

Г. А. Маковкин, М. Ф. Сухов

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ (ЦРС)

Учебное пособие

Нижний Новгород
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г. А. Маковкин, М. Ф. Сухов

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ (ЦРС)

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2022

ББК 30.12
М 16
С 91
УДК 539.3

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

А.К. Ломунов – д-р физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник НИИ Механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный ун-т им. Н. И. Лобачевского»

А.Ю. Панов – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»

Маковкин Г.А. Центральное растяжение-сжатие (ЦРС) [Текст]: учеб. пособие / Г. А. Маковкин, М. Ф. Сухов; Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ, 2022. – 32 с. ISBN 978-5-528-00479-2

Пособие содержит теоретические сведения и основные методы расчета стержневых элементов строительных конструкций: стоек, колонн, которые находятся в условиях ЦРС. Большое внимание уделено вопросам деформирования стержней в продольном и поперечном направлениях и связанное с этим – законом Пуассона и коэффициентами Пуассона для различных материалов. Выводится закон Гука, объясняется модуль Юнга. Подробно излагаются методы расчета на прочность: метод допускаемых напряжений, метод предельного равновесия, метод предельного состояния.

Примеры расчета сопровождаются необходимыми пояснениями к решению. В пособии приводятся многочисленные примеры и задачи для самостоятельного решения домашних и классных контрольных работ по дисциплине Техническая механика.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Рис. 18

ББК 30.12

ISBN 978-5-528-00479-2

© Г.А.Маковкин,
М.Ф.Сухов, 2022
© ННГАСУ, 2022

Содержание

1. Деформации при ЦРС.....	5
2. Напряжения при ЦРС.....	8
3. Расчет на прочность методом допускаемых напряжений.....	10
4. Метод расчета на прочность.....	11
5. Способы постановки задач расчета на прочность.....	12
6. Перемещение сечений стержня. Расчет на жесткость.....	14
7. Напряжения в наклонных сечениях.....	15
8. Закон парности касательных напряжений.....	18
9. Понятие о концентрации напряжений.....	21
10. Примеры решения задач.....	23
11. Литература.....	32

1. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЦРС

Вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только продольное усилие N , называется центральным (осевым) растяжением-сжатием (ЦРС). Центральное растяжение-сжатие чаще всего возникает в центрально сжатых колоннах и стойках, в тросах, а также в стержнях ферм. На рис. 1 показано, что при растяжении, когда сила направлена «от сечения», продольная сила считается положительной, а при сжатии, когда она направлена «к сечению», – отрицательной.

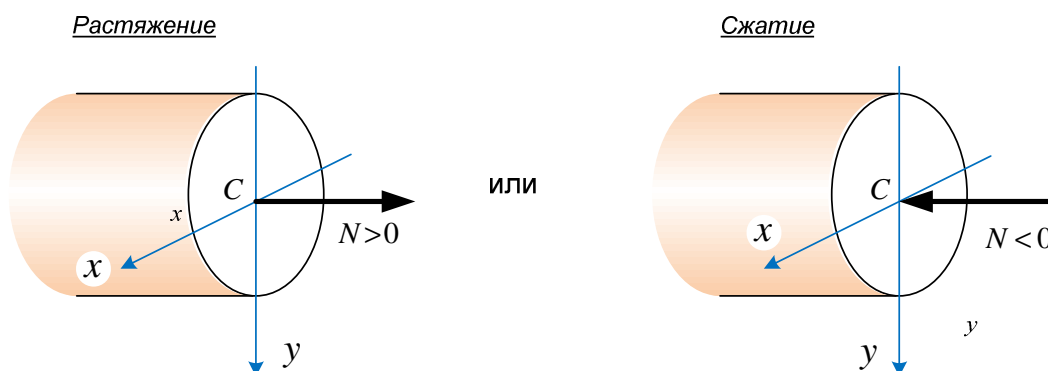


Рис. 1

Усилие N находится из уравнения равновесия, составленного для отсеченной части стержня.

Рассмотрим деформации, которые возникают при растяжении стержня.

Взяв стальную полосу, выделим, в соответствии с принципом Сен-Венана, область достаточно удалённую от точек приложения внешних сил. В выделенной области нанесём на её поверхность тела сетку линий, расположенных через равные промежутки, как в продольном, так и в поперечном направлении. Пусть характерная ячейка этой сетки имеет размеры $a \times b$.

После приложения растягивающих внешних сил F внутренняя продольная сила N будет равна F . Эксперименты показывают, что в результате произойдут деформации стержня, при которых поперечные сечения останутся плоскими и перпендикулярными к оси стержня. При этом все ячейки сетки изменят свои размеры одинаковым образом: в продольном направлении эти размеры увеличатся, а в поперечном – уменьшатся (рис. 2).

Изменения размеров являются **абсолютными линейными**

деформациями ячейки сетки:

$$\Delta a = a' - a, \quad \Delta b = b' - b. \quad (1)$$

Удобнее оценивать деформации с помощью **относительных линейных деформаций**, поскольку они не зависят от размеров ячейки:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{np} = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{nonep} = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2)$$

Поскольку, как отмечено выше, все ячейки сетки изменяют свои размеры одинаковым образом, то относительные деформации при ЦРС в пределах поперечного сечения будут оставаться постоянными:

$$\varepsilon_z(x, y) = const, \quad \varepsilon_y(x, y) = const.$$

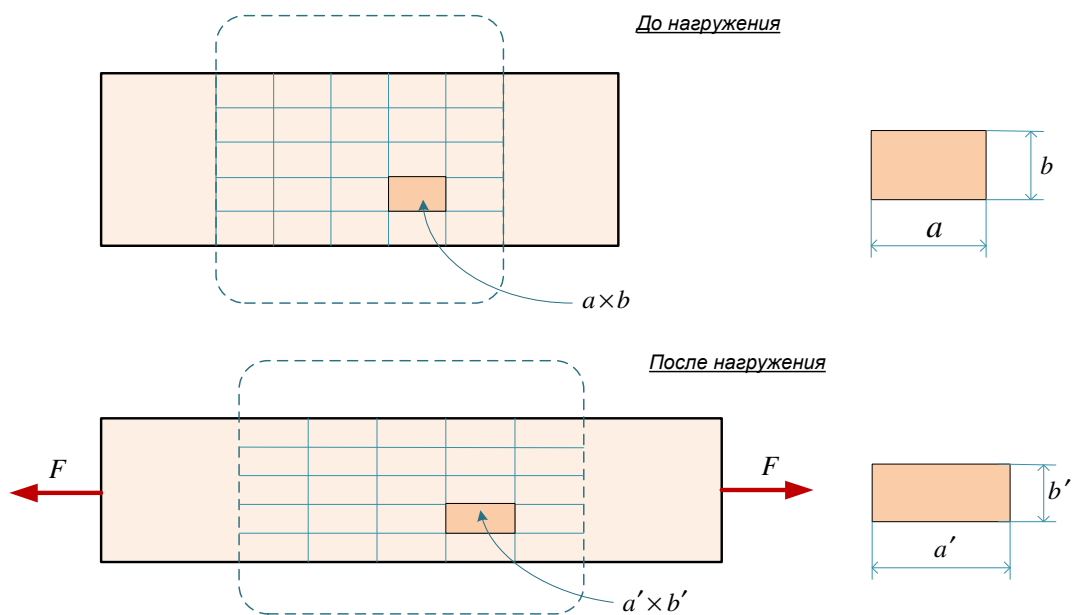


Рис. 2

Очевидно, что знаки продольных и поперечных деформаций будут различными. Кроме того, опыты показывают, что отношение поперечной деформации к продольной для каждого конкретного материала есть величина постоянная:

$$\frac{\varepsilon_{nonep}}{\varepsilon_{прод}} = -\nu = const. \quad (3)$$

Приведённое соотношение известно как **закон Пуассона**.



Симон Дени Пуассон
1781 — 1840, Франция

Выдающийся французский ученый, которого по праву считают одним из создателей современной математической физики.

Его имя часто встречается в учебниках по математическому анализу и электромагнетизму, теории вероятностей и акустики, квантовой механике и теории упругости.

