 игрок A применяет чистую стратегию A_2. Если при этом игрок B применяет чистую стратегию B_1, то выигрыш игрока A равен a_{21} (уравнение (3), а если игрок B применяет чистую стратегию B_2, то выигрыш игрока A равен a_{22} (уравнение (4). При p_1=1 игрок A применяет чистую стратегию A_1.

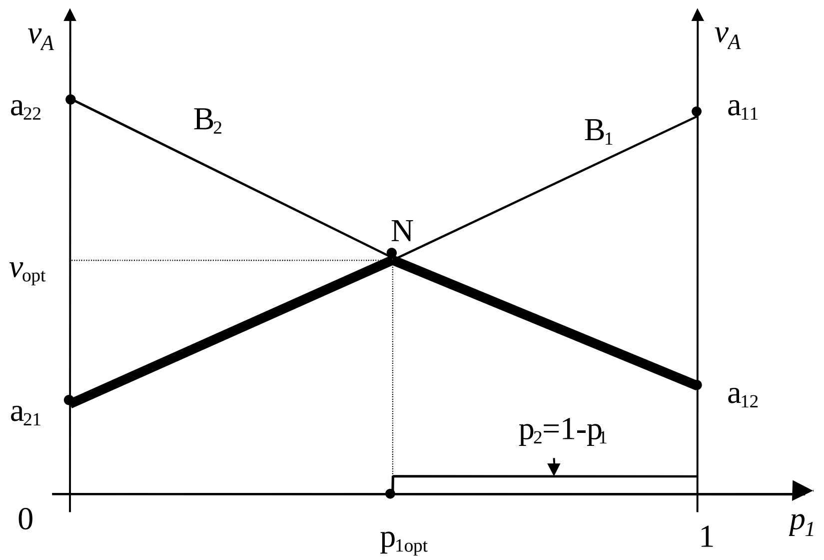


Рис. 8. Графическое решение игры 2х2

Если при этом игрок B применяет чистую стратегию B_1, то выигрыш игрока A равен a_{11}, а при применении чистой стратегии B_2 выигрыш равен a_{12}. Так как значения p_1 лежат в пределах [0,1], то, соединяя крайние точки для стратегий B_1 и B_2 (строя графики функций $v_A=(a_{11}–a_{21})p_1+a_{22}$ и $v_A=(a_{12}–a_{22})p_1+a_{22}$), получаем значения выигрышей игрока A для всех промежуточных значений p_1.

В соответствии с принципом максимина игрок A должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка N пересечения отрезков прямых (рис. 8) определяет как оптимальную цену игры v_{opt}, так и оптимальные вероятности p_{1opt} и $p_{2opt}=1–p_{1opt}$, соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока A, т. е. дает решения системы уравнений (1), (3), (4).

Для графического решения системы уравнений (2), (8), (9) отложим по оси абсцисс вероятность $q_1 \in [0,1]$, а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока B:

$$v_B=(a_{11}–a_{12})q_1+a_{12} \qquad (13)$$

$$v_B=(a_{21}-a_{22})q_1+a_{22}. \qquad (14)$$

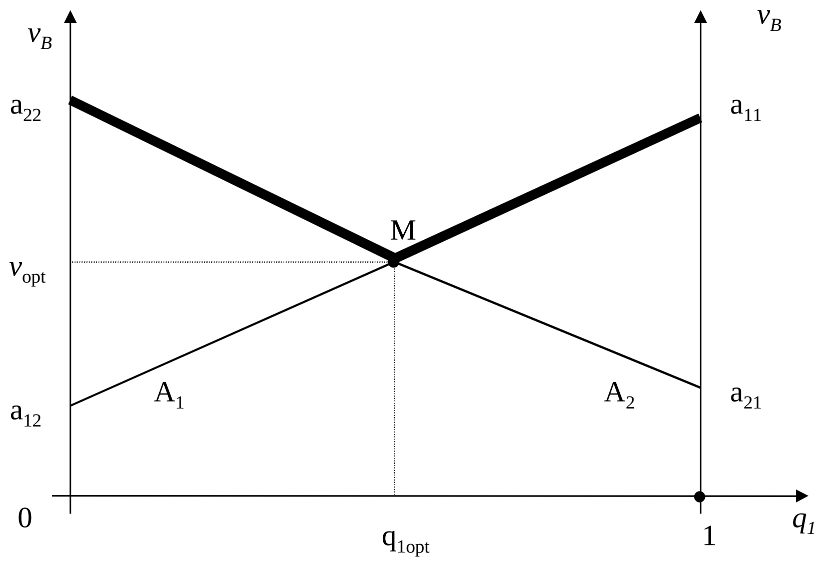


Рис. 9. Графическое решение игры 2x2

Решением являются координаты точки M пересечения прямых, описываемых уравнениями (13) и (14):

q_{1opt}; $q_{2opt}=1-q_{1opt}$ и v_{opt}.

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок B должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры G (2x2) с седловой точкой геометрическая интерпретация решения может быть представлена, например, следующим образом (рис. 10). Стратегия B_2 игрока B является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любом случае проигрывает больше, чем при применении стратегии B_1. В данной игре $p_{1opt}=1$; $p_{2opt}=0$; $v_{opt}=a_{11}$, т. е. игра имеет седловую точку N и решается в чистых стратегиях. Игрок A должен применять стратегию A_1, а игрок B – стратегию B_1.

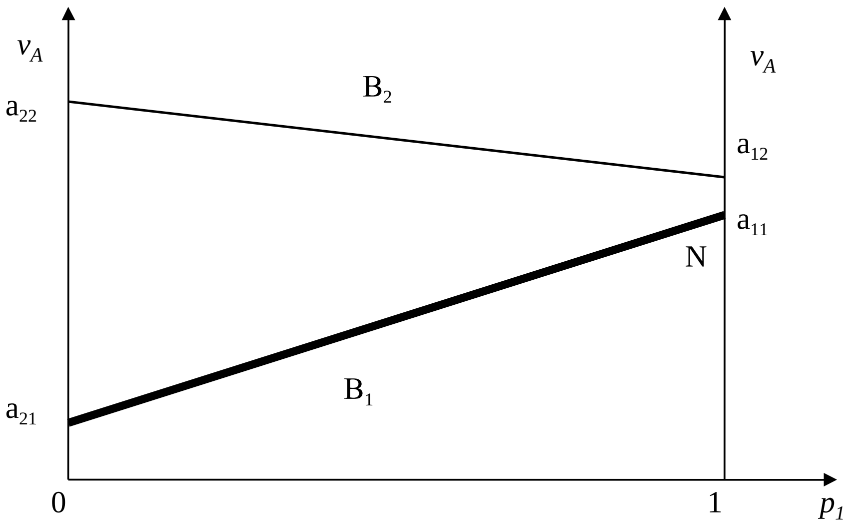


Рис. 10. Графическое представление решения игры в чистых стратегиях

На рис. 10 показан случай, в котором решением игры для игрока A является чистая стратегия A_2, а для игрока B – B_1. Игра имеет седловую точку N.

Пример 12. Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид

A_i \ B_j	B_1	B_2	α_i
A_1	4	-2	-2
A_2	1	3	1
β_j	4	3	

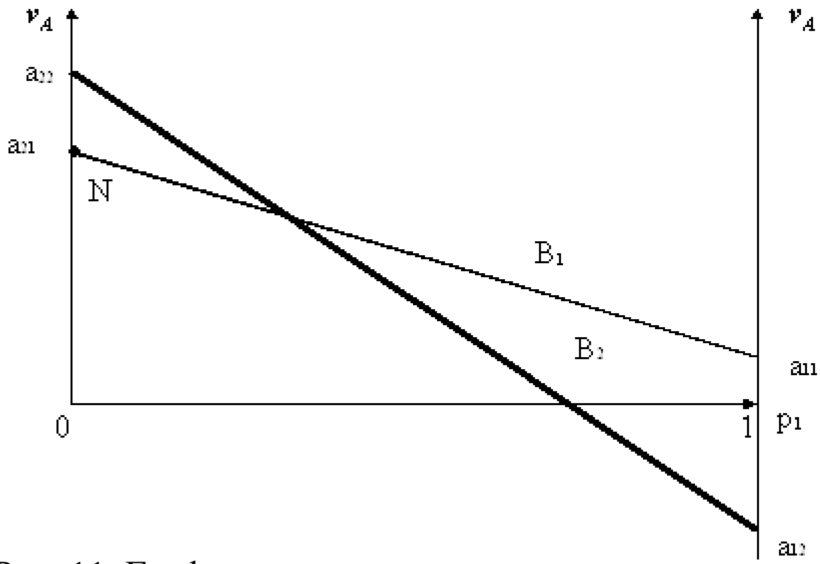


Рис. 11. Графическое решение задачи

В данной игре нижняя цена игры α=1 не равна верхней цене игры β=3, поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях (рис. 11).

Для игрока *A*, в соответствии с формулами (5) и (6), оптимальные вероятности применения стратегий A_1 и A_2 равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3-1}{4+3-1+2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4+2}{4+3-1+2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока *B*, в соответствии с формулами (10) и (11), оптимальные вероятности применения стратегий B_1 и B_2 равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$; $S_B = \left(\frac{5}{8}; \frac{1}{8}\right)$, а цена игры в соответствии с формулой (12) равна:

$$\nu = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Так как ν>0, то игра выгодна для игрока *A*.

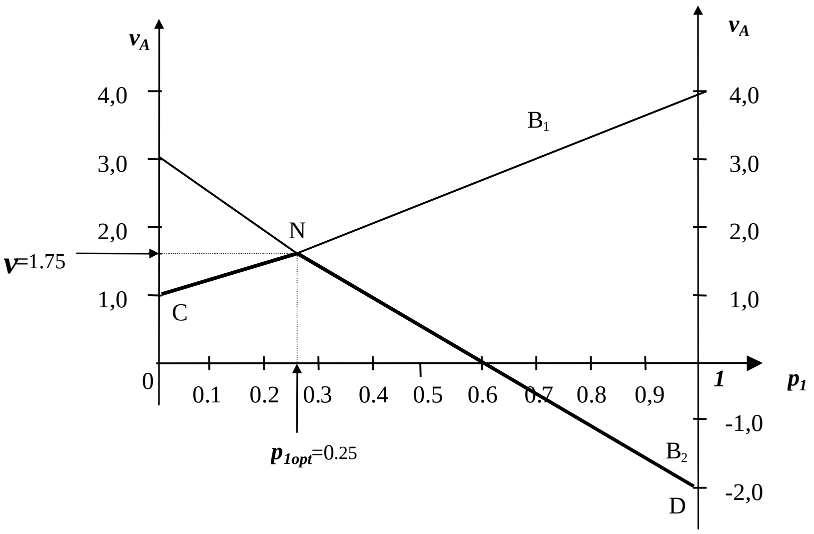


Рис. 12. Графическое решение для игрока *A*

Нижняя граница выигрыша игрока *A* определяется ломаной *CND*. Оптимальное решение, определяется точкой *N*, естественно, дает то же решение, что и алгебраический метод: $S_A = (0.25; 0.75)$, $v = 1.75$.

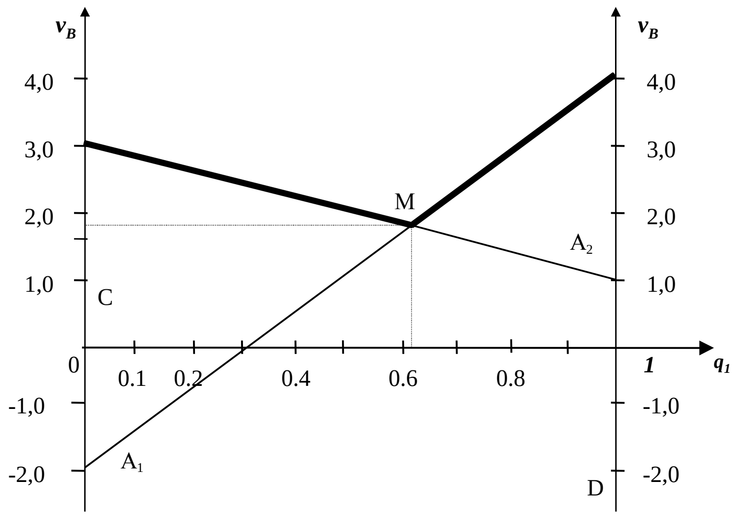


Рис. 13. Геометрическое изображение игры для игрока *B*

Оптимальное решение, определяемое точкой *M*, дает решение $S_B = (0.625; 0.375)$ и $v = 1.75$.

Упрощение матричных игр

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платежной матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности поиск оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путем исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

*Определение 1***.** Если в платежной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующие этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

Определение 2. Если в платежной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока *A*, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Определение 3. Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_i игрока *B*, не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_i называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Правило. Решение матричной игры не изменится, если из платежной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Пример 13. Упростить матричную игру, платежная матрица которой имеет вид

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9
→ A_4	4	8	3	4	5
→ A_5	4	7	7	9	10

Из платежной матрицы видно, что стратегия A_2 дублирует стратегию A_5, потому любую из них можно отбросить (отбросим стратегию A_5). Сравнивая почленно стратегии A_1 и A_4, видим, что каждый элемент строки A_4 не больше соответствующего элемента строки A_1. Поэтому применение игроком A доминирующей над A_4 стратегии A_1 всегда обеспечивает выигрыш, не меньший того, который был бы получен при применении стратегии A_4. Следовательно, стратегию A_4 можно отбросить. Таким образом, имеем упрощенную матричную игру с платежной матрицей вида

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9

Из этой матрицы видно, что в ней некоторые стратегии игрока B доминируют над другими: B_3 над B_2, B_4 и B_5.

Отбрасывая доминируемые стратегии B_2, B_4 и B_5, получаем игру 3x2, имеющую платежную матрицу вида

A_i \ B_j	B_1	B_3

A_1	5	3
A_2	4	7
A_3	4	3

В этой матрице стратегия A_3 доминируется, как стратегией A_1, так и стратегией A_2. Отбрасывая стратегию A_3, окончательно получаем игру 2х2 с платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7

Эту игру уже упростить нельзя, ее надо решать рассмотренным выше алгебраическим или геометрическим методом.

Необходимо отметить, что, отбрасывая дублируемые и доминируемые стратегии в игре с седловой точкой, мы все равно придем к игре с седловой точкой, т. е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой. Это проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы платежной матрицы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

Свойство 1. Если ко всем элементам платежной матрицы прибавить (вычесть) одно и то же число C, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры увеличится (уменьшится) на это число C.

Свойство 2. Если каждый элемент платежной матрицы умножить на положительное число k, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры умножится на k.

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку.

Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными имеет и отрицательные элементы, то ко всем ее элементам прибавляют число, позволяющее исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

Пример 14. Решить матричную игру 2х2 с платежной матрицей вида

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	0.5	-0.2
A_2	0.1	0.3

Умножая все элементы платежной матрицы на 10, а затем прибавляя к ним число 2, получаем игру с платежной матрицей

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	7	0
A_2	3	5

Решая эту игру алгебраическим методом, получаем

$$p_1 = \frac{5-3}{7+5-3-0} = \frac{2}{9}; \quad p_2 = \frac{7}{9}; \quad q_1 = \frac{5-0}{7+5-3-0} = \frac{5}{9}; \quad q_2 = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7\cdot 5 - 0\cdot 3}{7+5-3-0} = \frac{35}{9}.$$

В соответствии со свойствами 1 и 2 исходная матричная игра имеет те же оптимальные смешанные стратегии: $S_A = \left(\frac{2}{9}; \frac{7}{9}\right)$ и $S_B = \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$. А для получения исходной цены игры необходимо из полученной цены игры вычесть 2, а затем разделить на 10. Таким образом получаем цену исходной игры: $\left(\frac{35}{9} - 2\right):10 = \frac{17}{90}$.

Решение игр 2х*n* и *m*х2

Как уже отмечалось в теореме об активных стратегиях, любая конечная игра mхn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит L, где $L = \min(m, n)$. Следовательно, у игры 2хn или mх2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(\min(2,n)=\min(m,2)=2)$. Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игры 2хn и mх2 превращаются в игры 2х2, методы решения которых рассмотрены выше.

Практически решение игры 2хn осуществляется следующим образом:

1) строится графическое изображение игры для игрока A;

2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры v;

3) определяется пара стратегий игрока B, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока B.

Таким образом, игра 2хn сведена к игре 2х2, которую более точно можно решить алгебраическим методом.

Если в точке оптимума пересекается более двух стратегий, то в качестве активных стратегий может быть выбрана любая пара из них.

Решение игры mх2 осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока B и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша (так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока B), и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример 15. Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	4	3

Платежная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры для игрока A (рис. 14).

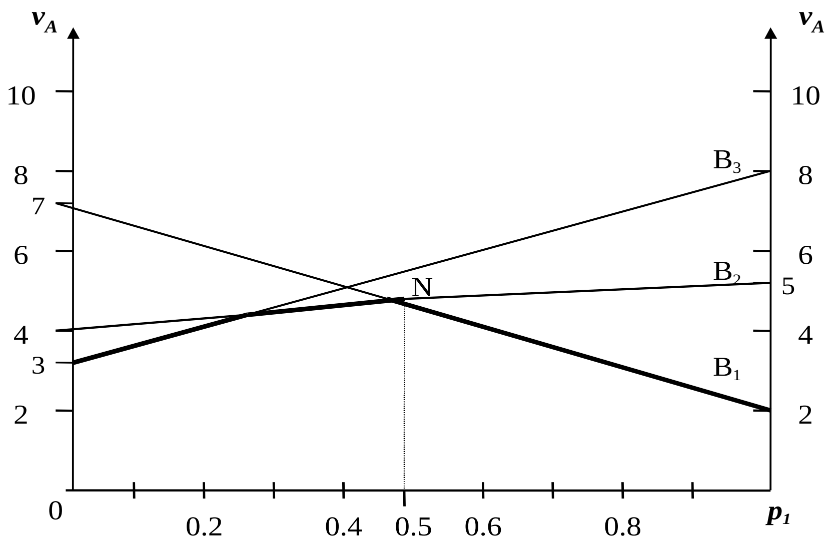


Рис. 14. Графическое изображение игры для игрока A

Точка N (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются линии, соответствующие активным стратегиям B_1 и B_2 игрока B. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	4

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение: $p_1 = \dfrac{4-7}{2+4-7-5} = \dfrac{1}{2}$; $\quad p_2 = 1 - p_1 = \dfrac{1}{2}$; $\quad q_1 = \dfrac{4-5}{2+4-7-5} = \dfrac{1}{6}$;

$q_2 = 1 - q_1 = \dfrac{5}{6}$; $\quad v = \dfrac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = \dfrac{27}{6}$.

Ответ: $S_A = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, $S_B = \left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{5}{6}; 0\right)$, $v = 4{,}5$.

Пример 16. Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	0	1

A_2	4	2
A_3	-1	4
A_4	1	-3
A_5	6	-2
A_6	1,5	3

Платежная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре 2x2 строим ее графическое изображение для игрока *B* (рис. 15).

Точка *M* (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A_2, A_6 и A_3 игрока *A*. Таким образом, исключая стратегии A_1, A_4 и A_5 и выбирая из трех активных стратегий две (например, A_2 и A_3 или A_2 и A_6), приходим к матричной игре 2x2. Выбор стратегий A_3 и A_6 исключен, так как в этом случае точка *M* перестанет быть точкой минимакса.

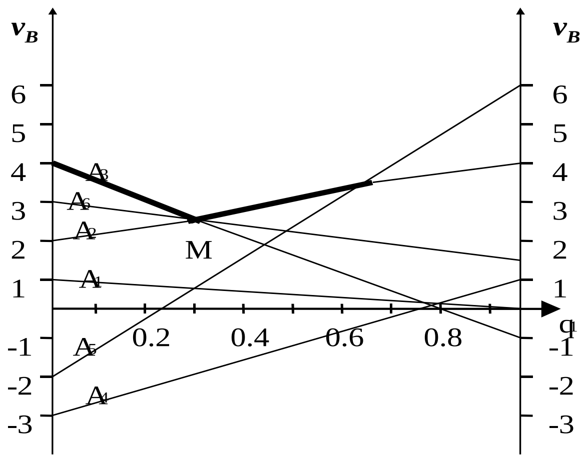


Рис. 15. Графическое изображение для игрока *B*

Пусть выбираются стратегии A_2 и A_3. Тогда игра 2x2 приобретает вид

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_2	4	2
A_3	-1	4

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7}; \qquad p_2 = \frac{2}{7};$$

$$q_1 = \frac{4-2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7}; \qquad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$\nu = \frac{4\cdot 4-(-1)\cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7};0;0;0\right)$, $S_B = \left(\frac{2}{7};\frac{5}{7}\right)$, $\nu = \frac{18}{7}$.

Другой вариант игры $2\text{x}2$ получается, если использовать стратегии A_2 и A_6. В этом случае платежная матрица имеет вид

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_2	4	2
A_6	1,5	3

Тогда $p_1 = \frac{3-1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{3}{7}$; $p_2 = \frac{4}{7}$; $q_1 = \frac{3-2}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{2}{7}$; $q_2 = \frac{5}{7}$;

$$\nu = \frac{4\cdot 3-2\cdot 1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left(0;\frac{3}{7};0;0;0;\frac{4}{7}\right)$, $S_B = \left(\frac{2}{7};\frac{5}{7}\right)$, $\nu = \frac{18}{7}$.