В истории науки Пуассон стоит в одном ряду с его выдающимися современниками - Лапласом, Лагранжем, Фурье, Коши, Ампером, Гей-Люссаком, Френелем.

Коэффициент ν называется **коэффициентом Пуассона**, который, как и модуль Юнга, является физико-механической характеристикой материала.

Для различных материалов значения коэффициента Пуассона принимают значения, существенно отличающиеся друг от друга. Приведём примеры:

$\nu = 0$ для пористых материалов, таких как поролон;

$\nu = 0.5$ для материалов, которые в процессе деформирования не изменяют объём, таких как резина;

$\nu = 0.25 \div 0.3$ для различных марок стали.

2. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЦРС

Продольная сила N представляет собой сумму распределённых по поперечному сечению нормальных напряжений:

$$N = \int_A \sigma_z dA,$$

причём в общем случае закон распределения этих напряжений неизвестен.

Эксперименты показывают, что вплоть до определённых границ напряжения прямо пропорциональны деформациям. Эта зависимость носит название закона Гука, и при ЦРС записывается следующим образом:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z,$$

где E – экспериментально определяемая постоянная, известная как **модуль Юнга**.

Если принять, что закон Гука выполняется, то поскольку деформации являются постоянными, то и напряжения в поперечном сечении также будут постоянными (рис. 3):

$$\sigma_z(x, y) = \text{const.}$$

Тогда, вынося напряжение из-под интеграла (*), получим, что

$$N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z \int_A dA = \sigma_z \cdot A.$$

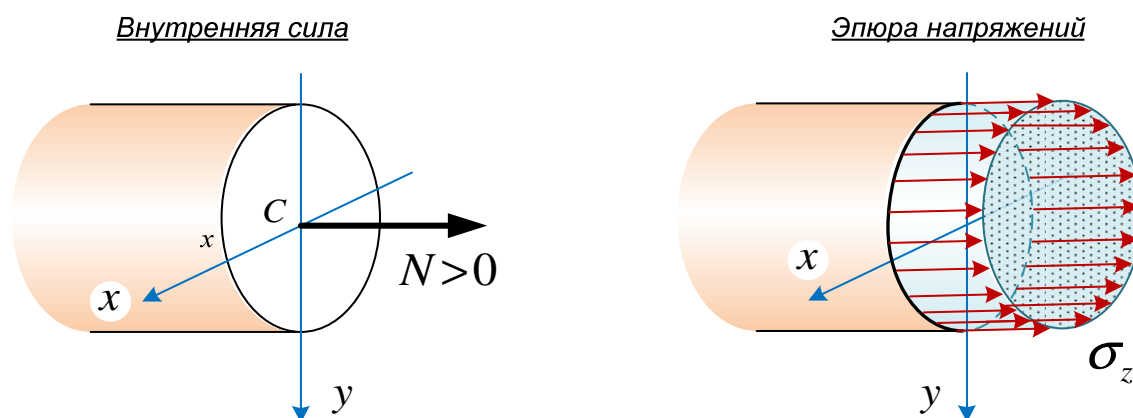


Рис. 3

Отсюда следует формула для определения напряжений при ЦРС:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}. \quad (4)$$



**Роберт Гук
1635-1703**

Английский естествоиспытатель Роберт Гук был одним из наиболее выдающихся умов семнадцатого века. Он работал над разнообразными гипотезами и приборами, усовершенствовал строение микроскопа и первым установил особенности клеточного строения тканей. Занимался исследованиями в самых разнообразных областях науки: биологии, оптике, механике.



**Томас Юнг
1773-1829**

Английский ученый, один из основоположников волновой теории света. Сформулировал принцип интерференции, высказал идею о поперечности световых волн. Объяснил аккомодацию глаза, разработал теорию цветного зрения. Ввел характеристику упругости (модуль Юнга). Опубликовал множество трудов по акустике, астрономии, расшифровке египетских иероглифов.

3. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ МЕТОДОМ ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Основным методом расчёта на прочность в сопротивлении материалов является метод допускаемых напряжений.

Идея, лежащая в основе метода, заключается в следующем:

Наибольшие напряжения в конструкции не должны превышать экспериментально установленного опасного уровня, превышение которого может привести к развитию процессов разрушения материала.

В качестве опасных напряжений для пластичных материалов обычно принимают предел текучести, а для хрупких материалов – временное сопротивление:

$$\sigma_{\text{опас.}} = \begin{cases} \sigma_T & \text{для пластичных материалов} \\ \sigma_B & \text{для хрупких материалов.} \end{cases} \quad (5)$$

Реальные параметры эксплуатации конструкции могут отклоняться в неблагоприятную сторону от нормативных значений, принимаемых при проектировании и расчете:

- Конструкция может иметь неучтённые дефекты, возникшие при её изготовлении, транспортировке и монтаже,
- Материал конструкции может иметь пониженные прочностные характеристики, что возможно по причине некоторого статистического разброса свойств материалов,
- Нагрузки при неблагоприятных погодных или эксплуатационных условиях могут превысить расчётные значения.

Чтобы гарантировать, что опасные напряжения в процессе эксплуатации конструкции не возникнут, в качестве верхней границы напряжений (рис. 4) принимаются **допускаемые напряжения**, которые получаются путем деления опасных значений на **коэффициент запаса**.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{опас.}}}{n}, \quad n > 1 \quad (n - \text{коэффициент запаса}). \quad (6)$$

Таким образом, **условие прочности при ЦРС** формулируется следующим образом:

$$\max |\sigma_z| = \max \left| \frac{N}{A} \right| \leq [\sigma] \quad (7)$$

Если прочность материала на растяжение и сжатие отличаются, то

условие прочности записывается в виде системы неравенств, поскольку прочность стержня должна быть обеспечена как при сжатии, так и при растяжении:

$$\begin{cases} \max \sigma_z^P \leq [\sigma]^P \\ \max |\sigma_z^C| \leq [\sigma]^C, \end{cases} \quad [\sigma]^P = \sigma_{онас.}^P / n, \quad [\sigma]^C = \sigma_{онас.}^C / n. \quad (8)$$

4. МЕТОДЫ РАСЧЁТА НА ПРОЧНОСТЬ

Метод допускаемых напряжений – не единственный из разработанных методов. Наиболее распространены три метода расчёта на прочность.

Перечислим эти три метода:

- **Метод допускаемых напряжений**, который для ЦРС рассмотрен в §3.

Метод допускаемых напряжений является классическим методом расчёта, разработанным в дисциплине сопротивления материалов.

- **Метод предельного равновесия**, известный также как **метод разрушающих нагрузок** или **метод допускаемых нагрузок**.

Принципиальное отличие метода разрушающих нагрузок от метода допускаемых напряжений заключается в том, что он разрешает появление в конструкции пластических деформаций.

Рассматривая равновесие конструкции, метод разрушающих нагрузок позволяет найти такой уровень нагрузки, при котором конструкция превращается в механизм (подвижную систему) в результате развития в ней пластических деформаций.. Эксплуатационный уровень нагрузки должен меньше разрушающего уровня. Это достигается делением разрушающей нагрузки $F_{разр.}$ на коэффициент запаса:

$$[F] = \frac{F_{разр.}}{n}, \quad n > 1 \quad (n - \text{коэффициент запаса}). \quad (9)$$

- **Метод предельных состояний**, который в настоящее время принят в качестве нормативного метода расчёта.

Метод предельных состояний отказывается от понятия единого коэффициента запаса, устанавливаемого для всей конструкции. В

этом методе на основе статистических данных о разбросе свойств материала, об отклонениях погодных условий от средних значений, о вероятности одновременного приложения различных воздействий и т.п. вводится целый комплекс коэффициентов более дифференцированно учитывающих особенности работы конструкции. Вводятся также коэффициенты учитывающие степень ответственности сооружения и условия его работы.

В дальнейшем будем рассматривать **метод допускаемых напряжений**, а особенностям расчёта **методом разрушающих нагрузок** и **методом предельных состояний** позже посвятим отдельные лекции.

5. СПОСОБЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ РАСЧЁТА НА ПРОЧНОСТЬ

Существует три способа постановки задачи при расчёте на прочность методом допускаемых напряжений. Рассмотрим их на следующем примере.

ПРИМЕР

Рассмотрим вертикальный стержень, нагруженный двумя сосредоточенными силами. Площадь поперечного сечения в верхней части стержня имеет в два раза меньше, чем в его нижней части.

Построив эпюру продольных сил N , мы в дальнейшем можем найти закон по которому изменяются напряжения. Для этого на каждом участке стержня надо продольную силу поделить на соответствующую площадь поперечного сечения. Эпюра показывает (рис. 4), что наиболее опасным является третий участок, напряжение на котором равно $\frac{3F}{2A}$.

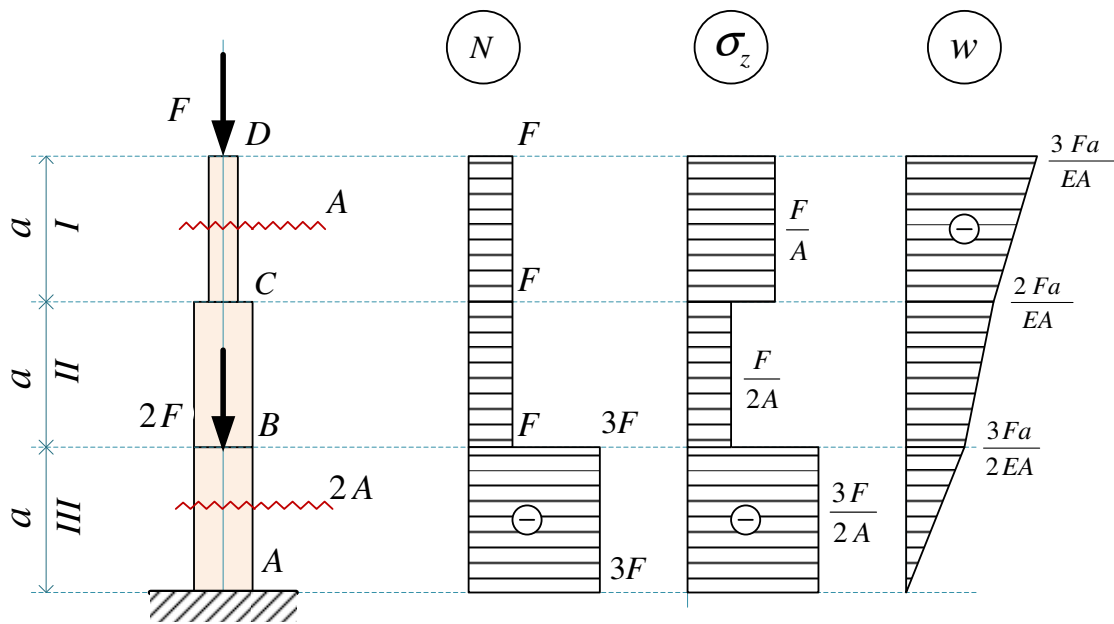


Рис. 4

Зная наибольшее напряжение можно по формуле (7) сформировать условие прочности:

$$\frac{3F}{2A} \leq [\sigma].$$

Сформированное условие прочности позволяет выполнить расчёты следующих трех видов:

- Определение площади поперечного сечения A можно выполнить, если известен материал конструкции и нагрузка, то есть известны $[\sigma]$ и F :

$$A \geq \frac{3F}{2[\sigma]}.$$

- Определение допускаемой нагрузки F можно выполнить, если известен материал конструкции и площадь поперечного сечения, то есть $[\sigma]$ и A :

$$F \leq \frac{2A[\sigma]}{3}.$$

- Если известен материал конструкции, нагрузка и площадь поперечного сечения, то есть $[\sigma]$, F , A , то можно выполнить проверку прочности стержня, убедившись в том, что неравенство выполняется.

6. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ. РАСЧЁТ НА ЖЁСТКОСТЬ

Закон Гука, записанный в виде

$$\sigma_z = E\varepsilon_z,$$

связывает нормальное напряжение и относительную деформацию.

Существует другая формулировка закона Гука при ЦРС, которая связывает продольную силу и абсолютную деформацию участка стержня. Для получения этой формулировки учтём, что

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}.$$

Получим следующее равенство:

$$\frac{N}{A} = \frac{E \cdot \Delta l}{l},$$

из которого можно получить формулу, позволяющую вычислить изменение длины растягиваемого или сжимаемого участка стержня:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (10)$$

Произведение EA , которое стоит в знаменателе этой формулы обычно называют **жёсткостью стержня при ЦРС**. Величина эта измеряется в килоньютонах, и характеризует способность стержня сопротивляться продольной деформации (изменению длины).

В качестве примера определим изменение длин трех участков стержня, рассмотренного в предыдущем параграфе:

$$1 \text{ участок: } \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{-F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$2 \text{ участок: } \Delta l_1 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{-F \cdot a}{E \cdot 2A};$$

$$3 \text{ участок: } \Delta l_1 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} = \frac{-3F \cdot a}{E \cdot 2A}.$$

Сечение A жестко зашце́млено на опоре и по этой причине оно неподвижно.

Чтобы вычислить перемещение по оси z сечений B , C и D , надо суммировать изменения длин тех участков, которые расположены между неподвижной точкой A и рассматриваемым сечением:

$$w_B = \Delta l_3 = -\frac{1.5F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$w_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = -\frac{1.5F \cdot a}{E \cdot A} - \frac{0.5F \cdot a}{E \cdot A} = -\frac{2F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$w_B = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = -\frac{1.5F \cdot a}{E \cdot A} - \frac{0.5F \cdot a}{E \cdot A} - \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = -\frac{3F \cdot a}{E \cdot A}.$$

По найденным значениям перемещений на рис. 4 построена эпюра перемещений точек стержня $w(z)$.

Умея вычислять абсолютные деформации, можно выполнить расчёт на жёсткость. Условие жесткости при ЦРС можно сформулировать следующим образом:

$$\Delta l \leq [\Delta l]. \quad (11)$$

В рассмотренной выше задаче это условие будет выглядеть так:

$$\frac{3F \cdot a}{E \cdot A} \leq [\Delta l].$$

Так же, как и при расчёте на прочность, с помощью условия жёсткости можно решать задачи трёх типов:

- Определение допускаемой нагрузки;
- Определение площади поперечного сечения;
- Проверка жёсткости.

Однако на практике после выполнения расчёта на прочность выполняют только проверку условия жесткости. Задача изменения ранее подобранных значений нагрузки или площади сечения ставится только в том случае, когда условие жёсткости не выполняется.

7. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ

Рассмотрим стержень (пластину), растягиваемую продольной силой F (рис. 5). При этом очевидно, что внутренняя сила N будет равна F . Проведём поперечное сечение 1-1 и сечение 2-2, наклонённое под углом α . Пусть A – площадь поперечного сечения 1-1, а A_α – площадь поперечного сечения 2-2. Очевидно, что

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha},$$

а также, что напряжение в поперечном сечении 1-1 равно

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Полное напряжение p_z в сечении 2-2 можно найти из уравнения

равновесия

$$\sum Z_i = 0,$$

составленного для треугольной призмы ABC:

$$p_\alpha \cdot A_\alpha = \sigma_z \cdot A \quad \text{или} \quad p_\alpha \cdot \frac{A}{\cos \alpha} = \sigma_z \cdot A.$$

Сокращая площади, получим

$$p_\alpha = \sigma_z \cdot \cos \alpha.$$

Раскладывая полное напряжение на нормальную и касательную составляющие, получим следующие компоненты напряжений:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha, \quad \tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha,$$

откуда $\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha,$ (12)

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_z \cdot \sin 2\alpha. \quad (13)$$