Естественно, что цена игры для обоих вариантов одинакова.

В заключение наметим общую схему решения матричных игр $2\text{x}n$ и $m\text{x}2$:

1. Определяется наличие седловой точки, т. е. возможность решения игры в чистых стратегиях. Если нижняя цена игры α не равна верхней цене игры β, то осуществляется поиск решения в смешанных стратегиях.

2. Производится упрощение матричной игры путем исключения дублирующих и доминируемых стратегий. Если упрощенная игра имеет размерность не $2\text{x}2$, то переходим к этапу 3.

3. Строится графическое изображение игры и определяются две активные стратегии игрока, имевшего в исходной задаче число стратегий больше двух.

4. Решается матричная игра $2\text{x}2$.

Решение игр mxn. Эквивалентные задачи линейного программирования

Пусть имеется матричная игра $m\text{x}n$ без седловой точки с матрицей выигрышей $\|a_{ij}\|$. Допустим, что все выигрыши a_{ij} положительны (этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем элементам матрицы достаточно большое число C; от этого, как уже отмечалось, цена игры увеличится на C, а оптимальные решения S_A и S_B не изменятся).

Если все a_{ij} положительны, то и цена игры ν при оптимальной стратегии тоже положительна, т. к. $\alpha \le \nu \le \beta$.

В соответствии с основной теоремой матричных игр, если платежная матрица не имеет седловой точки, то имеется пара оптимальных смешанных стратегий $S_A=(p_1, p_2, ..., p_m)$ и $S_B=(q_1, q_2, ..., q_n)$, применение которой обеспечивает игрокам получение цены игры ν.

Найдем вначале S_A. Для этого предположим, что игрок B отказался от своей оптимальной смешанной стратегии S_B и применяет только чистые стратегии. В каждом из этих случаев выигрыш игрока A будет не меньше, чем v:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge v. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Разделив левую и правую часть каждого из неравенств (15) на положительную величину v и введя обозначения:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}; \quad x_2 = \frac{p_2}{v}; \quad \ldots, x_m = \frac{p_m}{v}, \quad (16)$$

запишем неравенства (15) в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1 \end{array}\right\}, \quad (17)$$

где $x_1, x_2, \ldots x_m$ – неотрицательные переменные.

В силу того что $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$, переменные $x_1, x_2, \ldots x_m$ удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}$. (18)

Учитывая, что игрок A стремится максимизировать v, получаем следующую задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, ... x_m такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям – неравенствам (17) и обращали в минимум линейную функцию этих переменных: $\min L(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$. (19)

Из решения задачи линейного программирования находим цену игры v и оптимальную стратегию S_A по формулам

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \tag{20}$$

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = x_i \cdot v, \; i = \overline{1, m}. \tag{21}$$

Аналогично находим оптимальную стратегию S_B игрока B. Предположим, что игрок A отказался от своей оптимальной стратегии S_A и применяет только чистые стратегии. Тогда проигрыш игрока B в каждом из этих случаев будет не больше, чем v:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v. \end{array}\right\}. \tag{22}$$

Разделив левую и правую части каждого из неравенств (22) на положительную величину v и введя обозначения:

$$y_1 = \frac{q_1}{v}; \quad y_2 = \frac{q_2}{v}; \quad \ldots, y_n = \frac{q_n}{v}, \tag{23}$$

запишем неравенство (22) в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1. \end{array}\right\}, \tag{24}$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – неотрицательные переменные.

В силу того что $q_1+q_2+...+q_n=1$, переменные $y_1, y_2, ..., y_n$ удовлетворяют условию

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}. \qquad (25)$$

Учитывая, что игрок B стремится минимизировать положительную цену v (свой проигрыш), получаем задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, ..., y_n$ такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (24) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных:

$$\max L(x) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n. \qquad (26)$$

Эта задача является двойственной по отношению к задаче, представленной условиями (17) и (19).

Оптимальная стратегия $S_B=(q_1, q_2, ..., q_n)$ игрока B определяется из решения двойственной задачи линейного программирования по формулам

$$q_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = y_j \cdot v, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (27)$$

Таким образом, оптимальные стратегии $S_A=(p_1, p_2, ..., p_m)|$ и $S_B=(q_1, q_2, ..., q_n)$ матричной игры mxn с платежной матрицей $\|a_{ij}\|$ могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейного программирования

Прямая (исходная) задача	Двойственная задача
$\min L(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i$,	$\max L(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j$,
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1$, $j = \overline{1,n}$;	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1$, $i = \overline{1,m}$;
$x_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$.	$y_j \ge 0$, $i = \overline{1,n}$.

При этом

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = \frac{1}{\min L(x)} = \frac{1}{\max L(y)}, \qquad (28)$$

$p_i = x_i \cdot v; \quad i = \overline{1,m}; \quad q_j = y_j \cdot v; \quad j = \overline{1,n}$.

Пример 17. Найти решение и цену матричной игры, платежная матрица которой имеет вид

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	3	1	1
A_3	1	3	1

Решение

1. Так как α=1 не равно β=3, то игра не имеет седловой точки.

2. В данной игре нет дублирующих и доминируемых стратегий.

3. Решаем игру путем решения пары двойственных задач линейного программирования.

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования будут выглядеть следующим образом:

Прямая (исходная) задача:

Найти неотрицательные переменные x_1, x_2, x_3, минимизирующие функцию

$\min L(x) = x_1 + x_2 + x_3$

при ограничениях:

$x_1+3x_2+x_3 \geq 1$;

$2x_1+x_2+3x_3 \geq 1$;

$3x_1+x_2+x_3 \geq 1$;

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$.

Двойственная задача:

Найти неотрицательные переменные y_1, y_2, y_3, максимизирующие функцию

$\max L(x) = y_1 + y_2 + y_3$

при ограничениях:

$y_1+2y_2+3y_3 \leq 1$;

$3y_1+y_2+y_3 \leq 1$;

$y_1+3y_2+y_3 \leq 1$;

$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$.

Данные задачи решаются, например, симплекс-методом. Поскольку в двойственной задаче ограничения имеют вид «≤», то такую задачу решать проще (это стандартная ЗЛП). Оптимальное решение исходной задачи можно будет непосредственно получить из данных симплекс-таблицы для оптимального решения двойственной задачи.

Начальная симплекс-таблица двойственной задачи имеет вид

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	1	2	3	1	0	0	1
y_5	3	1	1	0	1	0	1
y_6	1	3	1	0	0	1	1
L	-1	-1	-1	0	0	0	0

ведущая строка

ведущий столбец

Последующие симплекс-таблицы приведены ниже:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	0	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_6	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
L	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

ведущая строка

ведущий столбец

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	0	0	$\frac{9}{4}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
L	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

ведущая строка

ведущий столбец

И, наконец, получаем симплекс-таблицу, которая соответствует оптимальному решению двойственной задачи:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_3	0	0	1	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$
y_1	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$
y_2	0	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
L	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

Оптимальное решение двойственной задачи линейного программирования следующее: $y_1 = \dfrac{2}{9}$, $y_2 = \dfrac{2}{9}$, $y_3 = \dfrac{1}{9}$, $\max L(y) = \dfrac{5}{9}$.

Находим оптимальную смешанную стратегию игрока B в соответствии с формулами (27) и (28):

$$\nu = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3} y_j} = \frac{1}{\frac{2}{5} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{9}{5};$$

$$q_1 = y_1 \cdot \nu = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}; \quad q_2 = y_2 \cdot \nu = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}; \quad q_3 = y_3 \cdot \nu = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $S_B = \left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Оптимальное решение исходной задачи находим, используя двойственные оценки, из симплекс-таблицы для оптимального решения двойственной задачи: коэффициент при начальной базисной переменной в оптимальном уравнении прямой задачи равен разности между правой и левой частями ограничения двойственной задачи, ассоциированного с данной начальной переменной.

Получаем $x_1 = \frac{2}{9}$, $x_2 = \frac{2}{9}$, $x_3 = \frac{1}{9}$, $\max L(y) = \frac{5}{9}$.

Отсюда определим вероятности применения своих активных стратегий игроком A: $p_1 = x_1 \cdot \nu = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}$;

$$p_2 = x_2 \cdot \nu = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5};$$

$$p_3 = x_3 \cdot \nu = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $S_A = \left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Таким образом, решение игры mxn сводится к решению задачи линейного программирования. И наоборот для любой задачи линейного программирования может быть построена эквивалентная ей задача теории матричных игр. Эта связь задач теории матричных игр с задачами линейного программирования оказывается полезной не только для теории игр, но и для линейного программирования. Дело в том, что существуют приближенные численные методы решения матричных игр, которые при большой размерности задачи могут оказаться проще, чем симплекс-метод.

3. Принятие решений в условиях неопределённости и риска

Задачи принятия решений (ЗПР) классифицируют по трём признакам:

1) по количеству целей управления и соответствующих им критериев оптимальности ЗПР делят на одноцелевые, или однокритериальные (скалярные), и многоцелевые, или многокритериальные (векторные);
2) по наличию или отсутствию зависимости критерия оптимальности и ограничений от времени ЗПР делят на статические (не зависящие от времени) и динамические (зависящие от времени).

Динамическим ЗПР присущи две особенности:

a) критерием оптимальности в динамических ЗПР является не функция, как в статических ЗПР, а функционал, зависящий от функции времени;
b) в составе ограничений обычно присутствуют так называемые дифференциальные связи, описываемые дифференциальными уравнениями;

3) по наличию случайных и неопределённых факторов этот признак называется «определённость–риск–неопределённость». ЗПР подразделяют на три больших подкласса:

a) принятие решения в условиях определённости, или детерминированные ЗПР. Они характеризуются однозначной детерминированной связью между принятым решением и его исходом;
b) принятие решений при риске, или стохастические ЗПР. Любое принятое решение может привести к одному из множества возможных исходов, причём каждый исход имеет определённую вероятность появления. Предполагается, что эти вероятности заранее известны лицу, принимающему решение;
c) принятие решений в условиях неопределённости. Любое принятое решение может привести к одному из множества возможных исходов, вероятности появления которых неизвестны. Общая постановка однокритериальной статической задачи принятия решений в условиях риска.

Каждая выбранная стратегия управления в условиях риска связана с множеством возможных исходов, причём каждый исход имеет определённую вероятность появления, известную заранее человеку, принимающему решение.

При оптимизации решения в подобной ситуации стохастическую ЗПР сводят к детерминированной. Широко используют при этом следующие два принципа: искусственное сведение к детерминированной схеме и оптимизация в среднем.

В первом случае неопределённая, вероятностная картина явления приближённо заменяется детерминированной. Для этого все участвующие в задаче случайные факторы приближённо заменяются какими-то неслучайными характеристиками этих факторов (как правило, их математическим ожиданием).

Приём «оптимизация в среднем» заключается в переходе от исходного показателя эффективности Q, являющегося случайной величиной, к его усреднённой, статической характеристике, например, к его математическому ожиданию. «Искусственное сведение к детерминированной схеме» представляет собой детерминацию на уровне факторов, а «оптимизация в среднем» – на уровне показателя эффективности.

Отметим принципиальное различие между стохастическими факторами, приводящими к принятию решения в условиях риска, и неопределёнными факторами, приводящими к принятию решения в условиях неопределённости. И те, и другие приводят к разбросу возможных исходов результатов управления. Но стохастические факторы полностью описываются известной стохастической информацией, эта информация и позволяет выбрать лучшее в среднем решение. Применительно к неопределённым факторам подобная информация отсутствует.

В общем случае неопределённость может быть вызвана либо противодействием разумного противника, либо недостаточной осведомлённостью об условиях, в которых осуществляется выбор решения.

Принятие решений в условиях разумного противодействия является объектом исследования теории игр. Теория игр рассматривает пути оптимизации поиска нужного решения в условиях неопределенности. Теория статистических решений (кратко – теория решений) отличается от теории игр тем, что рассматривает неопределенность ситуации без конфликтной окраски – никто никому сознательно не противодействует. В задачах теории статистических решений неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего «противника», а от объективной незаинтересованной действительности, которую в теории статистических решений принято называть «природой», «поведение» которой неизвестно. Эти ситуации часто называются «игры с природой».

С этой целью в теории решений вводится понятие риска. Риском лица, принимающего решение по использованию определенной стратегии (технологии) в неопределенных условиях называется разность между выигрышем (результатом, показателем эффективности), который получился бы, если бы были известны условия, и выигрышем, который получится при неопределенности условий. Следовательно, возникают две постановки задачи по выбору решения, два возможных сценария: при одном нам желательно получить максимальный выигрыш, при другом – минимальный риск. Оптимально, конечно, максимальный выигрыш при минимальном риске. Можно попробовать манипулировать в пределах наших знаний возможными ходами природы, уменьшая степень неопределенности, но это далеко не всегда возможно. Можно принять решение по использованию максимального числа технологий, каждая из которых уменьшает риск. Но только суммирование технологий не приводит к суммированию выигрышей.

Итак, принимая решения, выбирая технологию, необходимо задаться вопросом, что необходимо получить: максимальный выигрыш при достаточно высоком риске, максимально снизить риск при относительно невысоком результате или выбрать «золотую середину».

Теория статистических решений предлагает несколько критериев оптимальности выбора решений. Выбор того или иного критерия неформализуем, он осуществляется человеком, принимающим решения, субъективно, с учетом собственного опыта, интуиции и т. п. Рассмотрим эти критерии.

1. *Максиминный критерий Вальда.* Предполагается что второй игрок – природа максимально агрессивна и делает все, чтобы результат (выигрыш) был минимален: «позиция крайнего пессимизма». Руководствуясь этим критерием, надо всегда ориентироваться на худшие условия, выбирать самые неэффективные технологии, зная наверняка, что «хуже этого не будет». Такой перестраховочный подход естествен для того, кто очень боится проиграть, и как крайний случай он заслуживает рассмотрения.

Критерий Вальда: в каждой строке матрицы выбираем минимальную оценку. Оптимальному решению соответствует такое решение, которому соответствует максимум этого минимума, то есть $\max_i \min_j a_{ij}$.

2. *Критерий максимума. Он выбирается из условия тах* $\max_i \max_j a_{ij}$.

Это критерий крайнего оптимизма.

3. *Критерий минимаксного риска Сэвиджа* – тоже крайне пессимистический критерий, он сходен с критерием Вальда, но «пессимизм» здесь понимается по-другому. При выборе стратегии рекомендуется ориентироваться не на выигрыш, а на риск: в качестве оптимальной выбирается та технология, при которой величина риска в наихудших условиях минимальна. Сущность такого подхода в том, чтобы всячески избегать большого риска при принятии решения.

Критерий Сэвиджа: в каждом столбце матрицы находится максимальная оценка $\max_i a_{ij}$, и составляется новая матрица, элементы которой определяются соотношением: $\max_i \min_j \left[a_{ij} - \max_i a_{ij} \right]$. Величина в скобках – риск или сожаление между наиболее благоприятным и действительным выбором. Сущность этого критерия заключается в минимизации риска. Как и критерий Вальда, критерий Сэвиджа очень осторожен. Они различаются разным пониманием худшей ситуации: в первом случае – это минимальный выигрыш, во втором – максимальная потеря выигрыша по сравнению с тем, чего можно было бы достичь в данных условиях.

4. *Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.* Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом («всегда рассчитывай на худшее»), ни крайним, легкомысленным оптимизмом («авось кривая вывезет»). Вводится «коэффициент пессимизма», который выбирается между 0 и 1, при этом если коэффициент равен 1, то критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (если оценивается пессимизм результата) или в критерий Сэвиджа, если оценивается пессимизм высокого риска. Коэффициент пессимизма выбирается из субъективных соображений: чем опаснее ситуация, чем больше лицо, принимающее решение, хочет в ней «подстраховаться», чем меньше его склонность к риску, тем ближе к единице выбирается этот коэффициент.

   Критерий Гурвица: вводится некоторый коэффициент α, называемый коэффициентом оптимизма, $0 \le \alpha \le 1$. В каждой строке матрицы выигрышей находится самая большая оценка $\max\limits_j a_{ij}$ и самая маленькая $\min\limits_j a_{ij}$. Они умножаются соответственно на α и $(1-\alpha)$, затем вычисляется их сумма. Оптимальному решению будет соответствовать такое решение, которому соответствует максимум этой суммы, т. е. $\max\limits_i \left[\alpha \max\limits_j a_{ij} + (1-\alpha) \min\limits_j a_{ij} \right]$.

5. *Критерий Лапласа.* В основе этого критерия лежит «принцип недостаточного основания»: если нет достаточных оснований считать, что вероятности того или иного спроса имеют неравномерное распределение, то они принимаются одинаковыми и задача сводится к поиску варианта,

дающего $\max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} a_{ij}$. Для каждой строки матрицы выигрышей подсчитывается среднее арифметическое значение оценок. Оптимальному решению будет соответствовать такое решение, которому соответствует максимальное значение этого среднего арифметического.

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

Пример 18.

Планируется выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Система оптовой торговли может поставить не более 50 станков; комплект поставки – 10 станков. Минимальный объем поставок – 20 станков. Соответственно вектор решений об объеме поставок X = (20,30,40,50).

Ежегодный доход от продукции, получаемой с одного станка, составляет 21.9 тыс.руб. Оптовая цена одного станка 4.775 тыс. руб., эксплуатационные расходы – 3.6 тыс. руб. Затраты на подготовку производства составляют 25.5 тыс.руб. и не зависят от числа станков и объема выпуска.

Пусть спрос пропорционален количеству продукции, снимаемой с S работающих станков, и для простоты ограничимся вектором состояний спроса S=(0,10,20,30,40,50).

Если решающее правило сформулировать как «доход – издержки», то можно рассчитать элементы матрицы полезности (см. табл. 5):

$$a_{ij} = (21{,}9 - 3{,}6)\min(X_i, S_j) - 4{,}775 X_i - 25{,}5 .$$

Таблица 5. Матрица полезности

	S_1=0	S_2=10	S_3=20	S_4=30	S_5=40	S_6=50
X_1=20	-121	62	245	245	245	245
X_2=30	-168.75	14.25	197.25	380.25	380.25	380.25
X_3=40	-216.5	-33.5	149.5	332.5	515.5	515.5

X_4=50	-264.25	-81.25	101.75	284.75	467.75	650.75

Например, a_{11} =-(4.775·20+25.5) = -121,

a_{12} =(21.9-3.6)·10-(4.775·20+25.5) = 62,

a_{13} =(21.9-3.6)·20-(4.775·20+25.5) = 245,

a_{14} = a_{15} =245 (спрос останется неудовлетворенным).

Выбор критерия принятия решения: при известных вероятностях p_j для спроса S_j можно найти математическое ожидание функции полезности и определить вектор X^*, дающий его максимум: $W = \max\limits_{i=1,\ldots m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$.

Если для приведенного примера предыдущий опыт позволит задать вектор P = (0.01, 0.09, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1), то математические ожидания прибыли при разных выборах:

W_1 = -121·0.01 + 62·0.09 + 245·0.2 + 245·0.3 + 245·0.3 + 245·0.1 = 224.87, W_2 = 305.22, W_3 = 330.675, W_4 = 301.12 и выбор максимального из этих значений обнаруживает оптимальность варианта 40 станков с ожидаемой прибылью 330.675 тыс. руб.

По критерию Лапласа для нашего примера W_1 = (-121 + 62 + 245 + 245 + + 245 + 245) / 6 = 153, W_2 = 197.25, W_3 =210.5, W_4 = 193.5 и выбор максимального значения обнаруживает оптимальность выбора варианта 40 станков с ожидаемой прибылью 210.5 тыс. руб.

По критерию Вальда W = max(-121, -168.75, -216.5, -264.25) = -121, т. е. по этому критерию следует закупить 20 станков и максимальный возможный убыток не превысит 121 тыс. руб.

По критерию Гурвица при различных значениях коэффициента оптимизма α:

W=

	α=0.1	α=0.2	α=0.5	α=0.8	α=0.9
X_1=20	-84.4	-47.0	62	171	206.4
X_2=30	-113.85	-58.95	105.75	270.45	325.35
X_3=40	-140.3	-70.1	149.5	369.1	442.3
X_4=50	-172.75	-81.25	193.25	467.75	206.4

При α=0.5 (равновероятных шансах на успех и неудачу) следует закупить 50 станков и ожидать прибыль около 193.25 тыс. руб.

При вероятности успеха 0.2 не следует закупать более 20 станков с надеждой, что убытки не превысят 47 тыс. руб.

По критерию Сэвиджа вычисляем *матрицу сожалений*, элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т. е. выгоду, упущенную в результате принятия *i*-го решения в *j*-м состоянии. Для нашего примера отыскиваем матрицу, вычитая (-121) из первого столбца матрицы полезности (табл.5), заданной по условию задачи, 62 из второго столбца и т. д.