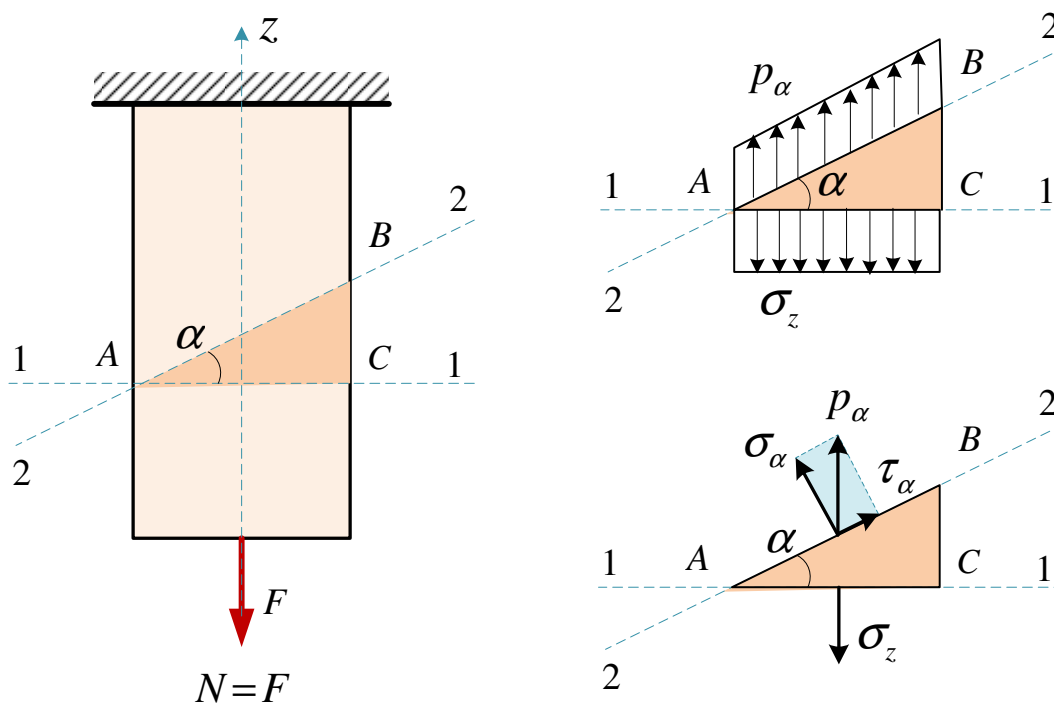


Рис. 5

Определим, при каком положении наклонного сечения (при каком значении α) эти напряжения достигают наибольших значений.

Ясно, что нормальное напряжение достигает наибольшего значения при $\cos \alpha = 1$, то есть в поперечном сечении 1-1 при $\alpha = 0$. Касательное

напряжение в этом сечении отсутствует.

Функцию $\tau_\alpha(\alpha)$ исследуем на экстремум, для чего возьмем первую производную

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\sigma_z \cdot \sin 2\alpha\right)}{d\alpha} = \sigma_z \cdot \cos 2\alpha$$

и приравняем её к нулю:

$$\cos 2\alpha = 0 \quad \text{при} \quad 2\alpha = 90^\circ, \quad \text{то есть при} \quad \alpha = 45^\circ$$

Таким образом, в случае ЦРС касательные напряжения достигают наибольших значений в площадках, наклонённых под углом 45° к оси стержня.

Подставив $\alpha = 45^\circ$ в (13), получим экстремальное значение касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z}{2}. \quad (14)$$

Данные экспериментальных исследований микроструктуры материалов при пластическом деформировании говорят о том, что пластические деформации происходят в результате сдвигов слоев материала по плоскостям, в которых возникают наибольшие касательные напряжения (рис. 6)..

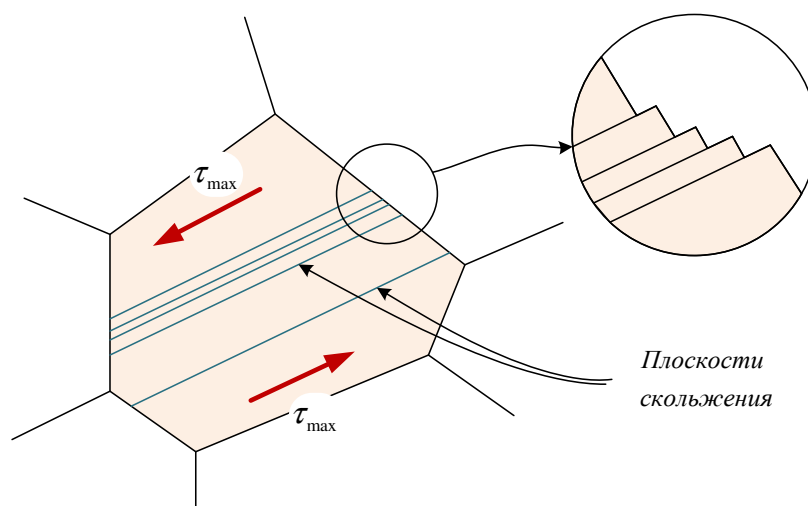


Рис. 6

Следовательно, при ЦРС пластические деформации должны развиваться в результате множественных сдвигов, происходящих по плоскостям, наклонённым под углом 45° к оси стержня.

8. ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим стержень (пластину), растягиваемую продольной силой F (рис. 8). Очевидно, что внутренняя сила N равна F . Выделим произвольно ориентированный по отношению к оси стержня прямоугольный объём, имеющий бесконечно малые размеры $a \times b$ и толщину t .

Через центральную точку объёма (точка K) проведём ориентированные по рёбрам параллелепипеда оси α, β, γ , и покажем действующие на гранях объёма напряжения, считая их положительными. Поскольку площадки расположены наклонно, в них будут возникать как нормальные, так и касательные напряжения.

Напряженно-деформированное состояние при ЦРС является однородным одинаковым во всех точках тела). В этом случае напряжения на противоположных гранях объёма также будут одинаковы.

Как известно из теоретической механики, равновесие плоской системы произвольно расположенных сил можно описать следующей системой уравнений: должны быть равны суммы проекций всех сил на оси α и β , а также должна обратиться в ноль сумма моментов всех сил системы относительно оси γ :

$$\begin{cases} \sum A_i = 0 \\ \sum B_i = 0 \\ \sum M_\gamma(F_i) = 0. \end{cases}$$

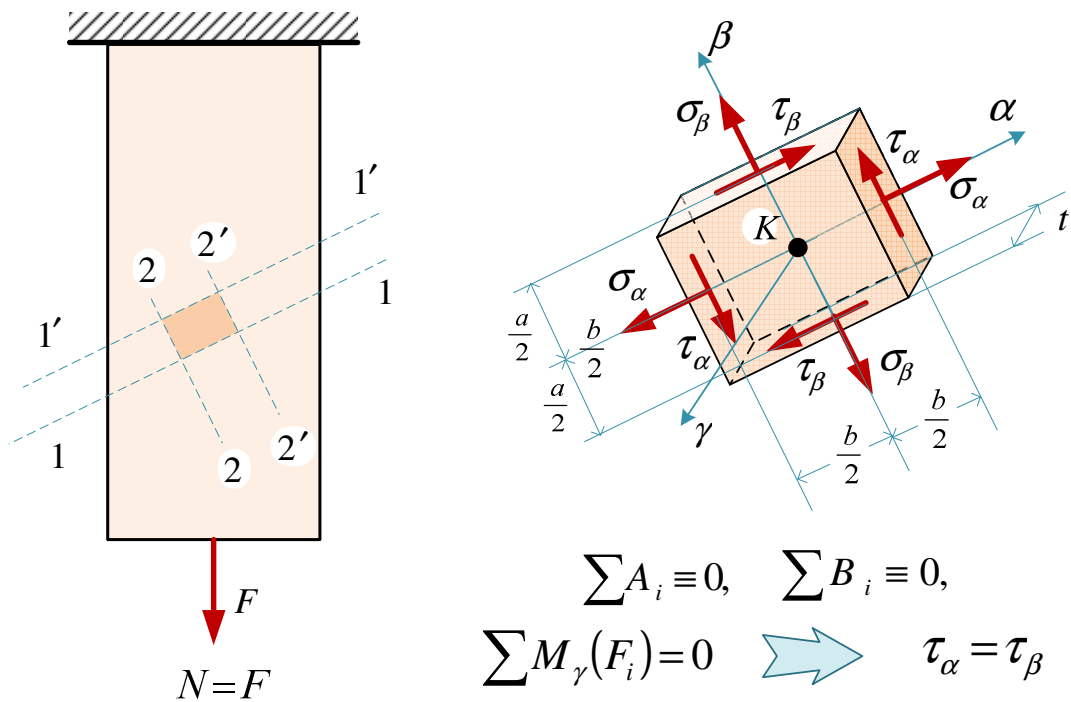


Рис. 8

Очевидно, что первые два уравнения системы выполняются тождественно. При формировании третьего уравнения моменты нормальных напряжений σ_α и σ_β , равны нулю, а суммирование моментов касательных напряжений приводит к следующему уравнению:

$$2\tau_\alpha(a \cdot t) \cdot \frac{b}{2} - 2\tau_\beta(b \cdot t) \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

Упрощая уравнение, получим формулу, известную как закон парности касательных напряжений:

$$\tau_\alpha = \tau_\beta \tag{15}$$

Сформулируем закон парности касательных напряжений:

Касательные напряжения, лежащие в одной плоскости в двух взаимно перпендикулярных площадках, равны по величине и оба направлены либо к линии пересечения площадок, либо от неё.

В целях лучшего понимания на рис. 9 показаны различные варианты расположения касательных напряжений. Варианты «а», «б» показывают состояния, при которых закон парности не действует. Вариант «в» показывает состояние, при котором закон парности должен действовать, но очевидно, что направление одного из напряжений показано неверно. И варианты «г» и «д» иллюстрируют действие закона парности касательных напряжений.

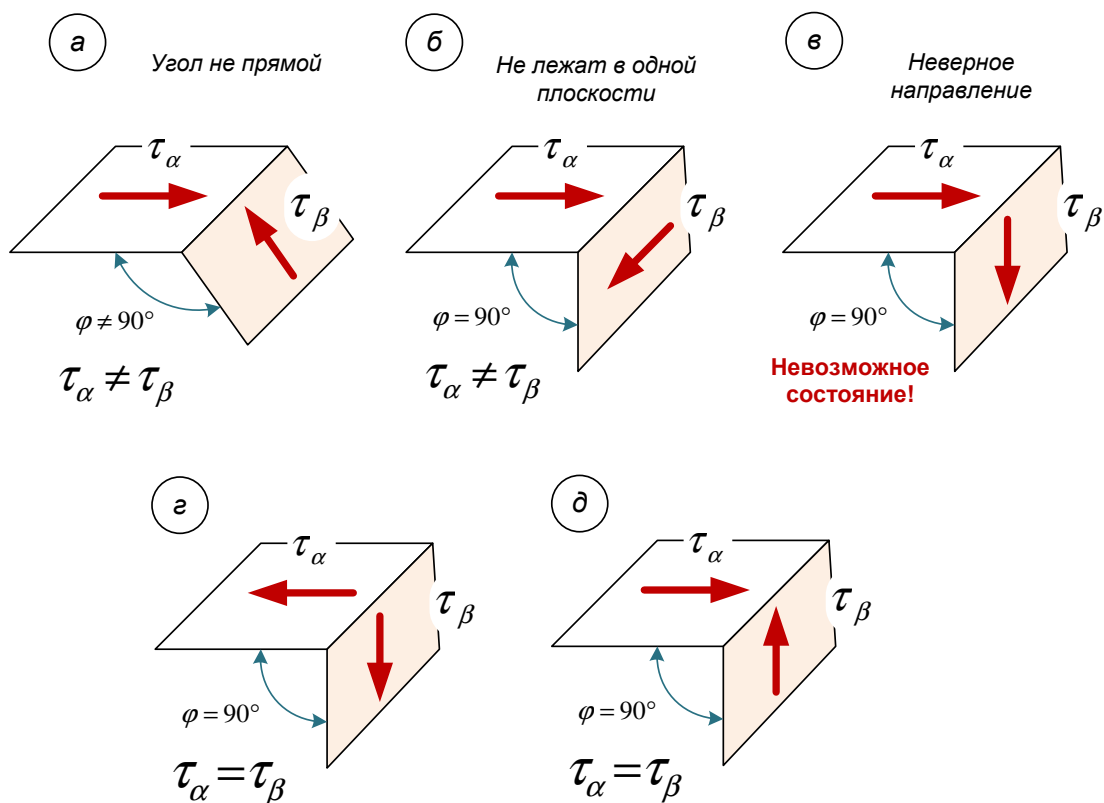


Рис.9

ПРИМЕЧАНИЯ:

- Закон парности касательных напряжений справедлив не только в случае ЦРС. Он носит универсальный характер и выполняется при всех видах сопротивления, при самых различных видах напряженно-деформированного состояния.
- С точностью до величин второго порядка малости закон выполняется также и в том случае, когда напряжённо-деформированное состояние в различных точках тела отличается друг от друга (неоднородное НДС).
- Поскольку на поверхности тела (рис. 10) касательные напряжения отсутствуют ($\tau_\alpha = 0$), то будут равны нулю также и касательные напряжения направленные перпендикулярно к контуру сечения и действующие в площадках, примыкающих к контуру поперечного сечения, так как $\tau_\beta = \tau_\alpha$ (рис. 10). Отсюда можно сделать вывод о том, что касательные напряжения в точках контура поперечного

сечения могут быть направлены только по касательной к контуру.

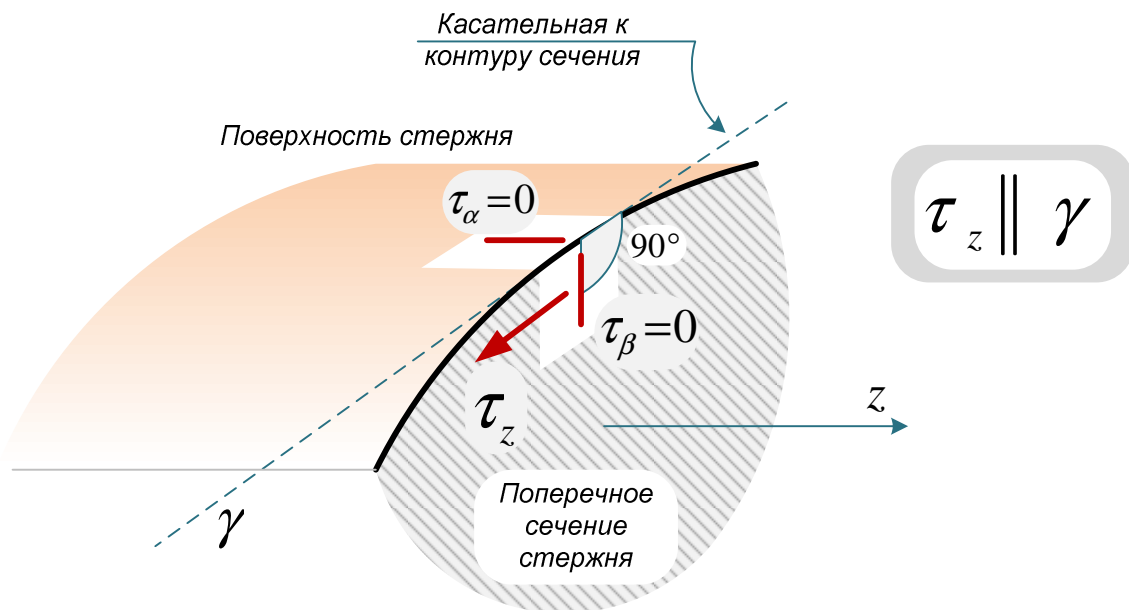


Рис. 10

9. ПОНЯТИЕ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

В сечениях, которые ослаблены отверстиями, надрезами, а также в местах резкого изменения геометрии конструкции наблюдается неравномерность распределения напряжений по поперечному сечению. В этих местах конструкции напряжения достигают значений, которые значительно превосходят значения, получаемые по формулам сопротивления материалов.

В качестве примера рассмотрим растягиваемую пластину, которая ослаблена отверстием круглой формы (рис.11)..

Введём следующие обозначения:

$A_{БР}$ – «площадь брутто» – площадь поперечного сечения стержня, проведённого в том месте, где отверстия нет;

$A_{НТ}$ – «площадь нетто» – площадь ослабленного сечения, проведенного в месте, где находится отверстие.

Очевидно, что $A_{НТ} = A_{БР} - A_{ОСЛ}$,

где $A_{ОСЛ}$ – площадь ослабления.