	S_1=0	S_2=10	S_3=20	S_4=30	S_5=40	S_6=50
X_1=20	0	0	0	-135.25	-270.5	-405.75
X_2=30	-47.75	-47.75	-47.75	0	-135.25	-270.5
X_3=40	-95.5	-95.5	-95.5	-47.75	0	-135.25
X_4=50	-143.25	-143.25	-143.25	-95.5	-47.75	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк здесь равно max [-405.75, -270.5, -135.25, -143.25]=-135.25 и, покупая 40 станков, мы уверены, что в худшем случае убытки не превысят 135.25 тыс. руб.

Таким образом, различные критерии приводят к различным выводам:

1) по критерию Лапласа приобретать 40 станков,
2) по критерию Вальда – 20 станков,
3) по критерию Гурвица – 20 при пессимистическом настроении и 50 в состоянии полного оптимизма,
4) по критерию Сэвиджа – 40 станков.

Своевременная разработка и принятие правильного решения – главные задачи работы управленческого персонала любой организации. Непродуманное решение может дорого стоить компании. На практике результат одного решения заставляет нас принимать следующее решение и т. д. Когда нужно принять несколько решений в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего решения или исходов испытаний, то применяют схему, называемую деревом решений.

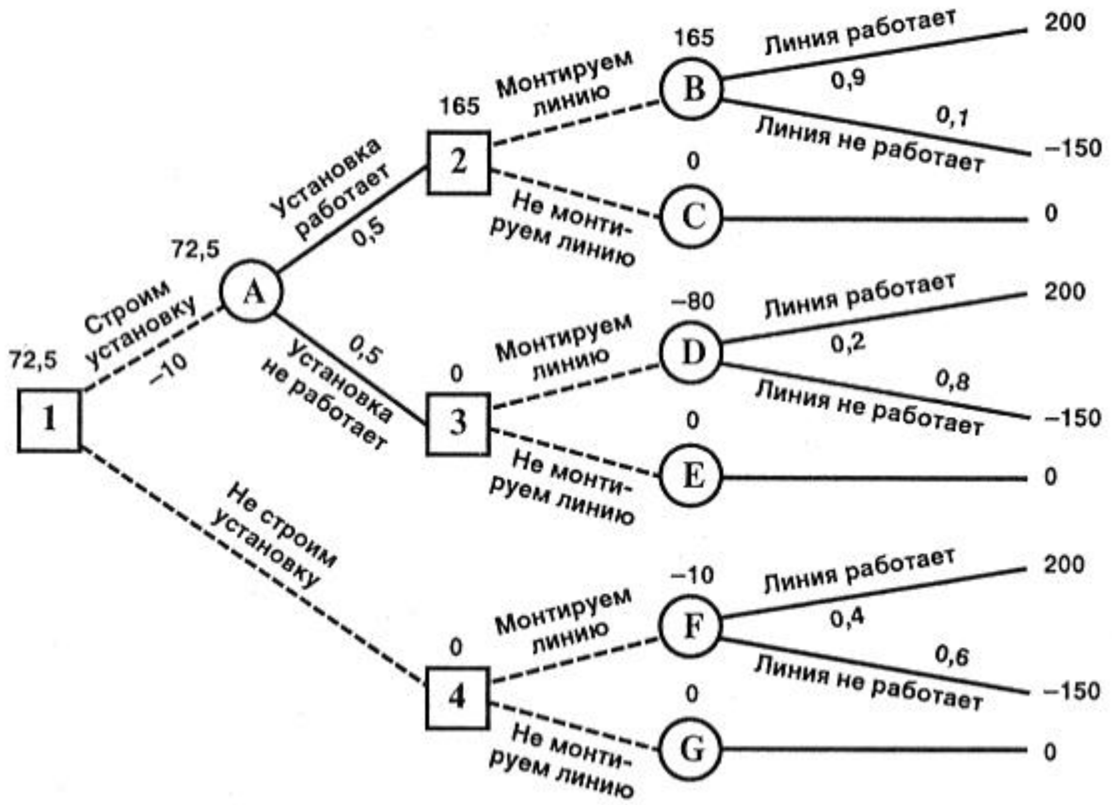
Дерево решений – это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Рисуют деревья слева направо. Места, где принимаются решения, обозначают квадратами □, места появления исходов – кругами ○, возможные решения –пунктирными линиями --------, возможные исходы – сплошными линиями —.

Для каждой альтернативы мы считаем ожидаемую стоимостную оценку (EMV) – максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов.

Пример 19. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн рублей. По оценкам главного инженера, существует 60% шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет производственную линию.

Эксперимент обойдется в 10 млн рублей. Главный инженер считает, что существует 50% шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если она будет работать, то 90% шансов за то, что смонтированная линия также будет работать. Если же экспериментальная установка не будет работать, то только 20% шансов, что производственная линия заработает. Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?



В узле F возможны исходы «линия работает» с вероятностью 0.4 (что приносит прибыль 200) и «линия не работает» с вероятностью 0.6 (что приносит убыток –150) => оценка узла F. EMV(F) = 0.4·200 + 0.6 (–150) = – 10. Это число мы пишем над узлом F. EMV(G) = 0.

В узле 4 мы выбираем между решением «монтируем линию» (оценка этого решения EMV(F) = –10) и решением «не монтируем линию» (оценка этого решения EMV(G) = 0): EMV(4) = max {EMV(F), EMV(G)} = max {–10, 0} = 0 = =EMV(G). Эту оценку мы пишем над узлом 4, а решение «монтируем линию» отбрасываем и зачеркиваем.

Аналогично: EMV(B) = 0.9·200 + 0,1· (–150) = 180 – 15 = 165; EMV(C) = 0.

EMV(2) = max {EMV(B), EMV(C} = max {165, 0} = 165 = EMV(5). Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «не монтируем линию».

EMV(D) = 0,2·200 + 0,8 (–150) = 40 – 120 = –80; EMV(E) = 0.

EMV(3) = max {EMV(D), EMV(E)} = max {–80, 0} = 0 = EMV(E). Поэтому в узле 3 отбрасываем возможное решение «монтируем линию».

EMV(A) = 0.5·165 + 0.5·0 – 10 = 72.5.

EMV(l) = max {EMV(A), EMV(4)} = max {72.5; 0} = 72.5 = EMV(A). Поэтому в узле 1 отбрасываем возможное решение «не строим установку».

Ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения равна 72,5 млн рублей. Строим установку. Если установка работает, то монтируем линию. Если установка не работает, то линию монтировать не надо.

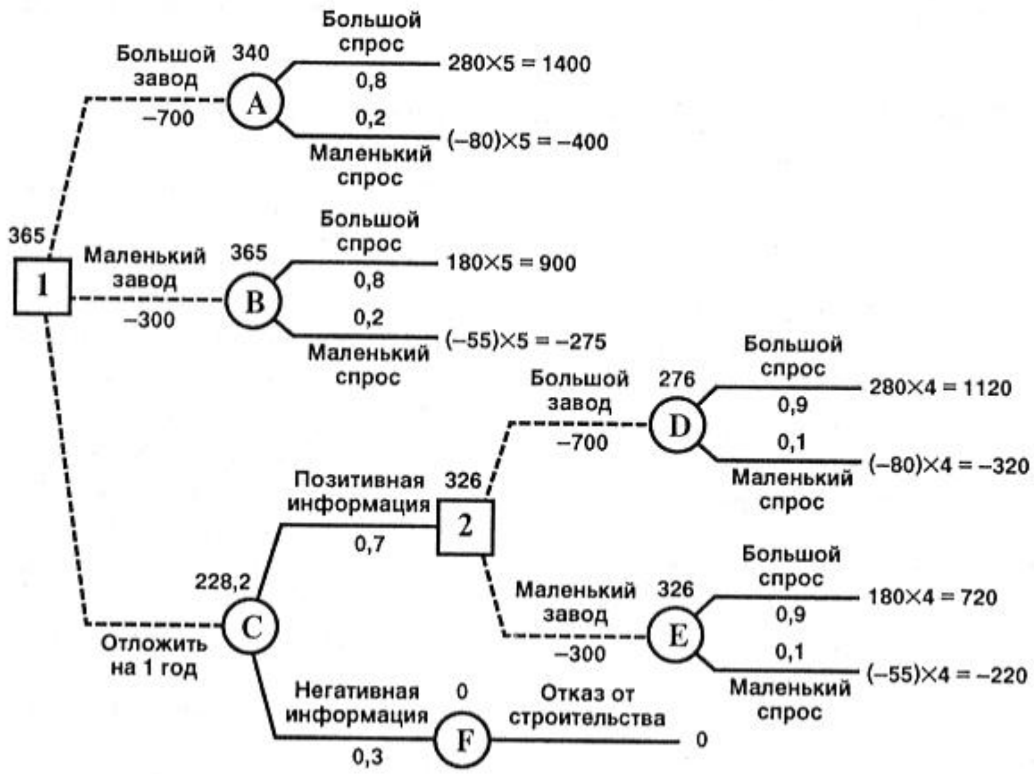
Пример 20. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

А. Построить большой завод стоимостью M_1 = 700 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R_1= 280 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1= 0.8 и низкий спрос (ежегодные убытки R_2 = 80 тысяч долларов) с вероятностью p_2 = 0.2.

Б. Построить маленький завод стоимостью M_2 = 300 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T_1= 180 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1=0.8 и низкий спрос (ежегодные убытки T_2=55 тысяч долларов) с вероятностью p_2 = 0.2.

В. Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p_3=0.7 и p_4=0.3 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p_5=0.9 и p_6=0.1 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Нарисовав дерево решений, определим наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах.



Ожидаемая стоимостная оценка узла А равна

EMV(A) = 0.8·1400 + 0.2 (–400) – 700 = 340.

EMV(B) = 0.8·900 + 0.2 (–275) – 300 = 365.

EMV(D) = 0.9·1120 + 0.1 (–320) – 700 = 276.

EMV(E) = 0.9·720 + 0.1 (–220) – 300 = 326.

EMV(2) = max {EMV(D), EMV(E)} = max {276, 326} = 326 = EMV(E). Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «большой завод».

EMV(C) = 0.7·326 + 0.3·0 = 228.2.

EMV(1) = max {EMV(A), EMV(B), EMV(C)} = max {340; 365; 228,2} = =365= EMV(B). Поэтому в узле 1 выбираем решение «маленький завод». Исследование проводить не нужно. Строим маленький завод. Ожидаемая стоимостная оценка этого наилучшего решения равна 365 тысяч долларов.

4. Многошаговые модели принятия решений и динамическое программирование

Динамическое программирование представляет собой метод оптимизации многошаговых процессов принятия решении, позволяющий указать пути исследования целого класса экстремальных задач (1950-е гг., Р. Беллман).

Метод оказывается весьма эффективным при анализе задач с аддитивной целевой функцией $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)$, к которым относятся, в частности, задачи линейного и квадратичного программирования. Требуется найти вектор $X = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, дающий max или min этой функции F.

Необходимость принять решение возникает тогда, когда производятся те или иные целенаправленные действия. Примером может служить экономический процесс распределения средств между предприятиями, использование ресурсов в течение ряда лет, замены оборудования, пополнения запасов и т. п.

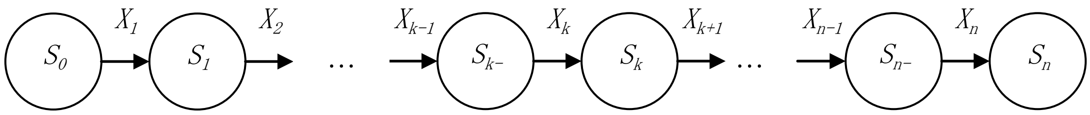
В результате управления система (объект управления) S переводится из начального состояния S_0 в состояние S_n. Пусть управление разбивается на n шагов, т. е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему S из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность n пошаговых управленческих решений.

Обозначим через X_k управленческое решение на k-м шаге (k=1, 2, …, n). Переменные X_k удовлетворяют некоторым ограничениям и в этом смысле называются допустимыми (X_k может быть числом, точкой в n-мерном пространстве или качественным признаком).

Пусть $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – управление, переводящее систему S из состояния S_0 в состояние S_n. Обозначим через S_k состояние системы (характеризуемое определенным набором параметров и конкретных их значений) после k-го шага управления. Причем состояние системы S_k в конце k-го шага зависит только от предшествующего состояния S_{k-1} и управленческого решения на k-м шаге X_k (т. е. не зависит напрямую от предшествующих состояний и управленческих решений). Данное требование называется «отсутствием последствия» и может быть выражено следующими уравнениями состояний:

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k), k = 1, 2, ..., n. \quad (1)$$

Таким образом, получаем последовательность состояний S_0, S_1, …, S_{k-1}, S_k, …, S_{n-1}, S_n. Тогда n-шаговый управленческий процесс схематично можно изобразить следующим образом:



Пусть показатель эффективности k-го шага выражается некоторой функцией:

$$Z_k = f_k(S_{k-1}, X_k), k = 1, 2, ..., n, \quad (2)$$

а эффективность всего рассматриваемого многошагового процесса следующей аддитивной функцией:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k), \quad (3)$$

или

$$Z = F(S_0, X). \quad (4)$$

Тогда задача пошаговой оптимизации (задача динамического программирования) формулируется следующим образом*: определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из состояния* S_0 *в состояние* S_n*, при котором целевая функция Z принимает наибольшее (наименьшее) значение.*

Метод ДП позволяет провести оптимизацию поэтапно, анализируя последовательно каждый шаг процесса в поисках наилучших вариантов его продолжения.

Особенности модели ДП:

1. Возможность разбиения процесса принятия решений на ряд однотипных шагов или этапов, каждый из которых планируется отдельно, но с учетом результатов, полученных на других шагах.

2. Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага.

3. Выбор управления на k-м шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).

4. Состояние S_k после k-го шага управления зависит только от предшествующего состояния S_{k-1} и управления X_k («отсутствие последствия»).

5. На каждом шаге управление X_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние S_k – от конечного числа параметров.

6. Вычислительная схема ДП безразлична к способам задания функций и ограничений.

7. Вычислительная схема ДП основывается на двух важных принципах – оптимальности и вложения.

Принцип оптимальности формулируется следующим образом

Каково бы ни было состояние системы в результате какого-то числа шагов, мы должны выбирать управление на ближайшем шаге так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к максимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

Основное требование – процесс управления должен быть без обратной связи, т. е. управление на данном шаге не должно оказывать влияния на предшествующие шаги.

Принцип вложения утверждает, что природа задачи, допускающей использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов, т. е. форма такой задачи инвариантна относительно n.

8. Вычислительная схема ДП использует рекуррентные соотношения.

Существует две схемы решения методом ДП (прямая и обратная прогонка). Оба они приводят к одному ответу.

Схема «обратной прогонки»: осуществляется выбор последнего во времени решения, затем при движении в направлении, обратном течению времени, выбираются все остальные решения вплоть до исходного.

На последнем шаге с учетом состояния системы S_{n-1} управленческое решение X_n можно планировать локально-оптимально, т.е. исходя только из соображений этого шага.

Рассмотрим последний, n-й шаг:

S_{n-1} – состояние системы к началу n-го шага; S_n – конечное состояние системы; X_n – управление на n-м шаге; $f_n(S_{n-1}, X_n)$ – целевая функция (выигрыш) n-го шага.

Согласно принципу оптимальности, X_n нужно выбирать таким образом, чтобы для любых состояний системы S_{n-1} получить оптимум целевой функции на этом шаге.

Обозначим через $Z_n^*(S_{n-1})$ оптимум (для определенности примем максимум) целевой функции – показатель эффективности n-го шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии S_{n-1}, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$Z_n^*(S_{n-1})$ называют условным максимумом целевой функции на n-м шаге и определяют по следующей формуле:

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n). \tag{5}$$

Максимизация ведется по всем допустимым управлениям X_n.

Решение X_n, при котором достигается $Z_n^*(S_{n-1})$, также зависит от S_{n-1} и называется условным оптимальным решением на n-м шаге. Обозначим его через $X_n^*(S_{n-1})$.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации по уравнению (5), определим для всех возможных состояний S_{n-1} две функции $Z_n^*(S_{n-1})$ и $X_n^*(S_{n-1})$.

Рассмотрим двухшаговую задачу: присоединим к n-му шагу (n–1)-й.

Для любых состояний S_{n-2}, произвольных управленческих решений X_{n-1} и при оптимальном управлении на n-м шаге значение целевой функции на двух последних шагах вычисляется по формуле

$$Z_{n-1}(S_{n-2}) = f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}) \tag{6.1}$$

Согласно принципу оптимальности Беллмана, для любых S_{n-2} решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем (n-м) шаге приводило бы к оптимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, необходимо отыскать оптимум выражения (6) по всем допустимым управленческим решениям X_{n-1}:

$$Z^*_{n-1}(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}}\{f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z^*_n(S_{n-1})\} \tag{6.2}$$

$Z^*_{n-1}(S_{n-2})$ называют условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах. Необходимо отметить, что выражение в фигурных скобках в формуле (6.2) зависит только от S_{n-2} и X_{n-1}, так как S_{n-1} можно найти из уравнения состояний (1) при $k = n-1$:

$$S_{n-1} = \varphi_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}). \tag{7}$$

Соответствующее управление X_{n-1} на (n–1)-м шаге обозначается через $X^*_{n-1}(S_{n-2})$ и называется условным оптимальным управлением на (n–1)-м шаге.

Аналогично определяются условные оптимумы целевой функции при оптимальном управлении на (n–k+1) шагах начиная с k-го до конца при условии, что к началу k-го шага система находилась в состоянии S_{k-1}:

$$Z^*_k(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(s_k)\} \quad (\forall k = \overline{n-1,1}). \tag{8}$$

Управление X_k на k-м шаге, при котором достигается максимум по уравнению (8), обозначается $X^*_k(S_{k-1})$ и называется условным оптимальным управлением на k-м шаге.

Уравнения (5) и (8) называют рекуррентными уравнениями Беллмана (обратная схема). Процесс решения данных уравнений называют условной оптимизацией.

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

$Z^*_n(S_{n-1})$, $Z^*_{n-1}(S_{n-2})$, …, $Z^*_2(S_1)$, $Z^*_1(S_0)$ – условные максимумы целевой функции на последнем, двух последних, …, на n шагах;

$X_n^*(S_{n-1})$, $X_{n-1}^*(S_{n-2})$, …, $X_2^*(S_1)$, $X_1^*(S_0)$ – условные оптимальные управления на n-м, (n–1)-м, …, на 1-м шагах.

Используя данные последовательности, можно найти решение задачи динамического программирования при данных n и S_0:

$$S_0 \Rightarrow Z_{\max} = Z_1^*(S_0) \Rightarrow X_1^*(S_0) \Rightarrow S_1 = \varphi_1(S_0, X_1^*) \Rightarrow Z_2^*(S_1) \Rightarrow X_2^*(S_1) \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{n-1} = \varphi_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}^*) \Rightarrow Z_n^*(S_{n-1}) \Rightarrow X_n^*(S_{n-1}).$$

В результате получаем оптимальное решение задачи динамического программирования: $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс «проходится» дважды:

- первый раз – от конца к началу, в результате чего находятся условные оптимальные управления на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;
- второй раз – от начала к концу, в результате чего находятся оптимальные управления на всех шагах процесса.

Аналогично рассуждая, можно выстроить и *прямую схему условной оптимизации:* $Z_1^*(S_0) = \max\limits_{\{X_1\}} f_1(S_0,\ X_1)$, (9)

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\{ f_k(S_{k-1},\ X_k) + Z_{k-1}^*(S_{k-2})\} \quad (\forall\, k = \overline{2, n}). \tag{10}$$

Оптимальное решение задачи в данном случае находится по следующей схеме:

$$Z_{\max} = Z_n^*(S_{n-1}) \Rightarrow X_n^*(S_{n-1}) \Rightarrow Z_{n-1}^*(S_{n-2}) \Rightarrow X_{n-1}^*(S_{n-2}) \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z_2(S_1) \Rightarrow X_2^*(S_1) \Rightarrow Z_1^*(S_0) \Rightarrow X_1^*(S_0).$$

Таким образом, построение модели динамического программирования и решение задачи на ее основе можно представить в виде следующих этапов:

1. Выбирают способ деления процесса управления на шаги.

2. Определяют параметры состояния S_k и переменные управления X_k на

каждом шаге, записывают уравнения состояний.

3. Вводят целевые функции k-го шага и суммарную целевую функцию, а также условные оптимумы $Z_k^*(S_{k-1})$ и условное оптимальное управление на k-м шаге $X_k^*(S_{k-1})$ ($k \in \{1, 2, ..., n\}$).

4. Записывают в соответствии с обратной или прямой схемой рекуррентные уравнения Беллмана и после выполнения условной оптимизации получают две последовательности: $\{Z_k^*(S_{k-1})\}$ и $\{X_k^*(S_{k-1})\}$.

5. Определяют оптимальное значение целевой функции Z^* и оптимальное решение X^*.

Метод ДП позволяет с успехом решать экономические задачи. Рассмотрим одну из простейших таких задач.