В приведённом на рис. 11 примере

$$A_{БР} = a \cdot t, \quad A_{ОСЛ} = d \cdot t, \quad A_{НТ} = (a - d) \cdot t.$$

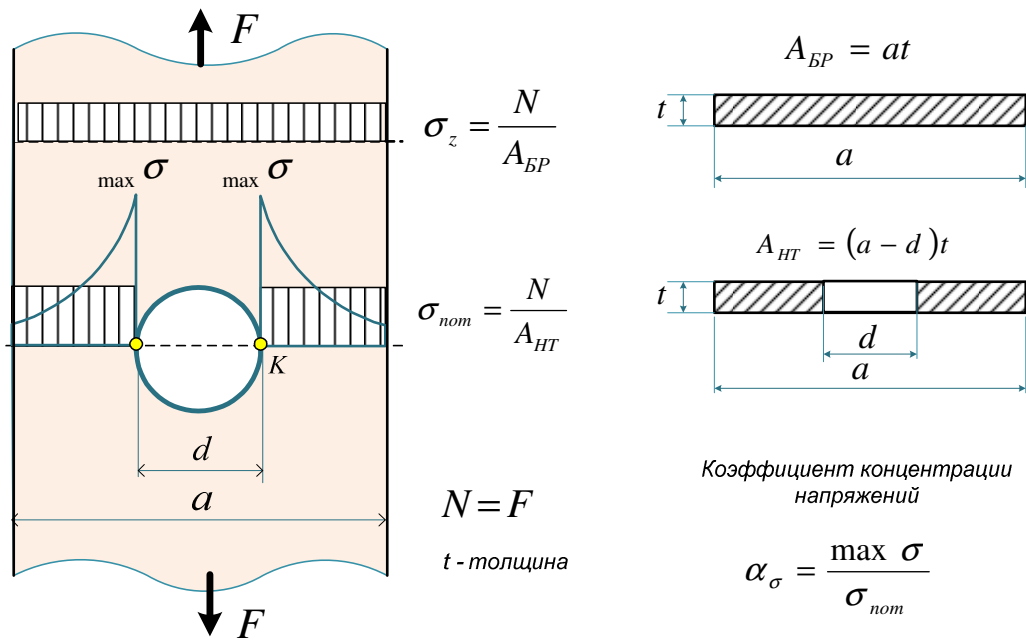


Рис. 11

В соответствии с принципом Сен-Венана, в сечениях достаточно отдаленных от места расположения ослабления (отверстия), напряжения будут равны

$$\sigma_z = \frac{N}{A_{BP}}.$$

В ослабленном сечении, если предположить равномерное распределение напряжений по сечению, будет получен следующий результат

$$\sigma_{NOM} = \sigma_{СРЕД} = \frac{N}{A_{HT}}.$$

Полученное осреднённое значение напряжений называют номинальным напряжением. Более точные решения, получаемые по формулам теории упругости, показывают, что напряжения в ослабленных сечениях, а также в местах резкого изменения геометрии конструкции, распределяются неравномерно.

Пиковые значения напряжений вблизи концентратора можно найти по формуле

$$\max \sigma = \alpha_\sigma \cdot \sigma_{NOM} . \tag{16}$$

Коэффициент α_σ называется **коэффициентом концентрации напряжений**. Его значение зависит от характера и размеров ослабляющих факторов.

Концентрация напряжений отрицательно влияет на прочность конструкции, особенно при переменных и циклических нагрузках. Для уменьшения отрицательного влияния концентрации напряжений при проектировании конструкции следует избегать резких изменений геометрии конструкции: углов, надрезов и т.п.

10. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Стержень, показанный на рис. 12, загружен тремя внешними силами. Площадь поперечного сечения стержня меняется ступенчато, принимая значение $A_1 = A$ на 1-м участке и $A_2 = A_3 = 2A$ – на 2-м и 3-м участках. Задано допустимое напряжение $[\sigma]$.

Сформировать условие прочности стержня.

Выразить из условия прочности

1. Площадь поперечного сечения A , при условии, что сила F задана;
2. Допустимое значение силы F при условии, что площадь A поперечного сечения задана.

Примечание: для экономии места заданный стержень и построенные эпюры показаны на одном рисунке.

Решение.

1. Строим эпюру продольных сил $N(z)$:

$$\begin{cases} N_1 = -2F \\ N_2 = -2F + 5F = +3F \\ N_3 = -2F + 5F - F = +2F \end{cases}$$

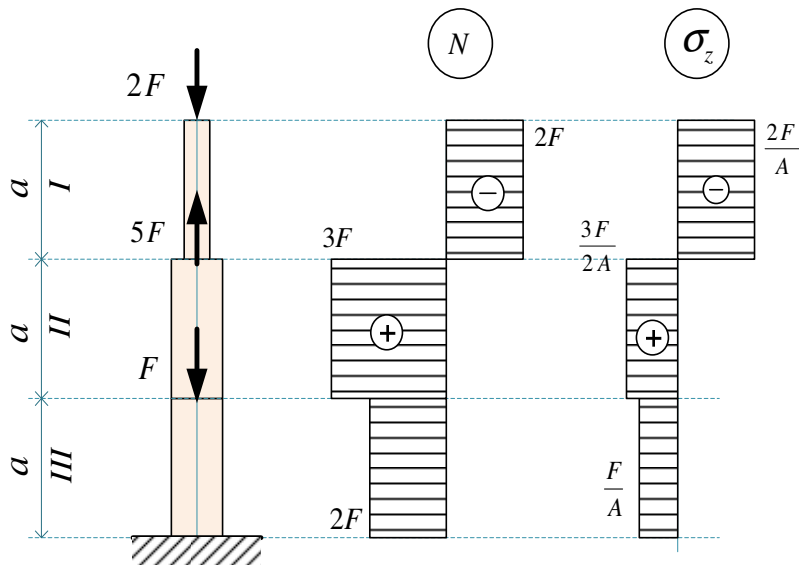


Рис. 12

2. Определяем опасное сечение, для чего строим эпюру изменения напряжения по длине стержня $\sigma_z(z)$:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-2F}{A} \\ \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{+3F}{2A} \\ \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{+2F}{2A} = \frac{+F}{A} \end{cases}$$

3. Для опасного сечения, которое находится на первом участке стержня, формируем условие прочности:

$$\max|\sigma_z| \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{2F}{A} \leq [\sigma]$$

4. Из условия прочности находим площадь поперечного сечения A при условии, что сила F известна:

$$A \geq \frac{2F}{[\sigma]}$$

5. Из условия прочности находим допускаемое значение силы F , считая, что площадь A задана:

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]}{2}$$

Задача решена

Примечание:

Если известны и площадь поперечного сечения, и нагрузка, то может быть поставлена задача проверки прочности стержня. Решение этой задачи сводится к проверке выполнения неравенства.

Задача 2.

Стержень, изображённый на рис. 13 загружен силами $F = 500$ кН и $P = 200$ кН, а также распределённой нагрузкой $q = 400$ кН/м². Первый и второй участки стержня выполнены из стали, а третий и четвертый – из алюминиевого сплава (дуралюмина).

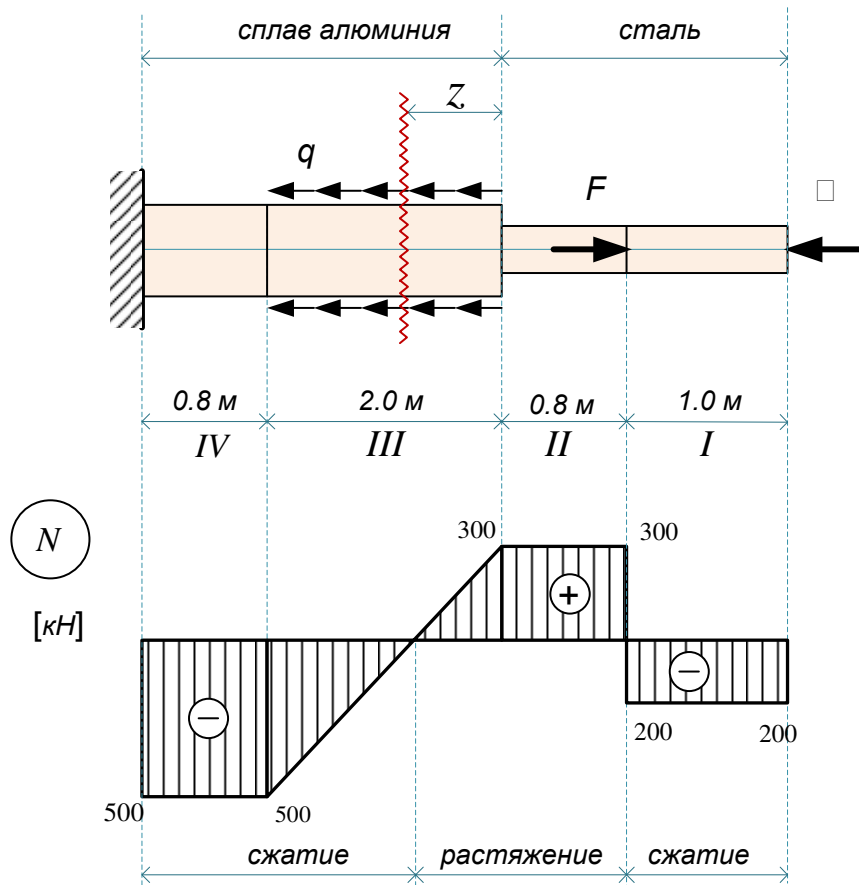


Рис. 13

Известны площади поперечных сечений на всех четырёх участках:

$$A_1 = A_2 = 20 \text{ см}^2; \quad A_3 = A_4 = 50 \text{ см}^2.$$

Даны физико-механические характеристики материалов:

$$[\sigma]_1 = [\sigma]_2 = 160 \text{ МПа}; \quad [\sigma]_3 = [\sigma]_4 = 100 \text{ МПа};$$

$$E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad E_3 = E_4 = 10^5 \text{ МПа}.$$

- Проверить прочность стержня.
- Если условие прочности стержня выполняется, найти чему равно изменение длины стержня (абсолютная деформация).

Примечание: для экономии места заданный стержень и построенные эпюры показаны на одном рисунке.

Решение.

1. Строим эпюру продольных сил $N(z)$:

1-й участок: $N_1 = -P = -200 \text{ кН};$

2-й участок: $N_2 = -P + F = -200 + 500 = 300 \text{ кНкН};$

3-й участок: $0 \leq z \leq 2 \text{ м},$

$$N_3 = -P + F - q \cdot z = -200 + 500 - 400 \cdot z = +300 - 400z;$$

4-й участок: $N_4 = -P + F - q \cdot 2 = -200 + 500 - 400 \cdot 2 = -500 \text{ кН};$

2. Проверяем прочность стержня

а. На 1 и 2 участках (сталь):

$$\max|\sigma_z| = \max\left|\frac{N}{A}\right| = \frac{300}{20} = 15 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 150 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{\text{ст}} = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено.

б. На 3 и 4 участках (дуралюмин):

$$\max|\sigma_z| = \max\left|\frac{N}{A}\right| = \frac{500}{50} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 100 \text{ МПа} = [\sigma]_{\text{сплав}}.$$

Условие прочности выполнено.

3. Вычисляем жесткости участков стержня:

$$E_1 A_1 = E_2 A_2 = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 20 \text{ см}^2 = 4 \cdot 10^5 \text{ кН},$$

$$E_3 A_3 = E_4 A_4 = 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 50 \text{ см}^2 = 5 \cdot 10^5 \text{ кН}.$$

4. Определяем изменения длин участков стержня (абсолютные деформации):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{-200 \cdot 1}{4 \cdot 10^5} = -0.0005 \text{ м} = -0.05 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{+300 \cdot 0.8}{4 \cdot 10^5} = +0.0006 \text{ м} = +0.06 \text{ см},$$

$$\Delta l_3 = \int_0^2 \frac{N_3 dz}{E_3 A_3} = \frac{1}{E_3 A_3} \int_0^2 (300 - 400z) dz = \frac{300 \cdot 2 - 400 \cdot 2^2 / 2}{5 \cdot 10^5} = -0.0004 \text{ м} = -0.04 \text{ см},$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{E_4 A_4} = \frac{-500 \cdot 0.8}{5 \cdot 10^5} = -0.0008 \text{ м} = -0.08 \text{ см}.$$

5. Находим изменение длины стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = -0.05 + 0.06 - 0.04 - 0.08 = -0.11 \text{ см.}$$

Задача решена

Задача 3.

Двухстержневая ферма нагружена сосредоточенной силой F (рис. 14).

1-й стержень выполнен из стали $[\sigma]_1 = 160 \text{ МПа}$,

2-й стержень выполнен из дерева $[\sigma]_2 = 12 \text{ МПа}$.

Вопрос 1. Найти допускаемое значение силы F , если известны площади поперечных сечений стержней : $A_1 = 4 \text{ см}^2$ и $A_2 = 25 \text{ см}^2$,

Вопрос 2. Найти площади поперечных сечений стержней A_1 и A_2 , если известно значение силы $F = 100 \text{ кН}$.

Решение

1. Вырезаем узел С (рис. 15).

Отброшенные стержни заменяем неизвестными внутренними силами N_1 и N_2 , считая оба стержня растянутыми.

2. Составляем систему уравнений равновесия узла С.

$$\begin{cases} \sum_i X_i = 0 \\ \sum_i Y_i = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -N_1 \sin 30^\circ - N_2 \sin 60^\circ = 0 \\ N_1 \cos 30^\circ - N_2 \cos 60^\circ - F = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_1 \cdot \frac{1}{2} - N_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ N_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - N_2 \cdot \frac{1}{2} - F = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} N_1 = -N_2 \sqrt{3} \\ N_1 \sqrt{3} - N_2 = 2F. \end{cases}$$

3. Решая систему уравнений находим усилия в стержнях, выражая их через неизвестную силу F :

$$N_1 = \frac{F\sqrt{3}}{2} \quad (\text{стержень растянут}), \quad N_2 = -\frac{F}{2} \quad (\text{стержень сжат}).$$

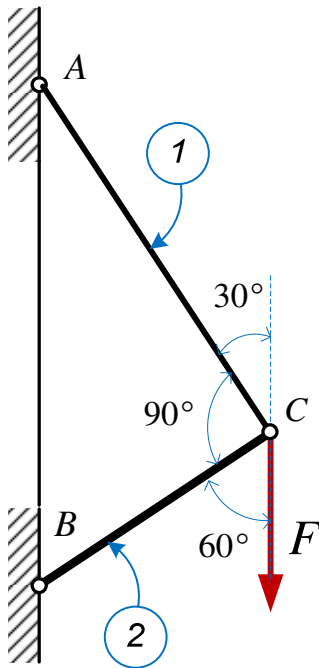


Рис. 14.

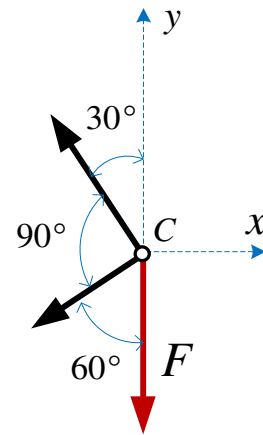


Рис. 15.

4. Из условий прочности стержней находим допускаемое значение силы F , если известны площади: $A_1 = 4 \text{ см}^2$ и $A_2 = 25 \text{ см}^2$:

$$\begin{cases} \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_1 & \left\{ \begin{aligned} \frac{F\sqrt{3}}{2} \leq A_1 \cdot [\sigma]_1 = 4 \text{ см}^2 \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 64 \text{ кН} \\ \frac{F}{2} \leq A_2 \cdot [\sigma]_2 = 25 \text{ см}^2 \cdot 1.2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 30 \text{ кН}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} F \leq \frac{64 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 74 \text{ кН} \\ F \leq 2 \cdot 30 = 60 \text{ кН}. \end{cases}$$

Решая систему неравенств, получаем $F_{\text{дон}} = 60 \text{ кН}$.