Задача распределения средств между предприятиями

Имеется определенное количество ресурсов S_0, которое необходимо распределить между n хозяйствующими субъектами на текущую деятельность в течение рассматриваемого периода (месяц, квартал, полугодие, год и т. д.) с целью получения совокупной максимальной прибыли. Размеры вложений ресурсов x_i $(i=\overline{1,n}; \sum_{i=1}^{n} x_i = S_o)$ в деятельность каждого хозяйствующего субъекта кратны некоторой величине h. Известно, что каждый хозяйствующий субъект в зависимости от объема используемых средств x_i за рассматриваемый период приносит прибыль в размере $f_i(x_i)$ (не зависит от вложения ресурсов в другие хозяйствующие субъекты).

Необходимо определить, какой объем ресурсов нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей. Представим процесс распределения ресурсов между хозяйствующими субъектами как n-шаговый процесс управления (номер шага совпадает с условным номером хозяйствующего субъекта). Пусть S_k $(k=\overline{1,n})$ – параметр состояния, т. е. количество свободных средств после *k*-го шага для распределения между оставшимися (*n*–*k*) хозяйствующими субъектами. Уравнение состояний примет вид

$$S_k = S_{k-1} - x_k,\ (k=\overline{1,n}). \qquad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию $Z_k^*(S_{k-1}),(k=\overline{1,n})$ – условно оптимальная совокупная прибыль, полученная от *k*-го, (*k*+1)-го, …, *n*-го хозяйствующих субъектов, если между ними оптимальным образом распределялись ресурсы в объеме $\underset{\leftarrow}{S}_{k-1}$ $(0 \le S_{k-1} \le S_0)$. Множество возможных управленческих решений относительно размера распределяемых ресурсов на *k*-м шаге можно представить следующим образом: $0 \le x_k \le S_{k-1}$.

Тогда рекуррентные уравнения Беллмана (обратная схема) примут вид

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{0 \le x_n \le S_{n-1}} f_n(x_n),$$

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}} \{f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\} \quad (k=\overline{n-1,1}), \qquad (12)$$

$$Z_{\max} = Z_1^*(S_0) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{f_1(x_1) + Z_2^*(S_1)\}$$

Далее по полученным результатам условной оптимизации можно определить оптимальное распределение ресурсов $X^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \dots,\ x_n^*)$ по следующей схеме:

$$S_0 \Rightarrow Z_{\max} = Z_1^*(S_0) \Rightarrow x_1^* \Rightarrow S_1 = S_0 - x_1^* \Rightarrow Z_2^*(S_1) \Rightarrow x_2^* \ldots \Rightarrow S_{n-1} = S_{n-2} - x_{n-1}^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z_n^*(S_{n-1}) \Rightarrow x_n^*.$$

Пример 21. Имеется определенное количество ресурсов S_0=100, которое необходимо распределить между *n*=4 хозяйствующими субъектами на текущую деятельность в течение рассматриваемого периода (месяц) с целью получения совокупной максимальной прибыли. Размеры вложений ресурсов x_i $(i=\overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} x_i = S_o)$ в деятельность каждого хозяйствующего субъекта кратны величине h=20 и заданы вектором Q. Известно, что каждый хозяйствующий субъект в зависимости от объема используемых средств x_i за рассматриваемый период приносит прибыль в размере $f_i(x_i)$ $(i=\overline{1,n})$ (не зависит от вложения ресурсов в другие хозяйствующие субъекты):

$$Q=\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad f(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 17 & 22 & 20 \\ 26 & 20 & 21 & 33 \\ 35 & 32 & 37 & 46 \\ 52 & 61 & 67 & 30 \\ 61 & 72 & 58 & 42 \end{pmatrix}$$

Необходимо определить, какой объем ресурсов нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Решение. Особенности модели: ограничения линейные, но переменные целочисленные, а функции $f_i(x_i)$ заданы таблично, поэтому нельзя применить методы целочисленного программирования.

Составим рекуррентные уравнения Беллмана (обратную схему):

$$Z_n^*(S_{n-1})=\max_{0\le x_n\le S_{n-1}} f_n(x_n),$$

$$Z_k^*(S_{k-1})=\max_{0\le x_k\le S_{k-1}} \{f_k(x_k)+Z_{k+1}^*(S_k)\} \quad (k=\overline{n-1,1}), \tag{13}$$

$$Z_{\max}=Z_1^*(S_0)=\max_{0\le x_1\le S_0} \{f_1(x_1)+Z_2^*(S_1)\}.$$

Определим условные максимумы в соответствии с уравнениями (13), результаты расчетов представлены в табл. 6.

По результатам условной оптимизации определим оптимальное распределение ресурсов:

$S_0 \Rightarrow Z_{\max} = Z_1^*(S_0) \Rightarrow x_1^* \Rightarrow S_1 = S_0 - x_1^* \Rightarrow Z_2^*(S_1) \Rightarrow x_2^* \ldots \Rightarrow S_{n-1} = S_{n-2} - x_{n-1}^* \Rightarrow$
$\Rightarrow Z_n^*(S_{n-1}) \Rightarrow x_n^*.$

$S_0 = 100 \Rightarrow Z_{\max} = Z_1^*(S_0) = Z_1^*(100) = 87 \Rightarrow x_1^* = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_1 = S_0 - x_1^* = 100 - 0 = 100 \Rightarrow Z_2^*(S_1) = Z_2^*(100) = 87 \Rightarrow x_2^* = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_2 = S_1 - x_2^* = 100 - 0 = 100 \Rightarrow Z_3^*(S_2) = Z_3^*(100) = 87 \Rightarrow x_3^* = 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_3 = S_2 - x_3^* = 100 - 80 = 20 \Rightarrow Z_4^*(S_3) = Z_4^*(20) = 22 \Rightarrow x_4^* = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_4 = S_3 - x_4^* = 20 - 20 = 0$

Таким образом, оптимальное распределение ресурсов:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0, 0, 80, 20),$$

которое обеспечит наибольшую прибыль в размере 87 усл. ден. ед.

Ответ: оптимальное распределение ресурсов: $X^* = (0, 0, 80, 20)$, которое обеспечивает наибольшую прибыль в 87 усл. ден. ед.

Таблица 6. Расчет условных оптимумов

s_{k-1}	x_k	s_k	k=3			k=2			k=1		
			$f_3(x_3)+Z_4^*(s_3)$	$Z_3^*(s_2)$	$x_3^*(s_2)$	$f_2(x_2)+Z_3^*(s_2)$	$Z_2^*(s_1)$	$x_2^*(s_1)$	$f_1(x_1)+Z_2^*(s_1)$	$Z_1^*(s_0)$	$x_1^*(s_0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0+20=20	22	20	0+22=22	22	0	0+22=22	22	0
	20	0	22+0=22			17+0=17			14+0=14		
40	0	40	0+33=33	42	20	0+42=42	42	0	0+42=42	42	0
	20	20	22+20=42			17+22=39			14+22=36		
	40	0	21+0=21			20+0=20			26+0=26		
60	0	60	0+46=46	55	20	0+55=55	59	20	0+59=59	59	0
	20	40	22+33=55			17+42=59			14+42=56		
	40	20	21+20=41			20+22=42			26+22=48		
	60	0	37+0=37			32+0=32			35+0=35		
80	0	80	0+30=30	68	20	0+68=68	72	20	0+72=72	73	20
	20	60	22+46=68			17+55=72			14+59=73		
	40	40	21+33=54			20+42=64			26+42=68		
	60	20	37+20=57			32+22=54			35+22=57		
	80	0	67+0=67			61+0=61			52+0=52		
100	0	100	0+42=42	87	80	0+87=87	87	0	0+87=87	87	0
	20	80	22+30=52			17+68=85			14+72=86		
	40	60	21+46=67			20+55=75			26+59=85		
	60	40	37+33=70			32+42=74			35+42=77		
	80	20	67+20=87			61+22=83			52+22=74		
	100	0	58+0=58			72+0=72			61+0=61		

Задача инвестирования

Предположим, что в начале каждого из следующих n лет необходимо сделать инвестиции P_1, $P_2, \ldots$, P_n, соответственно. Вы имеете возможность вложить капитал в два банка: первый банк выплачивает годовой сложный процент r_1, а второй r_2. Для поощрения депозитов оба банка выплачивают новым инвесторам премии в виде процента от вложенной суммы.

Премиальные меняются от года к году, и для i-го года равны q_{i1} и q_{i2} в первом и втором банках соответственно. Они выплачиваются к концу года, на протяжении которого сделан вклад, и могут быть инвестированы в один из двух банков на следующий год. Это значит, что лишь указанные проценты и новые деньги могут быть инвестированы в один из двух банков. Размещенный в банке вклад должен находится там до конца рассматриваемого периода. Необходимо разработать стратегию инвестиции на следующие n лет.

Элементы модели динамического программирования следующие:

1. Этап i представляется порядковым номером года i, i=1,2,...n.

2. Вариантами решения на i-м этапе (для i-ого года) являются суммы l_i и $\bar{l}_i$ инвестиций в первый и второй банк соответственно.

3. Состоянием x_i на i-м этапе является сумма денег на начало i-го года, которые могут быть инвестированы.

Заметим, что по определению $\bar{l}_i = x_i - l_i$. Следовательно,

$$x_i = P_i + q_{i-1,1}l_{i-1} + q_{i-1,2}(x_{i-1} - l_{i-1}) = P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2})l_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1},$$

где i=2,3,…n, x_1=P_1. Сумма денег x_i, которые могут быть инвестированы, включает лишь новые деньги и премиальные проценты за инвестиции, сделанные на протяжении (i–1)-го года.

Пусть $f_i(x_i)$ – оптимальная сумма инвестиций для интервала от i-го до n-го года при условии, что в начале i-го года имеется денежная сумма x_i. Далее обозначим через S_i накопленную сумму к концу i-го года при условии, что l_i и ($x_i - l_i$) – объемы инвестиций на протяжении i-го года в первый и второй банк соответственно. Обозначая $\alpha_i = (1 + r_i)$, i=1,2, мы можем сформулировать задачу в следующем виде.

Максимизировать $Z = S_1 + S_2 + \ldots S_n$, где

$$S_i = l_i \alpha_1^{n-1-i} + (x_i - l_i)\alpha_2^{n-1-i} = (\alpha_1^{n-1-i} - \alpha_2^{n-1-i})l_i + \alpha_2^{n-1-i} x_i,\ i = 1,2,\ldots n-1,$$

$$S_n = (\alpha_1 + q_{n1} - \alpha_2 + q_{n2})l_n + (\alpha_2 + q_{n2})x_n$$

Так как премиальные за n-й год являются частью накопленной денежной суммы от инвестиций, в выражения для S_n добавлены q_{n1} и q_{n2}.

Итак, в данном случае рекуррентное уравнение для обратной прогонки в алгоритме динамического программирования имеет вид

$$f_i(x_i) = \max_{0 \le S_i \le x_i} \{S_i + f_{i-1}(x_{i-1})\},\ i = 1,2,\ldots n-1,$$

где x_{i+1} выражается через x_i в соответствии с приведенной выше формулой, а $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Задача о загрузке

Задача о загрузке – это задача о рациональной загрузке судна (самолета, автомашины и т.п.), которое имеет ограничения по объему или грузоподъемности. Каждый помещенный на судно груз приносит определенную прибыль. Задача состоит в определении загрузки судна такими грузами, которые приносят наибольшую суммарную прибыль.

Рекуррентное уравнение процедуры обратной прогонки выводится для общей задачи загрузки судна грузоподъемностью W предметов (грузов) n наименований. Пусть m_i – количество предметов i-го наименования, подлежащих загрузке, r_i – прибыль, которую приносит один загруженный предмет i- го наименования, w_i – вес одного предмета i-го наименования. Общая задача имеет вид следующей целочисленной задачи линейного программирования.

Максимизировать $Z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \ldots r_n m_n$

при условии, что $w_1 m_1 + w_2 m_2 + \ldots w_n m_n \le W$,

$m_1, m_2, \ldots, m_n \ge 0$ и целые.

Три элемента модели динамического программирования определяются следующим образом:

1. Этап i ставится в соответствие предмету i-го наименования, i=1,2,…n.

2. Варианты решения на этапе i описываются количеством m_i предметов i-го наименования, подлежащих загрузке. Соответствующая прибыль равна $r_i m_i$. Значение m_i заключено в пределах от 0 до $[W/w_i]$, где $[W/w_i]$ – целая часть числа W/w_i.

3. Состояние x_i на этапе i выражает суммарный вес предметов, решения о погрузке которых приняты на этапах i, i+1,...n. Это определение отражает тот факт, что ограничение по весу является единственным, которое связывает n этапов вместе.

Пусть $f_i(x_i)$ – максимальная суммарная прибыль от этапов i, i+1,...,n при заданном состоянии x_i. Проще всего рекуррентное уравнение определяется с помощью следующей двухшаговой процедуры.

Шаг 1. Выразим $f_i(x_i)$ как функцию $f_{i+1}(x_{i+1})$ в виде

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0,1,\ldots,[W/w_i] \\ x_i = 0,1,\ldots,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i = 1,2,\ldots n, \text{ где } f_{n+1}(x_{n+1}) = 0.$$

Шаг 2. Выразим x_{i+1} как функцию x_i для гарантии того, что левая часть последнего уравнения является функцией лишь x_i.

По определению $x_i - x_{i+1}$ – это вес, загруженный на этапе i, т. е. $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ или $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$. Следовательно, рекуррентное уравнение приобретает следующий вид:

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0,1,\ldots,[W/w_i] \\ x_i = 0,1,\ldots,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\},\ i = 1,2,\ldots n.$$

Задача замены оборудования

Чем дольше механизм эксплуатируется, тем выше затраты на его обслуживание и ниже его производительность. Когда срок эксплуатации механизма достигает определенного уровня, может оказаться более выгодной его замена. Задача замены оборудования, таким образом, сводится к определению оптимального срока эксплуатации механизма.

Предположим, что мы занимаемся заменой механизмов на протяжении n лет. В начале каждого года принимается решение либо об эксплуатации механизма еще один год, либо о замене его новым.

Обозначим через $r(t)$ и $c(t)$ прибыль от эксплуатации t-летнего механизма на протяжении года и затраты на его обслуживание за этот же период. Далее пусть $s(t)$ – стоимость продажи механизма, который эксплуатировался t лет. Стоимость приобретения нового механизма остается неизменной на протяжении всех лет и равна I.

Элементы модели динамического программирования таковы:

1. Этап i представляется порядковым номером года i, i=1,2,...n.

2. Вариантами решения на i-м этапе (т. е. для i-го года) являются альтернативы: продолжить эксплуатацию или заменить механизм в начале i-го года.

3. Состоянием на i-м этапе является срок эксплуатации t (возраст) механизма к началу i-го года.

Пусть $f_i(t)$ – максимальная прибыль, получаемая за годы от i до n при условии, что в начале i-го года имеется механизм t-летнего возраста.

Рекуррентное уравнение имеет следующий вид:

$$f_i(t) = \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1) & (1) \\ r(0) - s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1) & (2) \end{cases}$$

(1) –если эксплуатировать механизм,

(2) – если заменить механизм.

Преимущества и недостатки метода динамического программирования. К числу положительных качеств можно отнести:

1. МДП дает возможность решать задачи, которые раньше не исследовались из-за отсутствия соответствующего математического аппарата.
2. МДП в ряде случаев сокращает объем при поиске оптимальных решений.

Недостатки:

1. Отсутствие универсального алгоритма, который был бы пригоден для решения всех задач (мы имеем только схему).
2. Трудности при решении задач большой размерности.

5. Примеры задач для практических занятий

5.1. Элементы линейного программирования и методы решения

Задача 1. (Построение математической модели задачи планирования производства или определение оптимального ассортимента продукции)

Предприятие изготавливает два вида продукции – П1 и П2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида П1 и вида П2 дан в таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	П1	П2	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию П1 никогда не превышает спроса на продукцию П2 более, чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию П2 никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны 3 ден. ед. – для П1 и 4 ден. ед. – для П2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

1. Цель – максимизация дохода.

2. Параметры – расход сырья, запас сырья, оптовые цены продукции, цифры ограничения спроса.

3. Управляющие переменные – план выпуска продукции x_1 и x_2.

4. Целевая функция – доход от реализации продукции: f=3x_1+4x_2→max.

5. Ограничения: производство ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию.

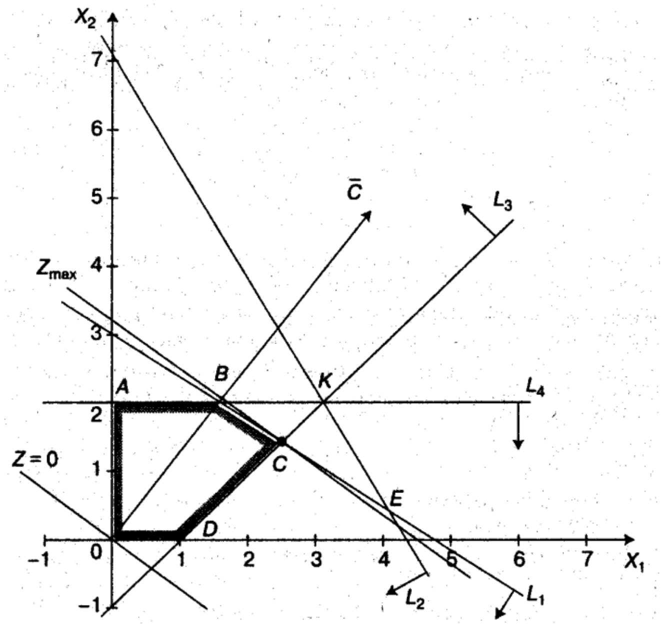
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

В качестве критериев оптимальности в данных задачах могут быть также использованы: прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты времени.

Задача 2. (Решение задачи 1 об ассортименте продукции геометрическим способом)

1. Строим плоскость $x_1 0 x_2$. В этой плоскости строим граничные прямые:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 = 9 \quad (L_1) \\ &3x_1 + 2x_2 = 13 \quad (L_2) \\ &x_1 - x_2 = 1 \quad (L_3) \\ &x_2 = 2 \quad (L_4) \\ &x_1 = 0 \quad (L_5) \\ &x_2 = 0 \quad (L_6) \end{aligned}$$



2. Взяв какую-либо точку (например, начало координат), установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. (Полуплоскости, определяемые неравенствами, на рисунке показаны стрелками).
3. Областью решений является многоугольник OABCD.
4. Строим прямую $Z=3x_1+4x_2=0$ – линия уровня целевой функции и вектор-градиент с координатами (3,4). Перемещаем эту прямую параллельно вдоль градиента.
5. Из графика следует, что точка максимума целевой функции в многоугольнике решений – это точка C.
6. Для определения координат этой точки решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=9 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}.$$

Оптимальный план задачи (2,4; 1,4).

Решение задачи f=3·2,4+4·1,4=12,8.

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$ должен быть равен 2,4 ед., $П_2$ – 1,4 ед. Доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 ден.ед.

Задача 3. (Пример решения задачи симплекс-методом)

$f=3x_1+4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 9 \\ 3x_1+2x_2\le 13 \\ x_1-x_2\le 1 \\ x_2\le 2 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

Приводим к канонической форме
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=9 \\ 3x_1+2x_2+x_4=13 \\ x_1-x_2+x_5=1 \\ x_2+x_6=2 \end{cases}$$

В стандартной форме система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_3 = 9 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 13 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_6 = 2 - x_2 \end{cases}$$

Свободные переменные – x_1 и x_2, базисные x_3, x_4, x_5, x_6.

Составляем симплекс-таблицу

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Частные
x_3	2	3	1	0	0	0	9	=9/3=3
x_4	3	2	0	1	0	0	13	=13/2=6,5
x_5	1	-1	0	0	1	0	1	
x_6	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	2	=2/1=2
-f	-3	-4	0	0	0	0	0	

Из базиса выводится x_2, вводится x_6 (строка x_6 переписывается, т.к. разрешающий элемент =1, первая строка получается так: строка x_6 умножается на –3 и складывается с первой; вторая строка – строка x_6 умножается на –2 и складывается со второй и т.д.).

	x_1	x_6	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Частные
x_3	$\boxed{2}$	0	1	0	0	-3	3	=3/2=1,5
x_4	3	0	0	1	0	-2	9	=9/3=3
x_5	1	0	0	0	1	1	3	=3/1=3
x_2	0	1	0	0	0	1	2	
-f	-3	0	0	0	0	4	8	

Из базиса выводится x_3, вводится x_1 (первую строку делим на 2 и переписываем).

	x_1	x_6	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Частные
x_1	1	0	0,5	0	0	-1,5	1,5	=1,5/1,5=1
x_4	0	0	-1,5	1	0	2,5	4,5	=4,5/2,5=1,8
x_5	0	0	-0,5	0	1	$\boxed{2,5}$	1,5	=1,5/2,5=0,6
x_2	0	1	0	0	0	1	2	=2/1=1
-f	0	0	1,5	0	0	-0,5	12,5	

Из базиса выводится x_5, вводится x_6 (строка с x_5 делится на 2,5 и переписывается).

	x_1	x_6	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Частные
x_1	1	0	0,8	0	0	0	2,4	
x_4	0	0	-1	1	-1	0	3	
x_6	0	0	-0,2	0	0,4	1	0,6	
x_2	0	1	0,2	0	0,2	0	1,4	
$-f$	0	0	1,4	0	0,2	0	12,8	

Поскольку все коэффициенты в последней строке неотрицательны, то решение оптимально. Обратить внимание, что с каждым построением новой симплекс-таблицы значение целевой функции увеличивается ($0 \rightarrow 8 \rightarrow 12{,}5 \rightarrow 12{,}8$). Решение x_1=2,4; x_2=1,4, что соответствует графическому способу решения.

Задача 4.

Предприятие имеет три типа металлообрабатывающих станков *A*, *B*, и *C*, на которых изготавливаются изделия вида 1 и 2. Прибыль на единицу изделия вида 1 составляет 2 усл. ед., на изделие вида 2 – 4 усл. ед. Изделия первого вида изготавливаются только на станках *A* и *C*, а изделия второго вида изготавливаются на всех станках (*A*, *B*, *C*). Производственная мощность станков такова (тысяч в год):

Тип станка	Производительная мощность (тыс.штук в год)
A	6 изделий вида 1 или 6 изделий вида 2
B	4 изделия вида 2
C	5 изделий вида 1 или 10 изделий вида 2.

Определить такие объемы производства, чтобы прибыль была максимальной.

Решение

1. Составим математическую модель.

Пусть x_1 – количество изготовленных за год изделий вида 1.

Пусть x_2 – количество изготовленных за год изделий вида 2.

По условию задачи целевая функция выглядит так:

$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ (общая прибыль в год).

Составим ограничения функции. В нашем случает количество изделий меньше мощности станков.

Для станка *A*: $x_1 \le 6; x_2 \le 6;$

Для станка *B*: $x_2 \le 4;$

Для станка *C*: $x_1 \le 5; x_2 \le 10;$

Включая условие неотрицательности $x_1, x_2 \ge 0$, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \le 6; x_2 \le 6; \\ x_2 \le 4; \\ x_1 \le 5; x_2 \le 10; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 \le 6; x_2 \le 6; \\ x_2 \le 4; \\ x_1 \le 5; x_2 \le 10; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$.

2. Графическое решение.

Строим многоугольник решений (см. рис.16). Находим координаты вершин области (x_1;x_2). Для точки *A* координаты вершины (5;0); для точки *B* координаты вершины (5;4); для точки *C* координаты вершины (0;4); координаты точки *O*(0;0) совпадают с началом координат.

Целевая функция $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определенное значение.

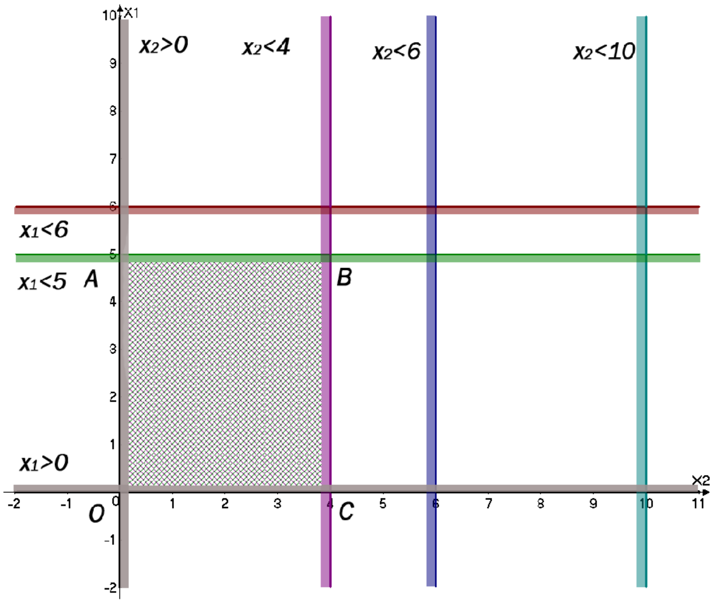


Рис. 16. АВСО – многоугольник решений

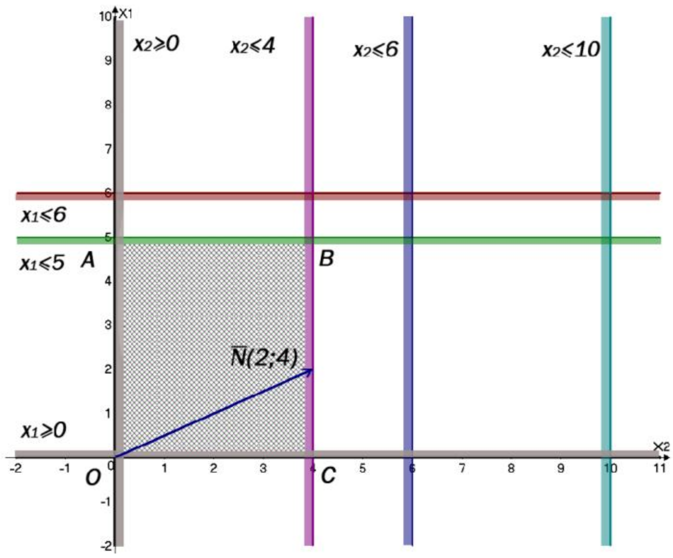


Рис.17. Вектор $\overline{N}(2;4)$

Вектор $\overline{N}(2;4)$ (см. рис. 17) с координатами $c_1=1$, $c_2=4$ и выходящий из начала координат, перпендикулярный к этим прямым, указывает направление наискорейшего возрастания функции, а противоположный вектор – направление убывания.

Для определения $Z_{\max}$ построим линию уровня $Z = 2x_1 + 4x_2 = 0$, перпендикулярную вектору $\overline{N}(2;4)$, и будем передвигать ее в направлении вектора

$\overline{N}(2;4)$ до тех пор, пока она не коснется последней крайней (угловой) точки многоугольника решений. Координаты этой точки и определяет $Z_{\max}$.

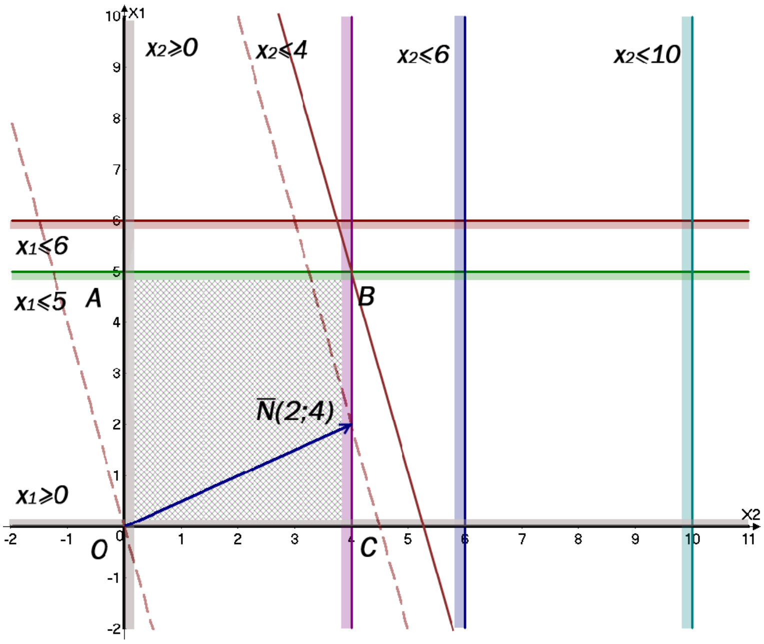


Рис. 18. Графическое нахождение $f_{\max}$

Из рис. 18 видно, что $Z_{\max}$ находится в точке B(5;4).

$Z_{\max} = 2x_1 + 4x_2 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 26$.

Ответ: Максимальная прибыль предприятия 26 тыс. условных единиц в год, для получения такой прибыли предприятие должно выпустить 5 тыс. деталей вида 1 и 4 тыс. деталей вида 2.

Задача 5. (Пример решения прямой и двойственной задачи)

Пусть в производстве 4 видов продукции участвуют 4 вида ресурсов. Известны нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции (матрица *A*), цены ее реализации (матрица *C*) и запасы ресурсов (матрица *B*). Определить план производства продукции, максимизирующий выручку от реализации произведенной продукции.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 550 \\ 400 \\ 650 \\ 520 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Тогда математическая модель задачи примет вид: найти x_1, x_2, x_3, x_4 (объемы производства каждого вида продукции), удовлетворяющие ограничениям:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 550 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 \le 400 \\ 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 650 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 520 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

при которых функция $Z = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4$ достигает максимума.

При решении задачи симплексным методом она приводится к каноническому виду добавлением в левые части ограничений неотрицательных балансовых переменных:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + z_1 = 550 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 + z_2 = 400 \\ 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + z_3 = 650 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + z_4 = 520 \\ x_j \ge 0, z_i \ge 0, \ j = \overline{1,4}, i = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 \to \max.$$

Ответ: для получения максимального дохода от реализации производственной продукции ее необходимо выпустить в объемах: x_1^*=67,083; x_2^*=0; x_3^*=15; x_4^*=103,333. При этом $Z_{\max}$=1303,333.

Двойственная задача. Найти значения переменных y_1, y_2, y_3, y_4, удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 4y_4 \ge 4 \\ 2y_1 + 5y_3 + y_4 \ge 5 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 \ge 7 \\ 2y_1 + y_2 + 6y_3 + 2y_4 \ge 9 \\ y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

для которых целевая функция $W = 550y_1 + 400y_2 + 650y_3 + 520y_4$ достигает минимума.

Решения этой задачи выпишем из последнего столбца таблицы y_1^*=0,833, y_2^*=0, y_3^*=1,167, y_4^*=0,167.

Проиллюстрируем свойства двойственных оценок на основе этой задачи.

1. Каждая из оценок указывает, на сколько изменится максимальное значение целевой функции (максимальная выручка), если изменить на единицу запасы соответствующих ресурсов. Наибольшее изменение выручки произойдет, если изменить объем 3-го ресурса (y_3^*=1,167), а изменение второго ресурса (в границах устойчивости) не приведет к изменению целевой функции (y_2^*=0).

2. Оценки y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^* положительны. Это означает, что при реализации оптимального плана соответствующие ресурсы расходуются полностью. Проверим это. Подставим x_j^* в первые сопряженные условия исходной задачи. $4 \cdot 67{,}083 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 103{,}333 = 549{,}999 \approx 550$.

Аналогично для третьего и четвертого ресурсов (проверить самостоятельно). Следовательно, 1, 3, 4-й ресурсы дефицитны. y_2^*=0. Это означает, что в оптимальном решении второй ресурс расходуется не полностью. Проверим это. Подставим x_j^* во второе ограничение исходной задачи:

$$3 \cdot 67{,}083 + 3 \cdot 15 + 103{,}333 = 349{,}582 < 400.$$

Остаток второго ресурса составляет 400–349б582$\approx$50,4. Это и есть значение балансовой переменной в оптимальном решении исходной задачи.

3. Рентабельными являются 1-й, 3-й и 4-й виды продукции (x_1^*, x_2^*, x_3^* в оптимальном плане положительны), а нерентабельным 2-й – x_2^*. Проверим это, подставив y_i^* в сопряженные условия двойственной задачи. Для первого вида продукции: $4 \cdot 0{,}833 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}167 = 4$. Получили строгое равенство.

Аналогично для 3-го и 4-го вида продукции (проверить самостоятельно). Покажем нерентабельность второго вида продукции, подставив y_i^* во второе ограничение двойственной задачи. Получим: $2 \cdot 0{,}833 + 5 \cdot 1{,}167 + 0{,}167 = 7{,}668 > 5$.

Итак, оценка ресурсов, необходимых для производства единицы 2-го вида продукции, больше цены единицы этого вида продукции на 7,668–5=2,668.

Задача 6. (Транспортная задача)

Найти оптимальное распределение поставок и минимальные затраты на перевозку, выполнив первоначальное распределение поставок методом наименьших затрат.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		50	50	40	60
1	30	5	4	6	3
2	70	4	5	5	8
3	70	7	3	4	7

Решение. Посчитаем суммарную мощность поставщиков (M) и суммарный спрос потребителей (N): $M = 30 + 70 + 70 = 170$

$$N = 50 + 50 + 40 + 60 = 200.$$

Данная транспортная задача имеет открытый вид, мощность поставщиков меньше спроса потребителей. Сведем задачу к закрытому виду, для этого введем в рассмотрение «фиктивного поставщика» (добавим четвертую строку в таблице) с мощностью $M_4 = 200 - 170 = 30$.

Коэффициенты затраты поставщика будем считать равными нулю. Найдем первоначальное распределение поставок *методом наименьших затрат*. Найдем клетку с наименьшими затратами – их 4, последняя строка. Выберем из них ту клетку, поставка в которую максимальна. В нашем случае во все клетки последней строки можно доставить 30 единиц. Поэтому можно выбрать из них любую клетку. Например, (4,1). Доставим туда 30 единиц, считаем клетку заполненной, помечаем ее сплошной чертой. Теперь мощность 4-го поставщика полностью удовлетворена. В результате чего четвертая строка таблицы выпадает из рассмотрения (помечаем все клетки этой строки пунктирными линиями). Ищем следующую свободную клетку с наименьшими затратами. Их две – (1,4) и (3,2). В клетку (3,2) доставка больше – 50. Считаем эту клетку заполненной с доставкой 50 единиц, после чего из рассмотрения выпадает второй столбец, помечаем клетки пунктирной линией. Следующая свободная клетка с минимальными затратами – (1,4). Доставляем в нее 30 единиц, и первая строка выпадает из рассмотрения (помечаем клетки пунктиром). Действуя аналогично далее, заполняем клетки в следующем порядке: (2,1) – 20 единиц, выпадает первый столбец; (3,3) – 20 единиц, выпадает третья строка; (2,3) – 20 единиц и последняя оставшаяся клетка (2,4) – 30 единиц. Первоначальное распределение поставок получено.

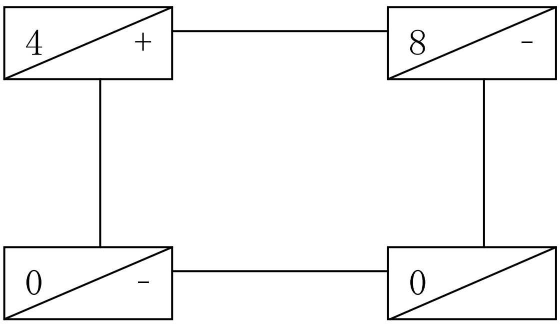
	Постав щики	Мощность поставщи-ков	Потребители и их спрос			
			1	2	3	4
			50	50	40	60
1	1	30	5	4	6	3 30
-4	2	70	4 20	5	5 20	8 30
-3	3	70	7	3 50	4 20	7
0	4	30	0 30	0	0	0
			0	**0**	**-1**	**-4**

Заметим, что получилось 7 заполненных клеток, это равно $n + m - 1 = 4+4-$ $-1=7$, то есть полученное распределение является базисным. Проверим его на оптимальность, для этого составим матрицу оценок клеток. Придадим первому столбцу потенциал, равный нулю. После прибавления этого потенциала к коэффициентам затрат первого столбца коэффициенты затрат заполненных клеток (2,1) и (4,1) не изменятся, чтобы полученные после сложения коэффициенты затрат этих клеток стали равны нулю, потенциалы 2-й и 4-й строк таблицы должны быть равны (– 4) и 0 соответственно. Тогда для заполненной клетки (1,4) коэффициент затрат после сложения будет равен 3+1=4, поэтому, чтобы он стал равен нулю, четвертому столбцу надо придать потенциал, равный –4. Действуя далее аналогично, последовательно получим: потенциал 1 для первой строки, –1 для третьего столбца, –3 для третьей строки и 0 для второго столбца. Прибавляя полученные потенциалы к коэффициентам затрат (и по строкам, и по столбцам), получаем следующую матрицу оценок:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Так как среди оценок клеток есть отрицательные, полученное распределение не является оптимальным. Выберем клетку (произвольно) с отрицательной оценкой, например, (4,4), и построим для нее означенный цикл пересчета. В цикле, кроме выбранной клетки, должны, участвовать только заполненные клетки, в каждом столбце и в каждой строке цикла должно быть по две клетки. Для клетки (4,4) цикл пересчета выглядит так:

(2,1) (2,4)



(4,1) (4,4)

Найдем максимальное значение поставки, которое можно передвинуть по циклу как наименьшее значение поставки в «отрицательных» клетках. В нашем случае такая поставка равна 30. Заметим, что передвинув по циклу 30 единиц, получим нулевые поставки сразу в двух клетках – (2,4) и (4,1). Если считать их обе пустыми, число базисных клеток уменьшится, чего допустить нельзя. Поэтому клетку (4,1) будем считать заполненной с поставкой, равной 0. Клетка (2,4) становится пустой, в клетке (2,1) поставка 50. Получаем следующее базисное распределение.

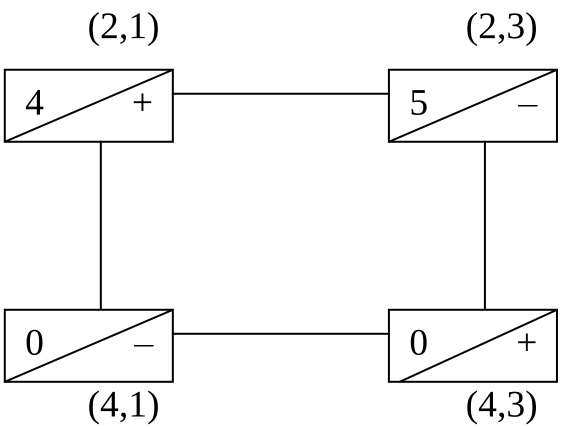
	Постав щики	Мощность поставщи-ков	Потребители и их спрос			
			1	2	3	4
			50	50	40	60
-3	1	30	5	4	6	3 / 30
-4	2	70	4 / 50	5	5 / 20	8
-3	3	70	7	3 / 50	4 / 20	7
0	4	30	0 / 0	0	0	0 / 30
			0	**0**	**-1**	**0**

Проверим полученное распределение поставок на оптимальность.

Для этого составим матрицу оценок клеток при помощи потенциалов, как было описано ранее.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Опять есть отрицательная оценка – у клетки (4,3). Составим для нее означенный цикл пересчета.



Передаем по циклу 0 единиц. При этом количество поставок в клетках не изменится, но теперь заполненной (нулевой поставкой) считаем клетку (4,3), а клетку (4,1) – пустой. Получим следующее распределение поставок.

	Постав щики	Мощность поставщи-ков	Потребители и их спрос			
			1	2	3	4
			50	50	40	60
-2	1	30	5	4	6	3 / 30
-4	2	70	4 / 50	5	5 / 20	8
-3	3	70	7	3 / 50	4 / 20	7
1	4	30	0	0	0 / 0	0 / 30
			0	**0**	**-1**	**-1**

Опять составляем матрицу оценок (значение потенциалов по сравнению с предыдущей таблицей изменилось).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице нет отрицательных оценок, следовательно, полученное распределение оптимально. Посчитаем суммарные затраты на перевозку этого распределения поставок.

$F_{\min} = 4 \cdot 50 + 3 \cdot 50 + 5 \cdot 20 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 620$.

Ответ: F=620, оптимальное распределение $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 50 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2. Элементы теории матричных игр

Задача 1. Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Имеет ли игра седловую точку?

Решение. Найдем по каждой строчке платежной матрицы минимальное число $\alpha_i = \min(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ – это гарантированный выигрыш игрока *A* при выборе им соответствующей стратегии. Чтобы получить максимально возможный гарантированный выигрыш, игрок *A* должен выбрать ту стратегию, для которой α_{ij} имеет максимальное значение – $\alpha = \min(a_1, a_2, a_3)$ – это нижняя цена игры.

Для игрока *B* выберем по каждому столбцу максимальное число $\beta_j = \min(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ – это гарантированный проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии B_j. Найдем минимальное из этих чисел $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – это верхняя цена игры. Занесем полученные данные в таблицу.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	-2	1	$\alpha_1 = \min(3,-2,1) = -2$
A_2	1	-1	1	$\alpha_2 = \min(1,-1,1) = -1$
A_3	2	0	4	$\alpha_3 = \min(2,0,4) = 0$
	$\beta_1 = \max(3,1,2) = 3$	$\beta_2 = \max(-2,-1,0) = 0$	$\beta_3 = \max(1,1,4) = 4$	$\alpha = \max(-2,-1,0) = 0$ $\beta = \max(3,0,4) = 0$

Нижняя цена игры $\alpha = 0$ равна верхней цене игры $\beta = 0$. Значит, игра имеет седловую точку. Для игрока *A* оптимальная стратегия – A_3, для игрока *B* оптимальная стратегия – B_2.

Ответ: $\alpha = \beta = 0$, игра имеет седловую точку, оптимальные стратегии (A_3, B_2).

Задача 2. Решить графически игру, заданную платежной матрицей:

$$P=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \\ 5 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Дана игра 4 x 2, то есть у игрока *А* имеется 4 стратегии, а у игрока *В* – 2. Поэтому будем решать игру для игрока *В*. Построим оси: *ОХ* – на ней будем отмечать вероятности, с которыми игрок использует ту или иную стратегии, и *ОУ* – на ней будем откладывать цену игры. На расстоянии единица от оси *ОУ* проведем еще ось, параллельную ей (см. рис. 19).

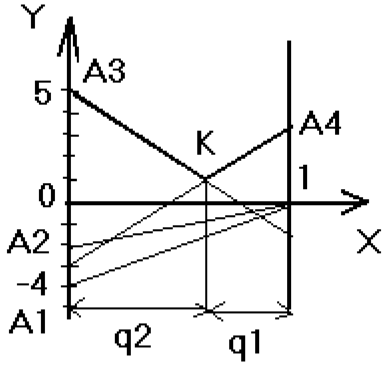


Рис. 19. Графическое решение задачи

Если игрок *А* выбирает стратегию A_1, то игрок *В*, используя свои стратегии с вероятностями (q_1, q_2), будет проигрывать в среднем $q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} = q_1 \cdot (-4) + q_2 \cdot 0$. Отметим на оси *ОУ* $a_{11} = -4$, а на оси, ей параллельной, $a_{12} = 0$ и соединим эти точки прямой линией – она показывает, сколько в среднем получает игрок *В*, если *А* использует стратегию A_1, а *В* чередует стратегии B_1 и B_2 с некоторыми вероятностями (q_1, q_2). Аналогично отмечаем на оси *ОУ* точку –2, а на параллельной ей оси – точку *0* и соединяем отрезком. Получаем линию, показывающую, сколько в среднем получает игрок *В*, если *А* выбрал стратегию A_2. Точно так же для A_3 и A_4. Для игрока *В* надо выбрать верхнюю границу, так как он должен рассчитывать, что *А* выберет ту стратегию, которая соответствует наибольшему проигрышу для игрока *В*. На рис. 19 это ломаная A_3KA_4, выделенная толстой линией. Игроку *В* следует выбрать ту смешанную стратегию, которая соответствует наименьшему проигрышу для *В* – точка *К*. Это точка пересечения прямых, соответствующих стратегиям A_3 и A_4. Выпишем уравнения этих прямых.

Прямая ($A_3\,A_3$), проходит через точки с координатами (0; 5) и (1; -2). Уравнение этой прямой запишется в следующем виде:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-5}{-2-5}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}y+\frac{5}{7}.$$

Уравнение прямой ($A_4\,A_4$), проходящей через точки (0; -3) и (1; 3), запишется в следующем виде:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-(-3)}{3-(-3)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}y+\frac{1}{2}.$$

Точка *K* – точка пересечения этих прямых, имеет координаты, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{7}y+\frac{5}{7} \\ x=\frac{1}{6}y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{7}y+\frac{5}{7} \\ x=\frac{1}{6}y+\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{7}y+\frac{5}{7}=\frac{1}{6}y+\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{13}{42}y=\frac{3}{14}\Rightarrow y=\frac{3}{14}\cdot\frac{42}{13}=\frac{9}{13}.$$

Откуда $x=\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{13}+\frac{1}{2}=\frac{8}{13}$.

Следовательно, цена игры $v=\frac{9}{13}$ и оптимальная стратегия для игрока *B*:

$$q_2=\frac{8}{13},\quad q_1=1-\frac{8}{13}=\frac{5}{13}.$$

Для игрока *A*, стратегии A_1 и A_2 будут неактивными, игроку *A* невыгодно их использовать. Максимально возможный выигрыш, равный цене игры $v=\frac{9}{13}$, игрок *A* будет получать, используя стратегии A_3 и A_4.

Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока A из следующей системы, учитывая, что A_1 и A_2 неактивные стратегии, то есть $p_1 = p_2 = 0$.

$$\begin{cases} -4p_1 - 2p_2 + 5p_3 - 3p_4 = v = \dfrac{9}{13} \\ 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 - 2p_3 + 3p_4 = v = \dfrac{9}{13} \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = 1 - p_4 \\ 5(1 - p_4) - 3p_4 = \dfrac{9}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$5 - \frac{9}{13} = 8p_4 \Rightarrow p_4 = \frac{7}{13}; p_3 = 1 - p_4 = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}.$$

Ответ: Цена игры $v = \dfrac{9}{13}$, оптимальные стратегии игроков $S_A^* = \left(0, 0, \dfrac{6}{13}, \dfrac{7}{13}\right)$, $S_B^* = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{8}{13}\right)$.

Замечание. Если игра размера 2 х *n*, то ее следует решать для игрока *A*. Тогда на чертеже следует выбирать нижнюю границу и максимальное значении этой границы.

Задача 3. (Сведение матричной игры к задаче линейного программирования)

Дана платежная матрица $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3 < 4 = \beta$.

Прибавляя ко всем элементам матрицы (P_{ij}) число k= 5, приходим к матрице модифицированной игры $P' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, которой соответствует задача линейного программирования.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \min \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 1, \quad i = \overline{1{,}3}. \end{cases}$$

Воспользовавшись симплекс-методом, находим решение:

$$x_1^* = \frac{1}{20},\ x_2^* = \frac{1}{10},\ x_3^* = \frac{1}{20}.$$

Таким образом, цена модифицированной игры $(\nu')^* = \dfrac{1}{x_1^* + x_2^* + x_3^*} = 5$, а цена исходной игры $\nu^* = (\nu')^* - 5 = 0$. При этом $p_i^* = (\nu')^* \cdot x_i$, $i = \overline{1{,}3}$, т. е. оптимальная смешанная стратегия первого игрока $S_A^* = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

В рассматриваемой игре $\left(P_{ij}\right)^T = \left(P_{ij}\right)$ и $S_A^* = S_B^*$. Нетрудно найти оптимальную смешанную стратегию второго игрока, решив соответствующую задачу линейного программирования, и убедиться в том, что она совпадает с оптимальной смешанной стратегией первого игрока.

Завершая рассмотрение игр двух участников с нулевой суммой без седловых точек, заметим, что при использовании смешанных стратегий перед каждой партией игры каждым игроком запускается некий механизм (бросание монеты, игральной кости или использование датчика случайных чисел), обеспечивающий выбор каждой чистой стратегии с заданной вероятностью. Как мы уже отмечали, смешанные стратегии представляют собой математическую модель гибкой тактики, при использовании которой противник не знает заранее, с какой обстановкой ему придется столкнуться в каждой следующей партии игры. При этом ожидаемые теоретические результаты игры, при неограниченном возрастании числа разыгрываемых партий, стремятся к их истинным значениям.

5.3. Принятие решений в условиях неопределённости и риска

Задача 1. Задача о постройке мотеля.

Планируется постройка мотеля. Требуется сделать предварительную оценку доходности мотеля. Затраты на постройку мотеля для простоты не учитываются. Проблема заключается в неопределённости спроса.

Ежегодные затраты будут зависеть от числа сданных комнат S, от размера мотеля (тоже от числа комнат). Кроме того, будут учтены фиксированные затраты. Доходы зависят от числа сданных комнат R.

Составление сметы доходов даёт следующую таблицу:

	R=0	R=10	R=20	R=30	R=40	R=50
S=20	-121	62	245	245	245	245
S=30	-168,75	14,25	197,25	380,25	380,25	380,25
S=40	-216,5	-33,5	149,5	332,5	515,5	515,5
S=50	-264,25	-81,25	101,75	284,75	467,75	650,75

Решение

1. Критерий Лапласа: $\max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{M} \frac{1}{M} a_{ij}$.

2. Критерий Вальда: $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$.

3. Критерий Сэвиджа: $\max\limits_{i} \min\limits_{j} \left[a_{ij} - \max\limits_{i} a_{ij} \right]$.

Величина в скобках – сожаление между наиболее благоприятным и действительным выбором.

4. Критерий Гурвица: $\max\limits_{i} \left[\alpha \max\limits_{j} a_{ij} + (1-\alpha) \min\limits_{j} a_{ij} \right]$.

Коэффициент оптимизма α.

В данном случае M=6.

Решение по Лапласу S=40. Если все события равновероятны.

Решение по Вальду S=20. В этом случае можно гарантировать, что убыток не превосходит 121.

Решение по Сэвиджу S=40. В этом случае можно гарантировать, что сожаление не будет больше 135,25.

	Σ	min	min сожаление	α=0,5
S=20	153,5	-121	-405,75	62
S=30	197,25	-168,75	-270,5	105,75
S=40	210,5	-216,5	-135,25	149,5
S=50	193,5	-264,25	-143,25	193,25

Задача 2.

Турфирма подбирает место для строительства летнего лагеря в сибирской тайге для экстремального туризма в условиях дикой природы. Турфирма считает, что число туристов может быть 200, 250, 300 или 350 человек. Стоимость лагеря будет минимальной, поскольку он строится для удовлетворения только небольших потребностей. Отклонения в сторону уменьшения или увеличения относительно идеальных уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты, обусловленные строительством избыточных (неиспользуемых) *мощностей* или потерей возможности получить прибыль в случае, когда некоторые потребности не удовлетворяются. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют возможные размеры лагеря (на 200, 250, 300 или 350 человек), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее число участников сбора. Следующая таблица содержит матрицу стоимостей (в тыс. руб.), относящуюся к описанной ситуации.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	50	100	180	250
a_2	80	70	120	230
a_3	210	180	120	210
a_4	300	220	190	150

Описанная ситуация анализируется с точки зрения следующих критериев.

Критерий Лапласа. При заданных вероятностях $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ожидаемые значения затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом.

$$M\{a_1\}=\frac{1}{4}(50+100+180+250)=145.$$

$$M\{a_2\}=\frac{1}{4}(80+70+120+230)=125\leftarrow \textit{оптимум}.$$

$$M\{a_3\}=\frac{1}{4}(210+180+120+210)=180.$$

$$M\{a_4\}=\frac{1}{4}(300+220+190+150)=215.$$

Минимаксный критерий. Этот критерий использует исходную матрицу стоимостей.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум по строке
a_1	50	100	180	250	250
a_2	80	70	120	230	230
a_3	210	180	120	210	210 ← *минил*
a_4	300	220	190	150	300

Критерий Сэвиджа. Матрица потерь определяется вычитанием чисел 50, 70, 120 и 150 из элементов столбцов от первого до четвертого соответственно. Следовательно,

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум по строке
a_1	0	30	60	100	100
a_2	30	0	0	80	80 ← *минил*
a_3	160	110	0	60	160
a_4	250	150	70	0	250

Критерий Гурвица. Результаты вычислений содержатся в следующей таблице:

	Минимум по строке	Максимум по строке	k(минимум по строке)+ +(1-k)(максимум по строке)
a_1	50	250	250–200k
a_2	70	230	230–160k
a_3	120	210	210–90k
a_4	150	300	300–150k

Используя подходящее значение для k, можно определить оптимальную альтернативу. Например, для k=0.5 оптимальным является альтернатива либо a_1, либо a_2, тогда как для k=0.25 оптимальным является решение a_3.

Задача 3.

Две компании A и B продают два вида лекарств против гриппа. Компания A рекламирует продукцию на радио (A_1), телевидении (A_2) и в газетах (A_3). Компания B в дополнение к использованию радио (B_1), телевидения (B_2) и газет (B_3) рассылает также по почте брошюры (B_4). В зависимости от умения и интенсивности проведения рекламной кампании, каждая из компаний может привлечь на свою сторону часть клиентов конкурирующей компании. Приведенная ниже матрица характеризует процент клиентов, привлеченных или потерянных компанией A.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Минимум по строке
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	**5**	6	8	**5 максимин**
A_3	-2	4	-9	5	-9
Максимум по столбцу	8	**5 минимакс**	9	8	

Решение игры основано на обеспечении наилучшего результата из наихудших для каждого игрока. Если компания A выбирает стратегию A_1, то, независимо от того, что предпринимает компания B, наихудшим результатом является потеря компанией A 3% рынка в пользу компании B. Это определяется минимумом элементов первой строки матрицы платежей. Аналогично при выборе стратегии A_2 наихудшим исходом для компании A является увеличение рынка на 5% за счет компании B. Наконец, наихудшим исходом при выборе стратегии A_3 является потеря компанией A 9% рынка в пользу компании B. Эти результаты содержатся в столбце «Минимум по строке». Чтобы достичь наилучшего результата из наихудших, компания A выбирает стратегию A_2, так как она соответствует наибольшему элементу столбца «Минимум по строке».

Рассмотрим теперь стратегии компании B. Так как элементы матрицы являются платежами компании A, критерий наилучшего результата из наихудших для компании B соответствует выбору минимаксного значения. В результате приходим к выводу, что выбором компании B является стратегия B_2.

Оптимальным решением в игре является выбор стратегий A_2 и B_2, т.е. обеим компаниям следует проводить рекламу на телевидении. При этом выигрыш будет в пользу компании A, так как её рынок увеличится на 5%. В этом случае говорят, что цена игры равна 5% и что компании A и B используют стратегии, соответствующие седловой точке.

Задача 4.

Два игрока A и B играют в игру, основанную на выборе сторон монеты. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают герб ($Г$) или решку ($Р$). Если результаты выбора совпадают (т. е. $ГГ$ или $РР$), то игрок A получает один рубль от игрока B. иначе игрок A платит один рубль игроку B.

Следующая матрица платежей игроку A показывает величины минимальных элементов и максимальных элементов столбцов, соответствующих стратегиям обоих игроков.

	$B_Г$	$B_Р$	Минимумы строк
$A_Г$	1	-1	-1
$A_Р$	-1	1	-1
Максимумы столбцов	1	1	

Максиминная и минимаксная величины (цены) для этой игры равны -1 руб. и 1 руб. соответственно. Так как эти величины не равны между собой, игра не имеет решения в чистых стратегиях. В частности, если игрок A использует стратегию $A_Г$, игрок B выберет стратегию $B_Р$, чтобы получить от игрока A один рубль. Если это случится, игрок A может перейти к стратегии $A_Р$, чтобы изменить исход игры и получить один рубль от игрока B. Постоянное искушение каждого игрока перейти к другой стратегии указывает на то, что решение в виде чистой стратегии неприемлемо. Вместо этого оба игрока должны использовать надлежащую случайную комбинацию своих стратегий. В рассматриваемом примере оптимальное значение цены игры находится где-то между максиминной и минимаксной ценами для этой игры:

Максиминная (нижняя) цена ≤ цена игры ≤ минимаксная (верхняя) цена.

Следовательно, в данном случае цена игры должна лежать в интервале [-1, 1], измеряемом в рублях.

Задача 5.

Владелец небольшого магазина в начале каждого дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 50 рублей за единицу. Цена реализации этого продукта – 60 рублей за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 единицы. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 30 рублей за единицу. Сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день?

Ниже приведена таблица возможных доходов за день.

Возможные исходы: спрос в день	Возможные решения: число закупленных для реализации единиц			
	1	2	3	4
1	10	-10	-30	-50
2	10	20	0	-20
3	10	20	30	10
4	10	20	30	40
максимакс	10	20	30	40
максимин	10	-10	-30	-50

Поясним, как заполняется таблица. В клетке (2,2) для реализации было закуплено 2 единицы, спрос был 2 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки: 60·2 (реализация двух единиц) –50·2 (их предварительная закупка) = 20.

В клетке (3,1) была закуплена для реализации 1 единица, спрос был 3 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки: 60·1 (реализация только одной единицы, владелец магазина неверно оценил спрос) – 50·1 (ее предварительная закупка) = 10.

В клетке (3,4) было закуплено для реализации 4 единицы, спрос был 3 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки 60·3 (реализация трех единиц, на которые был спрос) –50·4 (предварительная закупка четырех единиц) + 30·(4–3) (реализация в конце дня непроданной единицы) = 10 т. д.

Каждая реализованная в течение дня единица приносит доход 60–50 = 10, а каждая реализованная в конце дня единица приносит доход 30–50 = –20 (то есть убыток).

Рассматриваемые способы принятия решения состоят в следующем. В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим максимальное число. Это числа 10, 20, 30, 40 соответственно. Запишем их в строке «максимакс» и найдем среди них максимальное. Это 40, что соответствует решению о закупке для реализации 4 единиц. Руководствуясь правилом максимакса, каждый раз надо закупать для реализации 4 единицы. Это подход очень азартного человека.

В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим минимальное число. Это числа 10, -10, -30, -50 соответственно. Запишем их в строке «максимин» и найдем среди них максимальное. Это 10, что соответствует решению о закупке для реализации 1 единицы. Руководствуясь правилом максимина, каждый раз надо закупать для реализации 1 единицу. Это подход очень осторожного человека.

Критерий Сэвиджа: Минимаксное решение – это минимизация максимума возможных потерь, причем упущенная выгода также трактуется как потери.

Вычислим значения таблицы возможных потерь за день. Так, в клетке (2,2) было закуплено для реализации 2 единицы, спрос был 2 единицы, то есть число закупленных для реализации единиц равно спросу за день. Поэтому возможные потери для этой клетки равны нулю.

В клетке (3,1) закупленная для реализации единица продана, но могли бы продать еще 3 – 1 = 2 единицы, заработав на их продаже 2·(60 – 50) = 20. Это и есть возможные потери.

В клетке (3,4) одна закупленная единица не реализована в течение дня. Она приносит убыток 1·(50 – 30) = 20. Это и есть возможные потери.

Возможные исходы: спрос в день	Возможные решения: число закупленных для реализации единиц			
	1	2	3	4
1	0	20	40	60
2	10	0	20	40
3	20	10	0	20
4	30	20	10	0
минимакс	30	20	40	60

В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим максимальное число. Это числа 30, 20, 40, 60 соответственно. Запишем их в строке «минимакс» и найдем среди них минимальное. Это 20, что соответствует решению о закупке для реализации 2 единиц. Руководствуясь правилом минимакса, каждый раз надо закупать для реализации 2 единицы.

Критерий Гурвица – это компромиссный способ принятия решений. Составляется таблица возможных доходов, задаются числа a и b, называемые весами. Условия на a и b: $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$.

Для каждого возможного решения определяются наименьший и наибольший возможные доходы и вычисляется целевая функция по правилу:

a·(наименьший доход) + b·(наибольший доход).

Выбираем решение, при котором целевая функция принимает наибольшее значение.

Веса a и b выбирает сам исследователь. При $a = 0$, $b = 1$ получаем правило максимакса. При $a = 1$, $b = 0$ получаем правило максимина.

Зададим $a = 0,4$ и $b = 0,6$, $a + b = 0,4 + 0,6 = 1$. Из таблицы возможных доходов для каждого решения находим наименьший и наибольший возможные доходы (это числа в строках «максимакс» и «максимин»). Заполним таблицу.

Числа во 2-м и 3-м столбцах взяты из таблицы возможных доходов. Числа 3-го столбца умножаем на а = 0,4 и результат пишем в 4-м столбце.

Возможные решения	Наибольший доход	Наименьший доход	0,4(наименьший доход)	0,6(наибольший доход)	Сумма
1	10	10	4	6	10
2	20	-10	-4	12	8
3	30	-30	-12	18	6
4	40	-50	-20	24	4

Числа 2-го столбца умножаем на $b = 0,6$ и результат пишем в 5-м столбце. В 6-м столбце находится сумма соответствующих элементов 4-го и 5-го столбцов. Находим максимум в 6-м столбце (это 10). Он соответствует возможному решению о закупке для реализации одной единицы. Очевидно, для других весов результат будет, вообще говоря, иным.

Замечание. В методе Гурвица вместо таблицы возможных доходов можно воспользоваться таблицей возможных потерь. В этом случае отыскивается минимум целевой функции $a\cdot$(наименьшие потери) + $b\cdot$(наибольшие потери) по всем возможным решениям.

Правило максимальной вероятности (используются численные значения вероятностей). Модифицируем пример. Пусть известно, что на практике спрос 1 наблюдался 15 раз, спрос 2 наблюдался 30 раз, спрос 3 наблюдался 30 раз, спрос 4 наблюдался 25 раз, то есть известна частота каждого возможного исхода.

Всего наблюдений было 15 + 30 + 30 + 25 = 100. По формуле (частота исхода)/(сумма частот всех исходов) определим относительную частоту (или вероятность) каждого исхода. Это 15/100 = 0,15; 30/100 = 0,30; 30/100 = 0,30; 25/100 = 0,25 соответственно. Составим таблицу. Находим исходы, вероятность которых максимальна. Это 2 и 3.

Возможные исходы	1	2	3	4	Сумма
Частота	15	30	30	25	100
Вероятность *p*	0,15	0,30	0,30	0,25	1

В таблице возможных доходов наибольший возможный доход из этих двух решений у решения «закупать 3 единицы» (30 против 20). Поэтому, руководствуясь правилом максимальной вероятности, надо закупать для реализации 3 единицы.

Максимизация ожидаемого дохода.

Мы знаем вероятность каждого исхода и знаем таблицу возможных доходов. По формуле (доход при i-м исходе) × (вероятность i-го исхода) вычисляем для каждого решения математическое ожидание дохода (средний ожидаемый доход). И смотрим, для какого решения оно максимально.

Возможное решение 1	Возможный доход X	Вероятность p	$X \cdot p$
	10	0,15	$10 \cdot 0{,}15 = 1{,}5$
	10	0,30	$10 \cdot 0{,}30 = 3$
	10	0,30	$10 \cdot 0{,}30 = 3$
	10	0,25	$10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$
	Сумма	1	10

Столбец «Возможный доход X» взят из таблицы возможных доходов (соответствует возможному решению 1). Столбец «Вероятность p» – это строка «Вероятность р» из предыдущей таблицы, 3-й столбец – это результат поэлементного произведения 1-го и 2-го столбцов. Нас интересует сумма элементов 3-го столбца. Она равна 10.

Возможное решение 2	Возможный доход X	Вероятность p	Xp
	-10	0,15	$-10 \cdot 0{,}15 = -1{,}5$
	20	0,30	$20 \cdot 0{,}30 = 6$
	20	0,30	$20 \cdot 0{,}3 = 6$
	20	0,25	$20 \cdot 0{,}25 = 5$
	Сумма	1	15,5

Возможное решение 3	Возможный доход X	Вероятность p	$X \cdot p$
	-30	0,15	$-30 \cdot 0{,}15 = -4{,}5$
	0	0,30	$0 \cdot 0{,}30 = 0$
	30	0,30	$30 \cdot 0{,}3 = 9$
	30	0,25	$30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$
	Сумма	1	12

Возможное решение 4	Возможный доход X	Вероятность p	$X \cdot p$
	-50	0,15	$-50 \cdot 0{,}15 = -7{,}5$
	-20	0,30	$-20 \cdot 0{,}30 = -6$
	10	0,30	$10 \cdot 0{,}3 = 3$
	40	0,25	$40 \cdot 0{,}25 = 10$
	Сумма	1	-0,5

Выбираем максимум среди итоговых чисел: max (10; 15,5; 12; -0,5) = 15,5. Поэтому надо закупать для реализации 2 единицы.

Замечание. Воспользовавшись формулой 2 (возможные потери при i-м исходе)×(вероятность i-го исхода), аналогично можно минимизировать ожидаемые потери.

На практике каждый предприниматель мечтает о том, чтобы точно уравновесить спрос и предложение. В этом случае нет потерь и потребители довольны. Этот идеальный сценарий может стать более реальным, если точно известен уровень спроса.

Один из способов определения будущего спроса – проведение маркетингового исследования с целью получения информации о покупательских предпочтениях потребителей. Подобные попытки, несомненно, увеличат затраты на ведение бизнеса. Сколько именно средств предприниматель может позволить себе потратить на получение информации об ожидаемом уровне спроса?

Ответим на этот вопрос, воспользовавшись результатами задачи 5.

Из таблицы возможных доходов за день мы видим, что если бы владелец магазина знал, что спрос на продукт будет равен 1 единице, то была бы закуплена для реализации 1 единица, и возможный доход был бы равен 10 руб. (максимальное число в 1-й строке находится в 1-м столбце и равно 10).

Если заранее известно, что спрос составит 2 единицы, то были бы закуплены для реализации 2 единицы, и возможный доход был бы равен 20 руб. (максимальное число во 2-й строке находится во 2-м столбце и равно 20).

Если заранее известно, что спрос составит 3 единицы, то были бы закуплены для реализации 3 единицы, и возможный доход был бы равен 30 руб. (максимальное число в 3-й строке находится в 3-м столбце и равно 30).

Если заранее известно, что спрос составит 4 единицы, то были бы закуплены для реализации 4 единицы, и возможный доход был бы равен 40 руб. (максимальное число в 4-й строке находится в 4-м столбце и равно 40).

Так как известны вероятности различных значений спроса, то можно определить ожидаемый доход в условиях полной информации: $0{,}15 \cdot 10 + 0{,}30 \cdot 20 + 0{,}30 \cdot 30 + 0{,}25 \cdot 40 = 26{,}5$ руб.

Лучшее, что мог сделать владелец магазина при отсутствии полной информации, – это закупать для реализации 2 единицы в день с целью максимизации ожидаемого дохода. Тогда его ожидаемый доход равен 15,5 руб. Он имеет возможность увеличить ежедневный доход до 26,5 руб., затратив дополнительную сумму денег (не свыше 26,5 15,5 = 11 руб./день) на маркетинговые исследования.

Разница между ожидаемым доходом в условиях определенности и в условиях риска называется ожидаемой стоимостью полной информации. Это максимально возможный размер средств, которые можно потратить на получение полной информации о рыночной конъюнктуре.

Задача 6.

Допустим, что вы хотите вложить на фондовой бирже 100 000 руб. в акции одной из двух компаний: *A* или *B*. Акции компании *A* являются рискованными, но могут принести 50% прибыли от суммы инвестиции на протяжении следующего года. Если условия развития экономики будут неблагоприятны, сумма инвестиции может обесцениться на 20%. Компания *B* обеспечивает безопасность инвестиций с 15% прибыли в условиях повышения котировок и только 5% – в условиях понижения котировок. Аналитики с вероятностью 60% прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40% понижение котировок. В какую компанию следует вложить деньги?

Информация, связанная с принятием решения, представлена в следующей таблице.

Альтернативные решения	Прибыль за год от инвестиций 100 000 руб.	
	При повышении котировок, руб.	При понижении котировок, руб.
Акции компании *A*	50000	-20000
Акции компании *B*	15000	5000
Вероятность события	0,6	0,4

Эта задача может быть также представлена в виде дерева решений, показанного на рис. 20. На этом рисунке используется два типа вершин: квадратик представляет «решающую» вершину, а кружок – «случайную». Таким образом, из вершины 1 («решающая») выходят две ветви, представляющие альтернативы, связанные с покупкой акций компании *A* и *B*. Далее две ветки, выходящие из «случайных» вершин 2 и 3, соответствуют случаям повышения и понижения котировок на бирже с вероятностями их появления и соответствующими платежами.

Рис. 20. Дерево решений для задачи инвестирования

Исходя из схемы (см. рис. 20), получаем ожидаемую прибыль за год для каждой из двух альтернатив.

Для акций компании A: 50 000·0,6+(-20 000)·0,4=22 000 руб.

Для акций компании B: 15 000·0,6+5 000·0,4=11 000 руб.

Решением, основанным на этих вычислениях, является покупка акций компании A.

5.4. Многошаговые модели принятия решений и динамическое программирование

Задача 1. Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на год. Начальные средства 5 млрд усл. руб. Средства, вложенные в k-е предприятие, приносят в конце года доход $f_k(x)$. Эти функции заданы таблично:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Считаем, что работа предприятия не влияет на работу других предприятий и суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Решение

Итоговая таблица:

x	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	8	8	8	8	1	0	0	0
2	10	14	14	14	2	1	0	0
3	11	17	17	18	3	2	0,1	1
4	12	19	20	21	4	2,3	1	1
5	18	21	22	24	5	3,4	1	1

Расчетная таблица:

Z2	x2	f2	Z1	f2+Z1	f3	Z2	f3+Z2	f4	Z3	f4+Z3
x=1	0	0	8	8	0	8	8	0	8	8
	1	6	0	6	3	0	3	4	0	4
x=2	0	0	10	10	0	14	14	0	14	14
	1	6	8	14	3	8	11	4	8	12
	2	9	0	9	4	0	4	6	0	6
x=3	0	0	11	11	0	17	17	0	17	17
	1	6	10	16	3	14	17	4	14	18
	2	9	8	17	4	8	12	6	8	14
	3	11	0	11	7	0	7	8	0	8
x=4	0	0	12	12	0	19	19	0	20	20
	1	6	11	17	3	17	20	4	17	21
	2	9	10	19	4	14	18	6	14	20
	3	11	8	19	7	8	15	8	8	16
	4	13	0	13	11	0	11	13	0	13
x=5	0	0	18	18	0	21	21	0	22	22
	1	6	12	18	3	19	22	4	20	24
	2	9	11	20	4	17	21	6	17	23
	3	11	10	21	7	14	21	8	14	22
	4	13	8	21	11	8	19	13	8	21
	5	15	0	15	18	0	18	16	0	16

Ответ: Наибольшая прибыль 24 млрд усл. руб. может быть получена, если распределить средства между предприятиями следующим образом: (1,2,1,1).

Задача 2. Решение задачи о загрузке.

Контрольная работа содержит вопросы по N различным темам (в каждой теме разное количество вопросов I). Каждый вопрос типа i имеет вес v_i (i=1,2,…N), а также время, отводимое на ответ w_i. Максимальное время, которое может затратить студент на контрольную работу, W. Требуется определить максимальное количество баллов (вес), которое может набрать студент за отведенное время W=30.

Данные приведены в таблице:

№ темы	I	w_i	v_i
1	≤5	2	2
2	≤6	4	3
3	≤4	1	2
4	≤3	4	4
5	≤5	7	6
6	≤6	5	5
7	≤5	3	4
8	≤7	2	2

Решить задачу, приведя ее к рекуррентным соотношениям.

Сначала рассмотрим задачу в общей постановке. Если обозначить количество вопросов типа i через k_i, то задача принимает следующий вид:

$\max Z = v_1k_1 + v_2k_2 + \ldots + v_nk_n$ при ограничениях $w_1k_1 + w_2k_2 + \ldots + w_nk_n \le W$, k_i – неотрицательные числа.

Если отбросить требования целочисленности k_i, то решение задачи нетрудно найти с помощью симплекс-метода. В самом деле, так как остается лишь одно ограничение, базисной будет только одна переменная, и задача сводится к выбору типа i, для которого величина $v_i \cdot W/w_i$ принимает максимальное значение. Исходная задача не является задачей линейного программирования, и для ее решения необходимо использовать метод динамического программирования. Следует отметить, что рассматриваемая задача может быть также решена с помощью методов целочисленного программирования.

Каждый из трех основных элементов модели ДП определяется следующим образом.

1. Этап j ставится в соответствии типу j, j=1,2,…,N.

2. Состояние y_j на этапе j выражает суммарный вес вопросов, количество ответов на которые приняты на этапах j, j+1,…,N; при этом $y_1 = W$ и $y_i = 0,1,\ldots,W$ при j=2,3,…,N.

3. Варианты решения k_j на этапе j описываются количеством вопросов типа j. Значение k_j заключено в пределах от нуля до $[W/w_j]$, где $[W/w_j]$ – целая часть числа (W/w_j).

Пусть $f_i(y_i)$ – максимальный суммарный вес вопросов, ответы на которые приняты на этапах $j, j+1,\ldots,N$ при заданном состоянии y_j.

Рекуррентное соотношение (для процедуры обратной прогонки) имеет следующий вид: $f_N(y_N) = \max\limits_{\substack{k_N=0,1,\ldots,[y_N/w_N] \\ y_N=0,1,\ldots,W}} \{v_N k_N\}$

$$f_j(y_j) = \max_{\substack{k_i=0,1,\ldots,[y_i/w_i] \\ y_i=0,1,\ldots,W}} \{v_j k_j + f_{j+1}(y_j - w_j k_j\}, \quad j=1,2,\ldots,N-1.$$

Заметим, что максимальное допустимое значение k_j ограничено величиной $[y_j/w_j]$. Это позволяет автоматически исключать все не являющиеся допустимыми варианты при заданном значении переменной состояния y_j.

Решение исходной задачи:

Этап 8. $f_8(y_8) = \max\{2\cdot k_8\}, \max k_8 = 30/2 = 15 \geq 7 \Rightarrow \max k_8 = 7.$

Этап 7. $f_7(y_7) = \max\{v_7 k_7 + f_8(y_7 - 3\cdot k_7)\}, \max k_7 = 30/3 = 10 \geq 5 \Rightarrow \max k_7 = 5.$

Этап 6. $f_6(y_6) = \max\{v_6 k_6 + f_7(y_6 - 5\cdot k_6)\}, \max k_6 = 30/5 = 6 \geq 6 \Rightarrow \max k_6 = 6.$

Этап 5. $f_5(y_5) = \max\{v_5 k_5 + f_6(y_5 - 7\cdot k_5)\}, \max k_5 = 30/7 = 4, \max k_5 = 4.$

Этап 4. $f_4(y_4) = \max\{v_4 k_4 + f_5(y_4 - 4\cdot k_4)\}, \max k_4 = 30/4 = 7 \geq 3 \Rightarrow \max k_4 = 3.$

Этап 3. $f_3(y_3) = \max\{v_3 k_3 + f_4(y_3 - 1\cdot k_3)\}, \max k_3 = 30/1 = 30 \geq 4, \max k_3 = 4.$

Этап 2. $f_2(y_2) = \max\{v_2 k_2 + f_3(y_2 - 4\cdot k_2)\}, \max k_2 = 30/4 = 7 \geq 6 \Rightarrow \max k_2 = 6.$

Этап 1. $f_1(y_1) = \max\{v_1 k_1 + f_2(y_1 - 2\cdot k_1)\}, \max k_1 = 30/2 = 15 \geq 5 \Rightarrow \max k_1 = 5$

Оптимальное решение определяется теперь следующим образом. Из условия W=30 следует, что первый этап решения задачи при y_1=30 дает оптимальное решение k_1=0, которое означает, что на 0 (нуль) вопросов 1-го типа будут даны ответы.

Далее находим:

y_1=30	k_1=0
$y_2 = y_1 - 2k_1 = 30$	k_2=0
$y_3 = y_2 - 4k_2 = 30$	k_3=4
$y_4 = y_3 - k_3 = 26$	k_4=1
$y_5 = y_4 - 4k_4 = 22$	k_5=0
$y_6 = y_5 - 7k_5 = 22$	k_6=0
$y_7 = y_6 - 5k_6 = 22$	k_7=5
$y_8 = y_7 - 3k_7 = 7$	k_8=7

Соответственно оптимальным решением задачи является (0,0,4,1,0,0,5,7), соответственно максимальное количество баллов, которое студент может набрать за отведенное время, равно 46.

Анализ чувствительности решения.

В таблице для первого этапа нам, по существу, необходимо получить оптимальное решение лишь для y_1=30, так как это последний этап, подлежащий рассмотрению. Однако в таблицу включены вычисления для y_1=0,1,…,30, которые позволяют провести анализ чувствительности решения.

Например, что произойдет, если время, отводимое на контрольную работу, будет 20, вместо 30?

y_1=20	k_1=0
$y_2 = y_1 - 2k_1 = 20$	k_2=0
$y_3 = y_2 - 4k_2 = 20$	k_3=4
$y_4 = y_3 - k_3 = 16$	k_4=0
$y_5 = y_4 - 4k_4 = 16$	k_5=0
$y_6 = y_5 - 7k_5 = 16$	k_6=0
$y_7 = y_6 - 5k_6 = 16$	k_7=3
$y_8 = y_7 - 3k_7 = 7$	k_8=7

Соответственно максимальное количество баллов, которое студент может набрать за отведенное время, равно 34.

Что произойдет, если время, отводимое на контрольную работу, будет 5 вместо 30?

y_1=5	k_1=0
$y_2 = y_1 - 2k_1 = 5$	k_2=0
$y_3 = y_2 - 4k_2 = 5$	k_3=0
$y_4 = y_3 - k_3 = 5$	k_4=0
$y_5 = y_4 - 4k_4 = 5$	k_5=0
$y_6 = y_5 - 7k_5 = 5$	k_6=0
$y_7 = y_6 - 5k_6 = 5$	k_7=0
$y_8 = y_7 - 3k_7 = 5$	k_8=5

Соответственно максимальное количество баллов, которое студент может набрать за отведенное время, равно 10.

Что произойдет, если типов вопросов будет 4 вместо 8?

Этап 4. $f_4(y_4) = \max\{4k_4\}, \max k_4 = 30/4 = 7 \geq 3 \Rightarrow \max k_4 = 3.$

Этап 3. $f_3(y_3) = \max\{v_3 k_3 + f_4(y_3 - 1 \cdot k_3)\}, \max k_3 = 30/1 = 30 \geq 4, \max k_3 = 4.$

Этап 2. $f_2(y_2) = \max\{v_2 k_2 + f_3(y_2 - 4 \cdot k_2)\}, \max k_2 = 30/4 = 7 \geq 6 \Rightarrow \max k_2 = 6.$

Этап 1. $f_1(y_1) = \max\{v_1 k_1 + f_2(y_1 - 2 \cdot k_1)\}, \max k_1 = 30/2 = 15 \geq 5 \Rightarrow \max k_1 = 5.$

y_1=30	k_1=5
$y_2 = y_1 - 2k_1 = 30$	k_2=3
$y_3 = y_2 - 4k_2 = 30$	k_3=4
$y_4 = y_3 - k_3 = 26$	k_4=3

Соответственно максимальное количество баллов, которое студент может набрать за отведенное время, равно 39.

Задача 3.

Для двух предприятий выделено 1400 у.е. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от x единиц, вложенных в первое предприятие, равен $f_1(x) = 3x$, а доход от y единиц, вложенных в первое предприятие, равен $f_2(y) = 4y$. Остаток средств к концу года составляет $g_1(x) = 0{,}5x$ – для первого предприятия, $g_2(y) = 0{,}3y$ – для второго предприятия. Решить задачу методом динамического программирования.

Решение

Процесс распределения средств разобьем на 4 этапа по соответствующим годам.

Обозначим $\alpha_k = x_k + y_k$ – средства, которые распределяются на k-м шаге как сумма средств по предприятиям.

Суммарный доход от обоих предприятий на k-м шаге:

$$Z_k = f_1(x_k) + f_2(S_k - x_k) = 3x_k + 4(S_k - x_k) = 4S_k - x_k.$$

Остаток средств от обоих предприятий на k-м шаге:

$$S_{k+1} = g_1(x_k) + g_2(S_k - x_k) = 0{,}5x_k + 0{,}3(S_k - x_k) = 0{,}3S_k + 0{,}2x_k.$$

Обозначим $z_k^*(S_k)$ – максимальный доход, полученный от распределения средств S_k между двумя предприятиями с k-го шага до конца рассматриваемого периода.

Рекуррентные соотношения Беллмана для этих функций:

$$Z_4^*(S_4) = \max_{0 \le x_4 \le S_4} \{4S_k - x_k\};$$

$$Z_k^*(S_k) = \max_{0 \le x_k \le S_k} \{4S_k - x_k + Z_{k+1}^*(0{,}3 \cdot S_k + 0{,}2 \cdot x_k)\}.$$

Проведем оптимизацию начиная с четвертого шага.

4-й шаг.

Оптимальный доход равен: $Z_4^*(S_4) = \max\limits_{0 \le x_4 \le S_4} \{4S_k - x_k\} = 4S_4$, т. к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т. е. при $x_4 = 0$.

3-й шаг.

$$Z_3^*(S_3) = \max_{0 \le x_3 \le S_3} \{4S_3 - x_3 + 4(0{,}3 \cdot S_3 + 0{,}2 \cdot x_3)\} = \max_{0 \le x_3 \le S_3} \{5{,}2 \cdot S_3 + 0{,}2 \cdot x_3\} = 5{,}2 \cdot S_3,$$

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т. е. при $x_3 = 0$.

2-й шаг.

$$Z_2^*(S_2) = \max_{0 \le x_2 \le S_2} \{4S_2 - x_2 + 5{,}2 \cdot (0{,}3 \cdot S_2 + 0{,}2 \cdot x_2)\} = \max_{0 \le x_2 \le S_2} \{5{,}56 \cdot S_2 + 0{,}04 \cdot x_2\} = 5{,}6 \cdot S_2,$$

т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т. е. при $x_2 = S_2$.

1-й шаг.

$$Z_1^*(S_1) = \max_{0 \le x_1 \le S_1} \{4S_1 - x_1 + 5{,}6 \cdot (0{,}3 \cdot S_1 + 0{,}2 \cdot x_1)\} = \max_{0 \le x_1 \le S_1} \{5{,}68 \cdot S_1 + 0{,}12 \cdot x_1\} = 6{,}8 \cdot S_1,,$$

т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т. е. при $x_1 = S_1$.

Результаты оптимизации:

$Z_1^*(S_1) = 6{,}8 \cdot S_1,\ x_1^* = S_1$

$Z_2^*(S_2) = 5{,}6 \cdot S_2,\ x_2^* = S_2$

$Z_3^*(S_3) = 5{,}2 \cdot S_3,\ x_3^* = 0$

$Z_4^*(S_4) = 4S_4,\ x_4^* = 0$

Определим количественное распределение средств по годам.

Так как $S_1 = S = 1400$, $x_1^* = 1400$, получаем $S_2 = 0{,}3S_1 + 0{,}2x_1 = 700$, $S_3 = 0{,}3S_2 + 0{,}2x_2 = 350$, $S_4 = 0{,}3S_3 + 0{,}2x_3 = 105$.

Представим распределение средств в виде таблицы:

Предприятие	Год			
	1	2	3	4
1	1400	700	0	0
2	0	0	350	105

При таком распределении средств за 4 года будет получен доход, равный $Z_{\max}^* = Z_1^*(S_1) = 6{,}8 \cdot 1400 = 9520$.

6. Задания для самостоятельной работы

Раздел 1. Задачи линейного программирования и методы решения

№ 1. Решить геометрическим методом и симплекс-методом:

1) $z = 7x_1 + 6x_2 \to \max$;

$2x_1 + 5x_2 \geq 10$;

$5x_1 + 2x_2 \geq 10$;

$x_1 \leq 6$;

$x_2 \leq 5$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

2) $z = 3x_1 - 2x_2 \to \max$;

$2x_1 + x_2 \leq 11$;

$-3x_1 + 2x_2 \leq 10$;

$3x_1 + 4x_2 \geq 20$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

3) $z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$;

$3x_1 + 2x_2 \geq 6$;

$2x_1 - 3x_2 \geq -6$;

$x_1 - x_2 \leq 4$;

$4x_1 + 7x_2 \leq 28$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

4) $z = 7x_1 + 6x_2 \to \max$;

$2x_1 + x_2 \leq 14$;

$-3x_1 + 2x_2 \leq 9$;

$3x_1 + 4x_2 \geq 27$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

5) $z = -7x_1 + 2x_2 \to \min$;

$5x_1 - 2x_2 \leq 3$;

$x_1 + x_2 \geq 1$;

$-3x_1 + x_2 \leq 3$;

$2x_1 + x_2 \leq 4$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

6) $z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$;

$3x_1 - 2x_2 \geq -6$;

$x_1 + x_2 \geq 3$;

$x_1 \leq 3$;

$x_2 \leq 5$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

7) $z = -2x_1 + 4x_2 \to \min$;

$8x_1 - 5x_2 \leq 16$;

$x_1 + 3x_2 \leq 2$;

$2x_1 + 7x_2 \geq 9$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

8) $z = x_1 + 2x_2 \to \max$;

$5x_1 - 2x_2 \leq 4$;

$x_1 - 2x_2 \geq -4$;

$x_1 + x_2 \geq 4$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

9) $z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$;

$x_1 - 4x_2 \le 4$;

$3x_1 + 2x_2 \le 6$;

$-x_1 + 2x_2 \ge 2$.

10) $z = -2x_1 + x_2 \to \min$;

$x_1 - x_2 \ge -3$;

$6x_1 + 7x_2 \le 42$;

$2x_1 - 3x_2 \le 6$;

$x_1 + x_2 \ge 4$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$.

11) $z = -x_1 - 4x_2 \to \min$;

$x_1 + 2x_2 \ge 2$;

$x_1 + x_2 \le 3$;

$x_1 \le 2$;

$x_2 \le 2$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$.

12) $z = -x_1 - x_2 \to \min$;

$x_1 + x_2 \le 1$;

$x_1 \le 3$;

$x_2 \le 2$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$.

13) $z = x_1 - 2x_2 \to \min$;

$-x_1 + x_2 \ge 0$;

$2x_1 + x_2 \ge 3$;

$x_1 - x_2 \le 1$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$.

14) $z = -2x_1 - x_2 \to \min$;

$3x_1 - x_2 \ge -1$;

$2x_1 + x_2 \ge 1$;

$x_1 - 4x_2 \le 2$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$.

№ 2. В задачах № 1 нужно построить двойственную задачу; не решая ее, используя основные положения теории двойственности, найти решение двойственной задачи.

№ 3. Найти оптимальные целочисленные решения задач линейного программирования (Решить методом Гомори и методом ветвей и границ).

1) $z = 2x_1 + x_2 \to \max$;

$5x_1 + 4x_2 \ge 24$;

$-3x_1 + 3x_2 \le 9$;

$-x_1 + 3x_2 \ge 3$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$; $x_1,\ x_2$ – целые числа.

2) $z = 6x_1 + x_2 \to \min$;

$3x_1 - x_2 \geq 9$;

$2x_1 + 3x_2 \leq 50$;

$-x_1 + 4x_2 \geq 18$;

$x_1,\ x_2 \geq 0$;

$x_1,\ x_2$ – целые числа.

№ 4. Решить транспортные задачи:

1) $a_i = (50, 100, 130)$ – поставщики

$b_j = (70, 100, 110,)$ – потребители

$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ – тарифы на перевозку

2) $a_i = (300,\ 250,\ 200,\ 100)$ – поставщики

$b_j = (150,\ 230, 120, 190, 160)$ – потребители

$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ – тарифы на перевозку

Задачи № 5. Транспортные задачи и задачи о назначениях

1. На трёх заводах $З_1$, $З_2$, $З_3$ производится один сорт минеральной воды. Вся продукция еженедельно должна быть развезена на 4 склада.

Склад	$С_1$	$С_2$	$С_3$	$С_4$
Объём заказа, л	150	170	210	270

Завод	$З_1$	$З_2$	$З_3$
Мощность, л	350	250	200

Кроме этого, даны расстояния от каждого завода к каждому складу, км.

	C_1	C_2	C_3	C_4
$З_1$	140	160	120	40
$З_2$	130	120	100	50
$З_3$	120	180	100	70

Затраты на транспортировку минеральной воды составляют 0,1 усл. руб. на км пути.

Необходимо:

а) найти с помощью метода сев-зап. угла возможное решение;

б) найти с помощью метода минимальной стоимости возможное решение;

в) с помощью распределительного метода найти решение, при котором затраты на перевозку были бы минимальны;

г) с помощью метода потенциалов найти решение, при котором затраты на перевозку были бы минимальны.

Для каждого решения определить затраты на перевозку.

2. Три завода могут производить 40, 90 и 80 мебельных наборов. Имеется пять складов, на которых заказываются эти наборы в количестве 30, 50, 40, 60, 30 штук.

Даны также затраты на перевозку в усл. руб.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$З_1$	16	12	18	17	19
$З_2$	14	13	17	15	14
$З_3$	15	16	14	18	13

Необходимо минимизировать общие затраты на перевозку. При этом

а) сформулировать задачу как задачу линейного программирования,

б) найти допустимое решение методом сев-зап. угла,

в) найти решение с помощью распределительного метода,

г) найти решение с помощью метода потенциалов.

3. Некоторая транспортная фирма имеет в пяти городах гаражи. Из каждого города отправляются пустые грузовики и прибывают в другие пять городов.

4. Даны расстояния в км между каждой парой городов:

Гаражи	Города назначения				
	1	2	3	4	5
1	8	3	11	13	16
2	2	8	17	2	7
3	12	9	4	4	6
4	5	11	9	7	14
5	6	8	9	3	13

Необходимо направить каждый из пяти грузовиков в некоторый город так, чтобы общее расстояние, а следовательно, и расходы на переезд были минимальными.

5. На четырёх заводах изготовлены турбины для четырёх однотипных кораблей. Верфи расположены в разных городах. Перевозка оплачивается заказчиком. Им же определены разные цены на турбины каждого завода в усл. руб.:

	$В_1$	$В_2$	$В_3$	$В_4$
$З_1$	200	210	205	205
$З_2$	180	185	175	180
$З_3$	190	190	180	195
$З_4$	200	205	200	210

Необходимо определить такой способ доставки турбин, чтобы доход от их продажи был максимальным.

Раздел 2. Элементы теории матричных игр

№ 1. Решить матричную игру (то есть найти цену игры и оптимальные стратегии игроков):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

13) Решить игру «чет-нечет».

Ответы:

1) 7/5; X=(0,8; 0,2); Y=(0,6; 0,4)

2) 3, (2,1)

3) 7/2; X=(0,25; 075); Y=(0,5; 0,5)

4) 2, (1,2), (2,2)

5) 5, (1,1), (1,2)

6) 7/5; X=(0,8; 0,2; 0); Y=(0,6; 0; 0,4)

7) 3; (2,1)

8) 2; (1,2); (1,3)

9) 0,2; X=(0,4; 0,6; 0)

10) 1; X=(0,5; 0,5)

11) 1/7; X=(5/7; 2/7)

12) 6/7; X=(3/14; 11/14)

13) 0; (1/2, 1/2)

№ 2. Найти смешанные стратегии в игре с платежной матрицей:

1. $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 10 \\ 6 & 4 & 3 & 12 \\ 10 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 15 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 & 3 \\ 10 & 12 & 4 & 7 & 2 \\ 15 & 10 & 8 & 7 & 4 \\ 10 & 7 & 8 & 12 & 8 \\ 7 & 10 & 11 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 & 70 & 80 \\ 90 & 300 & 140 & 100 & 50 \\ 80 & 150 & 90 & 200 & 100 \\ 70 & 250 & 300 & 100 & 60 \end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 6 \\ -2 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & -2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

5. $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 3. Магазин может завезти в различных пропорциях товары трех типов (*а*, *б* и *в*). Их реализация, а следовательно, и получаемая магазином прибыль зависят от вида товаров и состояния спроса. Предполагая, что последний может характеризоваться тремя состояниями (1, 2 и 3), и учитывая, что спрос связан с изменением моды и прогнозирование его невозможно, определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибылей:

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

№ 4. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую оно может сразу отправить потребителю (стратегия *а*), отправить на склад (стратегия *б*) или затребовать ее после длительного периода времени (стратегия *в*) для длительного хранения.

В свою очередь потребитель может немедленно приобрести эту продукцию (стратегия 1), приобрести ее в течение небольшого отрезка времени (стратегия 2) или затребовать ее после длительного периода времени (стратегия 3).

Если предприятие выберет стратегию *а*, то дополнительные затраты на хранение и обработку продукции не потребуются.

Если потребитель применит стратегии 2 и 3, то предприятие потерпит убытки из-за порчи продукции. Наоборот, если предприятие выберет стратегию *в*, а потребитель – стратегию 1, то возникнут неоправданные расходы на консервацию продукции. Определить оптимальное соотношение между продукцией, отправляемой на склад и на дополнительную обработку, руководствуясь минимаксным критерием при следующей матрице затрат:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

№ 5. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать две культуры – *а* и *б*. Необходимо определить (графическим и симплекс-методом), как сеять эти культуры, если при прочих равных условиях их урожаи зависят от погоды, а план посева должен обеспечить наибольший доход (прибыль от реализации выращенной продукции определяется полученным объёмом). В зоне рискованного земледелия (а таковой является большая часть России) планирование посева должно осуществляться с учётом наименее благоприятного состояния погоды.

Таким образом, одной из сторон выступает сельскохозяйственное предприятие, заинтересованное в том, чтобы получить наибольший доход (игрок 1), а с другой стороны – природа, способная навредить сельскохозяйственному предприятию в максимальной степени (от неё зависят погодные условия) и преследующая тем самым прямо противоположные цели (игрок 2).

Принятие природы за противника равносильно планированию посева с учётом наиболее неблагоприятных условий; если же погодные условия окажутся благоприятными, то выбранный план даст возможность увеличить доход.

Налицо антагонистический конфликт, в котором у игрока 1 две стратегии *а* и *б*, у игрока 2 – три: засушливое лето, нормальное лето, дождливое лето.

В качестве выигрыша игрока 1 возьмём прибыль от реализации и будем считать, что расчёты прибыли сельскохозяйственного предприятия, млрд руб. в зависимости от состояния погоды сведены в матрицу:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

№ 6. Администрация некоторой фирмы ведет переговоры с профсоюзом рабочих и служащих о заключении контракта. Платежная матрица, отражающая интересы договаривающихся сторон, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 & 45 \\ 70 & 60 & 55 & 40 \\ 80 & 35 & 35 & 50 \\ 95 & 100 & 50 & 55 \end{pmatrix}.$$

Матрица описывает прибыль профсоюза (игрок А) и затраты администрации фирмы (игрок В). Найти решение игры.

Раздел 3. Принятие решений в условиях неопределенности и риска

Задача 1. Владелец небольшого магазина в начале каждого рабочего дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 55 руб. за ед. Цена реализации этого продукта – 70 руб. за ед. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 ед. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 40 руб. за ед.

Возможные исходы	1	2	3	4
Частота	10	25	40	25

Пользуясь критериями максимакса, максимина, минимакса, Гурвица, математического ожидания и Лапласа, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день. Чему равна ожидаемая стоимость полной информации?

Задача 2. Планируется выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Система оптовой торговли может поставить не более 50 станков; комплект поставки – 10 станков. Минимальный объем поставок – 20 станков. Соответственно вектор решений об объеме поставок X = (20, 30, 40, 50).

Ежегодный доход от продукции, снимаемой с одного станка, составляет 21.9 тыс. руб. Оптовая цена одного станка 4.775 тыс. руб., эксплуатационные расходы – 3.6 тыс. руб. Затраты на подготовку производства составляют 25.5 тыс. руб. и не зависят от числа станков и объема выпуска.

Пусть спрос пропорционален количеству продукции, снимаемой с S работающих станков, и для простоты можно ограничиться вектором состояний спроса S = (0, 10, 20, 30, 40, 50).

1. Используя решающее правило прибыль="доход–издержки", рассчитать элементы матрицы полезности.
2. Найти оптимальный вариант поставок станков, дающий максимальную ожидаемую прибыль.

Задача 3. Задача о производстве CD-дисков.

Для производства имеются следующие условия.

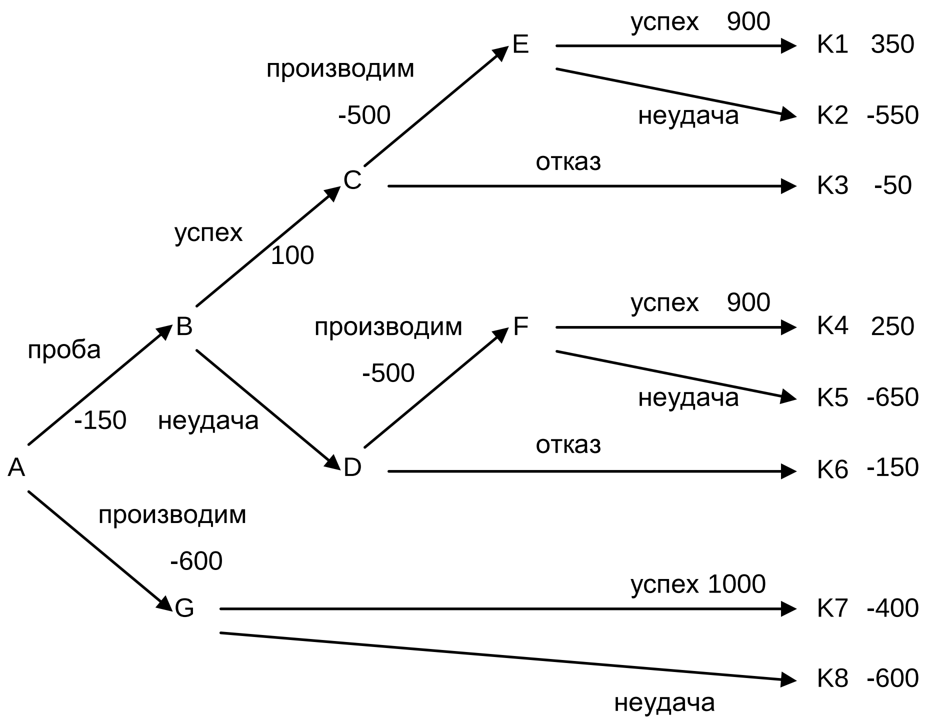
1. Постоянные затраты 50 000 д.е.
2. Переменные 10 д.е. на каждый диск
3. Продажная цена 20 д.е. на каждый диск.
4. Гонорар 50 000 д.е.

Необходимо решить вопрос о производстве 50 000 дисков для их широкой продажи.

Дополнительные сведения.

Часто используется практика пробного выпуска 5000 шт. и продажи в ограниченном регионе. Обычно, если пробная партия хорошо продаётся, то вероятность продажи крупной партии составляет 80%, если же пробная партия продаётся плохо – 20%.

1. Прямой ход. Построение дерева решения.



2. Обратный ход. Оценка альтернатив.

Вычислите математическое ожидание и ответьте на вопрос задачи.

Задача 4. Определите вектор состояний внешней среды и вектор решений. Найдите решение задачи, используя критерии принятия решений в условиях неопределенности. Оцените полученное оптимальное решение с позиций здравого смысла.

Фирма может за небольшую плату (100 руб.) составить любому студенту программу для каких-то типовых расчетов на ПК. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить до 10 заказов. Стоимость аренды машинного времени составляет 800 руб. в месяц (этого времени достаточно для выполнения 10 работ). Количество студентов, пользующихся услугами фирмы, не превышает 100 человек в месяц. Определить число сотрудников фирмы, дающее максимум общего дохода (для регистрации фирмы необходима численность не менее двух человек).

Задача 5. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

А. Построить большой завод стоимостью M_1= 650 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R_1= 300 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1= 0,7 и низкий спрос (ежегодные убытки R_2 = 85 тысяч долларов) с вероятностью p_2 = 0,3.

Б. Построить маленький завод стоимостью M_2= 360 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T_1= 120 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1= 0,7 и низкий спрос (ежегодные убытки T_2 = 60 тысяч долларов) с вероятностью p_2 = 0,3.

В. Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p_3= 0,9 и p_4= 0,1 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p_5=0,8 и p_6 = 0,2 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Попробуйте самостоятельно нарисовать дерево решений и определить наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах. Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

Ответ: Нужно строить большой завод. 272,5 тысяч долларов.

Раздел 4. Многошаговые модели принятия решений и динамическое программирование

Задача 1. Планируется деятельность трех промышленных предприятий на год. Начальные средства 7 млрд усл. руб. Средства, вложенные в k-е предприятие, приносят в конце года доход $f_k(x)$.

Эти функции заданы таблично:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	7	6
2	9	9	10
3	12	11	13
4	14	13	15
5	15	16	16
6	18	19	18
7	20	21	21

Считаем, что работа предприятия не влияет на работу других предприятий и суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Задача 2. В условиях задачи 1 найти оптимальное распределение средств S_0=6.

Задача 3. В условиях задачи 1 найти оптимальное распределение средств S_0=8.

Задача 4. В условиях задачи 1 найти оптимальное распределение средств S_0=7 между четырьмя предприятиями, если функция прибыли для четвертого предприятия задана в таблице:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f_4(x)$	3	5	7	11	13	15	20

Задача 5. Имеется 4 ед. продукции, нужно её распределить по магазинам. Доход, который получают при этом: $\mathrm{f}_1(u_1)=\frac{1}{4}u_1(8-u_1)$ – 1-й магазин, если получит u_1 единиц продукции, $\mathrm{f}_2(u_2)=\frac{u_2^2}{4}$ – 2-й магазин, если получит u_2 единиц продукции, $\mathrm{f}_3(u_3)=\frac{3u_3}{4}$ – 3-й магазин, если получит u_3 единиц продукции.

Нужно получить максимальный доход от распределения.

Задача 6. Некоторое предприятие располагает капиталом 10 млн д.е. Имеется четыре возможности (A, B, C, D) для инвестирования этого капитала. Предположительный доход в единицах 10 000 д.е. от инвестирования при каждой такой возможности указан в таблице:

Млн. д.е.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A, в 10000 д.е	28	45	65	78	90	102	113	123	132	138
B, в 10000 д.е	25	41	55	65	75	80	85	88	90	90
C, в 10000 д.е	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
D, в 10000 д.е	20	33	42	48	53	56	58	60	60	60

Необходимо определить сумму инвестиции для каждой возможности так, чтобы доход был максимальным.

Задача 7. Необходимо определить кратчайший маршрут между городами A и K, если заданы следующие расстояния:

Расстояния при движении из города в другой город															
Из	A		M		L			Q		N		O		R	S
В	M	L	Q	N	N	Q	O	R	S	R	S	R	S	K	K
км	5	3	4	5	3	8	5	3	6	5	4	9	5	5	4

Задача 8. (Задача о загрузке)

Для загрузки судна ограниченной грузоподъемности 7 тонн имеются три вида груза. Известны v_i – вес единицы i-го груза и $f_i(x_i)$ – стоимость перевозки x_i единиц i-го груза (i=1,2,3). Определить количество груза i-го вида, которое следует погрузить на судно, чтобы минимизировать стоимость перевозки груза. В том случае, если груз i-го вида не доставлен, выплачивается штраф в размере $f_i(0)$. Величины v_i составляют v_1=1 т, v_2=2 т, v_3=3 т, а функции $f_i(x_i)$ заданы в таблице:

x_i	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$
0	400	550	700
1	300	400	500
2	250	290	350
3	210	200	
4	170		
5	140		
6	110		
7	20		

Задача 9. Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после чего продаётся. В начале каждого года принимается решение о замене оборудования новым или о сохранении старого. Стоимость нового оборудования 4000 усл. руб. После t лет эксплуатации оборудование можно продать за g(t)=p02-t руб. Затраты на содержание оборудования равны r(t)=600(t+1).

Определить такой план эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты были минимальны.

Задача 10. Автомашина эксплуатируется в течение 6 лет. В начале каждого года может быть принято решение о замене машины новой. Стоимость новой машины зависит от года покупки. $p_k = 5000 + 500(k-1)$ руб. После t лет эксплуатации машину на k-м году можно продать за $\varphi(t) = p_k \cdot 2^{-t}$ руб. Стоимость содержания машины в течение k-го года составляет $r_k(t) = 0{,}1 p_k \cdot (t+1)$ руб.

Найти оптимальный способ эксплуатации машины: когда нужно заменить машину новой, чтобы суммарные затраты (с учетом затрат на покупку новой машины в начале срока эксплуатации и компенсации за счет заключительной продажи) были минимальны.

Список литературы

1. Кремер, Н.Ш. Исследование операций для экономистов /Н.Ш. Кремер – М.: ЮНИТИ, 2006. – 407 с.

2. Таха, Х. Введение в исследование операций /Х. Таха – М.: Вильямс, 2007. – 912 с.

3. Кузнецов Б. Т. Математические методы и модели исследования операций /Б.Т. Кузнецов – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 719 с.

4. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие для студентов вузов / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 432 с.

5. Шелобаев, С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для студентов вузов экон. спец. / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.

Прокопенко Наталья Юрьевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Редактор
Т.Л. Батаева

Подписано в печать   Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 9,8. Усл. печ. л.10,2. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
http://www. nngasu.ru, srec@nngasu.ru