При найденном значении силы напряжения в стержнях будут

следующие: $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{60\sqrt{3}/2}{4} = 13 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < [\sigma]_2 = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ (выполняется с

запасом),

$$|\sigma_2| = [\sigma]_2 = 12 \text{ МПа}$$

5. Из условий прочности находим площади поперечных сечений стержней A_1 и A_2 , если известно значение силы $F = 100 \text{ кН}$:

$$\begin{cases} \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_1 \\ \frac{|N_2|}{A_2} \leq [\sigma]_2, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]_1} = \frac{F\sqrt{3}}{2[\sigma]_1} = \frac{100\sqrt{3}}{2 \cdot 16} = 5.4 \text{ см}^2 \\ A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]_2} = \frac{F}{2[\sigma]_2} = 42 \text{ см}^2. \end{cases}$$

При этих значениях площадей напряжения в стержнях будут равны допускаемым напряжениям: $\sigma_1 = [\sigma]_1 = 160 \text{ МПа}$,

$$|\sigma_2| = [\sigma]_2 = 12 \text{ МПа}$$

Задача решена

Задача 4.

Абсолютно твёрдый брус AC (рис. 16) закреплён в шарнире A и на участке BC загружен равномерно распределённой нагрузкой $q = 30 \text{ кН/м}$.

В горизонтальном положении брус AC удерживает вертикально расположенный стальной стержень OB с характеристиками:

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Площадь поперечного сечения стержня равна $A = 4 \text{ см}^2$.

Характерный размер конструкции $a = 1 \text{ м}$.

1. Проверить прочность стержня OB .
2. Если условие прочности стержня не выполняется, определить при $A = 4 \text{ см}^2$ допускаемое значение нагрузки $q_{\text{дон}}$.
3. Если условие прочности стержня не выполняется, подобрать площадь поперечного сечения стержня для нагрузки $q = 30 \text{ кН/м}$.
4. При найденном значении площади поперечного сечения и заданной нагрузке $q = 30 \text{ кН/м}$ найти вертикальное смещение точки C .

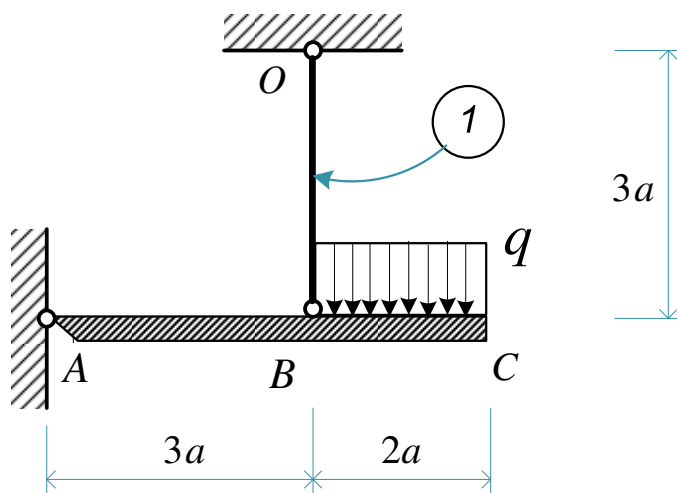


Рис. 16

Решение.

Отбрасываем стержень OB , заменяя его (рис. 17) неизвестной силой N .

Из уравнения равновесия стержня находим силу в стержне OB :

$$\sum M_A = 0; \quad N \cdot 3a - 2qa \cdot 4a = 0; \quad N = \frac{8}{3} qa.$$

При этом напряжения в стержне будут равны

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{8qa}{3A}.$$

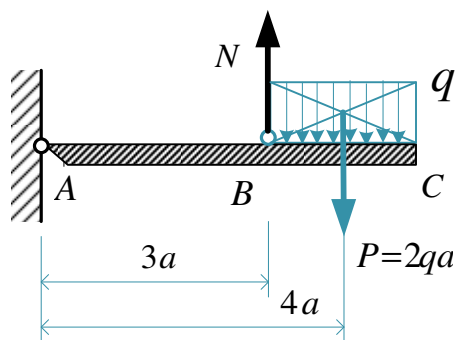


Рис. 17

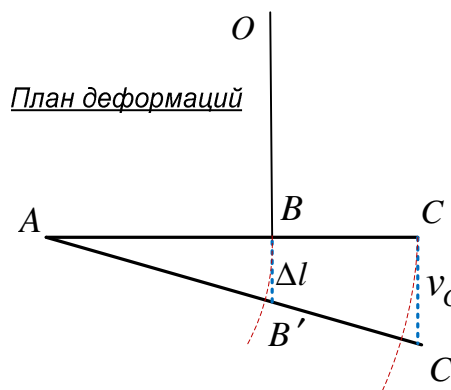


Рис. 18

1. Проверяем прочность стержня при $A = 4 \text{ см}^2$ и $q = 30 \text{ кН/м}$.

Условие прочности стержня, которое подлежит проверке, имеет

следующий вид: $|\sigma_z| = \frac{|N|}{A} \leq [\sigma]$

$$N = \frac{8}{3} qa = \frac{8}{3} \cdot 30 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 1 \text{ м} = 80 \text{ кН}.$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{80}{4} = 20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 200 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности не выполняется.

2. Определяем допустимое значение нагрузки $q_{\text{дон}}$ при $A = 4 \text{ см}^2$:

Из условия прочности $|N| \leq A \cdot [\sigma] = 4 \text{ см}^2 \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 64 \text{ кН}$,

откуда $\frac{8}{3} qa \leq 64 \text{ кН}$, $q \leq \frac{3 \cdot 64 \text{ кН}}{8 \cdot 1 \text{ м}} = 24 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$.

Допускаемая нагрузка равна $q_{\text{дон}} = 24 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$.

3. Определяем площадь поперечного сечения стержня A при $q = 30 \text{ кН/м}$.

Из условия прочности $A \geq \frac{|N|}{[\sigma]} = \frac{80 \text{ кН}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 5 \text{ см}^2$.

4. Находим вертикальное смещение точки C при найденном значении площади $A = 5 \text{ см}^2$ и нагрузке $q = 30 \text{ кН/м}$:

Для этого строит план деформаций конструкции (рис. 18). На плане деформаций показываются только оси стержней, как в исходном, так и в деформированном состоянии.

Перемещения точек B и C будут происходить по дугам окружностей с центром в точке A , но поскольку деформации малы, перемещения точек по горизонтали будут существенно меньше (величины второго порядка малости) по сравнению с перемещениями точек по вертикали.

По этой причине считают, что точки B и C перемещаются по вертикали и в новом положении занимают положения B' и C' .

Удлинение стержня (отрезок BB') находится по формуле

$$BB' = \Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{80 \text{ кН} \cdot 3 \text{ м}}{10^5 \text{ кН}} = 0.0024 \text{ м} = 0.24 \text{ см}.$$

Из подобия треугольников ABB' и ACC' составляем пропорцию:

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}, \text{ решая которую получаем}$$

$$v_c = CC' = \frac{AC}{AB} \cdot BB' = \frac{5a}{3a} \cdot \Delta l = \frac{5}{3} \cdot 0.24 \text{ см} = 0.4 \text{ см}.$$

Задача решена

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.В. *Сопротивление материалов: Учеб. Для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд. Испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.*
2. Костенко, Н.А. *Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. / Н.А. Костенко, С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская и др.; Под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.*
3. Смирнов, А.Ф. *Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1975. – 390 с.*
4. Дарков, А.В. *Сопротивление материалов: учебник для втузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.*
5. Феодосьев, В.И. *Сопротивление материалов: учебник для втузов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 592 с.* 6. Жуков, В. Г. *Механика. Сопротивление материалов : учеб. пособие. — М. : МГУПБ, 2007. - 136 с.*
6. Степин, П. А. *Сопротивление материалов. — 10е изд., стер. — СПб. : Лань, 2010. — 320 с.*
7. Писаренко, Г. С. *Сопротивление материалов : Учебник для втузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка — 3е изд., испр. и доп. — Киев : Выща шк., 1973. — 671 с.*

Маковкин Георгий Анатольевич

Сухов Михаил Федорович

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ (ЦРС)

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60x90 1/8 Бумага газетная. Печать трафаретная.

Уч. изд. л. 3,8. Усл. печ.л. 4,0. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

“Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет”

603905, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.

Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65

<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru