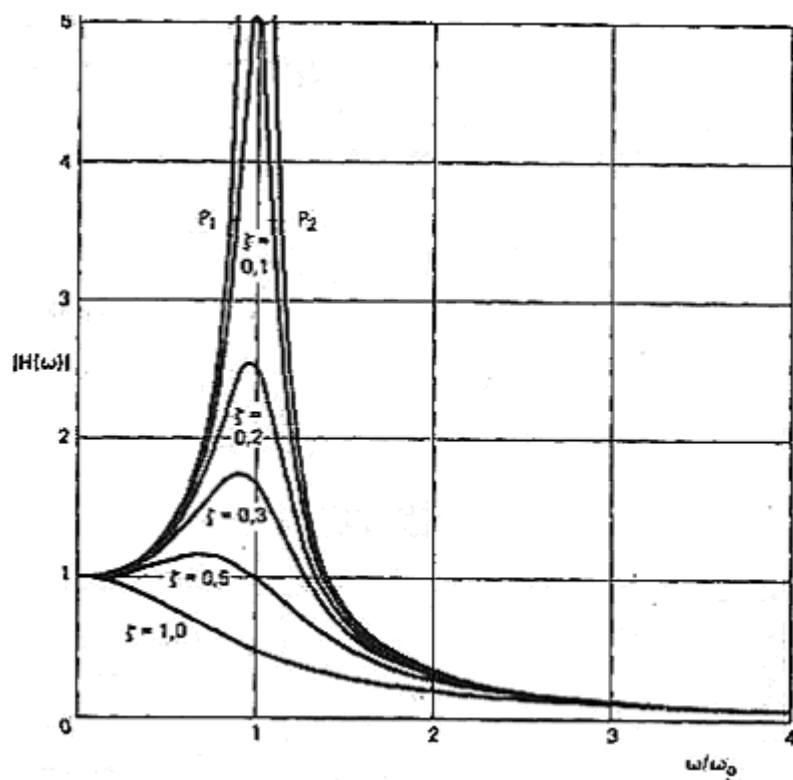


Б. А. Гордеев, Л. В. Филатов, Р. М. Айнбиндер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ



Нижний Новгород
2018

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Б. А. Гордеев, Л. В. Филатов, Р. М. Айнбиндер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ

Монография

Нижний Новгород
ННГАСУ
2018

ББК 22.172
М 34
УДК 534.1

Рецензенты:

- Д. В. Баландин* – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный ун-т им. Н. И. Лобачевского»
- А. А. Хлыбов* – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой материаловедения, технологий материалов и термической обработки металлов ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

Гордеев Б. А. Математические модели виброзащитных систем [Текст]: монография / Б. А. Гордеев, Л. В. Филатов, Р. М. Айнбиндер; Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 168 с. ISBN 978-5-528-00324-5

Создание эффективных средств защиты от вибраций и ударов является одной из важнейших проблем современной техники. Применение упругих амортизаторов является одним из наиболее распространенных способов виброзащиты. В настоящее время существует большое число конструктивных разновидностей виброзащитных устройств, предназначенных как для защиты приборов и оборудования, устанавливаемых на вибрирующих основаниях, так и для защиты оснований и фундаментов от динамических воздействий. Создание амортизирующих устройств, способных защитить объекты от вибраций и ударов и, вместе с тем, обладающих ограниченными размерами, является сложной технической проблемой. В связи с этим первостепенное значение приобретают вопросы теории и расчета адаптивных виброзащитных систем. Все материалы, используемые в данной монографии, получены в основном в Институте проблем машиностроения РАН.

Предназначается для студентов старших курсов общетехнических специальностей, магистрантов, аспирантов и научных работников, занимающихся исследованием и проектированием виброзащитных систем.

ББК 22.172

ISBN 978-5-528-00324-5

© Б. А. Гордеев, Л. В. Филатов,
Р. М. Айнбиндер, 2018
© ННГАСУ, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ ВИБРОЗАЩИТЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	7
1.1. Поглощение энергии колебаний при вязком демпфировании.....	7
1.2. Характеристики виброзащитной системы.....	11
1.3. Линейное гистерезисное демпфирование.....	17
ГЛАВА 2. ВОЗРАСТАНИЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ.....	22
2.1. Собственные частоты системы с двумя степенями свободы.....	22
2.2. Присоединенные матрицы системы с двумя степенями свободы.....	24
2.3. Понятия обобщенной массы и обобщенной жесткости.....	26
ГЛАВА 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ КОНСТРУКЦИИ.....	27
3.1. Колебания без демпфирования.....	27
3.2. Колебания с демпфированием.....	30
3.2.1. Колебания с вязким демпфированием.....	30
3.2.2. Колебания с гистерезисным демпфированием.....	33
3.2.3. Метод состояния пространства.....	34
3.2.4. Базовое рассогласование гармоник при нелинейном демпфировании.....	36
ГЛАВА 4. ВОЛНОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	41
4.1. Идеальный демпфер изгибных колебаний балки.....	41
4.2. Оптимальные демпферы поперечных колебаний балки.....	43
4.3. Стоячие волны - источник колебаний трубопроводов.....	47
ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ ГАЗОГИДРАВЛИЧЕСКИХ СРЕД В СИСТЕМАХ ВИБРОЗАЩИТЫ.....	50
5.1. Необходимость борьбы с вибрацией транспортных и стационарных энергетических объектов.....	50
5.2. Пассивные системы виброзащиты	51
5.3. Недостатки пассивных систем виброзащиты.....	52

5.4. Интегральные системы виброзащиты.....	56
5.5. Передаточные функции интегральных виброопор.....	57
5.6. Эквивалентная схема интегральной виброопоры с разделением упругого и поршневого действия упругого элемента.....	59
5.7. Динамические жесткости гидравлических элементов и переход к эквивалентным механическим элементам.....	63
5.8. Применение теории четырехполюсников к расчету гидроопор.....	67
ГЛАВА 6. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ.....	71
6.1. Блок-схема виброизолирующей системы.....	71
6.2. Вопросы устойчивости процессов синхронизации в строительных конструкциях.....	75
6.3. Устойчивость стационарного режима для двух двигателей.....	77
6.4. Устойчивость режима для системы трех двигателей.....	78
ГЛАВА 7. АКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРООПОРАМИ.....	90
7.1. Синтез системы активного управления.....	90
7.2. Применение инерционных магнитореологических трансформаторов в системах виброзащиты.....	95
7.3. Вращающееся магнитное поле в управлении магнитореологическим трансформатором.....	105
ГЛАВА 8. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ.....	118
8.1. Случайные события и величины.....	118
8.2. Случайные процессы в анализе вибрации.....	125
8.3. Каноническое представление случайных процессов и их разложение.....	133
8.4. Преобразование случайных процессов в линейных системах.....	137
8.5. Статистическая модель линейной системы по наблюдениям входных и выходных вибропроцессов.....	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	150
Литература.....	151

ВВЕДЕНИЕ

Одна из главных проблем современного градостроительства связана с разработкой эффективных методов и средств уменьшения уровней вибраций и шума, а также динамических нагрузок в элементах строительных конструкций.

Исследования в этом направлении носят главным образом конструкторско-экспериментальный характер. Они не подкреплены более глубокими теоретическими представлениями о характере динамических процессов в строительных конструкциях, не исследованы процессы возбуждения и распространения вибрационных токов по элементам строительных конструкций.

С позиций физической природы динамических процессов любую строительную конструкцию можно рассматривать как сложную колебательную систему, состоящую из панелей, балок, стержней, оболочек, на которую действуют различные источники колебаний - внешние и внутренние. От источников колебаний потоки вибраций растекаются по конструкции здания, отражаясь на стыках, неоднородностях, поглощаясь и излучаясь, создавая звуковые шумы, спектр которых расширяется при перекачке энергии на нелинейных элементах конструкции в область высоких частот. Наличие многократных переотражений создает условия для возникновения резонансов и концентрации энергии колебаний на отдельных участках конструкции.

Борьба с вредными проявлениями вибрации (виброзащита) ведется в трех направлениях:

- применительно к источнику вибровозбуждения;
- в отношении виброзащищаемого объекта – строительной конструкции, сооружения;
- в отношении человека.

В последнем случае проблемы полностью или частично решаются всегда, когда тем или иным способом удастся снизить вибрацию в первых двух направлениях.

Виброзащита осуществляется разными путями. Если объект подвержен

действию периодических сил, то стремятся прежде всего к снижению их действия в самом источнике. В частности, если в двигателе внутреннего сгорания вращаются недостаточно сбалансированные детали, то уменьшения вибрационного возбуждения можно добиться проведением соответствующей балансировки. В двигателях внутреннего сгорания снижение вибрационного возбуждения можно достичь, изменяя порядок зажигания в цилиндрах. Также можно и значительно снизить возбуждение за счет применения в двигателях силовых агрегатов уравнивающих механизмов (валов), вращающихся в противофазе.

Более сложная задача возникает в тех случаях, когда несколько источников вибрации (электродвигателей) установлены на одном вязкоупругом основании. Тогда при работе электродвигателей могут возникнуть режимы синхронизации или неполной синхронизации. В этих случаях всегда усиливаются вибрационные процессы. В первом случае основная гармоника вибросигнала соответствует частоте вращения роторов двигателей, во втором возникает дополнительная низкочастотная гармоника, соответствующая частоте биений нескольких источников вибрации.

Однако устранить вибрационное возбуждение полностью не удастся, в результате чего возникает необходимость виброзащиты самого объекта.

Задача борьбы с вибрациями и шумами включает в себя следующие составляющие:

- выявление основных источников вибраций и шума;
- знания о каналах распространения вибропотоков по строительной конструкции;
- использование виброгасящих устройств в областях генерирования вибрации и шума;
- вооруженность методами и средствами измерения вибрации и шума.

Эти составляющие позволяют выработать рекомендации по проектированию строительных конструкций с минимальным уровнем вибраций и шумов.

ГЛАВА 1. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ ВИБРОЗАЩИТЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. Поглощение энергии колебаний при вязком демпфировании

Для аналитического описания вибронагрузок сложную строительную конструкцию можно рассматривать как систему масс, соединенных с помощью пружин и демпфирующих элементов. Поскольку силы демпфирования для реальной конструкции промышленного здания нельзя оценить с такой же точностью, как упругие силы и силы инерции, то строгое математическое моделирование явлений демпфирования невозможно. Тем не менее для объяснения диссипативных сил, присутствующих в любой конструкции, следует сделать предположение о виде демпфирования, что позволяет оценить демпфирующие силы на практике. Кроме того, вид демпфирования должен способствовать простым математическим операциям, специально применяемым к линейным уравнениям движения - это означает, что при гармоническом возбуждении силы демпфирования также изменяются по гармоническому закону. Двумя такими подходящими формами демпфирования являются вязкое и гистерезисное демпфирование. В любой виброзащитной системе присутствуют обе формы демпфирования, но в различных соотношениях. Реакция системы с одной степенью свободы для вязкого демпфирования описывается в этом разделе, а для гистерезисного демпфирования - в следующем. Будут также проиллюстрированы различия в характеристиках.

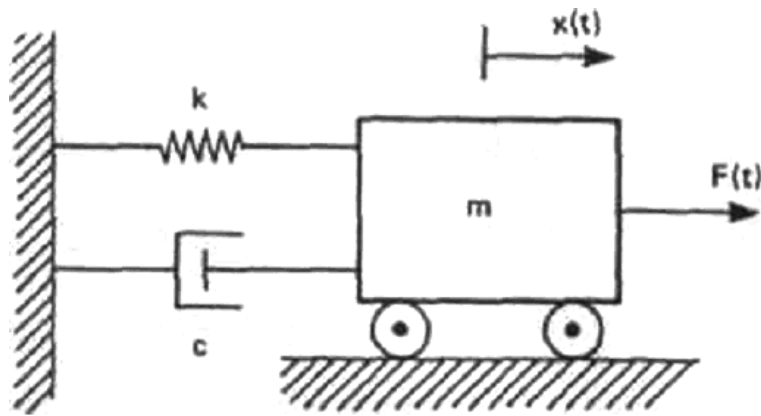


Рис.1.1. Система с одной степенью свободы

На рис. 1.1 показана система с одной степенью свободы, в которой между массой m и фиксированной стенкой расположен безмассовый демпфер с коэффициентом вязкого демпфирования c и пружина жесткостью k . Демпфер создает силу демпфирования $-cx'$, пропорциональную мгновенной скорости и положительную в выбранном направлении. Уравнение движения для вынужденного гармонического возбуждения можно записать в виде:

$$mx'' + cx' + kx = Fe^{j\omega t}, \quad (1.1)$$

где x - смещение, x' - скорость, x'' - ускорение, F - возбуждающая сила, $j = \sqrt{-1}$, ω - частота возбуждения внешней силой F .

Разделив уравнение (1.1) на m и умножив числитель и знаменатель в правой части на k , получим:

$$x'' + 2\xi x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(\frac{F}{k} \right) e^{j\omega t}, \quad (1.2)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - собственная частота недемпфированных колебаний, $\xi = c/2m$ - безразмерное относительное демпфирование, F/k — растяжение в пружине, вызванное силой F .

Используя пробное решения в виде:

$$x = Xe^{j\omega t}$$

для установившегося колебания, можно показать после дифференцирования и подстановки в уравнение (1.2), что:

$$X = \frac{\omega_0 F/k}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega\omega_0} = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j2\xi\omega/\omega_0}. \quad (1.3)$$

Таким образом:

$$x = Xe^{j\alpha} = \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j2\xi\omega/\omega_0} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}. \quad (1.4)$$

Видно, что смещение x пропорционально приложенной силе, а коэффициент пропорциональности равен:

$$H(\omega) = \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j2\xi\omega/\omega_0} \right], \quad (1.5)$$

и называется комплексной частотной характеристикой. Равенство (1.4) показывает, что смещение является комплексной величиной и может быть представлено в виде вещественной и мнимой частей умножением числителя и знаменателя в квадратных скобках на комплексно сопряженную величину к знаменателю. Таким образом:

$$x = \left[\frac{1 - (\omega/\omega_0)^2 - j2\xi\omega/\omega_0}{\left\{1 - (\omega/\omega_0)^2\right\}^2 + (2\xi\omega/\omega_0)^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}. \quad (1.6)$$

Это равенство показывает, что смещение имеет одну компоненту

$$\text{Re}(x) = \left[\frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\left\{1 - (\omega/\omega_0)^2\right\}^2 + (2\xi\omega/\omega_0)^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}, \quad (1.7)$$

находящуюся в фазе с приложенной силой, и вторую компоненту

$$\text{Im}(x) = \left[\frac{-j2\xi\omega/\omega_0}{\left\{1 - (\omega/\omega_0)^2\right\}^2 + (2\xi\omega/\omega_0)^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}, \quad (1.8)$$

имеющую отставание по фазе на угол 90° от приложенной силы. Говорят, что эта компонента находится в квадратуре с возбуждением.

На рисунке 1.2 векторы OA и OB показывают соответственно вещественную и мнимую компоненты смещения в плоскости Арганда. Вектор OC является общим смещением с амплитудой, определяемой выражением $\left\{ \sqrt{\text{Re}^2(x) + \text{Im}^2(x)} \right\}$ и равной:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right] \cdot \frac{\text{Fe}^{j\alpha}}{k} \quad (1.9)$$

Общее смещение отстает от вектора силы на угол θ , определяемый выражением $\left\{ \tan^{-1} \frac{\text{Im}(x)}{\text{Re}(x)} \right\}$ и равный:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}. \quad (1.10)$$

Поэтому для установившегося состояния решение уравнения (1.2) колебаний может быть записано в виде:

$$x = \left[\frac{1}{\sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right] \cdot \frac{\text{Fe}^{j(\alpha - \theta)}}{k}, \quad (1.11)$$

Где угол θ определяется равенством (1.10).

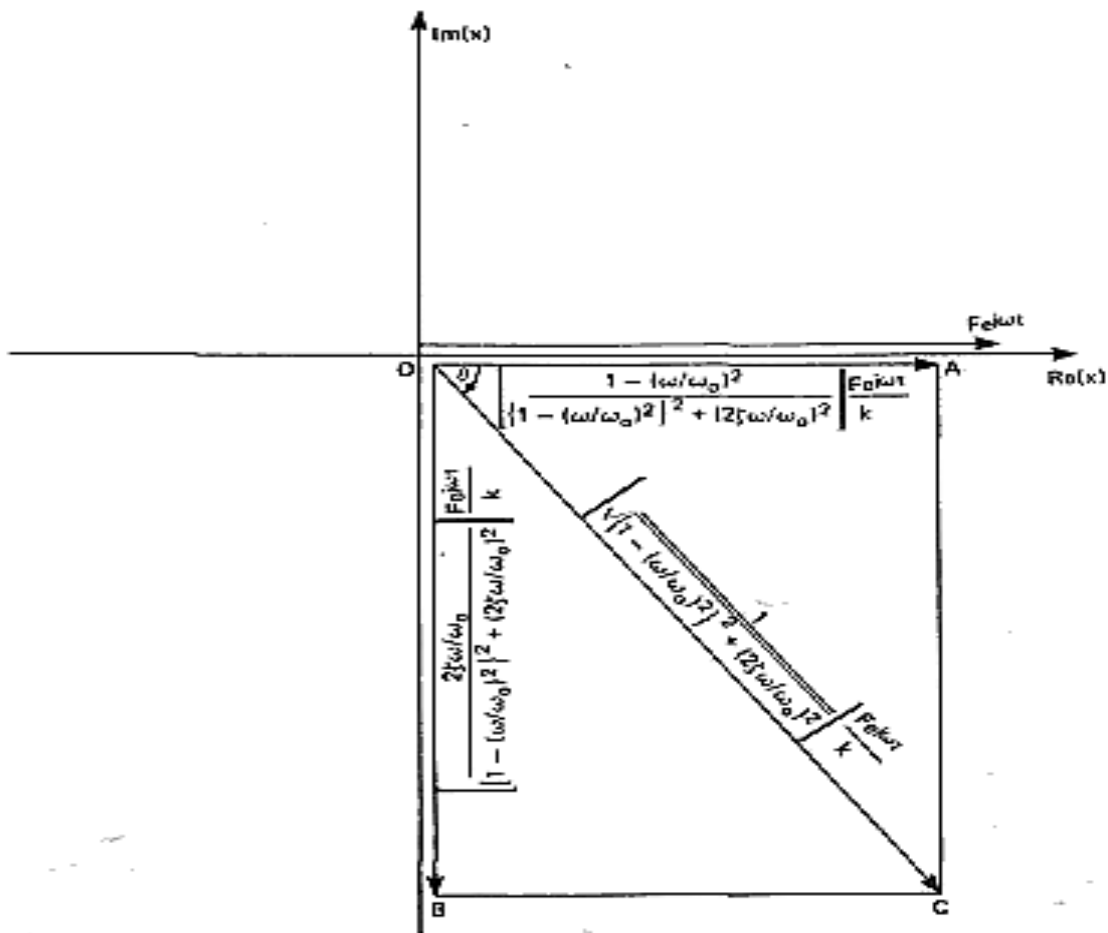


Рис.1.2. Вещественная и мнимая компоненты смещения по отношению к вектору силы

Величина в квадратных скобках выражения (1.11) является модулем комплексной частотной характеристики $|H(\omega)|$ (смотри равенства (1.4) и 1.5). Она называется коэффициентом усиления и является безразмерным отношением между амплитудой смещения X и статическим смещением F/k .

1.2. Характеристики виброзащитной системы

На рис. 1.3,а представлен модуль комплексной функции частотной характеристики в зависимости от безразмерного отношения частот ω/ω_0 для различных значений относительного демпфирования. Видно, что увеличение относительного демпфирования приводит к уменьшению амплитуд и смещению пиков влево от вертикальной линии, проходящей через $\omega/\omega_0 = 1$. Пики соответ-

вуют частотам, определяемым из выражения:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}, \tag{1.12}$$

а значение пика $|H(\omega)|$ равно:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{1.13}$$

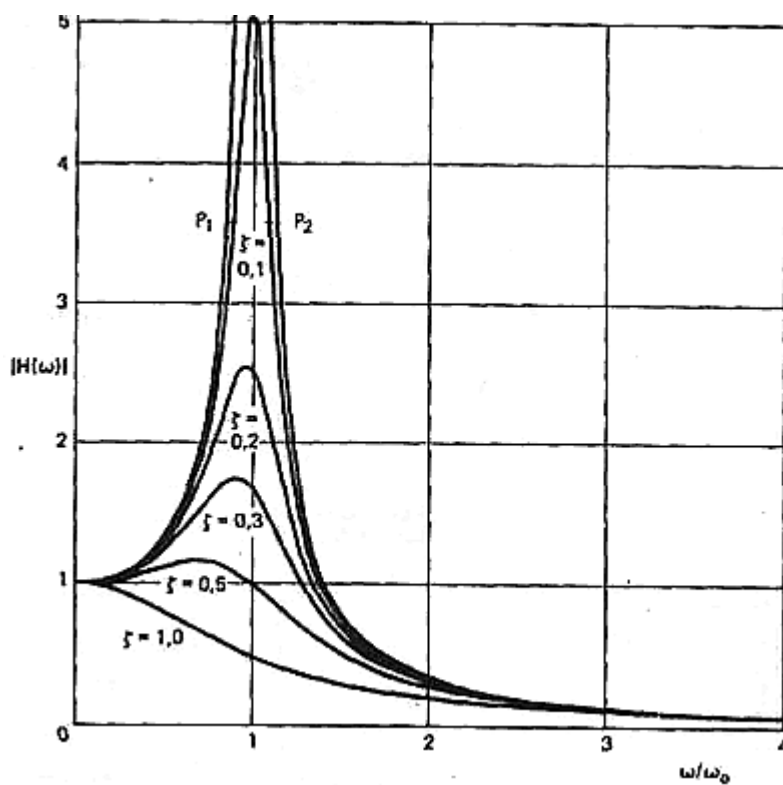


Рис.1.3,а. Коэффициент усиления $|H(\omega)|$ в зависимости от безразмерного отношения частот

$\frac{\omega}{\omega_0}$ для различных значений относительного демпфирования ξ

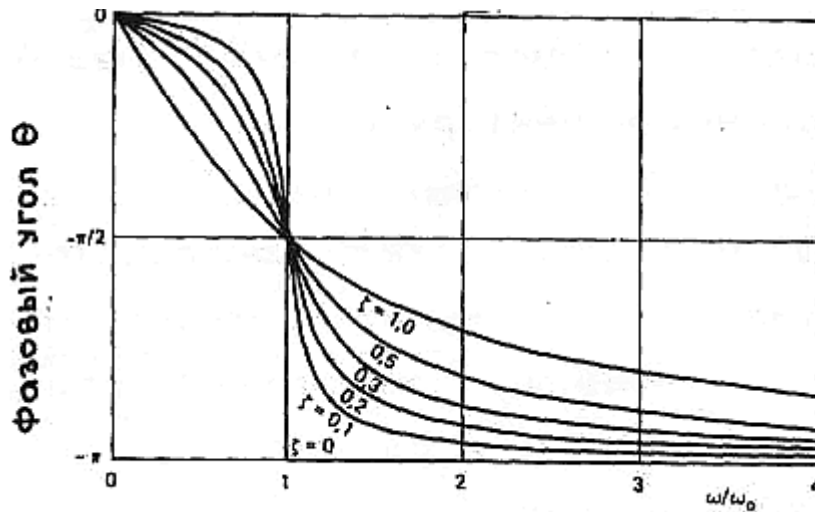


Рис.1.3,б. Отставание по фазе смещения по отношению к силе в зависимости от ω/ω_0 для различных значений ξ

Для слабого демпфирования ($\xi < 0,05$), кривые почти симметричны относительно вертикальной линии, проходящей через точку $\omega/\omega_0 = 1$. Значение пика $|H(\omega)|$ находится в непосредственной близости от точки $\omega/\omega_0 = 1$ и равно

$$|H(\omega)| \cong \frac{1}{2\xi} = Q, \quad (1.14)$$

где величина Q называется добротностью.

Для кривой с относительным демпфированием $\xi = 0,1$, например, точки P_1 и P_2 , для которых амплитуда $|H(\omega)|$ уменьшается до значения $Q/\sqrt{2}$ от пиковой величины, называются точками половинной мощности. (Если ордината отложена в логарифмическом масштабе, то P_1 и P_2 являются точками, амплитуды которых $|H(\omega)|$ уменьшаются на 3 дБ и поэтому называются -3 дБ точками). Разница в частотам между точками P_1 и P_2 называется 3 дБ шириной полосы частот системы и для слабого демпфирования можно показать, что:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_0, \quad (1.15)$$

где $\Delta\omega = 3$ дБ - ширина полосы частот, ω_1 - частота, соответствующая точке P_1 , ω_2 - частота, соответствующая точке P_2 .

Из уравнений (1.14) и (1.15) получим:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = 2 \frac{c}{c_c} = \frac{1}{Q} = \eta, \quad (1.16)$$

η - называется коэффициентом потерь.

На рис. 1.3,б представлены кривые фазового угла θ в зависимости от отношения ω/ω_0 для различных значений ξ , построенных на основании выражения (1.10).

Следует отметить, что все кривые проходят точку $\theta = \pi/2$, $\omega/\omega_0 = 1$, другими словами, независимо от величины демпфирования фазовый угол между силой и смещением на собственной частоте колебаний без демпфирования $\omega' = \omega_0$ равен 90° . Кроме того, фазовый угол стремится к нулю при $\omega/\omega_0 \rightarrow 0$ и к 180° при $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$.

Для рассмотрения изменений синфазной компоненты $\text{Re}(x)$ и компоненты в квадратуре $\text{Im}(x)$ смещения уравнений (1.7) и (1.8) вычерчены на графике в зависимости от отношения ω/ω_0 и представлены соответственно на рисунках 1.4,а и 1.4,б. Кривые вещественной компоненты смещения на рисунке 1.4,а имеют нулевое значение при $\omega/\omega_0 = 1$ независимо от демпфирования и имеют пик и спад на частотах:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi} \\ \omega_2 &= \omega_0 \sqrt{1 + 2\xi} \end{aligned} \right\}, \quad (1.17)$$

соответственно.

С уменьшением демпфирования (значение ξ становится меньше) пик и спад возрастают по величине и приближаются друг к другу. В пределе, когда $\xi=0$, график имеет асимптоту при $\omega/\omega_0 = 1$. Частоты ω_1 и ω_2 часто используются для определения демпфирования системы с помощью выражения:

$$\eta = 2\xi = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + 1}. \quad (1.18)$$

Кривые мнимой компоненты смещения имеют спад в непосредственной близости

сти точки $\omega/\omega_0 = 1$ и выглядят острее, чем кривые для $|H(\omega)|$, показанные на рис. 1.3а при соответствующих значениях ξ .

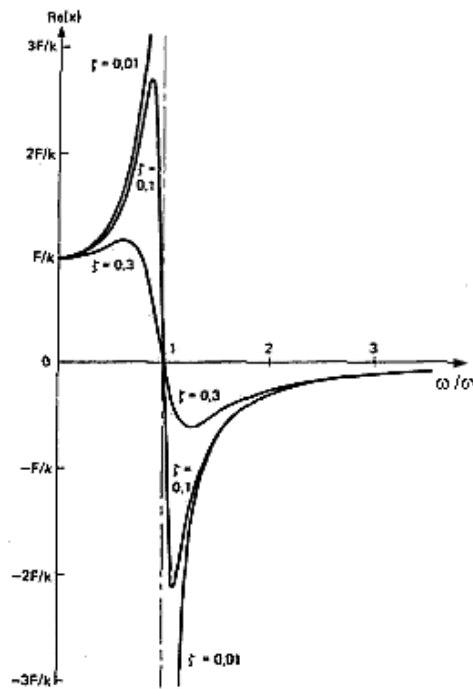


Рис.1.4,а. Вещественная компонента смещения в зависимости от безразмерного отношения частот ω/ω_0 для различных значений ξ

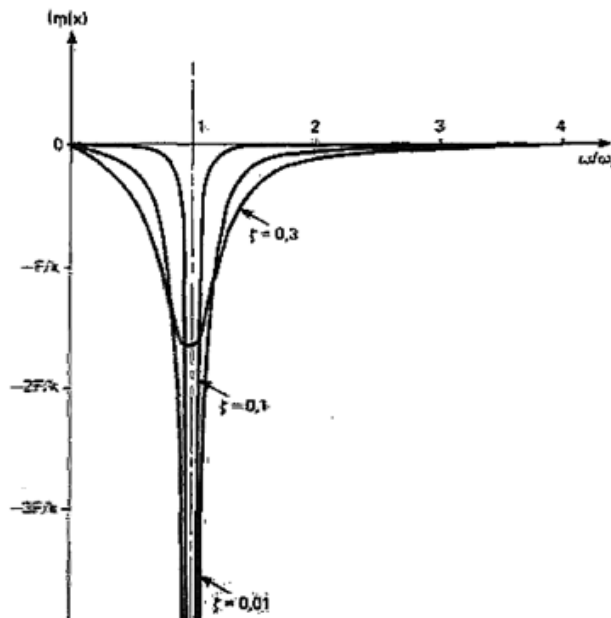


Рис.1.4,б. Мнимая компонента смещения в зависимости от ω/ω_0 для различных значений ξ

Если вещественную и мнимую компоненты, а также отношение частот

вычертить на графике в системе трех взаимно перпендикулярных осей, получим трехмерную кривую, показанную на рис. 1.5.

Штриховая линия представляет собой кривую при $\xi=0$ и полностью лежит в плоскости $\{\text{Re}(x), \omega\}$. Кривые, показанные на рис. 1.4,а и 1.4,б, в действительности являются проекциями кривых, подобных представленным на рис. 1.5 в плоскости $\{\text{Re}(x), \omega\}$ и $\{\text{Im}(x), \omega\}$ соответственно. Третья проекция кривой на плоскость $[\text{Re}(x), \text{Im}(x)]$ выглядит подобно кривым, показанным на рис. 1.6.

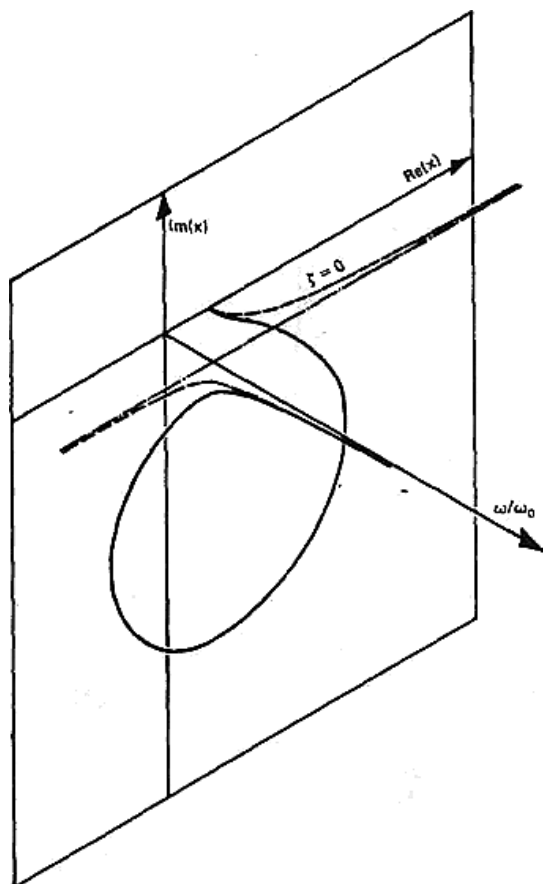


Рис.1.5. Трехмерный график вещественной и мнимой компонент смещения в зависимости от частоты

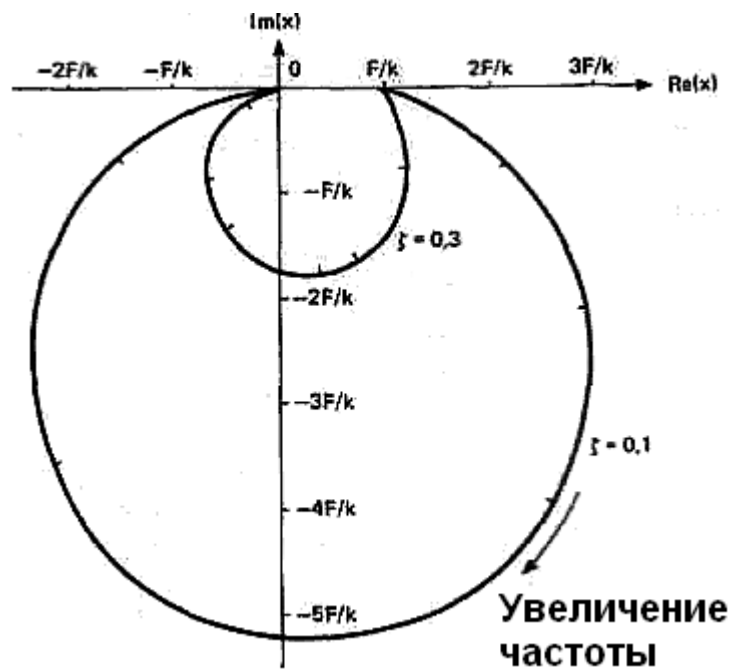


Рис.1.6. Комплексный график вещественной компоненты в зависимости от мнимой компоненты при изменении частоты для различных значений ξ

Правые части уравнений (1.7) и (1.8) вычерчены в осях X и Y на рис. 1.6 соответственно для различных значений отношения ω/ω_0 . Представлены две кривые для $\xi=0,1$ и $\xi=0,3$. Эти кривые также можно получить, вычерчивая общее смещение, определяемое выражением (1.9), от начала координат под углом θ относительно $\text{Re}(x)$, определяемым выражением (1.10). Таким образом, кривая на рис. 1.6 является годографом общего смещения для определенного значения ξ в зависимости от отношения частот ω/ω_0 . Из рис. 1.6 также видно, что независимо от величины демпфирования на собственной частоте колебаний без демпфирования $\omega/\omega_0 = 1$ вещественная компонента равна нулю, иными словами, фазовый угол между силой и общим смещением составляет 90° .

1.3. Линейное гистерезисное демпфирование

Другим видом демпфирования, позволяющим записать уравнение с линейным демпфированием и дающим достаточно хорошее приближение к процессам демпфирования на практике, является гистерезисное (иногда называе-

мое структурным) демпфирование. Большое количество материалов, находящихся под действием циклического нагружения (для деформаций ниже предела упругости), проявляют связь между напряжением и деформацией, характеризуемую петлей гистерезиса. Энергия, рассеиваемая за один цикл колебания вследствие внутреннего трения в материале, пропорциональна площади петли гистерезиса, и поэтому процесс называется гистерезисным демпфированием. Считаем, что внутреннее трение не зависит от скорости деформирования (следовательно, и от частоты) и в достаточно большом диапазоне пропорционально смещению. Таким образом, демпфирующая сила пропорциональна упругой силе, но поскольку энергия рассеивается, то она должна быть в фазе со скоростью (в квадратуре со смещением).

Таким образом, для простого гармонического движения демпфирующая сила равна:

$$j\gamma kx = \gamma k \frac{x'}{\omega}, \quad (1.19)$$

где γ называется коэффициентом структурного демпфирования. Уравнение движения системы с одной степенью свободы и гистерезисным демпфированием можно, следовательно, записать в виде:

$$mx'' + \frac{\gamma k}{\omega} x' + kx = Fe^{j\alpha t}, \quad (1.20)$$

или

$$mx'' + k(1 + j\gamma)x = Fe^{j\alpha t}, \quad (1.21)$$

где $k(1 + j\gamma)$ называется комплексной жесткостью.

Решение уравнения (1.21) для установившегося состояния представим в виде:

$$x = Xe^{j\alpha t} = \left[\frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\gamma} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha t}}{k}, \quad (1.22)$$

соответствующем уравнению (1.4) для случая вязкого демпфирования. Умножая числитель и знаменатель в квадратных скобках на комплексное сопряженное знаменателю выражение, можно получить вещественную и мнимую компоненты смещения:

$$x = \left[\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} - \frac{j\gamma}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}. \quad (1.23)$$

Следовательно:

$$\text{Re}(x) = \left[\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}, \quad (1.24)$$

$$\text{Im}(x) = \left[\frac{-j\gamma}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}. \quad (1.25)$$

Общее смещение, равное

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2}} \right] \cdot \frac{Fe^{j\alpha}}{k}, \quad (1.26)$$

отстает от вектора силы на угол, равный

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\gamma}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right]. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27), представляющее угол θ , вычерчено на графике в зависимости от отношения ω/ω_0 для различных значений γ и показано на рис. 1.7. Видно, что кривые на рис. 1.7 подобны кривым рисунка 1.3,б для вязкого демпфирования, однако есть некоторые незначительные отличия. Для очень низких значений ω/ω_0 отклик для гистерезисного демпфирования зависит от величины γ и фазовый угол θ (рис. 1.7) стремится к величине $\tan^{-1}\gamma$, тогда как он равен нулю при вязком демпфировании. На рис. 1.8 представлен комплексный гра-

фик (векторный график, полярный график, квадратурный график, диаграмма Найквиста), полученный вычерчиванием правых частей выражений (1.24) и (1.25) в плоскости Арганда для значений $\gamma = 0,2$ и $\gamma=0,6$. Как видно, две кривые полностью симметричны относительно мнимой оси, исключая начало отсчета. При $\omega/\omega_0 = 1$ вещественная компонента равна нулю, а мнимая компонента максимальна.

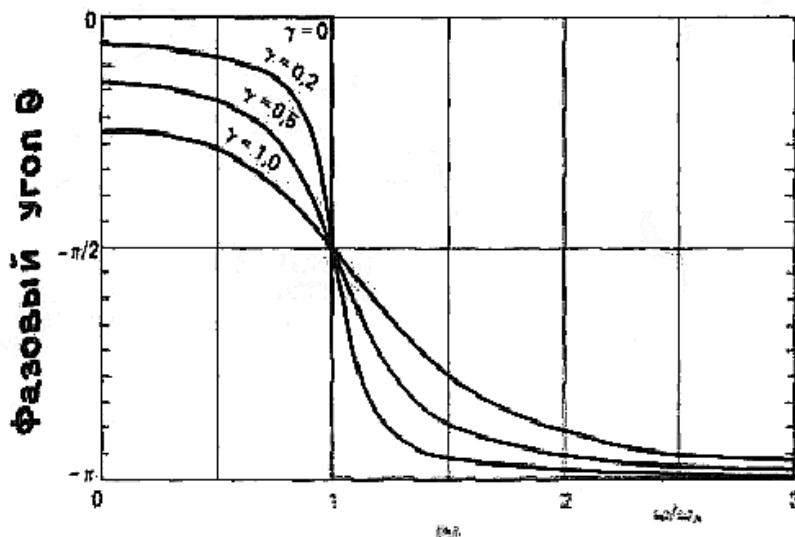


Рис.1.7. Отставание по фазе смещения от силы в зависимости от ω/ω_0 для различных значений γ

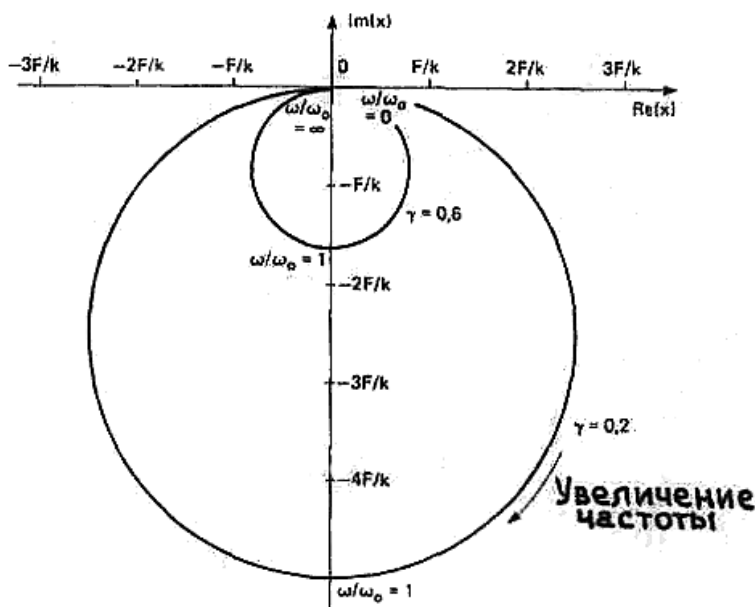


Рис. 1.8. Комплексный график зависимости вещественной компоненты смещения от мнимой при изменении частоты для различных значений γ

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- амлитудно - частотные характеристики демпфирующих устройств отражают отличие резонансных частот от собственных. Причем оно тем заметнее, чем выше степень демпфирования (рис. 1.3,а);
- фазо - частотные характеристики отражают главным образом изменение при переходе через резонанс (рис. 1.3,б, 1.7);
- при снижении демпфирования возрастет мнимая компонента (рис. 1.5, 1.6, 1.8), и при $\xi = c/2m = 0$ исчезает вовсе.

ГЛАВА 2. ВОЗРАСТАНИЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В предыдущих разделах была рассмотрена виброзащитная система с одной степенью свободы, состоящая из одной массы, демпфера и упругого элемента. Реальные конструкции имеют много степеней свободы, и их анализ осложняется большим числом решаемых уравнений. Для таких систем уравнений очень эффективным средством является матричный метод, при котором большие массивы уравнений записываются с помощью краткой системы обозначений. Для введения некоторых понятий, используемых в теории колебаний в матричной форме, воспользуемся системой с двумя степенями свободы, показанной на рис. 2.1. Эти понятия составляют основу анализа и понимания динамического поведения больших систем.

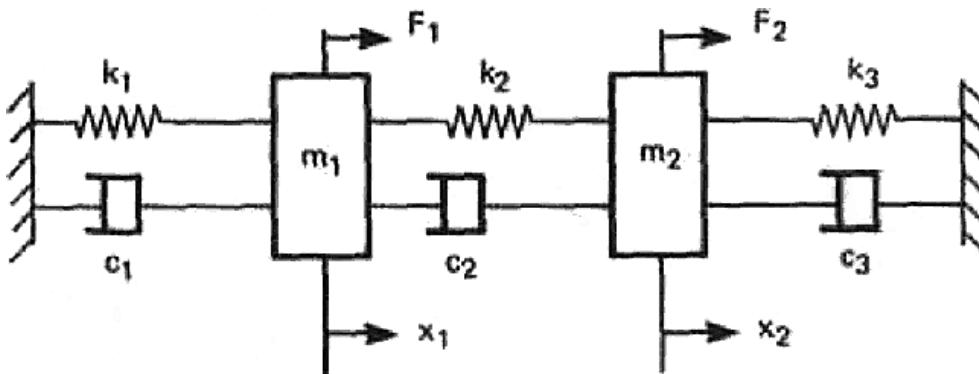


Рис.2.1. Система с двумя степенями свободы

2.1. Собственные частоты системы с двумя степенями свободы

Уравнения движения системы, показанной на рис. 2.1, имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + (c_1 + c_2)x_1' - c_2 x_2' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F_1 \\ m_2 x_2'' - c_2 x_1' + (c_2 + c_3)x_2' - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

которое можно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.2)$$

Для определения собственных частот и собственных модальных форм колеба-

ний системы вначале рассмотрим свободные колебания системы без демпфирования. Уравнение таким образом преобразуется к виду:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0, \quad \text{где} \quad [m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}.$$

Полагая для гармонического движения $\ddot{x}_i = -\lambda_i x_i$, где $\lambda = \omega^2$, уравнение (2.3) примет вид:

$$-\lambda[m]\{x\} + [k]\{x\} = 0, \quad \text{или} \quad [-\lambda[m] + [k]]\{u\} = 0, \quad \text{где} \quad \{u\} = \{x\}. \quad (2.4)$$

Умножая слева уравнение (2.4) на матрицу $[m]^{-1}$ и производя перестановку, получим:

$$[[m]^{-1}[k] - \lambda[I]]\{u\} = 0, \quad (2.5)$$

где выражение $[m]^{-1}[k]$ называется динамической матрицей, а $[m]^{-1}[m] = [I]$ единичной матрицей.

Выражение (2.5) представляет собой систему однородных алгебраических уравнений по переменной u_i . Из теории уравнений известно, что для получения нетривиального решения $\{u\} = 0$ определитель, составленный из коэффициентов уравнения (2.5), должен быть равен нулю. Следовательно, получим уравнение:

$$|[m]^{-1}[k] - \lambda[I]| = 0, \quad (2.6)$$

которое называется характеристическим уравнением системы. Уравнение (2.6) после разложения определителя можно переписать в виде:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.7)$$

что является полиномом по λ для системы с n степенями свободы. Корни λ_i характеристического уравнения называются собственными значениями, а собственные частоты недемпфированных колебаний системы определяется из соотношения:

$$\lambda_i = \omega_i^2. \quad (2.8)$$

Подставляя λ_i в матричное уравнение (2.8), получим соответствующую

собственную (или главную) форму мод колебаний $\{u_i\}$, которая также называется собственным вектором. Собственный вектор представляет собой схему деформации конструкции на соответствующей собственной частоте. Поскольку уравнение (2.8) однородное, то существует не единственное решение для собственного вектора, а можно получить только их отношение. Таким образом, собственная модальная форма определяется отношением амплитуд движения в различных точках конструкции при возбуждении ее на собственных частотах. С другой стороны, действительная амплитуда зависит от начальных условий, а также положения и амплитуды возбуждающих сил.

2.2. Присоединенная матрица с двумя степенями свободы

Другим способом определения собственных векторов является использование присоединенной матрицы системы. Пусть в уравнении (2.5)

$$[[m]^{-1}[k] - \lambda[I]]\{u\} = [A], \quad (2.9)$$

но

$$[A]^{-1} = \frac{[\hat{A}]}{|A|}, \quad (2.10)$$

где $[\hat{A}]$ - матрица, присоединенная для матрицы $[A]$.

Умножая слева предыдущее уравнение на $|A|[A]$, получим

$$|A|[I] = [A][\hat{A}], \quad (2.11)$$

или в обозначениях исходного выражения для $[A]$

$$[[m]^{-1}[k] - \lambda[I]][I] = [[m]^{-1}[k] - \lambda[I]][\hat{A}]. \quad (2.12)$$

Если теперь $\lambda = \lambda_i$ - корень характеристического уравнения (собственное значение), то определитель левой части становится равным нулю и уравнение (2.12) преобразуется к виду:

$$0 = [[m]^{-1}[k] - \lambda_i[I]]\text{adj}[[m]^{-1}[k] - \lambda_i[I]]. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) справедливо для всех λ_i и представляет собой n уравнений для системы с n степенями свободы. Сравнивая уравнения (2.9) и (2.13), по-

лучаем, что присоединенная матрица $\text{adj}[[m]^{-1}[k] - \lambda_1[I]]$ должна состоять из столбцов, каждый из которых пропорционален i -му собственному вектору $\{u_i\}$ (i -ая модальная форма для λ_i).

В предыдущем разделе было показано, что решение уравнения (2.9) приводит к n собственным значениям и соответствующим им n собственным векторам. Таким образом, определенное собственное значение λ_i и собственный вектор $\{\phi_i\}$ будут удовлетворять уравнению (2.9), т.е.

$$[k]\{\phi_i\} = \lambda_i [m]\{\phi_i\}. \quad (2.14)$$

Умножим слева уравнение (2.14) на транспонированную матрицу для другой модальной формы $\{\phi_j\}$, т.е.

$$\{\phi_j\}^T [k]\{\phi_i\} = \lambda_i \{\phi_j\}^T [m]\{\phi_i\}, \quad (2.15)$$

где верхний индекс T обозначает транспонированную матрицу.

Теперь запишем уравнение для j -ой моды и умножим его слева на транспонированную матрицу для i -ой моды, т.е.

$$\{\phi_i\}^T [k]\{\phi_j\} = \lambda_i \{\phi_i\}^T [m]\{\phi_j\}. \quad (2.16)$$

Так как $[m]$ и $[k]$ - симметричные матрицы, то

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}^T [k]\{\phi_i\} &= \{\phi_i\}^T [k]\{\phi_j\} \\ \{\phi_j\}^T [m]\{\phi_i\} &= \{\phi_i\}^T [m]\{\phi_j\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Поэтому, вычитая уравнение (2.17) из уравнения (2.15), получим:

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \{\phi_i\}^T [m]\{\phi_j\}. \quad (2.18)$$

Если $\lambda_i \neq \lambda_j$ (предполагаем две различные собственные частоты), то

$$\{\phi_i\}^T [m]\{\phi_j\} = 0, \quad (2.19)$$

а из уравнения (2.19) видно, что

$$\{\phi_i\}^T [k]\{\phi_j\} = 0. \quad (2.20)$$

Равенства (2.19) и (2.20) определяют свойства ортогональности форм мод по отношению к матрицам массы и жесткости системы соответственно. Понятие ортогональности векторов можно проиллюстрировать, например, с помощью единичных векторов i j k трехмерной декартовой системы координат.

2.3. Понятия обобщенной массы и обобщенной жесткости

Видно, что если $i=j$ в уравнении (2.19), то две моды не являются обязательно ортогональными, и уравнение (2.20) равно некоторой скалярной величине, отличной от нуля, например M_i , т.е.

$$\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} = M_i, \quad \text{где } i=1,2,3,4,\dots,n, \quad (2.21)$$

а из уравнения (2.21) следует, что

$$\{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\} = \lambda_i M_i = \omega_i^2 M_i = K_i, \quad \text{где } i=1,2,3,4,\dots,n. \quad (2.22)$$

M_i и K_i называются соответственно обобщенной массой и обобщенной жесткостью системы.

Если одному из элементов вектора $\{\phi_i\}$ присвоено определенное значение, то остальные $(n-1)$ элементы будут также определены, поскольку отношение между любыми двумя элементами постоянно. Таким образом, собственный вектор становится единственным в абсолютном смысле. Этот процесс настройки элементов собственных мод, определяющий однозначно их амплитуды, называется нормализацией, а получаемые в результате масштабированные собственные моды называются ортонормированными модами.

Таким образом, показано, что существует несколько способов нормализации модальных форм, четыре из которых приводятся ниже:

1) модальные формы можно нормализовать так, что обобщенная масса или модальная масса M_j в выражении принимается равной единице. Преимуществом этого метода является то, что выражение (2.22) непосредственно приводит к собственным значениям, следовательно, и к собственным частотам;

2) наибольший элемент модальной формы принимается равным единице, что удобно при изображении модальной формы на графике;

3) отдельный элемент модальной формы принимается равным единице;

4) длина модального вектора принимается равной единице.

ГЛАВА 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ КОНСТРУКЦИИ

3.1. Колебания без демпфирования

Уравнения движения системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. 2.1, без демпфирования можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F_1 \\ m_2 x_2'' - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

или в матричной форме при помощи уравнения

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

При решении предыдущих уравнений относительно реакции $\{x\}$ для определенной системы возбуждающих сил основным препятствием является связь между уравнениями, т.е. обе координаты x_1 и x_2 входят в каждое из уравнений (3.2). В уравнениях (3.2) связь заключается в том, что, так как матрица жесткости является симметричной, то она не диагональна (внедиагональные элементы не равны нулю). Этот вид связи называется упругой или статической связью (недиагональная матрица жесткости) и характерен для системы с распределенными массами, если выбранные координаты совпадают с каждой массой. Если уравнение движения переписать в терминах удлинений каждой пружины, то матрица жесткости, а не матрица масс, станет диагональной. Такой вид связи называется инерционной или динамической (недиагональная матрица масс). Таким образом, видно, что способ связи уравнений зависит от выбора координат. Если система уравнений может стать несвязанной и мы получаем диагональные матрицы масс и жесткости, то каждое уравнение будет подобно уравнению для системы с одной степенью свободы и может решаться независимо от другого. В действительности процесс получения характеристики системы путем преобразования уравнений движения в независимую систему уравнений называется модальным анализом.

Таким образом, применение преобразования координат приводит сис-

тему уравнений к несвязанному виду одновременно инерционно и упруго и, следовательно, позволяет получить диагональные матрицы масс и жесткости. Воспользуемся свойствами ортогональности модальных форм, рассмотренными выше. Выражение (3.2) показывает, что если матрицу масс или жесткости умножить справа и слева соответственно на вектор модальной формы и его транспоненту, то в результате получим некоторую скалярную величину. Таким образом, используя матрицу $[\phi]$, столбцами которой являются векторы модальных форм, получаем необходимое преобразование координат. Координаты x преобразуются в η с помощью выражения:

$$\{x\} = [\phi]\{\eta\}, \quad (3.3)$$

где

$$[\phi] = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\}_2 \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\}_n \end{array} \right], \quad (3.4)$$

$[\phi]$ называется модальной матрицей, а вектор $\{\eta\}$ - главными (нормальными) или модальными координатами.

Уравнение (3.4) можно записать в виде:

$$[m]\{x''\} + [k]\{x\} = \{F\}, \quad (3.5)$$

а подставляя выражение (3.5) в (3.4) получим:

$$[m][\phi]\{\eta''\} + [k][\phi]\{\eta\} = \{F\}. \quad (3.6)$$

Умножая слева уравнение (3.6) на транспоненту модальной матрицы $[\phi]^T$, получим:

$$[\phi]^T [m][\phi]\{\eta''\} + [\phi]^T [k][\phi]\{\eta\} = [\phi]^T \{F\}. \quad (3.7)$$

В выражении (3.7) матрица масс была умножена справа и слева на одну модальную форму и ее транспоненту и получена в результате скалярная величина, тогда как в выражении (3.6) матрица масс умножается справа и слева на все модальные формы и их транспоненты. Таким образом, произведение представляет собой матрицу $[\leftarrow M \rightarrow]$, у которой диагональные элементы яв-

ляются некоторыми постоянными, а все внедиагональные элементы равны нулю, т.е.

$$[\phi]^T [m] [\phi] = [{}^{\leftarrow} M_{\rightarrow}], \quad (3.8)$$

аналогично

$$[\phi]^T [k] [\phi] = [{}^{\leftarrow} K_{\rightarrow}], \quad (3.9)$$

где $[{}^{\leftarrow} M_{\rightarrow}]$ и $[{}^{\leftarrow} K_{\rightarrow}]$ являются диагональными матрицами.

Отсюда уравнение (3.8) можно записать в виде:

$$[{}^{\leftarrow} M_{\rightarrow}] \{\eta''\} + [{}^{\leftarrow} K_{\rightarrow}] \{\eta\} = [\phi]^T \{F\}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) представляет собой n уравнений вида

$$M_i \eta_i'' + K_i \eta_i = \{\phi_i\}^T \{F\} = F_i, \quad (3.11)$$

где $\{\phi_i\}$ - i -ый столбец модальной матрицы, т.е. i -ая модальная форма. M_i и K_i являются i -ой модальной массой (обобщенной массой) и i -ой модальной жесткостью (обобщенной жесткостью) соответственно. Уравнение (3.11) является уравнением движения для системы с одной степенью свободы, показанной на рис. 3.1.

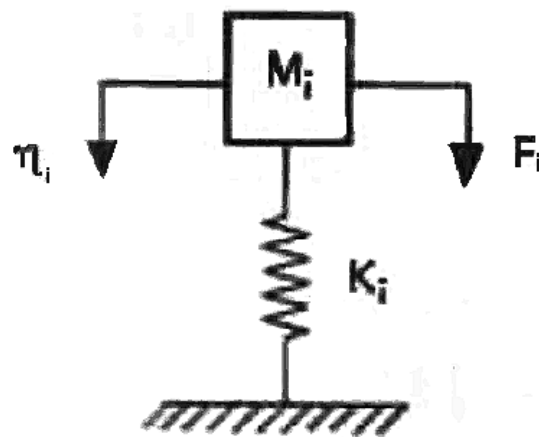


Рис.3.1. Система с одной степенью свободы

Поскольку, как видно из выражения (2.22), $K_i = \omega_i^2 M_i$, то уравнение (3.11) можно записать в виде:

$$\eta_i'' + \omega_i^2 \eta_i = \frac{F_i}{M_i} = \frac{\{\phi_i\}^T \{F\}}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\}}. \quad (3.12)$$

После того как получено решение (временные характеристики) уравнения (3.12) для всех значений η , решение для исходных координат x определяется обратным преобразованием, т.е. подстановкой выражения для η из уравнения (3.12) $\{x\} = [\phi]\{\eta\}$.

Однако следует заметить, что модальная матрица $[\phi]$ выражения (3.12) может быть составлена из столбцов нормализованных модальных форм (для которых $M_i = 1$). Такая матрица называется взвешенной модальной матрицей $[\tilde{\phi}]$. Если эта матрица используется вместо матрицы с собственными модальными формами, то уравнение (3.12) можно привести к виду:

$$\eta_i'' + \omega_i^2 \eta_i = F_i = \{\phi_i\}^T \{F\}. \quad (3.13)$$

Таким образом, модальная масса будет равна единице, а модальная жесткость – квадрату собственной частоты i -ой моды.

3.2. Колебания с демпфированием

Предположение об отсутствии затухания в немеханических системах является всего лишь гипотетическим, поскольку все конструкции имеют внутреннее демпфирование. Поскольку существует несколько видов демпфирования - вязкое, гистерезисное, кулоновское, аэродинамическое и пр., то в общем случае трудно установить вид демпфирования, характерный для данной конструкции. Практически конструкция может иметь характеристики демпфирования, получаемые в результате сочетания всех видов. Во многих случаях, однако, демпфирование мало и можно сделать определенные упрощающие предположения.

3.2.1. Колебания с вязким демпфированием

Уравнения движения системы с двумя степенями свободы с демпфированием, показанной на рис. 2.1, определяются выражением (2.2):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.14)$$

В краткой форме их можно записать в виде:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}. \quad (3.15)$$

Прежде чем решать эти уравнения, сделаем два не требующих доказательства предположения. Во-первых, демпфирование является вязким и, во-вторых, распределение демпфирования - пропорциональное. Под пропорциональным демпфированием подразумевается то, что матрица демпфирования $[c]$ пропорциональна или матрице жесткости, или матрице масс, или некоторой линейной комбинации этих двух матриц. Математически это означает, что

$$\begin{aligned} [c] &= \alpha[m] \\ [c] &= \beta[k] \\ [c] &= \alpha[m] + \beta[k] \end{aligned}, \quad (3.16)$$

где α и β постоянные.

Вследствие предположения о пропорциональности демпфирования преобразование координат (использующее модальную матрицу для случая свободных колебаний без демпфирования), которое диагонализует матрицы масс и жесткости, будет также диагонализировать и матрицу демпфирования. Следовательно, связанные уравнения движения системы с пропорциональным демпфированием преобразуются в несколько уравнений, каждое из которых описывает колебания системы с одной степенью свободы, как показывается в дальнейшем.

Подставляя преобразование координат в уравнение (3.15), получим:

$$[m][\phi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\phi]\{\dot{\eta}\} + [k][\phi]\{\eta\} = \{F\}. \quad (3.17)$$

Умножая слева уравнение (3.17) на транспоненту модальной матрицы $[\phi]^T$, получим:

$$[\phi]^T [m][\phi]\{\ddot{\eta}\} + [\phi]^T [c][\phi]\{\dot{\eta}\} + [\phi]^T [k][\phi]\{\eta\} = [\phi]^T \{F\}. \quad (3.18)$$

Вследствие свойств ортогональности модальных форм, матрицы масс и жесткости приводятся к диагональному виду, т.е. $[\phi]^T [m][\phi] = [{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}]$
 $[\phi]^T [k][\phi] = [{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}]$.

Вследствие пропорциональности демпфирования $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

имеем $[\phi]^T [c][\phi] = [\phi]^T [\alpha[m] + \beta[k]][\phi] = \alpha[\phi]^T [m][\phi] + \beta[\phi]^T [k][\phi]$,

$$[\phi]^T [c][\phi] = \alpha [{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}] + \beta [{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}] = [{}^{\leftarrow}C_{\rightarrow}],$$

где $[{}^{\leftarrow}C_{\rightarrow}]$ - диагональная матрица.

Таким образом, подстановка в уравнение (3.18) дает

$$[{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}]\{\eta''\} + [{}^{\leftarrow}C_{\rightarrow}]\{\eta'\} + [{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}]\{\eta\} = [\phi]^T [F]. \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) представляет собой несвязанную систему уравнений для системы с одной степенью свободы с демпфированием, i -ое уравнение которой имеет вид:

$$M_i \eta_i'' + C_i \eta_i' + K_i \eta_i = \{\phi_i\}^T \{F\} = F_i \quad (3.20)$$

и представляет собой уравнения системы, показанной на рис. 3.2.

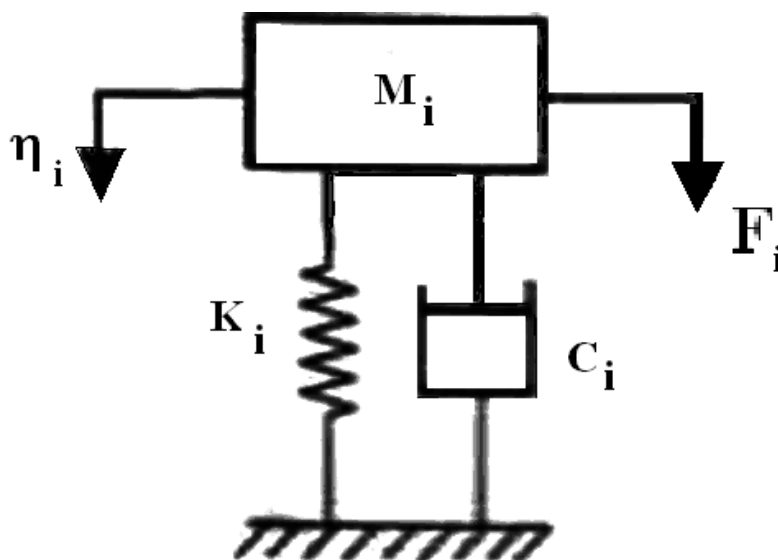


Рис.3.2. Система с одной степенью свободы, описываемая уравнением (3.20)

Поскольку $K_i = \omega_i^2 M_i$, то уравнение (3.20) можно записать в виде:

$$\eta_i'' + 2\xi_i \omega_i \eta_i' + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\{\phi_i\}^T \{F\}}{M_i} = \frac{F_i}{M_i} \quad (3.21)$$

где

$$\xi_i = \frac{C_i}{2\sqrt{K_i M_i}}. \quad (3.22)$$

Решение для системы с одной степенью свободы с демпфированием ранее уже обсуждалось. После того, как получено решение для всех значений η , можно найти решения уравнения в исходной системе координат с помощью обратного преобразования, т.е. подстановкой выражения для η из уравнения (3.21).

Следует отметить, что если матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости, т.е. $[c] = \alpha [k]$, то из уравнения видно, что

$$\xi_i \propto \frac{K_i}{\sqrt{K_i M_i}} \propto \omega_i.$$

Это означает, что более высокочастотные моды колебаний будут иметь более высокое относительное демпфирование.

3.2.2. Колебания с гистерезисным демпфированием

Гистерезисное или структурное демпфирование было рассмотрено для системы с одной степенью свободы. Показано, что демпфирующая сила в этом случае пропорциональна упругой силе, но поскольку энергия рассеивается, сила находится в фазе со скоростью. Следовательно, для простого гармонического движения демпфирующая сила равна $j\gamma kx$. Для систем со многими степенями свободы уравнения движения при гистерезисном демпфировании можно записать в виде:

$$[m]\{\ddot{x}\} + j\gamma[k]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}. \quad (3.23)$$

Переход к главным координатам, как показано в предыдущем разделе, приводит к следующему выражению:

$$[{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}]\{\ddot{\eta}\} + (1 + j\gamma)[{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}]\{\dot{\eta}\} = [\phi]^T [F]. \quad (3.24)$$

Следовательно, каждое уравнение имеет вид:

$$M_i \ddot{\eta}_i + (1 + j\gamma) K \eta = [\phi_i]^T [F],$$

или

$$\ddot{\eta}_i + (1 + j\gamma) K \eta = \frac{[\phi_i]^T [F]}{M_i}. \quad (3.25)$$

Если

$$\{F\} = \{\bar{F}\}e^{j\alpha}$$

то

$$\{\eta\} = \{\bar{\eta}\}e^{j\alpha}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.25), получим уравнение:

$$-\omega_1^2 \bar{\eta}_i + (1 + j\gamma)\omega_1^2 \bar{\eta}_i = \frac{[\phi_i]^T [\bar{F}]}{M_i} = \frac{\bar{F}_i}{M_i}, \quad (3.26)$$

решение которого было рассмотрено ранее.

3.2.3. Метод состояния пространства

Если матрица демпфирования не пропорциональна матрице масс или матрице жесткости, то ни модальная матрица, ни взвешенная матрица не будут диагонализировать матрицу демпфирования. В этом общем случае демпфирования связанные уравнения движения следует решать одновременно или их необходимо привести к несвязанному виду с помощью метода состояния пространства, который описывается здесь кратко.

По существу при помощи этого метода система из n дифференциальных уравнений второго порядка преобразуется в эквивалентную систему, состоящую из $2n$ уравнений первого порядка, введением новых переменных (называемых переменными состояния) для каждой из исходных переменных и их производных.

Для описания этого метода запишем уравнения движения системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. 2.1, в виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

или в виде расчлененной матрицы:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1+c_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Подставляя

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 & x_1' &= z_1' = z_3 & x_1'' &= z_3'' \\ x_2 &= z_2 & x_2' &= z_2' = z_4 & x_2'' &= z_4'' \end{aligned}$$

получим

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1+c_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3' \\ z_4' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Или в сокращенном виде:

$$[A]\{z'\} + [B]\{z\} = \{Q\}, \quad (3.29)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}.$$

Видно, что если порядок уравнений снизился со второго до первого, то число уравнений удвоилось и, следовательно, увеличились затраты, связанные с вычислениями. Решение предыдущих уравнений для свободных колебаний показывает, что существуют демпфированные собственные моды, однако они не тождественны недемпфированным собственным модам. Для недемпфированных собственных мод различные части конструкции движутся или в фазе, или в противофазе друг относительно друга. Что касается конструкций, имеющих непропорциональное демпфирование, то существуют разные фазовые углы для различных частей конструкции, что приводит к появлению комплексных модальных форм. Это различие проявляется в том, что для недемпфированных собственных мод все точки конструкции проходят через положения равновесия одновременно, чего не происходит в случае комплексных мод. Следовательно, недемпфированные собственные моды имеют хорошо определяемые

узловые точки или линии и проявляются в виде стоячей волны, тогда как для комплексных мод угловые линии не постоянны.

3.2.4. Фазовое рассогласование гармоник при нелинейном демпфировании

Для системы с n степенями свободы и вязким демпфированием уравнения движения для установившегося синусоидального возбуждения в общей форме можно записать в виде:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}\sin \omega t, \quad (3.30)$$

где матрицы инерции, демпфирования и жесткости системы соответственно $[m]$, $[c]$ и $[k]$, предполагаемые вещественными, симметричными и положительными - определены. В случае гистерезисного демпфирования второй член уравнения имеет вид $\frac{1}{\omega[d]\{\dot{x}\}}$, где $[d]$ - матрица гистерезисного демпфирования. В

общем случае демпфирование является непропорциональным и, следовательно, матрица демпфирования не может быть диагонализирована использованием преобразования нормальных мод. Для произвольной системы сил $\{F\}$ и частоты возбуждения ω решение уравнения (3.30) представляется довольно сложным. Хотя отклики для каждой координаты x являются гармоническими с частотой возбуждения, не все они находятся в фазе друг с другом или с возбуждающей силой. Если, однако, система с n степенями свободы возбуждается системой n сил, которые находятся либо в фазе, либо в противофазе (часто называемых монофазными или когерентными силами), то при определенном отношении сил отклик в каждой из координат будет находиться в фазе друг с другом и отставать от силы на общий угол θ (называемый характеристическим отставанием по фазе).

Таким образом, необходимо определить условия, при которых получается решение уравнения в виде:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \theta) = \{\psi\} \sin(\omega t - \theta) \quad (3.31)$$

Для любой заданной частоты возбуждения ω существует n решений в виде, определяемом уравнением (3.31), при котором каждой моде $\{\psi_i\}$ соответствует определенный фазовый угол θ_i и соответствующее распределение сил $\{F_i\}$, которое требуется для ее возбуждения. Характеристика, соответствующая таким условиям, называется «вынужденными нормальными модами» системы с демпфированием, поскольку каждая точка системы двигается в фазе и проходит через положение равновесия одновременно с другими точками. Подстановка выражения (3.31) в уравнение (3.30) дает:

$$\sin(\omega t - \theta)[[k] - \omega^2 [m]]\{\psi\} + \omega \cos(\omega t - \theta)[c]\{\psi\} = \{F\} \sin \omega t. \quad (3.32)$$

Раскрывая выражение $\sin(\omega t - \theta)$ и $\cos(\omega t - \theta)$ и отделяя члены $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим:

$$\cos \theta [[k] - \omega^2 [m]]\{\psi\} + \omega \sin \theta [c]\{\psi\} = \{F\}, \quad (3.33)$$

$$\sin \theta [[k] - \omega^2 [m]]\{\psi\} - \omega \cos \theta [c]\{\psi\} = \{0\}. \quad (3.34)$$

Эти уравнения содержат три неизвестные величины $\{F\}$, $\{\psi\}$ и θ , при заданном значении ω . Если $\cos \theta \neq 0$, то уравнение (3.34) можно разделить на $\cos \theta$, получим:

$$[\tan \theta [[k] - \omega^2 [m]] - \omega [c]]\{\psi\} = \{0\}. \quad (3.35)$$

Уравнение (3.35) имеет ненулевое решение, если определитель

$$|\tan \theta [[k] - \omega^2 [m]] - \omega [c]| = 0. \quad (3.36)$$

Очевидно, что для заданного значения частоты ω существует n значений $\tan \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), соответствующих n собственным значениям, а для каждого $\tan \theta_i$ существует соответствующий собственный вектор $\{\psi_i\}$, удовлетворяющий уравнению:

$$[\tan \theta_i [[k] - \omega^2 [m]] - \omega [c]]\{\psi_i\} = \{0\}. \quad (3.37)$$

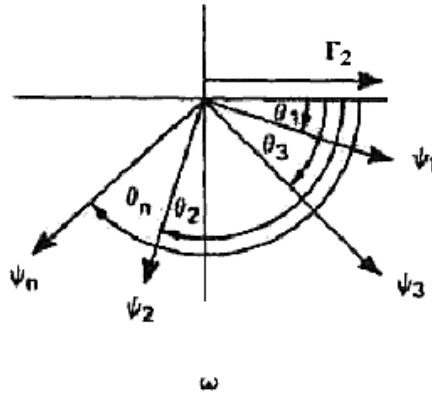


Рис. 3.3. Собственные векторы относительно вектора силы для каждой частоты ω . Для каждого угла θ смещения во всех точках синфазны

На рис. 3.3 представлены собственные векторы относительно вектора силы для каждой частоты. Умножая слева уравнение (3.37) на транспоненту $\{\psi_i\}^T$ и преобразовывая, получим

$$\tan \theta_i = \frac{\omega \{\psi_i\}^T [c] \{\psi_i\}}{\{\psi_i\}^T [k] \{\psi_i\} - \omega^2 [m] \{\psi_i\}}. \quad (3.38)$$

Из уравнения (3.38) видно, что каждый из корней $\tan \theta_i$ является непрерывной функцией ω . Для небольших значений ω значение $\tan \theta_i$ мало, т.е. θ - малый угол. По мере увеличения ω и приближения ее к ω_1 недемпфированной собственной частоте один из корней θ_i (который можно назвать θ_1) стремится к значению $\pi/2$. При увеличении частоты ω сверх ω_1 знаменатель в уравнении (3.38) становится отрицательным, а $\theta_1(\omega)$ становится больше, чем $\pi/2$. Когда ω стремится к бесконечности, то $\theta_1(\omega)$ стремится к π . Аналогично, оставшиеся корни θ_i ($i=1,2,3,\dots,n$) можно изобразить в виде функции частоты ω , где θ_i ($i=1,2,3,\dots,n$) равно $\pi/2$ при i -ой недемпфированной собственной частоте $\omega = \omega_k$. Таким образом, θ_k является корнем, имеющим значение $\pi/2$ на недемпфированной собственной частоте $\omega = \omega_k$.

Рассмотрев изменение собственных значений $\tan \theta_i$ в зависимости от частоты, можно исследовать формы мод колебаний. Как видно из уравнений

(3.36) и (3.37), для любой частоты модальные формы зависят только от формы матрицы демпфирования и не зависят от ее интенсивности. Если каждый элемент матрицы $[c]$ уменьшить на постоянный коэффициент, то уравнение (3.36) показывает, что корни θ_i будут также увеличены в том же отношении. Следовательно, уравнение (3.37), определяющее модальные формы, будет умножено на один и тот же коэффициент, а модальная форма $\{\psi_i\}$ останется неизменной.

Уравнение (3.37) можно переписать в виде:

$$\left[[k] - \omega^2 [m] - \frac{\omega [c]}{\tan \theta_i} \right] \{\psi_i\} = \{0\}. \quad (3.39)$$

Когда частота ω равна одной из недемпфированных собственных частот, скажем $\omega = \omega_1$, то один из корней, как показано выше, $\theta = 90^\circ$. Следовательно, уравнение (3.39), которое определяет модальную форму для данного корня, преобразуется к виду:

$$[[k] - \omega_1^2 [m]] \{\psi_i\} = \{0\}. \quad (3.40)$$

Таким образом, видно, что когда частота равна одной из недемпфированных собственных частот, модальная форма для одного из корней (равного $\pi/2$) идентична главной или нормальной модальной форме.

Теперь можно рассмотреть отношение сил, требуемое для возбуждения любой из мод $\{\psi_i\}$ для соответствующего корня $\tan \theta_i$ на любой частоте. Требуемое отношение сил можно вычислить из уравнения (3.33):

$$\cos \theta_i [[k] - \omega^2 [m]] \{\psi_i\} + \omega \sin \theta_i [c] \{\psi_i\} = \{F_i\}. \quad (3.41)$$

В частном случае, когда частота $\omega = \omega_1$ - одной из недемпфированных собственных частот, а один из корней $\theta_i = \theta_1 = 90^\circ$, уравнение (3.41) преобразуется к виду:

$$\omega_1 [c] \{\psi_i\} = \{F_i\}. \quad (3.42)$$

Вывод

Из проведенного в данной главе анализа можно констатировать, что любое демпфирование обладает гистерезисными свойствами и по изменению площади петли гистерезиса целесообразно характеризовать отдельные узлы данной конструкции на вибро - и шумозащиту.

В результате нелинейного демпфирования возникает множество высокочастотных гармоник, которые достаточно быстро затухают в строительной конструкции. При этом необходимо учитывать возможность возникновения отдельных резонансов в различных узлах сложной конструкции.

ГЛАВА 4. ВОЛНОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Знание особенностей распространения потоков вибраций по элементам строительной конструкции позволяет предложить ряд новых методов и средств снижения вибрации и шумов. Суть этих методов заключается в том, чтобы потоки вибраций внутри конструкции нигде не отражались, а уходили в фундамент или поглощались в специальных демпфирующих устройствах.

Выполнение условий согласования позволит создать конструкцию, в которой не будет резонансов; достигается минимальный уровень вибраций в каждом узле, вследствие этого снижается уровень шумов; снижается износ и старение, увеличивается ресурс.

4.1. Идеальный демпфер изгибных колебаний балки

В строительных конструкциях наиболее важным элементом является сопряжение балок с опорами. В тех случаях, когда на балке установлен какой-либо энергетический объект, например электродвигатель, возбуждающий при работе изгибные колебания балки, возникает задача демпфировать эти колебания на границе. Рассмотрим балку Бернулли, на конце которой установлен гаситель колебаний, включающий в себя диссипативные, а также упругие и инерционные элементы, учитывающие поперечное смещение и поворот концевого сечения.

Изгибные колебания балки описываются уравнением:

$$\rho F U_{tt} + E J U_{xxxx} = 0, \quad (4.1)$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} -E J U_{xxx} + m U_{tt} + C_1 U + \alpha U_t \Big|_{x=0}, \\ E J U_{xx} + J_0 U_{xt} + C_2 U_x + \beta U_{xt} \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $U(x,t)$ – прогиб балки, x,t – продольная координата и время, ρ, E – плотность материала балки и модуль Юнга, F, J – площадь и момент инерции попе-

речного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний, m – масса гасителя, J_0 – его момент инерции, C_1, C_2 – коэффициенты жесткости упругих элементов на смещение и поворот соответственно, α, β – коэффициенты вязких потерь при поперечном смещении и повороте балки.

Будем считать, что источник вибрации находится в окрестности центра тяжести балки и создает при работе периодический сигнал заданной частоты ω в стационарном режиме.

Решение уравнения (4.1) может быть представлено в виде суперпозиции двух бегущих волн и двух экспоненциально спадающих осцилляций

$$U(x, t) = A_1 e^{i(\alpha x - kx)} + A_2 e^{i(\alpha x + kx)} + B_1 e^{i\alpha x - kx} + B_2 e^{i\alpha x + kx}, \quad (4.3)$$

где A_1, A_2 – амплитуды падающей и отраженной от гасителя бегущих волн, B_1, B_2 – амплитуды осцилляций, ω, k – круговая частота и волновое число.

Входящие в решение (4.3) частота возмущения и волновое число удовлетворяют дисперсионному уравнению:

$$k = (\rho F / EJ)^{1/4} \omega^{1/2}. \quad (4.4)$$

Так как прогибы балки должны быть ограничены, в решении (4.3) необходимо положить $B_1 = 0$. Подставляя (4.3) в краевые условия (4.2), находим коэффициент отражения волны (A_2 / A_1) и относительную амплитуду осцилляции (B_2 / A_1) на границе балки при $X = 0$.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2}; \quad \frac{B_2}{A_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 + \Phi_2},$$

где:

$$\Phi = -2\gamma\alpha_0 + \alpha\beta - \gamma\delta + \alpha_0\beta_0 + i(\alpha\gamma + \delta\beta + 2\beta\alpha_0),$$

$$\Phi_2 = 2\alpha\beta_0 - 2\gamma - \delta\beta + i(\alpha\beta - \delta\gamma + 2\delta\beta_0 + \alpha_0\beta_0),$$

$$\Phi_3 = 2\alpha_0\beta_0 - 2\alpha\beta + 2\gamma\delta - 2i(\beta\delta + \alpha\gamma),$$

$$\gamma = J_0\omega - c_2 / \omega, \delta = m\omega - c_1 / \omega,$$

$$\alpha_0 = EJk^3 / \omega, \beta_0 = EJk / \omega.$$

Будем считать гаситель оптимальным при условии, что вся энергия падающей волны им поглощается. Следовательно, отраженная волна и осцилля-

ции отсутствуют. Тогда:

$$\frac{A_2}{A_1} = 0, \frac{B_2}{A_1} = 0, \quad (4.5)$$

Условия оптимальности выполняются, если параметры гасителя удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \alpha\gamma + \beta\delta = 0, \alpha\beta - \gamma\delta = \alpha_0\beta_0, \\ \alpha + \gamma k^2 = \alpha_0, \beta k^2 - \delta = \alpha_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Система уравнений (4.6) совместна при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_0 = \rho F (EJ / \rho F)^{1/4} \omega^{1/2}, \beta = \beta_0 = EJ (\rho F / EJ)^{1/4} \omega^{-1/2}, \\ m = c_1 = 0, (\text{либо } m/c = \omega^2); J_0 = C_2 = 0, (\text{либо } J_0/c_2 = \omega^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Следовательно, отраженная волна и приграничная осцилляция отсутствуют либо в резонансном случае, либо в случае идеального демпфера, или безинерционного гасителя, не обладающего упругими свойствами.

4.2. Оптимальные демпферы поперечных колебаний балки

Гашение колебаний строительных конструкций с помощью одного только демпфирующего элемента невозможно реализовать на практике. Поэтому необходимо решить задачу отыскания гасителей, обладающих инерционными и упругими элементами и, в то же время, осуществляющих гашение колебаний, близкое к оптимальному.

Экспоненциально спадающая осцилляция $B_2 e^{i\alpha x + kx}$, входящая в решение (4.3), описывает динамический краевой эффект в пограничной зоне гасителя, ее вклад в решение незначителен по сравнению со смещением, создаваемым бегущими волнами вне этой области. Ширина области динамического краевого эффекта L определяется расстоянием, на котором амплитуда осцилляции уменьшается в e раз, и не превышает длины волны ($L \leq k^{-1}$). Поэтому гаситель будет близок к оптимальному, если он обеспечивает отсутствие отраженной волны ($A_2 / A_1 = 0$), хотя и не уничтожает спадающей осцилляции ($B_2 / A_1 \neq 0$).

Коэффициент отражения волны A_2 / A_1 обращается в нуль, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} -2\gamma\alpha_0 + \alpha\beta - \gamma\delta + \alpha_0\beta_0 - 2\alpha\beta_0 + \alpha\gamma + \delta\beta &= 0 \\ \alpha\gamma + \delta\beta + 2\beta\alpha_0 - \alpha_0\beta_0 - 2\delta\beta_0 - \alpha\beta + \gamma\delta &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Следовательно, задача сводится к исследованию системы двух уравнений (4.8) с учетом условия (4.4) для определения шести параметров гасителя $m, J_0, c_1, c_2, \alpha, \beta$ при заданной частоте вибрации ω и заданных параметрах балки.

В случае упруго-инерционного гасителя поперечных колебаний балки ($\beta = c_2 = 0$) при условии выбора свободных параметров массы m и момента инерции гасителя J_0 коэффициент вязких потерь α и жесткость c_1 определяются соотношениями:

$$\alpha = \alpha_0(I - \beta_0)^2 / Z, \quad c_1 = M + \alpha_0(I^2 - I\beta_0 + \beta_0^2) / Z, \quad Z = I^2 - 2I\beta_0 + 2\beta_0^2,$$

где введены обозначения: $I = J_0\omega, M = m\omega, c_1 = c_1/\omega, c_2 = c_2/\omega$.

В случае инерционного гасителя колебаний балки ($c_1 = c_2 = 0$) значения коэффициентов вязких потерь α, β определяются из решения квадратных уравнений

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 + M^2 + \alpha_0(M + \alpha_0)(\beta_0 - 2I)/(\beta_0 - I) = 0,$$

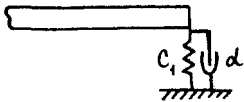
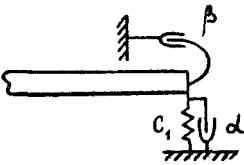
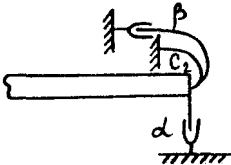
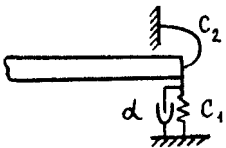
$$\beta^2 - 2\beta\beta_0 + I^2 - \beta_0(I - \beta_0)(2M + \alpha_0)/(M + \alpha_0) = 0$$

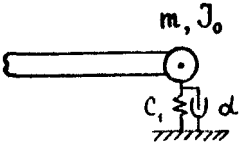
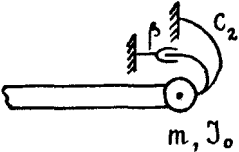
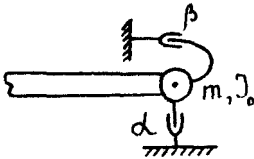
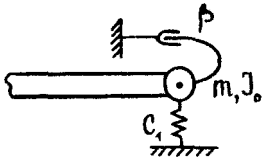
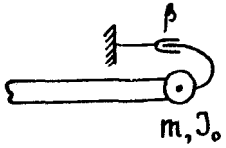
Величина момента инерции гасителя соответствует неравенству

$$I \geq M\beta_0/(M + \alpha_0), \quad I \neq \beta_0$$

Параметры других возможных разновидностей гасителей представлены в таблице.

Параметры квазиоптимальных гасителей изгибных колебаний балки

Схема закрепления	Параметры гасителя
	$\alpha = C_1 = \alpha_0/2$
	$\alpha = \alpha_0(\beta^2 - \beta_0\beta + \beta_0^2) / X$ $C_1 = (\beta - \beta_0)^2 / X$
	$C_2 = 0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0$
	$C_1 = \alpha_0(C_2^2 + \beta_0 C_2 + \beta_0^2) / Y$ $\alpha = \alpha_0(C_2 + \beta_0)^2 / Y$

	$\alpha = \alpha_0 (I - \beta_0)^2 / Z$ $C_1 = M + \alpha_0 (I^2 - I\beta_0 + \beta_0^2) / Z$ $I \neq \beta_0$
	$\beta = \beta_0 (M + \alpha_0)^2 / N$ $C_2 = I - (M\beta + \alpha_0\beta_0) / (M + 2\alpha_0)$
	$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + M^2 + \alpha_0 (M + \alpha_0)(\beta_0 - 2I) / (\beta_0 - I) = 0$ $\beta^2 - 2\beta_0\beta + I^2 - \beta_0 (I - \beta_0)(2M + \alpha_0) / (\alpha_0 + M) = 0$ $I \geq M\beta_0 / (M + \alpha_0), \quad I \neq \beta_0$
	$\beta^2 - \beta_0\beta + (I - \beta_0)^2 = 0$ $C_1 = M - \alpha_0(2I - \beta_0) / (\beta_0 - I)$ $\beta_0/2 \leq I \leq 3\beta_0/2, \quad I \neq \beta_0$
	$\beta = \beta_0 (M + \alpha_0)^2 / N$ $I = \beta_0 [(M + \alpha_0)^3 - \alpha_0^3] / N$

Примечание. В таблице приняты обозначения:

$$I = J_0 w, \quad M = m w, \quad C_1 = c_1 / w, \quad C_2 = c_2 / w,$$

$$X = \beta^2 - 2\beta_0 \beta + 2\beta_0^2, \quad Y = C_2^2 + 2\beta_0 C_2 + 2\beta_0^2,$$

$$Z = I^2 - 2I\beta_0 + 2\beta_0^2, \quad N = M^2 + 2\alpha_0 M + 2\alpha_0^2$$

Принципиальные схемы приведенных в таблице демпферов, соединяющих балки с корпусом строительной конструкции, соответствуют газогидравлическим виброопорам.

4.3. Стоячие волны – источник колебаний трубопроводов

При рассмотрении процессов, вызывающих колебания трубопроводов, следует обратить внимание на неоднородность самого тракта, по которому транспортируется продукт. Источник вибрации - чаще всего компрессор, создающий рабочее давление, генерирующий кроме изгибных волн, распространяющихся от источника по трубопроводу и легко обнаруживающихся, дополнительные продольные волны, трансформирующиеся позднее в изгибные. Трансформатором обычно является какая-либо структурная неоднородность - изгиб, изменение сечения, поворот, напряженное состояние, обусловленное внешними условиями и т.д. Подобно тому, как это делается в радиотехнике для согласования потоков волновой энергии, в трубопроводах можно предусмотреть подстроечные элементы, с помощью которых можно в наибольшей степени снизить вредное воздействие отраженных от неоднородностей изгибных и продольных волн. Назначение этих элементов - настройка системы на безотражательное прохождение по ней потоков вибраций, достижение минимальных уровней виброактивности. Для трубопроводов на поверхности земли или на эстакадах этого можно достигнуть путем установки подстроечных элементов в виде дополнительных масс, свободно перемещающихся по объекту. Изменяя положение масс, можно производить подстройку параметров динамической

системы в зависимости от частоты возмущений и согласовывать потоки вибраций.

Систему источник – трубопровод - нагрузка можно представить в виде полубесконечного стержня, соединенного на конце с массой, пружиной и демпфером, характеризующими упруго - инерционные и диссипативные свойства нагрузки. На стержне размещены две сосредоточенные массы, которые можно перемещать вдоль него и фиксировать в любом положении.

Продольные колебания отрезка трубопровода можно описать уравнением:

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0, \quad (4.9)$$

удовлетворяющего краевому условию при $X = 0$:

$$EFU_x - mU_{tt} - \alpha U_t - \chi U|_{x=0} = 0, \quad (4.10)$$

и условиям сопряжения смещений и продольных напряжений в местах закрепления дополнительных масс:

$$EFU_x|_{x=l^+} - EFU_x|_{x=l^-} = m_1(U_l^0)_{tt}, \quad (4.11)$$

$$EFU_x|_{x=(l+L)^+} - EFU_x|_{x=(l+L)^-} = m_2(U_{(l+L)}^0)_{tt}, \quad (4.12)$$

$$U|_{x=l^+} = U|_{x=l^-} = U_l^0, \quad (4.13)$$

$$U|_{x=(l+L)^+} = U|_{x=(l+L)^-} = U_{l+L}^0, \quad (4.14)$$

здесь $U(x,t)$ – продольное смещение отрезка трубопровода, x,t – координата и время, c – скорость распространения продольных волн в заполненном трубопроводе, E – модуль Юнга, F – площадь поперечного сечения трубопровода, m, χ, α – масса, жесткость и коэффициент вязких потерь присоединенного к трубопроводу объекта, $m_{1,2}$ – массы подстроечных элементов, U_l^0, U_{l+L}^0 – смещение фрагмента трубопровода в сечениях $x=l$ и $x=l+L$, в местах установки подстроечных элементов.

На каждом участке трубопровода ($0 \leq x \leq l, l \leq x \leq l+L, x \geq l+L$) решение уравнения (4.9) может быть представлено в виде суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу волн.

Вывод

Таким образом, для снижения и устранения пучностей стоячих волн в трубопроводе необходимо регулировать частоту работы компрессора и выбирать ее оптимальной в зависимости от геометрии самого трубопровода. Поэтому наиболее опасным режимом работы компрессора являются переходный – времена пуска и останова. Разрушение трубопроводов вероятнее всего возникает там, где имеются напряженные участки, в местах разветвлений поворота, изменений сечения.

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ ГАЗОГИДРАВЛИЧЕСКИХ СРЕД В СИСТЕМАХ ВИБРОЗАЩИТЫ

5.1. Необходимость борьбы с вибрацией транспорта и стационарных энергоемких объектов

Уровень шума и вибрации современного транспортного средства стал одним из главных показателей его качества и степени совершенства конструкции. Причинами возникновения вибрации и шума являются инерционные и электромагнитные нагрузки, вызывающие колебания роторов электродвигателей. Поскольку от этих нагрузок в полной мере избавиться не удастся, даже используя дополнительные валы с дисбалансами, гасящими первоначальные силы, то виброизоляция силового агрегата от корпуса мобильного объекта или окружающей среды стационарных энергоемких систем приобретает первостепенное значение [10, 11, 12, 13, 14]. Она заключается в установке между виброактивным и виброизолируемым объектами упругоинерционных элементов, настроенных на определенные частоты [15, 16, 17, 18]. С конструктивно - компоновочной точки зрения эту проблему удалось решить в газогидравлических виброопорах. Основные конструкции гидроопор обычно содержат не менее двух камер, рабочую и компенсационные, заполненные рабочей жидкостью. Упругие свойства гидроопоры формируются в основном за счет эластичной обечайки, к которой добавляется гидравлическая система. При этом жидкость выступает в качестве масс – инерционной и диссипативной компоненты гидроопоры [19, 20, 21, 22].

Создание скоростных транспортных средств неизбежно сопровождается увеличением интенсивности вибрации и расширением ее частотного спектра, сопровождаемых шумовым загрязнением окружающей среды, вредным воздействием шума и вибрации на здоровье людей, выходом из строя элементов конструкций из - за усталостных повреждений, снижением надежности работы, отказами техники и аппаратуры [25, 29].

При высоком уровне технического развития вибрация и шум являются одним из основных показателей, характеризующим качество, комфортабельность, надежность и конкурентоспособность транспортных средств, в связи с чем снижение вибрации и шума относится к важнейшим научно-техническим проблемам машиностроения, которые сводятся к устранению или максимальному снижению уровней вибраций и шума посредством применения эффективных виброизоляторов.

Решение проблемы снижения структурного шума усложняется тем, что в мобильной технике широкое распространение имеют двигатели внутреннего сгорания с не полностью уравновешенными силами инерции движущихся масс кривошипно-шатунного механизма и с повышенной неравномерностью крутящего момента.

5.2. Пассивные системы виброзащиты

Если подойти к проблеме пассивной виброизоляции с общих позиций теории цепей и сравнить ее с теорией электрических фильтров, можно обнаружить ряд различий и отсутствие полной аналогии в построении виброизолирующих устройств и систем электрических фильтров. Особенно это касается проблем узкополосной виброизоляции для созданий «фильтров – пробок», широко используемых в электрических цепях.

С одной стороны, механические системы являются динамически более богатыми из-за свойств, присущих механическим системам в трехмерном пространстве, в отличие от электрических цепей, которые одномерны по своей физической природе. Но существуют свойства, которые проявляются в электрических цепях и неочевидны возможности реализации подобных структур в механических цепях.

Если следовать второй аналогии: «напряжение – скорость» и «ток – сила», топология соответствующих по структуре механической и электрической цепей одинакова. Масса соответствует емкости, пружина (жесткость) – величине обратной индуктивности, а демпфирование – величине проводимости, об-

ратной электрическому сопротивлению.

Основной закон классической механики – второй закон Ньютона:
 $F = m \cdot \ddot{x}$ - сила равна массе, умноженной на ускорение.

Ускорение измеряется в инерциальной системе координат относительно Земли, так как мы определяем абсолютное ускорение относительно базы. Таким образом, если в соответствии с методом механического импеданса мы изобразим обычную одномерную механическую систему (неявно используя электрическую аналогию), то все массы будут находиться в параллельных ветвях и замыкаться одним условным контактом (называемым недоступным) на нулевую шину – Землю, в то время как пружины и демпферы образуют свои силы, как на абсолютных, так и на относительных перемещениях и скоростях, т.е. могут перемещаться как в последовательной, так и параллельной ветвях цепи. Поэтому создание «фильтра – пробки» в последовательной ветви электрической цепи с помощью параллельных индуктивности и емкости в механической цепи, казалось бы, невозможно за счет того, что нельзя в последовательной ветви механической цепи разместить параллельные пружину и массу, так как масса не может создать силу на относительном ускорении. Однако это становится возможным исходя из механики Лагранжа, где описывается динамика связанных механических систем и возможно дополнительное действие присоединенных инерционных элементов, используя которые, мы создадим инерционные силы на относительном ускорении в направлении виброизоляции с помощью преобразования движения этих элементов.

5.3. Недостатки пассивных систем виброзащиты

В качестве виброизоляторов в отечественном машиностроении используется большое число (несколько сотен) устройств, которые могут быть отнесены к одному из нижеперечисленных типов.

При соединении между собой по непрерывному контуру вибрирующей и защищаемой от вибраций конструкций в качестве виброизоляторов могут служить виброзадерживающие массы; ребра жесткости; шарнирные препятствия;

упругие прокладки; фланцевые и фальцевые соединения; резонансные анти-вibrаторы, динамические виброгасители; антиволноводные системы и другие типы препятствий, нарушающих непрерывность кинематических или динамических параметров при переходе от вибрирующей к защищаемой конструкции.

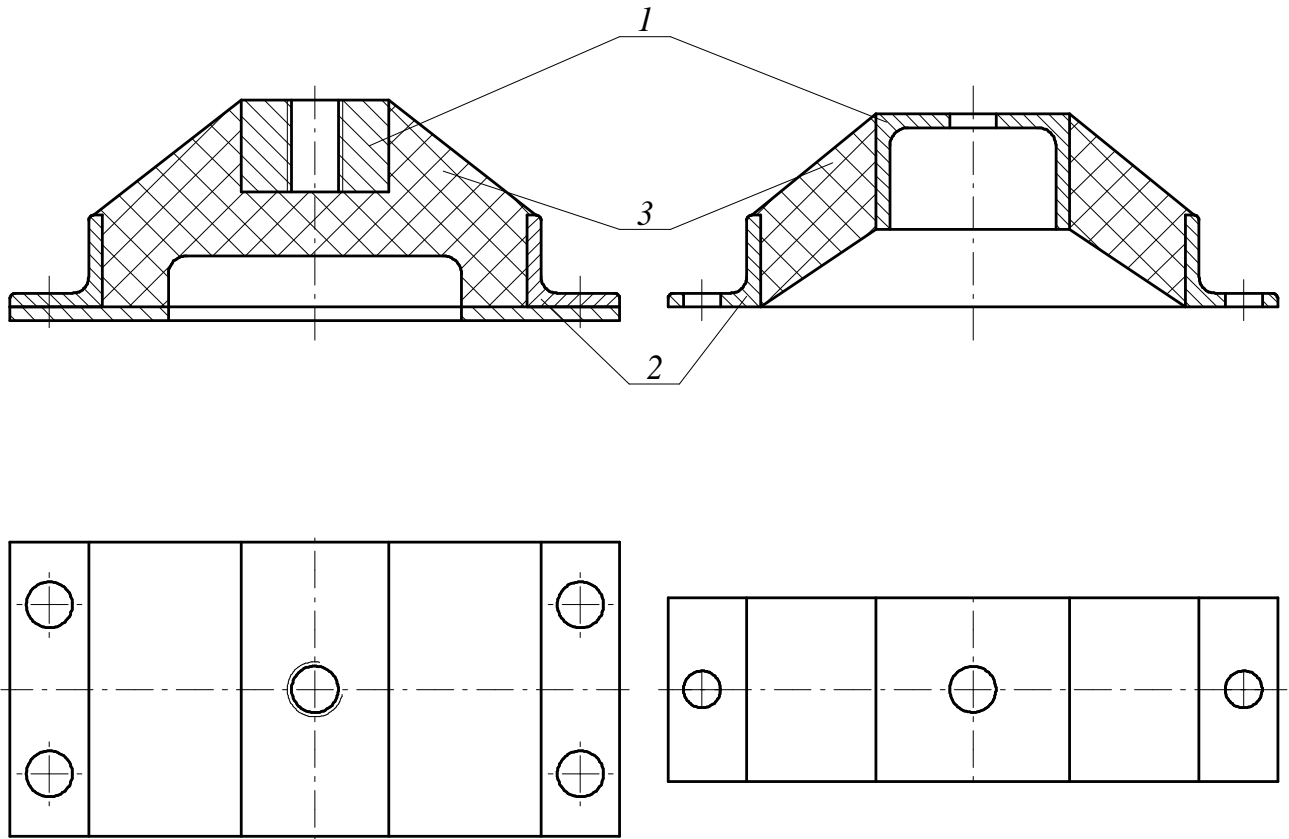
В тех случаях, когда между источником вибрации и защищаемой конструкцией допустимо соединение в дискретном количестве мест, в качестве виброизоляторов могут применяться пружинные подвески и опоры; упругие прокладки; резинометаллические амортизаторы; гидравлические и фрикционные демпферы; механические фильтры и пр.

При отсутствии постоянного контакта между двумя конструкциями или объектами и возможности их соприкосновения в случаях колебательных или поступательных движений в качестве виброизоляторов от ударных процессов используются упругие прокладки; буферы; ограничители перемещений; упоры; кранцы; мягкие покрытия полов помещений и пр.

В перечисленных типах виброизоляторов в качестве упругих элементов используются в основном резиноподобные материалы - эластомеры: упругие прокладки (как непосредственно под оборудованием, так и во фланцевых соединениях, подвесках трубопроводов и мягких покрытиях полов и стен ограждающих конструкций); резинометаллические амортизаторы всевозможных типов; динамические виброгасители, резонансные и антиволноводные системы и демпферы; буферы; упоры; кранцы и т. д.

В качестве примера на рис.5.1,а - 5.1,б изображены конструктивные исполнения резиновых виброизоляторов, в которых несущая и присоединительная металлические планки скрепляются между собой привулканизированным к ним резиновым массивом.

На рис.5.1,а изображен виброизолятор типа АКСС, на рис.5.1,б – виброизолятор типа АМ.1,



1 - несущая планка;
2 - соединительная планка;
3 - резиновый массив.

Рис. 5.1,а (слева). виброизолятор типа АКСС

Рис. 5.1,б (справа). виброизолятор типа АМ

В течение продолжительного времени конструкции отечественных виброизоляторов непрерывно совершенствовались, практически исчерпав свои возможности. Об этом можно судить по некоторой противоречивости выработанных рекомендаций по проектированию резиновых виброизоляторов.

К указанным рекомендациям следует, в первую очередь, отнести следующие:

- наибольшая эффективность на низких частотах достигается при наименьшей динамической жесткости виброизоляторов, которая определяется, в частности, статическим значением этого же параметра и лимитируется не

только свойствами колебательной системы, но и требованием по долговечности, вытекающим из ограничения по статическим деформациям (не должны превышать 50%), а также требованием по тепловому режиму (динамические деформации не более 10 %);

- для обеспечения эффективности на средних частотах целесообразно стремиться к снижению основной собственной частоты упругого элемента виброизоляции и к увеличению значений высших собственных частот при одновременном уменьшении коэффициента возбуждения соответствующих форм колебаний:

- деформирование резиновых элементов должно быть свободным, поскольку резина является малосжимаемым по объему материалом;

- следует избегать соприкосновения свободных поверхностей резины с жесткими деталями и трения между ними;

- необходимо уменьшить концентрации напряжений в резиновом массиве и стремиться к равномерному распределению напряжений;

- не допускать больших напряжений, возникающих в вулканизированной резине при ее усадке;

- виброизоляторы, работающие в условиях ударных нагрузок, должны иметь повышенную жесткость;

- не применять виброизоляторы с мягкой деформационной характеристикой в виде тонкостенных конструкций, способных иметь несколько форм упругого равновесия. Такие упругие элементы теряют устойчивость начальной формы равновесия в процессе деформирования;

- характерный для резин рост модуля сдвига при увеличении частоты приводит к возрастанию жесткости упругого элемента виброизоляции и соответствующему снижению эффективности.

Таким образом, в качестве материала виброизоляторов следует выбирать резины с возможно меньшим отношением $G(f)/G(0)$ динамического модуля сдвига к статическому в необходимом диапазоне частот; поглощение энергии в резиновых виброизоляторах происходит в резиновом массиве, поэтому величина

на коэффициента потерь высокоэластического материала существенно отражается на эффективности практически во всем диапазоне частот. На низких частотах в большинстве случаев желательно обеспечить высокий коэффициент потерь $\eta=0,4...0,8$, чтобы уменьшить амплитуду колебаний на резонансной частоте колебательной системы. На высоких частотах значительный коэффициент потерь позволяет устранить влияние внутренних резонансов на коэффициенты передачи виброизоляторов. В то же время на средних частотах в области собственного резонанса виброизолирующего элемента желательно обеспечить относительно малый коэффициент потерь материала $\eta=0,2...0,4$. Поскольку частотный ход зависимостей комплексного модуля сдвига и сдвиговых потерь взаимосвязаны, удовлетворить вышеизложенные требования практически невозможно.

5.4. Интегральные системы виброзащиты

Интегральные системы виброзащиты (газогидравлические виброопоры) объединяют в себе упругий резиновый элемент и гидравлический с газовой камерой.

В конструкции нет трущихся частей с фрикционным сухим контактом. Изменение объемов полостей с жидкостью происходит за счет деформации эластичной обечайки гидроопоры. В качестве компонентов трения выступают конструкционное трение в резине и гидравлическое вязкое сопротивление жидкости.

Диссипация (рассеивание) в интегральных виброопорах энергии колебаний происходит в реологической жидкости, заполняющей внутренние полости конструкции, за счет совершения работы по перемещению жидкости из одной полости (камеры) в другую полость (камеру), сопровождающемуся трением слоев, при котором выделяется тепловая энергия, рассеиваемая далее в окружающую среду через металлические корпусные детали интегральной виброопоры.

Применение интегральных виброопор позволяет создавать системы виброизоляции двигателей транспортных средств и других видов виброактивного оборудования с более высокими собственными резонансными частотами и в то же время с более низкой динамической жесткостью при малых относительных перемещениях двигателей транспортных средств, а также иметь повышенное демпфирование на резонансных частотах.

Обычно верхняя часть виброопоры закрепляется на двигателе, а основание - на шасси транспортного средства или стационарной конструкции. Когда виброопора нагружается от двигателя или от основания, объем верхней камеры изменяется и вынуждает жидкость течь через отверстия в нижнюю камеру. Это течение порождает два типа силовых реакций в виброопоре за счет инерции жидкости и вязкого сопротивления течению. Для повышения эффективности виброизоляции предложены различные конструкции интегральных виброопор, которые обобщенно можно отнести к одному из нижеперечисленных четырех типов:

- с простым дроссельным отверстием;
- с дроссельной инерционной трубкой;
- с дроссельной инерционной трубкой или отверстием с разделительной мембраной;
- с введением активного управления, дополняющего пассивные свойства.

5.5. Передаточные функции интегральных виброопор

Динамической жесткостью механической системы называют отношение амплитуды внешней гармонической силы к комплексной амплитуде колебаний. Для системы с одной степенью свободы динамическая жесткость:

$$c(\eta) = \frac{F(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{F_0}{\tilde{A}} = a \left(1 - \eta^2 + i \frac{\vartheta}{\pi} \cdot \eta \right), \quad (5.1)$$

где $c(\eta)$ – динамическая жесткость, η – коэффициент потерь, i – мнимая единица.

Это понятие вводится по аналогии со статической жесткостью как отношение силы к смещению в системе, вызванному данной силой. Для системы без

демпфирования $c(\eta)$ – действительная величина. При резонансе система обладает минимальной динамической жесткостью. В частности, для системы без демпфирования при резонансе динамическая жесткость равна нулю.

Динамической податливостью системы $f(\eta)$ называют величину, обратную динамической жесткости:

$$f(\eta) = \frac{1}{c(\eta)} = a^{-1} \left(1 - \eta^2 + i \frac{\vartheta}{\pi} \eta \right)^{-1}. \quad (5.2)$$

В окрестностях резонанса динамическая податливость механической системы оказывается наибольшей (для системы без демпфирования она при резонансе принимает бесконечное значение). При значениях η , малых по сравнению с единицей, функция $f(\eta)$ мало отличается от статической податливости.

Механическим импедансом системы $Z(\eta)$ или просто импедансом называют отношение амплитуды гармонической вынуждающей силы к комплексной амплитуде скорости при установившихся вынужденных колебаниях:

$$Z(\eta) = \frac{a}{i\omega} \left(1 - \eta^2 + i \frac{\vartheta}{\pi} \eta \right). \quad (5.3)$$

Механическую систему можно представить в виде соединения отдельных сосредоточенных элементов с отличающимися свойствами, которые приближенно можно описать элементарными зависимостями. Так, одни элементы можно представить имеющими только инерционные свойства, другие — безынерционными упругими элементами, третьи — устройствами с трением. Некоторые элементы могут обладать рядом указанных свойств. Отдельно представляют элементы, поставляющие энергию в механическую систему и возбуждающие ее движение, — *активные элементы*, или *источники*. Элементы, не имеющие независимых источников сил или кинематических величин, называют *пассивными*.

Механическую систему, представленную в виде совокупности соединенных между собой активных и пассивных элементов, называют *механической цепью*. Предполагается, что механическая цепь с приемлемой точностью отражает динамические свойства исходной механической системы. Места соедине-

ния элементов называют *узлами*. Соединение двух и более пассивных элементов называют *звеном*. Для всякой системы можно указать места, через которые осуществляется ее связь со средой. Место, в котором к системе прикладывается воздействие, называют *входом*. *Выходом* называют место, в котором оценивают реакцию системы. Вход (или выход) системы, характеризующийся обобщенными координатой и силой, называют *полюсом*. В общем случае вход и выход системы могут быть многополюсными. Любой элемент механической цепи имеет по крайней мере два полюса. Элемент, имеющий два полюса, называют *двухполюсником*. Возможны механические цепи, составленные из n - полюсников, однако на практике наиболее распространены цепи их двухполюсников.

Для рассмотрения связанных колебаний пространственно - многомерных механических цепей наиболее удобны общие методы исследования линейных систем с конечным числом степеней свободы. Однако при исследовании довольно распространенных пространственно - одномерных механических цепей для инженерных целей более удобными оказываются методы, в которых уравнения движения системы находят непосредственно из топологии рассматриваемой механической цепи на основе законов Кирхгофа.

5.6. Эквивалентная схема интегральной виброопоры с разделением упругого и поршневого действия упругого элемента

Для упрощения расчета гидравлической опоры целесообразно рассчитывать эквивалентную механическую схему гидроопоры с разделением упругого и поршневого действия упругого элемента гидроопоры (рис. 5.2). На рис. 5.3 показана эквивалентная схема гидроопоры.

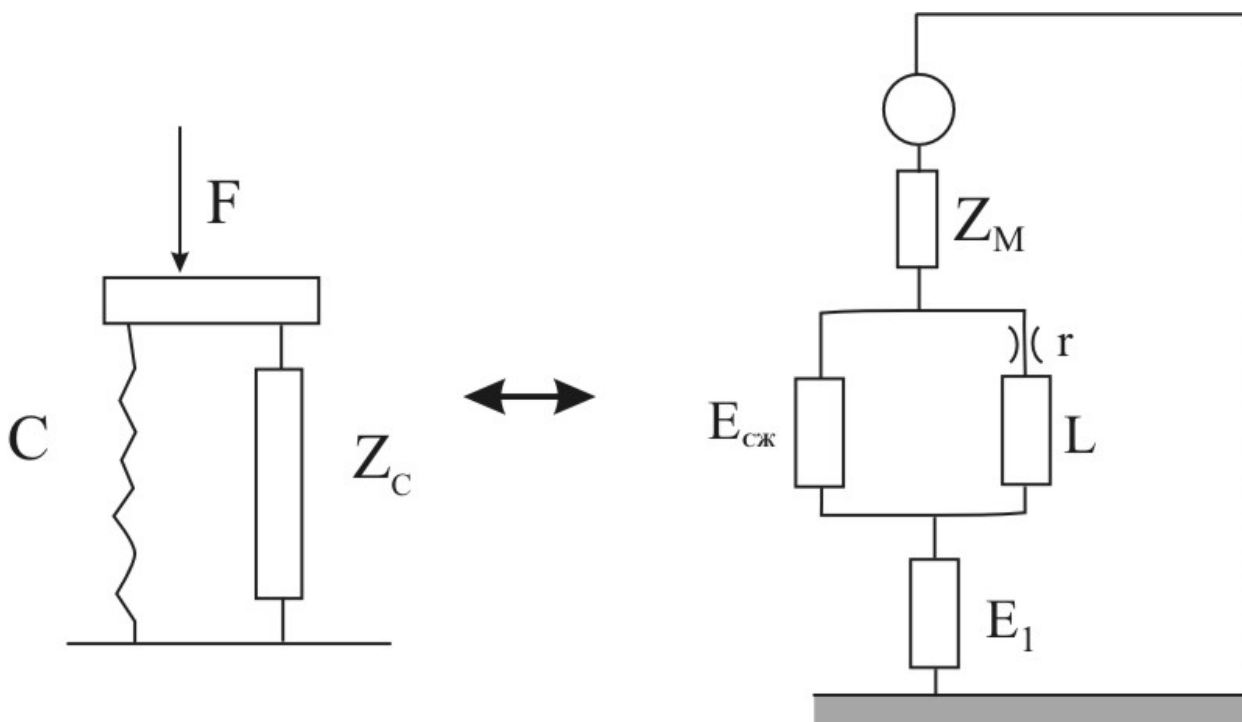


Рис. 5.2 (слева). Эквивалентная механическая схема гидропоры

Рис. 5.3 (справа). Эквивалентная схема гидропоры

Принятые обозначения:

m – масса, F - внешняя сила, F_1 - сила действующая на основание, x_2 – перемещение основания c_r - жесткость упругого элемента, A – площадь поршневого действия, p_1 – давление в рабочей камере, r , L - диссипативное и инерционное сопротивление канала, p_2 – давление в дополнительной камере, E_1 - емкость дополнительной камеры, зависящая от жесткости изолирующей мембраны. Принципиально может быть несколько параллельных каналов и в перегородку может быть вставлена промежуточная мембрана.

Проблемой, возникающей при расчете, является разделение упругой и гидравлической составляющих резиновой обечайки и внутренней среды.

Сила F_1 , действующая на обечайку, вызывает деформацию обечайки и создает давление сопротивления в рабочей камере, т.е. $F = f(x, p)$, т.е. функция f - нелинейная функция x и p .

Разложим эту функцию в ряд относительно статического положения, как начала координат для x и p .

$$f(x, p) = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial p} p + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 p} p^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} x \cdot p + \dots$$

Как видно из приведенной формулы, члены частной производной второго и более высоких порядков определяют нелинейные свойства обечайки. Если ограничиться первыми двумя членами ряда, то получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c_r \text{ - жесткость собственно обечайки;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = A \text{ - площадь поршневого действия обечайки.}$$

Для статических и динамических расчетов гидропоры важно знание как динамической жесткости обечайки, так и ее площади поршневого действия.

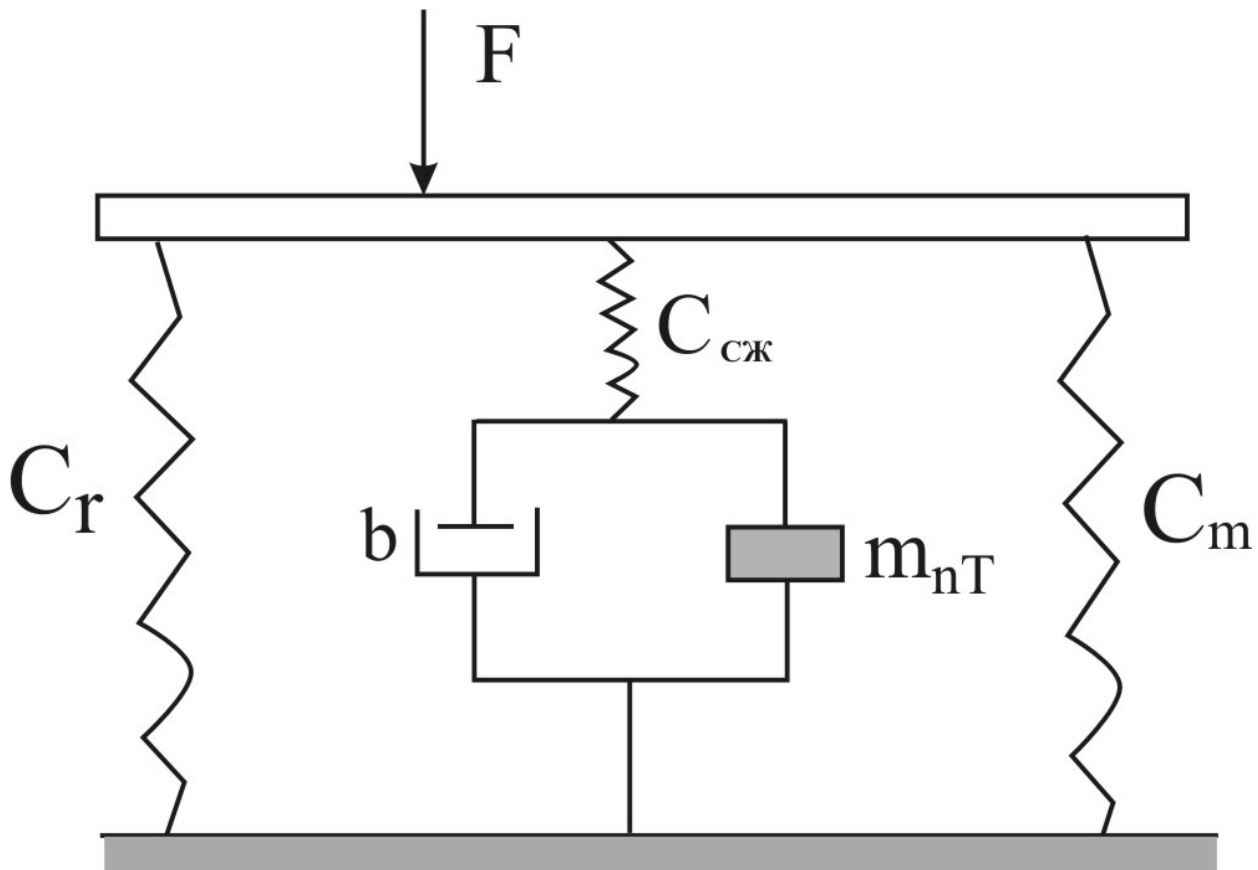


Рис. 5.4. Взаимодействие механической и гидравлической подсистем

На рис. 5.4. показано взаимодействие механической и гидравлической подсистем. Механическая часть взаимодействует с гидравлической через эквивалентное сопротивление z_r , а гидравлическая с механической - через эквивалентное сопротивление z_m .

Рассмотрим сжатие жидкости только в рабочей камере. Тогда общий расход Q , производимый движением поршня, разделится на расход Q_1 в дополнительную камеру через трубку и расход Q_2 сжимаемости в рабочей камере, обозначенный как расход в емкость E_2 . Расход сжимаемости в дополнительной камере объединен с расходом, определяемым емкостью за счет податливости мембраны, которая больше емкости за счет податливости резиновой мембраны и обозначена E_1 .

Рассмотрим запись через систему уравнений:

$$c_r x + pA = F, \quad (5.4)$$

$$Axs = Q_1 + Q_2, \quad (5.5)$$

$$p = \left(Ls + r + \frac{1}{E_1 s} \right) Q_1, \quad (5.6)$$

$$p = \frac{1}{s} \cdot \frac{K_{жс}}{V} \cdot Q_2, \quad (5.7)$$

где F – действующая сила, p – давление в рабочей камере, A – площадь поршневого действия, $K_{жс}$ – модуль сжимаемости жидкости, V – объем рабочей камеры, s – переменная преобразования Лапласа.

Из уравнений (5.6) – (5.7) получим выражение для динамической жесткости:

$$D = \frac{F}{x} = c_r + \frac{(A^2 s) \left(Ls + r + \frac{1}{E_1 s} \right) + (sV)}{1 + sV}, \quad (5.8)$$

или:

$$D = c_r + m_{np} \cdot s^2 + bs + c_m + c_{жс}. \quad (5.8a)$$

В формуле (5.8a) $m_{np} = LA^2$ – приведенная масса; $b = rA^2$ – приведенное демпфирование; $c_m = \frac{A^2}{E_1}$ – эквивалентная жесткость, учитывающая взаимодействие мембраны и нижней камеры; $c_{жс} = \frac{A^2 K_{жс}}{V}$ – жесткость, учитывающая сжимаемость жидкости в рабочей камере.

Сделаем сравнительную оценку жесткостей c_m , c_r , c_m . Для примера примем объем рабочей камеры как объем усеченного конуса, с размерами показанными на рис. 5.5.

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 \cdot r^2 + R \cdot r) = 39,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Модуль сжимаемости жидкости возьмем на примере жидкости ПМС - 20: $K_{жс} = 14000 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$, получим для жидкости ПМС-20 $c_{жс} = 1,42 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}$, а для силиконовой жидкости $c_{жс} = 1,05 c_m$, $c_r = 10^{12} \text{ Н/м}$.

В то же время, жесткость резинового элемента – обечайки составляет: $c_r = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$, а приведенная жесткость дополнительной камеры: $c_m = 0,05 c_r = 0,25 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$.

Из приведенного анализа видно, что жесткость жидкости на шесть порядков превышает жесткость основного упругого элемента, тем самым жидкость в гидроопоре можно считать несжимаемой.

5.7. Динамические жесткости гидравлических элементов и переход к эквивалентным механическим элементам.

Рассмотрим в качестве примера схему гидроопоры ОГ 120, представленную на рис. 5.5.

Гидравлическая виброопора

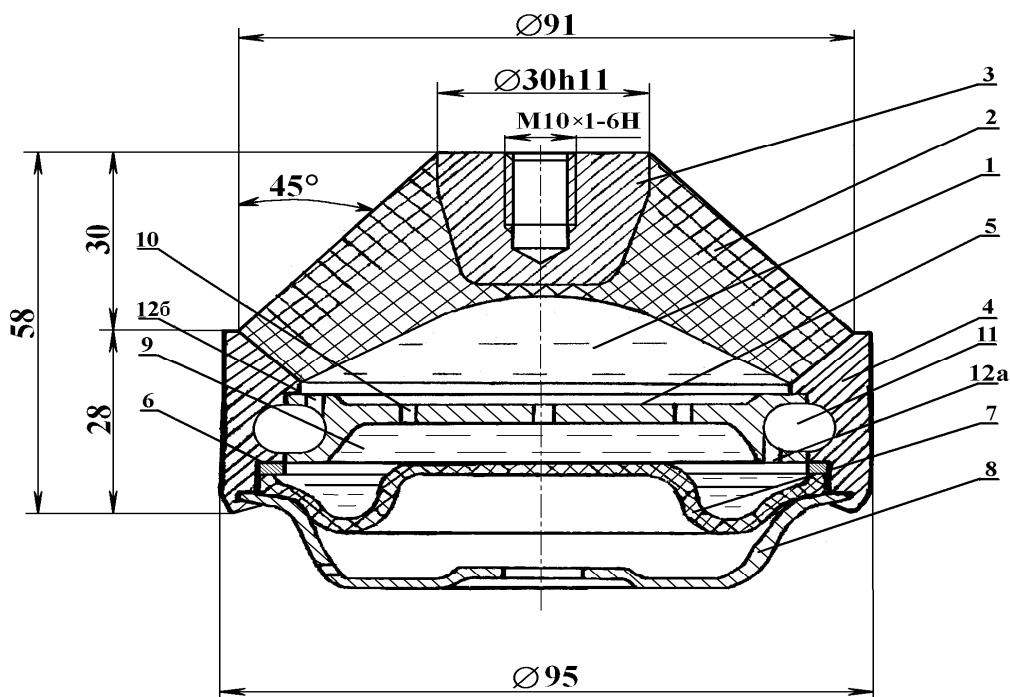


Рис. 5.5. Схема гидроопоры ОГ 120: 1 - поршневая полость, 2 - резиновая обечайка, 3 - опорная плата, 4 - корпус, 5 - перегородка, 6 - кольцо, 7 - мембрана, 8 - поддон, 9 - компенсационная полость, 10 - дроссельный канал, 11 - карман, 12,а - дроссельный канал из поршневой полости в карман, 12,б - дроссельный канал из компенсационной полости в карман.

Описанную конструкцию можно промоделировать с помощью эквивалентной схемы, в которой объединены механические и гидравлические элементы (рис. 5.6 - 5.9): 1 – сила, приложенная от агрегата F (Н); 2 – комплексная жесткость обечайки (с учетом потерь в резине) $c(1+\eta j)$ (Н/м); 3 – гидравлическая часть в механической системе; 4 – инерционность в кольцевом канале L_1 (Н с²/м⁵); 6 – емкость между рабочей и дополнительной камерами, за счет сопротивления промежуточной мембраны $E_{пр}$ (м⁵/Н); диссипативное сопротивление в кольцевом канале r_1 (Н с/м⁵); 8 – суммарное диссипативное сопротивление в торцевых каналах r_2 (Н с/м⁵); Емкость дополнительной камеры, за счет сопротивления нижней мембраны E_m (м⁵/Н); 10 – генератор давления эквивалентной силы F/A (Н/м²); 11 – эквивалентная ванна с жидкостью; 12 – механическая

часть в гидравлической системе; 13 – приведенная масса жидкости в кольцевом канале m_1 (кг); 14 – суммарная приведенная масса жидкости в торцевых каналах m_2 (кг); 15 – приведенное демпфирование в кольцевом канале b_1 (Н с/м); 16 – суммарное приведенное демпфирование в торцевых каналах b_2 (Н с/м); 17 – жесткость промежуточной мембраны $c_{пр}$ (Н/м); 18 – жесткость нижней мембраны $c_{пр}$ (Н/м). Связь между механической и гидравлической системами происходит посредством перехода от скорости к расходу, а также от силы к давлению в рабочей камере через площадь поршневого действия A , создаваемой резиновым элементом – обечайкой. Далее методами теории цепей гидравлическая система перестраивается в эквивалентную механическую. Узловые точки гидравлической системы переходят в контуры механической, а контуры гидравлической в узлы механической по законам Кирхгофа (рис. 5.7 - 5.9). Замечено, что массы m_i - это не обычные массы в инерциальной системе координат, а гидравлические инерционные трансформаторы, инерционные свойства которых проявляются на относительных ускорениях.

Рассмотрим метод перестройки гидравлической системы (рис. 5.7) в эквивалентную механическую путем присоединения гидравлической к основной механической системе (рис. 5.8). Осуществляется перестройка контуров в узлы, а узлов в контуры. Такую перестройку возможно, согласно законам Кирхгофа, провести по методике перехода от электрической системы к механической.

Последовательные элементы гидравлической системы: инерционный элемент 4 и диссипативное сопротивление 7 перейдут в параллельные механические массу 13 и демпфер 15. Аналогично элементы 5 и 8 перейдут в 14 и 16. Параллельные ветви, включающие элементы 4, 7, 6, 5, 8 гидравлической системы, становятся последовательными 13, 14, 17 и 15, 16 механической. Последовательные элементы 10, 12 (блок параллельных элементов 7 и 2 в механической системе на рис. 5.8) присоединены к полной системе слева. Емкость 9 (последовательная в гидравлической схеме) становится параллельной жесткостью 18. Окончательной проверкой можно убедиться, что все последовательные ветви стали параллельными, параллельные - последовательными, контуры преврати-

лись в узлы, а узлы - в контуры.

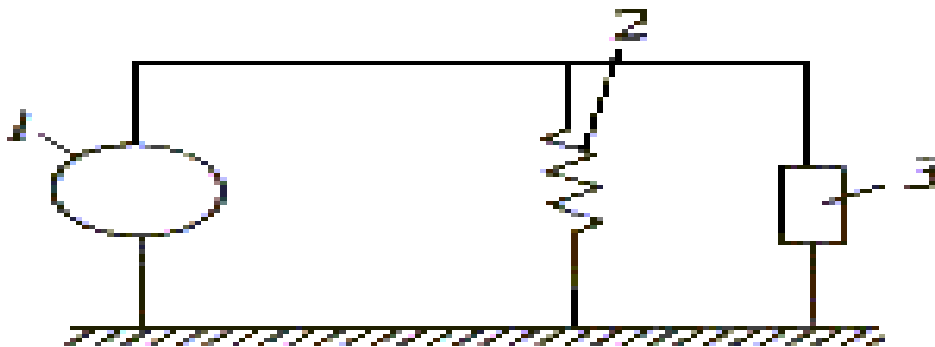


Рис. 5.6. Эквивалентная схема гидроопоры

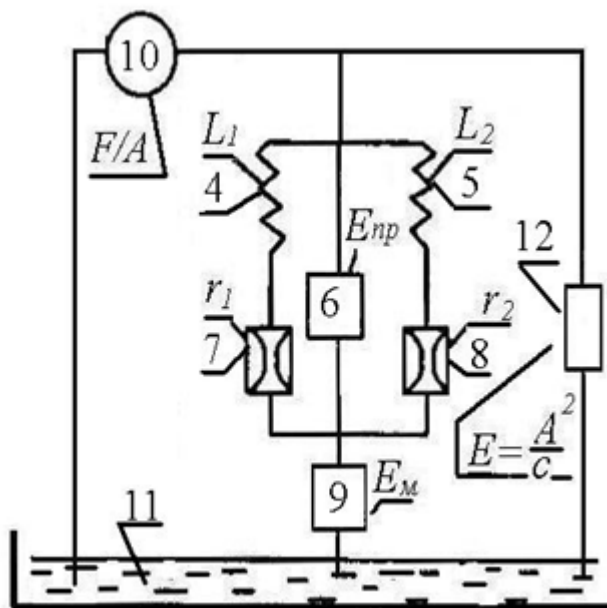


Рис.5.7. Гидравлическая аналогия

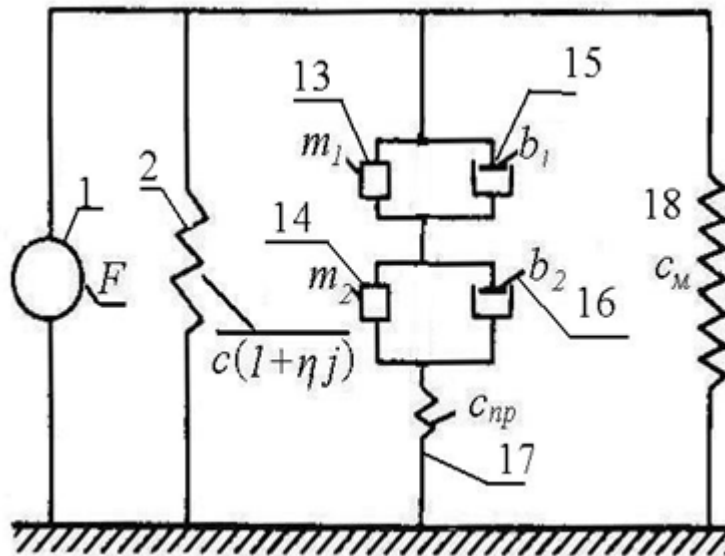


Рис.5.8. Механическая аналогия

Для окончательной схемы определим комплексную динамическую жесткость.

$$D(j\omega) = F(j\omega) / x(1 + j\eta) + c_m + \left[\frac{1}{-m_1\omega^2 + b_1j\omega} + \frac{1}{-m_2\omega^2 + b_2j\omega} + \frac{1}{c_{np}} \right]^{-1}. \quad (5.9)$$

Угол сдвига фаз определяется соотношением действительной и мнимой частей формулы

$$|D(\omega)| = [D_1(-j\omega) \cdot D_2(j\omega)]^{\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\text{Im}(D(j\omega))}{\text{Re}(D(j\omega))} \right]. \quad (5.11)$$

5.8. Применение теории четырехполюсников к расчету гидропор

В настоящей работе рассматривается более узкий, но важный для понимания и формирования динамических свойств гидропор вопрос о связи динамической жесткости гидропоры и передаточных функций по силе и перемещению без нагружения гидропоры массово-инерционной нагрузкой от силового агрегата или двигателя и при наличии таковой. Задача рассматривается без учета диссипативных характеристик с целью более прозрачного анализа полюсов и

нулей частотных функций. Рабочая жидкость принята несжимаемой.

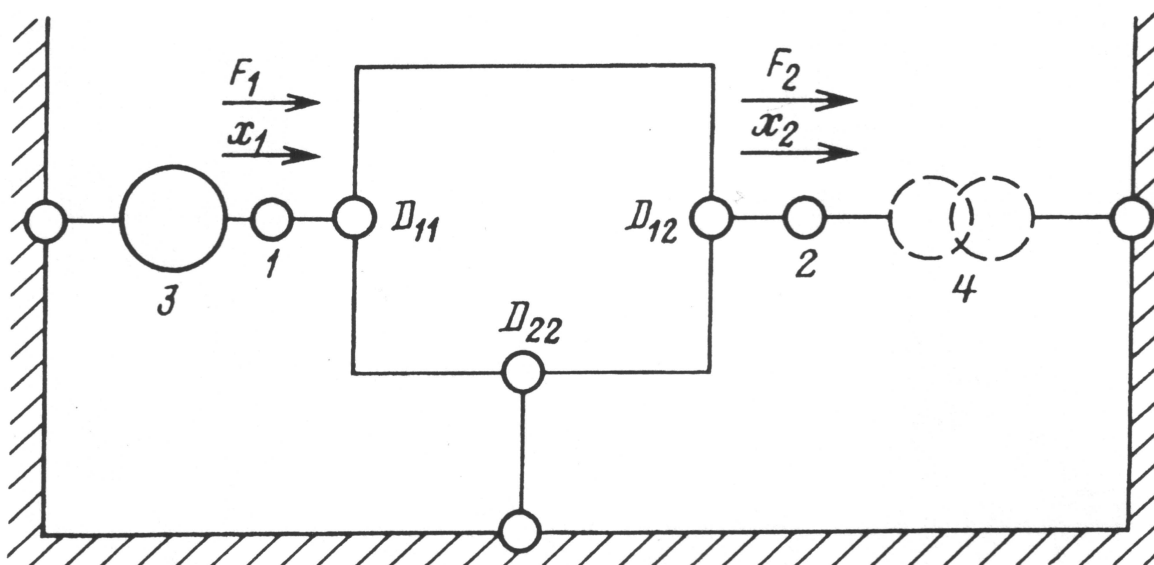


Рис. 5.9. 1 - контакт со стороны объекта, 2 - контакт со стороны основания, 3 - генератор силы F_1 , 4 - генератор перемещения x_2

Рассмотрим линейный механический четырехполюсник (рис.5.9). Для такой системы справедливы следующие отношения:

$$F_1(s) = D_{11}(s)x_1(s) - D_{12}(s)x_2(s), \quad F_2(s) = -D_{21}(s)x_1(s) - D_{22}(s)x_2(s), \quad (5.12)$$

где s - переменная преобразования Лапласа; x_1 и x_2 - перемещения в точках 1 и 2; $D_{11}(s)$ и $D_{22}(s)$ - главные динамические жесткости; $D_{12}(s) = D_{21}(s)$ - передаточные динамические жесткости.

Из соотношений (5.12) следует, что если точка 2 жестко закреплена ($x_2=0$) или точка 1 свободна ($F_1 = 0$), то абсолютная передаточная функция будет

$$T(s) = -\frac{F_2(s)}{F_1(s)} \Big|_{x_2=0} = \frac{x_1}{x_2} \Big|_{F_1=0} = \frac{D_{12}}{D_{11}}. \quad (5.13)$$

Этот результат иллюстрирует известное свойство равенства коэффициентов передачи при силовой и кинематической виброизоляции.

Для последующего анализа важна также передаточная функция по относительному перемещению (относительная передаточная функция при $F_1=0$) $R(s) = (x_2 - x_1)/x_2 = 1 - T(s)$.

Функции $D_{11}(s)$, $D_{12}(s)$, $T(s)$ и $R(s)$ можно представить в виде отношений полиномов: $D_{11}(s) = p(s)/q(s)$, $D_{12}(s) = -N(s)/q(s)$, $T(s) = N(s)/p(s)$, $R(s) = [p(s) - N(s)]/p(s)$, где $p(s)$ - полином, корни которого являются резонансными частотами; $q(s)$ — полином, корни которого являются антирезонансными частотами; $N(s)$ — полином, корни которого являются частотами нулей передаточной динамической жесткости и передаточной функции (нулей передачи).

В предыдущем разделе было показано, что инерционные характеристики гидравлических инерционных трансформаторов (ГИТ) зависят от относительных ускорений. Таким образом, гидроопора с ГИТ проявляет свои инерционные свойства на относительных ускорениях. Следовательно, гидроопора, которая имеет в своем составе ГИТ, но не имеет обычных промежуточных масс, является двухполюсником. В результате этого гидроопора с ГИТ включается в механическую цепь как последовательный элемент – двухполюсник.

Рассмотрим случай, когда гидроопора устанавливается под объект на фундамент. Реактивные свойства динамических жесткостей (без учета диссипации) имеют чередования резонанса и антирезонанса. На рис. 5.10 показана импедансная схема, где $D_o(j\omega)$ – импеданс динамических свойств объекта, $D(j\omega)$ – импеданс гидравлической опоры (с инерционным трансформатором ГИТ), $D_\phi(j\omega)$ – импеданс фундамента.

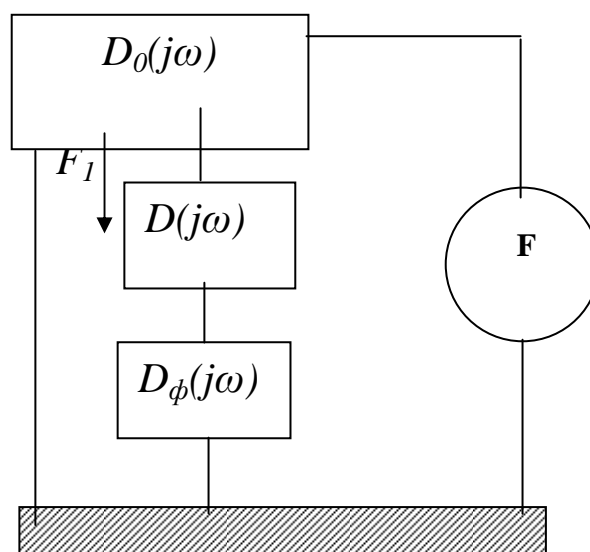


Рис. 5.10. Импедансная схема гидроопоры

Определим динамическую жесткость и передаточную функцию системы относительно внешней силы F :

$$\begin{aligned}
 D_i &= \frac{I}{\frac{1}{D} + \frac{1}{D_\phi}} = \frac{D \cdot D_\phi}{D + D_\phi} \\
 D_c &= D_o + D_i = \frac{D_o \cdot D + D_o \cdot D_\phi + D \cdot D_\phi}{D_o + D_\phi} \\
 T(j \cdot \omega) &= \frac{F_i}{F} = \frac{D_i}{D_c} = \frac{D \cdot D_\phi}{D_o \cdot D + D_o \cdot D_\phi + D \cdot D_\phi}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Рассмотрим модуль динамической жесткости гидропоры без учета диссипации энергии. Эта функция имеет следующие свойства: на оси частот находятся резонансы, между резонансами находятся антирезонансы, где характеристика модуля динамической жесткости стремится к бесконечности. Обратимся к формуле (5.14). Видно, что нули модуля передаточной функции будут совпадать с точками резонансов модуля динамической жесткости гидропоры независимо от динамических свойств объекта и основания.

Вывод

Это свойство гидропоры имеет важное практическое значение. Если при динамических испытаниях отдельной гидропоры (не в составе машины) мы наблюдаем снижение модуля динамической жесткости, т.е. резонансные состояния, то этот эффект перейдет и в модуль передаточной функции, независимо от динамических свойств объекта и основания. Иностранные авторы пишут о «размягчении» динамической жесткости гидропоры, не прибегая к анализу приведенному выше, подразумевая по умолчанию, что этот эффект проявится в передаточной функции и коэффициентах передач.

ГЛАВА 6

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

6.1. Блок-схема виброизолирующей системы

Блок-схема виброизолирующей системы строительной конструкции (рис. 6.1) предназначена для расчета динамических характеристик элементов системы, а именно, амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик, коэффициентов жесткости и виброизоляции [5, 6, 7, 31].

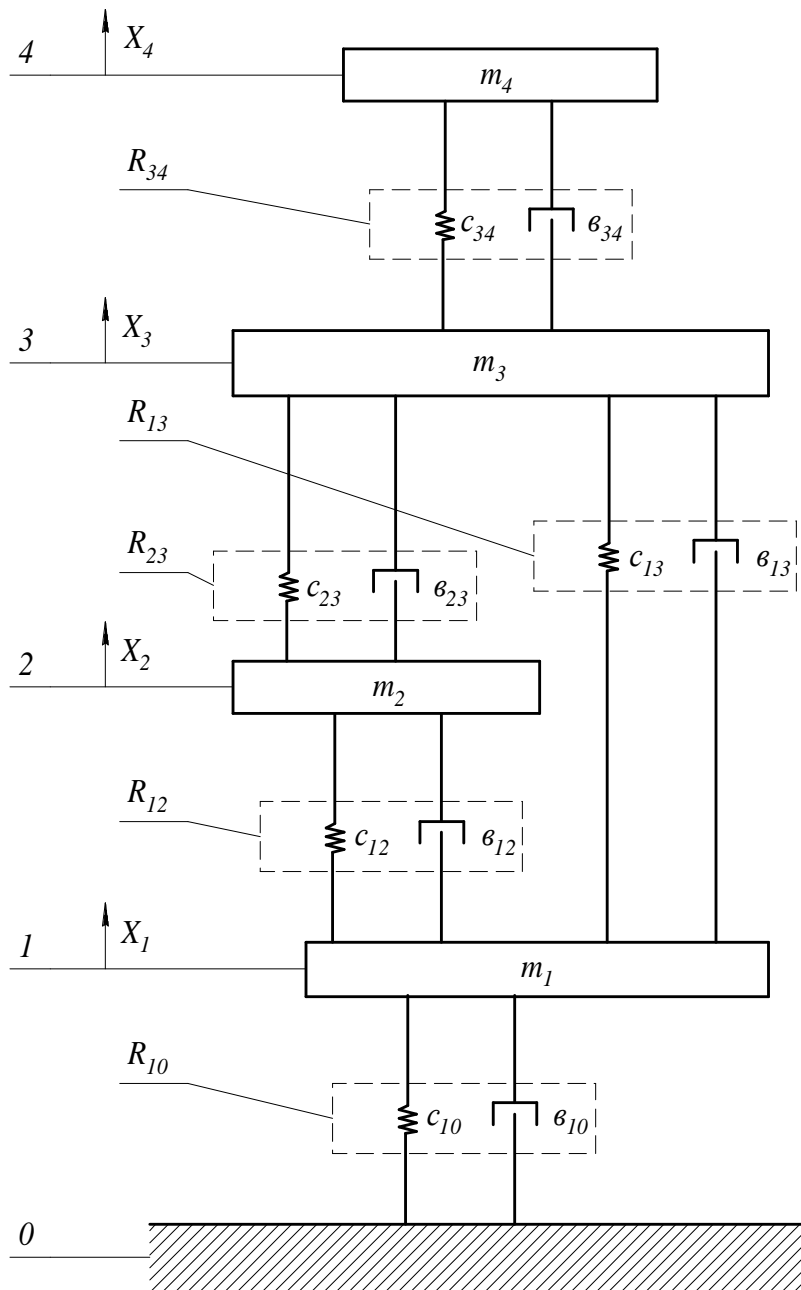


Рис 6.1. Схема виброзащитной системы строительной конструкции:
 0 - фундамент;
 R_{10} - демпфирующие блоки;
 m_1 - масса панели перекрытия;
 R_{12} - R_{23} - R_{34} - гидравлические виброопоры

Данная система материальных объектов описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \nu_{10} \dot{x}_1 + c_{10} x_1 + \nu_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_{12} (x_1 - x_2) + \nu_{13} (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + c_{12} (x_1 - x_3) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \nu_{12} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{12} (x_2 - x_1) + \nu_{23} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + c_{23} (x_2 - x_3) = F_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 + \nu_{13} (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + c_{13} (x_3 - x_1) + \nu_{23} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_{23} (x_3 - x_2) + \nu_{34} (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + c_{34} (x_3 - x_4) = F_3 \\ m_4 \ddot{x}_4 + \nu_{34} (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + c_{34} (x_4 - x_3) = F_4 \end{cases}, \quad (6.1)$$

где:

m_k - массы элементов;

ν_{kj} , c_{kj} - коэффициенты демпфирования и жесткости соответствующих вязкоупругих связей;

F_k - внешние силы, определяемые типом возбуждения системы;

$k = 1 \dots 4$ - номер инерционного элемента.

Первый тип возбуждения - динамическое (или силовое) возбуждение (тип Д) [26]. В этом случае выбирается один из элементов m_{N_1} , к которому приложена гармоническая нагрузка, тогда правая часть уравнений имеет вид:

$$F_k = \delta_{N_1 k} F_0 e^{i\alpha t}, \quad \text{где } \delta_{N_1 k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq N_1 \\ 1 & \text{при } k = N_1 \end{cases} - \text{ символ Кронекера.}$$

Второй тип возбуждения - кинематическое возбуждение колебаний (тип К). В этом случае жесткое основание движется по закону $\xi(t) = \xi_0 e^{i\alpha t}$, тогда правая часть уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} F_1 = \nu_{10} \dot{\xi} + c_{10} \xi \\ F_2 = \nu_{20} \dot{\xi} + c_{20} \xi \\ F_{13} = \nu_{30} \dot{\xi} + c_{30} \xi \\ F_4 = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Т.к. данная система линейна и внешнее воздействие на нее одночастотно ($F_k = f_0 e^{i\alpha t}$), то решение системы уравнений представляется в виде $x_k = y_k e^{i\alpha t}$, где y_k - набор комплексных амплитуд колебаний, удовлетворяющих системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1[-m_1\omega^2 + i\omega(\epsilon_{10} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13}) + c_{10} + c_{12} + c_{13}] - y_2(i\omega\epsilon_{12} + c_{12}) - y_3(i\omega\epsilon_{13} + c_{13}) = f_1 \\ y_2[-m_2\omega^2 + i\omega(\epsilon_{12} + \epsilon_{23}) + c_{12} + c_{23}] - y_1(i\omega\epsilon_{12} + c_{12}) - y_3(i\omega\epsilon_{23} + c_{23}) = f_2 \\ y_3[-m_3\omega^2 + i\omega(\epsilon_{13} + \epsilon_{23} + \epsilon_{34}) + c_{13} + c_{23} + c_{34}] - y_1(i\omega\epsilon_{13} + c_{13}) - y_2(i\omega\epsilon_{23} + c_{23}) - y_4(i\omega\epsilon_{34} + c_{34}) = f_3 \\ y_4[-m_4\omega^2 + i\omega\epsilon_{34} + c_{34}] - y_4(i\omega\epsilon_{34} + c_{34}) = f_4 \end{cases} \quad (6.3)$$

Решением данной системы являются выражения:

$$\begin{cases} y_k = g_{1k}(\omega)F_0 & (\text{тип } D) \\ y_k = g_{2k}(\omega)\xi_0 & (\text{тип } K) \end{cases}, \quad (6.4)$$

где F_0 и ξ_0 - амплитудные значения силы и перемещения.

Особо следует выделить решения, получающиеся при единичном воздействии:

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{y_k}{F_0} = g_{1k}(\omega) & (\text{тип } D) \\ z_k &= \frac{y_k}{\xi_0} = g_{2k}(\omega) & (\text{тип } K) \end{aligned}, \quad (6.5)$$

где $g_{1k}(\omega)$, $g_{2k}(\omega)$ - комплексные функции действительного переменного.

Зная функции $g_{1k}(\omega)$, $g_{2k}(\omega)$, можно получить любую требуемую информацию о динамическом поведении системы [32, 33].

В зависимости от типа воздействия на систему можно в виде графиков получить различные характеристики динамического поведения.

На экран выдается следующая информация:

- амплитудно - частотная характеристика $A(\omega) = |g_{1N2}(\omega)|$,
- фазо - частотная характеристика $F(\omega) = |\arg(g_{1N2}(\omega))|$,
- коэффициент виброизоляции $KV(\omega) = \left| \frac{m_{N2}\omega^2 y_{N2} + f_{N2}}{F_0} \right|$,
- динамическая жесткость $DJ(\omega) = \frac{1}{A(\omega)} = \frac{1}{|g_{1N2}(\omega)|}$.

$$(6.6)$$

Тип К:

- амплитудно - частотная характеристика $A(\omega) = |g_{2N2}(\omega)|$,

- фазо - частотная характеристика $F(\omega) = |\arg(g_{2N_2}(\omega))|$,
- коэффициент виброизоляции $KV(\omega) = |g_{2N_2}(\omega)|$ [35, 38, 51, 52].

6.2. Вопросы устойчивости процессов синхронизации в строительных конструкциях

Вопросы устойчивости процессов синхронизации часто возникают в промышленности в связи с тем, что необходимо разрушить устойчивую самопроизвольную синхронизацию роторов двигателей, установленных на общем основании [47, 55]. В работах [123, 124] изучался процесс синхронизации роторов двух асинхронных двигателей, установленных на общем вязко - упругом основании. Физическая модель задачи представляет собой систему двух двигателей, закрепленных на вязко - упругой (подвижной) платформе с одной степенью свободы [24, 25]. Источник энергии вибрации – асинхронный двигатель с неуравновешенным ротором, обладающий моментом инерции I_i . Неуравновешенная масса ротора расположена на расстоянии r_i от оси его вращения. При вращении ротора с неуравновешенной массой m_i возникает сила инерции, горизонтальная (вертикальная) проекция которой возбуждает колебания системы.

Представленная на рис. 6.2 структурная схема физической модели содержит элементы, имеющие следующие обозначения: m - масса платформы абсолютно твердого тела с одной степенью свободы, характеризуемой линейным горизонтальным смещением y , p - коэффициент упругости платформы, связанной с неподвижным основанием - фундаментом, k - коэффициент диссипации основания, m_1, m_2 - массы эксцентриков с эксцентриситетами r_1 и r_2 соответственно, I_1, I_2 - моменты инерции роторов в отсутствие дисбаланса, φ_1, φ_2 - углы поворота роторов и отсчитываются от направления оси y .

Математическая модель задачи представляет собой систему дифференциальных уравнений, которая описывает движение колебательной системы, возбуждаемой неуравновешенным ротором электродвигателя асинхронного типа

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + py - m_1 r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) = 0,$$

$$I_1 \ddot{\phi}_1 + H_1(\phi_1, \dot{\phi}_1) - L_1(\phi_1, \dot{\phi}_1) - m_1 r_1 \ddot{y} \sin \phi_1 = 0, \quad (6.7)$$

$$I_2 \ddot{\phi}_2 + H_2(\phi_2, \dot{\phi}_2) - L_2(\phi_2, \dot{\phi}_2) - m_2 r_2 \ddot{y} \sin \phi_2 = 0.$$

Первое уравнение описывает колебания основания, второе и третье уравнения описывают динамику источников возбуждения, т.е. вращения роторов электродвигателей. Здесь $L_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)$, $H_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)$ – движущие моменты и моменты сил сопротивления вращению роторов, считаем, что моментные характеристики имеют линеаризованный вид $L_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) = M_{0i} - k_{0i} \dot{\phi}_i$, $H_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) = k_i \dot{\phi}_i$, $i = 1, 2$, M_{0i} , k_i и k_{0i} – постоянные параметры, которые определяются из экспериментальных данных [128, 129].

Для исследования модели система приводится к безразмерному виду: $x = y/r$, $\tau = \omega_0 t$, где x и τ – новые безразмерные величины координаты и времени, r и $1/\omega_0$ – характерные величины длины и времени соответственно, $\omega_0 = \sqrt{p/m}$ – собственная частота колебаний платформы ($\omega_0 = 1$). Для сокращения записи вводятся обозначения $\varepsilon = k/(m\omega_0)$, $a_i = (k_i + k_{0i})/I_i \omega_0$, $b_i = M_{0i}/I_i \omega_0^2$, $m_i r_i^2/I_i \approx \mu c_i$, $\kappa_i = r_i/r$, $r = r_1 + r_2$. В качестве малого параметра системы (6.7) принимаем отношение неуравновешенной массы ротора к массе основания $\mu = m_i/m \ll 1$, безразмерный коэффициент диссипации $\varepsilon = \mu d$ считается малой величиной, d – новый коэффициент диссипации.

Введение малого параметра как отношение массы дебаланса к колеблющейся массе предложено И.И. Блехманом и В.О. Кононенко для механической системы, состоящей из упругой платформы и взаимодействующим с ней ротором двигателя, колебания в которой возбуждаются силами инерции неуравновешенной вращающейся массы [124, 125]. Задача с двумя и более двигателями, установленными на общей платформе, не рассматривалась.

Наличие в системе малого параметра позволяет исследовать эту систему приближенными методами. Наиболее эффективным методом приближенного аналитического исследования нелинейных колебательных систем с малым параметром является метод осреднения. Идея метода заключается не в прямом

построении приближенного решения точной системы, а в построении приближенной системы, для которой строится, а затем анализируется точное решение [127, 128, 129]. Необходимым предварительным этапом применения метода осреднения является приведение системы в безразмерном виде к стандартной форме [121, 128].

6.3. Устойчивость стационарного режима для двух двигателей

Для исследования устойчивости найденного стационарного решения используем критерий Рауса - Гурвица, из которого находим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости

$$q \cos \theta_0 < 0, \quad pk\Delta \cos \theta_0 + m(\Delta + q \sin \theta_0) < 0.$$

Так как $q > 0$ при любых параметрах системы, то из первого неравенства получаем значения фазы $\pi/2 < \theta_0 < 3\pi/2$. По условию задачи роторы двигателей вращаются в одном направлении, значит, единственно возможным значением разности фаз при возникновении устойчивого режима синхронизации является $\theta_0 = \pi$. Частично данные выводы подтверждены экспериментом.

В результате эксперимента было выявлено, что время до полного останова каждого из роторов двигателей с одинаковыми статическими и частотными характеристиками и с одинаковым направлением вращения ротора, из режима синхронизации заметно сокращается в сравнении со временем до полного останова каждого из двигателей, работающих по отдельности, т.е. независимо друг от друга. Это позволяет предположить и утверждать, что соотношение фаз роторов двигателей, вращающихся в одном направлении, противофазное [129].

Левая часть второго неравенства имеет вид поверхности (рис. 6.3). В сечениях поверхности при различных значениях расстройки Δ имеем следующие графики (рис. 6.4, 6.5), из которых видно, что при увеличении расстройки область устойчивости сужается, но тем не менее устойчивое стационарное решение существует: $\theta_0 = \pi$.

Таким образом, противофазное вращение однонаправленных роторов

двигателей является устойчивым стационарным режимом работы двигателей, установленных на общем основании.

6.4. Устойчивость стационарного режима для системы трех двигателей

В работе [137] рассматривается явление синхронизации роторов трех асинхронных двигателей, установленных на упругом основании. Физическая и математическая постановки задачи формулируется аналогично случаю с двумя двигателями. После введения безразмерной координаты, безразмерного времени и малого параметра, в качестве которого берем отношение неуравновешенной массы ротора к массе основания, приводим систему к стандартной форме и вводим быстро вращающиеся фазы. Затем проводим исследование полученной системы методом осреднения.

Вычисление временного среднего для системы первого приближения и определение точек разрыва вычисленных функций позволяет найти следующие резонансные прямые: $1 - \Omega_1 = 0$, $1 - \Omega_2 = 0$, $1 - \Omega_3 = 0$. Резонанс между двигателями не обнаружен. Первое приближение не позволяет выявить эффект синхронизации.

Второе приближение позволяет обнаружить эффект синхронизации. Резонансные соотношения, которые характеризуют эффект синхронизации роторов трех двигателей в механической системе:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = 0, \quad \Omega_2 - \Omega_3 = 0,$$

т.е. частоты вращения двигателей близки между собой, но далеки от частоты колебаний платформы.

Осредненные по быстрым переменным уравнения для амплитуды колебаний основания и медленных фаз:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -k_1 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{B} \sin(\theta_1 + \theta_2) - k_2 \frac{\Delta_1}{B} \sin(\theta_1) - k_3 \frac{\Delta_2}{B} \sin(\theta_2) + nB, \\ \dot{\theta}_1 &= \Delta_1 + q_{11} \sin(\theta_1) - p_1 B^2 + q_{12} \sin(\theta_1 + \theta_2) - q_{13} \sin(\theta_2), \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2 = \Delta_2 + q_{21} \sin(\theta_2) - p_2 B^2 + q_{22} \sin(\theta_1 + \theta_2) - q_{23} \sin(\theta_1).$$

Для исследования задачи устойчивости стационарных решений составляются уравнения в вариациях и формулируется проблема собственных значений, которая приводит к характеристическому уравнению третьей степени:

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (6.8)$$

с коэффициентами

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -(q_{11} \cos(\theta_{10}) + q_{21} \cos(\theta_{20}) + (q_{22} + q_{12}) \cos(\theta_{10} + \theta_{20})),$$

$$a_2 = (q_{21} q_{11} - q_{13} q_{23}) \cos(\theta_{10}) \cos(\theta_{20}) + (q_{22} q_{11} + q_{12} q_{23}) \cos(\theta_{10}) \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + (q_{21} q_{12} + q_{13} q_{22}) \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) \cos(\theta_{20}) - 2k_1 (p_2 + p_1) (\Delta_1 + \Delta_2) \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) - 2p_2 k_3 \Delta_2 \cos(\theta_{20}) - 2p_1 k_2 \Delta_1 \cos(\theta_{10})$$

$$a_3 = 2(k_2 \Delta_1 (p_1 q_{22} - p_2 q_{12}) + k_1 (\Delta_1 + \Delta_2) (p_1 q_{23} + p_2 q_{11})) \cos(\theta_{10}) \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + 2(k_3 \Delta_2 (p_2 q_{12} - p_1 q_{22}) + k_1 (\Delta_1 + \Delta_2) (p_2 q_{13} + p_1 q_{21})) \cos(\theta_{20}) \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + 2(k_2 \Delta_1 (p_2 q_{13} + p_1 q_{21}) + k_3 \Delta_2 (p_1 q_{23} + p_2 q_{11})) \cos(\theta_{10}) \cos(\theta_{20})$$

Теперь для исследования устойчивости и отыскания областей параметров устойчивости используется критерий Рауса-Гурвица, который гласит, что для устойчивости движения необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0 \end{array} \right. ,$$

которые эквивалентны следующей системе неравенств: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Для характеристического уравнения (6.8) условия устойчивости выглядят следующим образом:

$$q_{11} \cos(\theta_{10}) + q_{21} \cos(\theta_{20}) + (q_{22} + q_{12}) \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) < 0,$$

$$(q_{21}q_{11} - q_{13}q_{23})\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{20}) + (q_{22}q_{11} + q_{12}q_{23})\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + (q_{21}q_{12} + q_{13}q_{22})\cos(\theta_{10} + \theta_{20})\cos(\theta_{20}) - 2k_1(p_2 + p_1)(\Delta_1 + \Delta_2)\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) - \\ - 2p_2k_3\Delta_2\cos(\theta_{20}) - 2p_1k_2\Delta_1\cos(\theta_{10}) > 0$$

$$(k_2\Delta_1(p_1q_{22} - p_2q_{12}) + k_1(\Delta_1 + \Delta_2)(p_1q_{23} + p_2q_{11}))\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + (k_3\Delta_2(p_2q_{12} - p_1q_{22}) + k_1(\Delta_1 + \Delta_2)(p_2q_{13} + p_1q_{21}))\cos(\theta_{20})\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + (k_2\Delta_1(p_2q_{13} + p_1q_{21}) + k_3\Delta_2(p_1q_{23} + p_2q_{11}))\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{20}) > 0$$

$$q_{11}(q_{21}q_{11} - q_{13}q_{23})\cos^2(\theta_{10})\cos(\theta_{20}) + q_{21}(q_{21}q_{11} - q_{13}q_{23})\cos(\theta_{10})\cos^2(\theta_{20}) + \\ + q_{11}(q_{22}q_{11} + q_{12}q_{23})\cos^2(\theta_{10})\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + q_{21}(q_{21}q_{12} + q_{13}q_{22})\cos(\theta_{10} + \theta_{20})\cos^2(\theta_{20}) + \\ + (2q_{21}q_{11}(q_{22} + q_{12}) + q_{12}q_{23}(q_{21} - q_{13}) + q_{13}q_{22}(q_{11} - q_{23}))\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{20}) \cdot \\ \cdot \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + (q_{22} + q_{12})(q_{22}q_{11} + q_{12}q_{23})\cos(\theta_{10})\cos^2(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + (q_{22} + q_{12})(q_{21}q_{12} + q_{13}q_{22})\cos(\theta_{20})\cos^2(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + 2(k_1p_1(\Delta_1 + \Delta_2)(q_{23} - q_{11}) - k_2\Delta_1q_{12}(p_1 + p_2))\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + 2(k_1p_2(\Delta_1 + \Delta_2)(q_{13} - q_{21}) - k_3\Delta_2q_{22}(p_1 + p_2))\cos(\theta_{20})\cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + \\ + 2(k_2\Delta_1p_2q_{13} + k_3\Delta_2p_1q_{23})\cos(\theta_{10})\cos(\theta_{20}) - 2p_1k_2\Delta_1q_{11}\cos^2(\theta_{10}) - \\ - 2p_2k_3\Delta_2q_{21}\cos^2(\theta_{20}) - 2k_1(p_2 + p_1)(\Delta_1 + \Delta_2)(q_{22} + q_{12})\cos^2(\theta_{10} + \theta_{20}) < 0$$

Левая часть первого неравенства имеет вид следующей поверхности (рис. 6.6). При построении поверхности считалось, что расстройки по частоте между всеми тремя двигателями равны нулю ($\Delta_1 = \Delta_2 = 0$). Вид поверхности в плоскости медленных фаз представлен на рисунке (рис. 6.7), области устойчивости отмечены белым цветом. При увеличении одной из расстроек область устойчивости приобретает вид: рис. 6.8 - 6.11. При одновременном изменении расстроек область устойчивости изображена на рис. 6.12, 6.13.

В сечениях $\theta_{20} = 0$, $\theta_{20} = \pi$ поверхности при фиксированном значении расстройки $\Delta_2 = 0$ и изменении расстройки Δ_1 имеем графики (рис. 6.14, 6.15), из которых видно, что при увеличении Δ_1 область устойчивости расширяется вдоль оси θ_{10} . При задании $\Delta_2 = 10$ поверхность в сечении $\theta_{20} = 0$ ведет себя аналогично изображенной на рис. 6.14; амплитуда кривой падает, область устойчивости увеличивается вдоль θ_{10} .

При рассмотрении поверхности в сечениях $\theta_{10} = 0$, $\theta_{10} = \pi$ получаем гра-

фики (рис. 6.16, 6.17), из которых видно, что при фиксированном значении $\Delta_2 = 0$ и увеличении Δ_1 область устойчивости сужается вдоль оси θ_{20} , превращаясь в точку. При фиксированном значении $\Delta_2 = 10$ и изменении Δ_1 область устойчивости имеет вид в сечении $\theta_{10} = 0$ (рис. 6.18). При фиксированном значении $\Delta_2 = 20$ и изменении Δ_1 область устойчивости имеет вид в сечении $\theta_{10} = 0$ (рис. 6.19). Из графиков видно, что при увеличении Δ_1 область устойчивости расширяется вдоль оси θ_{20} .

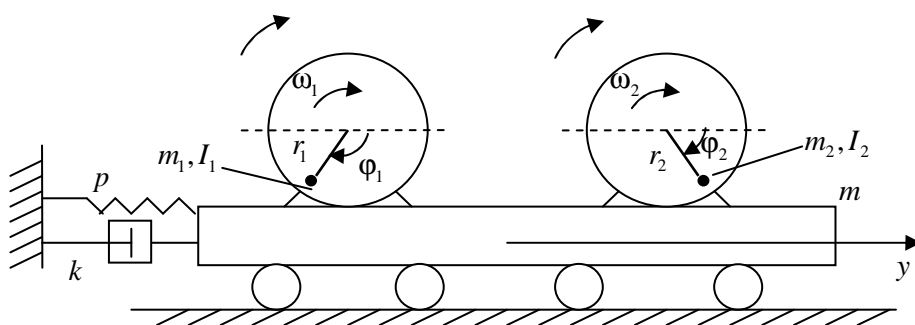


Рис. 6.2. Физическая модель задачи о синхронизации роторов двух асинхронных двигателей, вращающихся в одном направлении

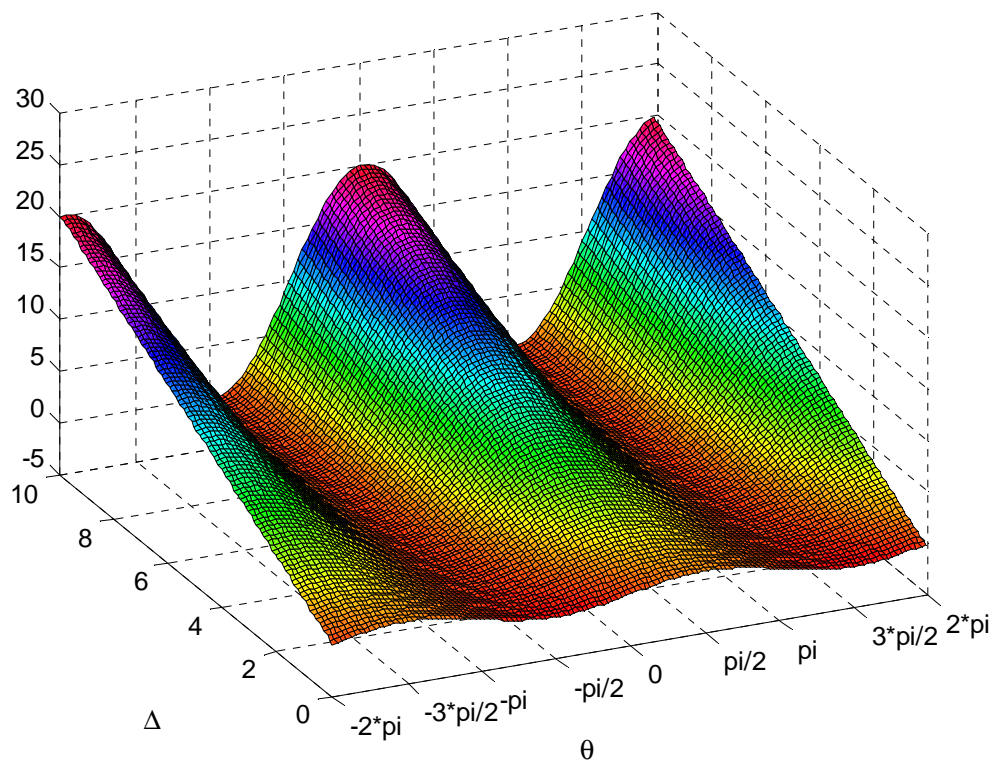


Рис. 6.3. Вид поверхности

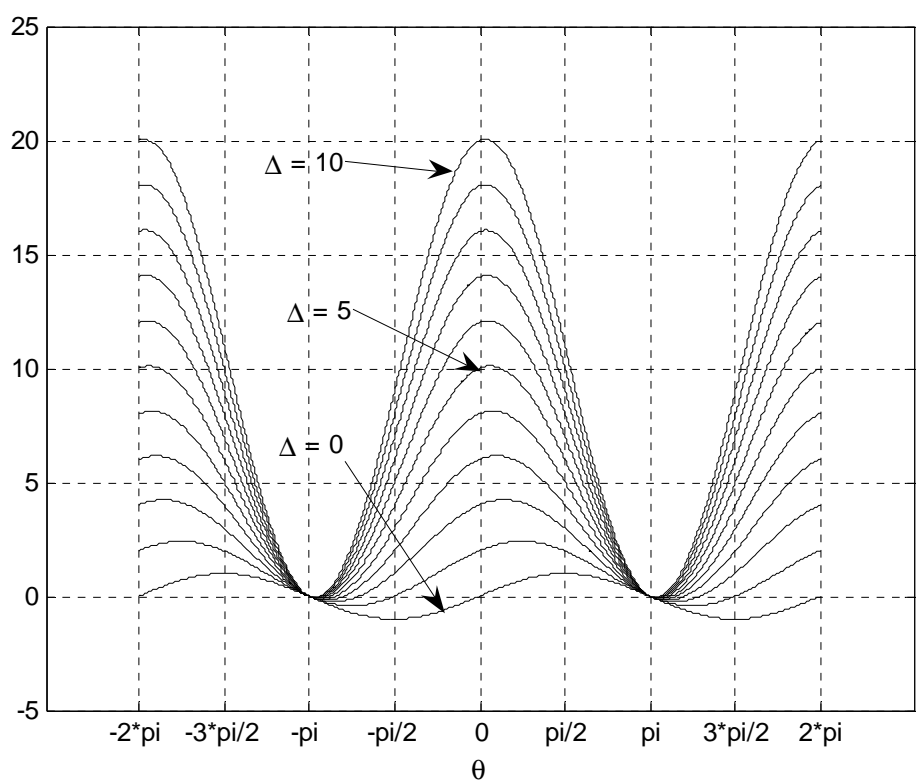


Рис. 6.4. Сечение поверхности

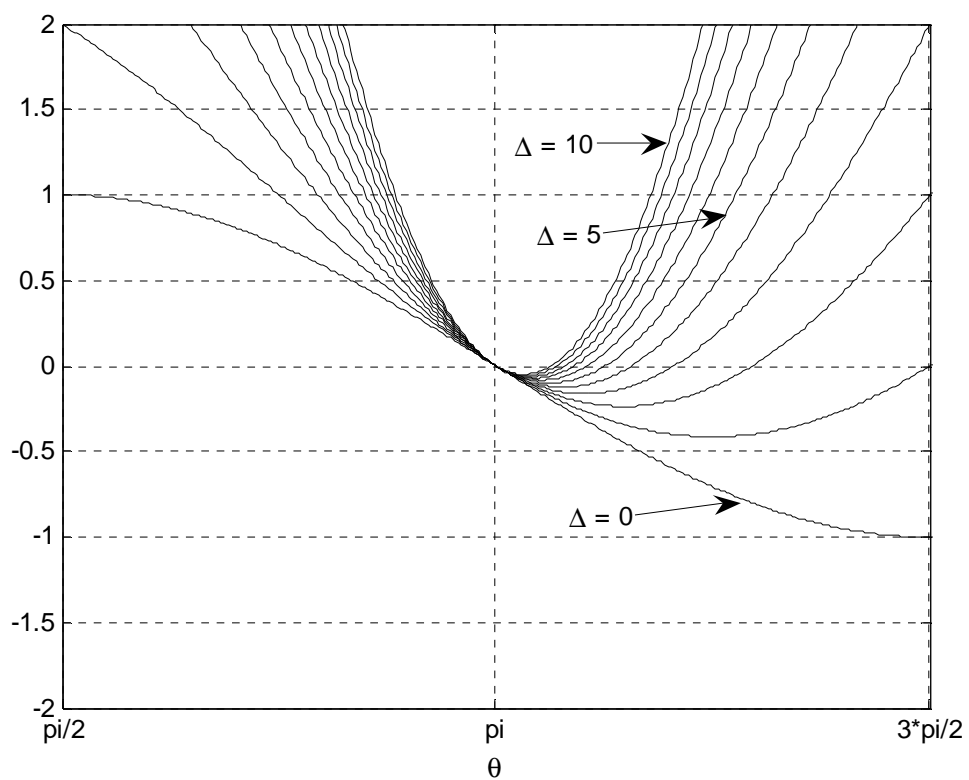


Рис. 6.5. Сечение поверхности

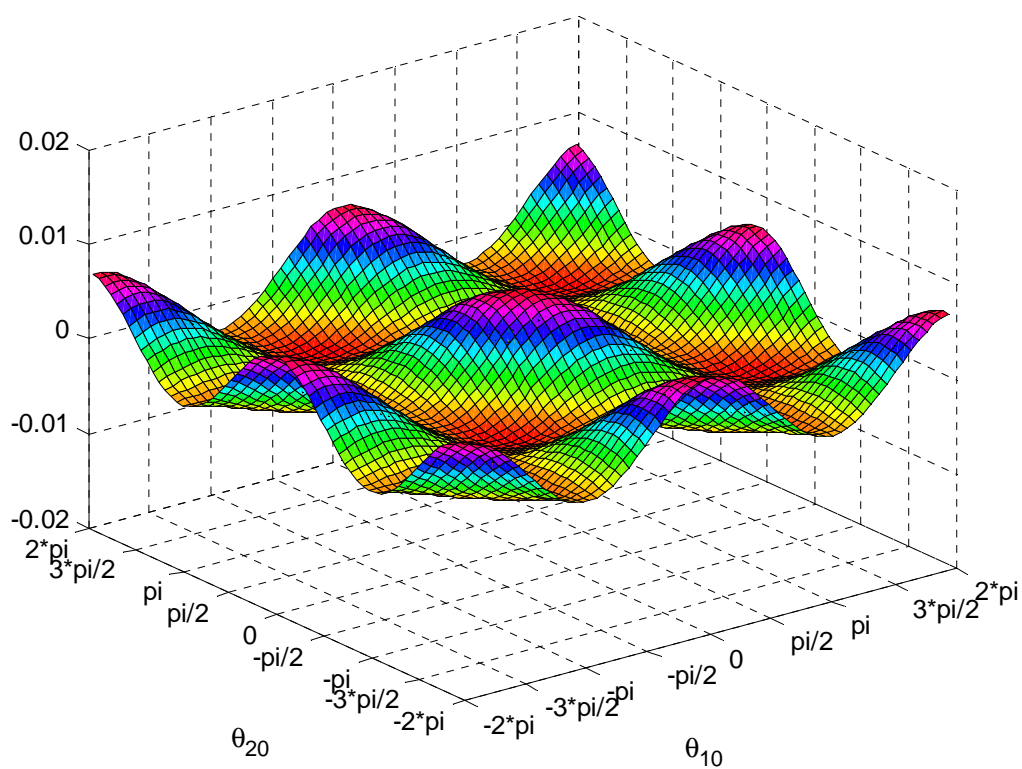


Рис. 6.6. Вид поверхности

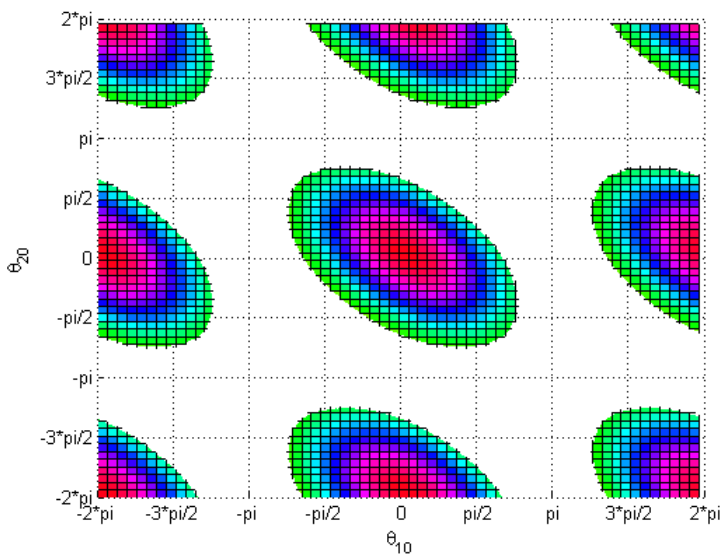


Рис. 6.7. Вид поверхности

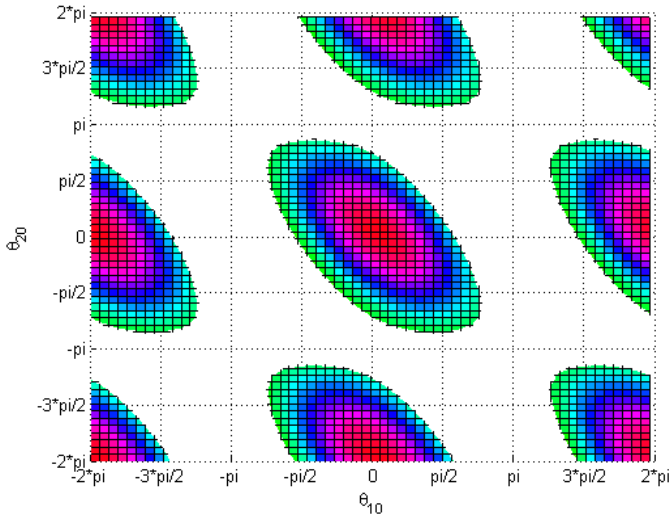


Рис. 6.8. Область устойчивости при $\Delta_1 = 10$, $\Delta_2 = 0$

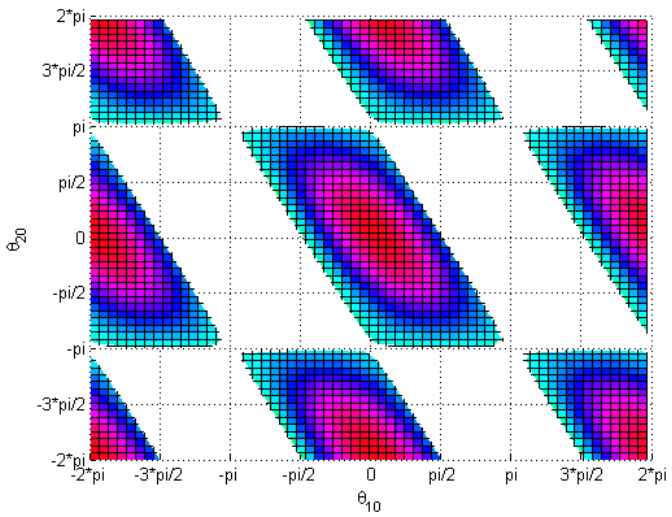


Рис. 6.9. Область устойчивости при $\Delta_1 = 20$, $\Delta_2 = 0$

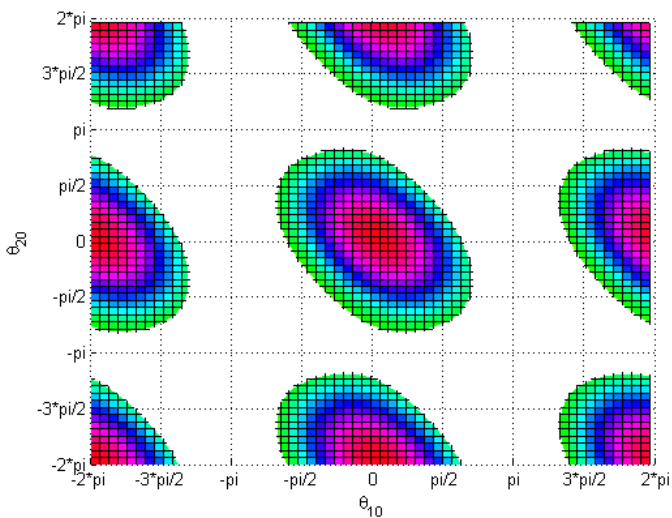


Рис. 6.10. Область устойчивости при $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 10$

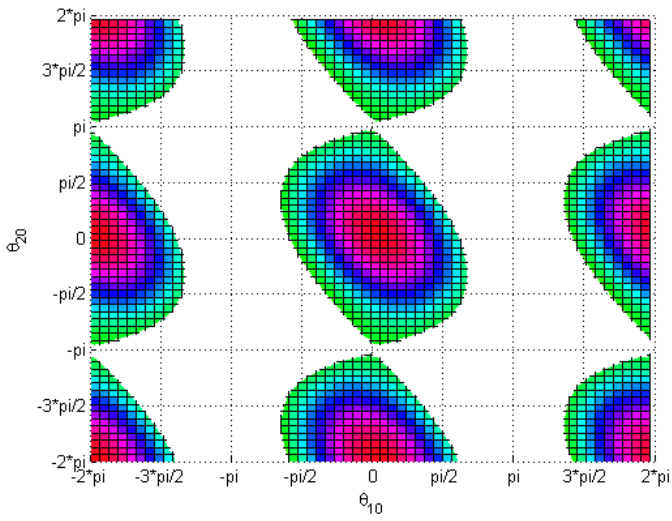


Рис. 6.11. Область устойчивости при $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 20$

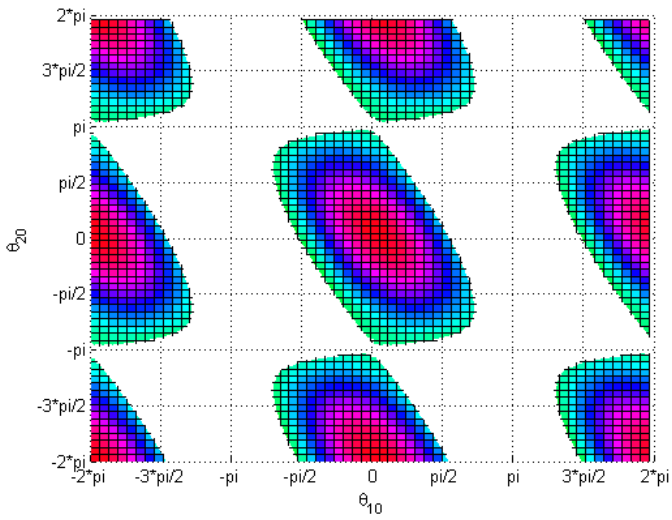


Рис. 6.12. Область устойчивости при $\Delta_1 = 10$, $\Delta_2 = 10$

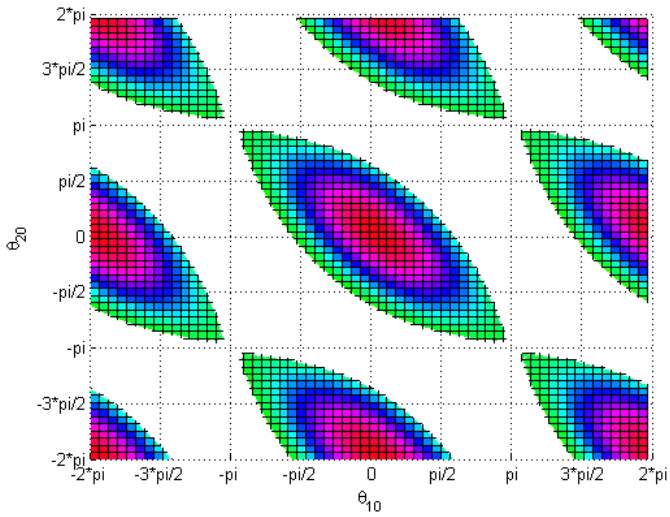


Рис. 6.13. Область устойчивости при $\Delta_1 = 20$, $\Delta_2 = 20$

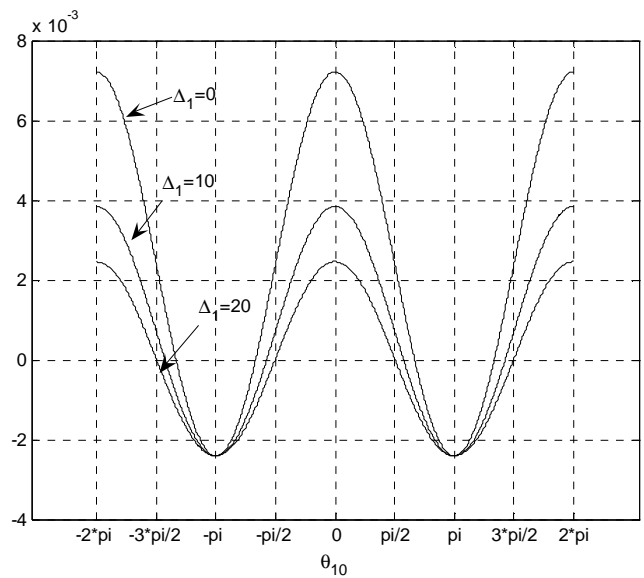


Рис. 6.14. Сечение $\theta_{20} = 0$ поверхности, $\Delta_2 = 0$

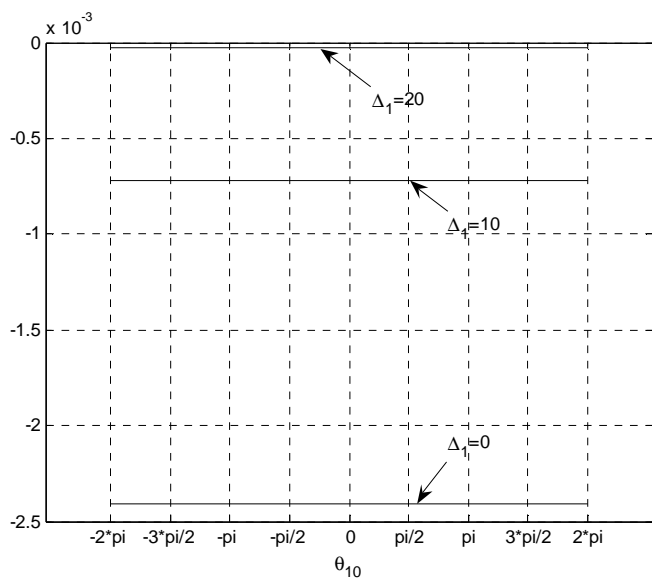


Рис. 6.15. Сечение $\theta_{20} = \pi$ поверхности, $\Delta_2 = 0$

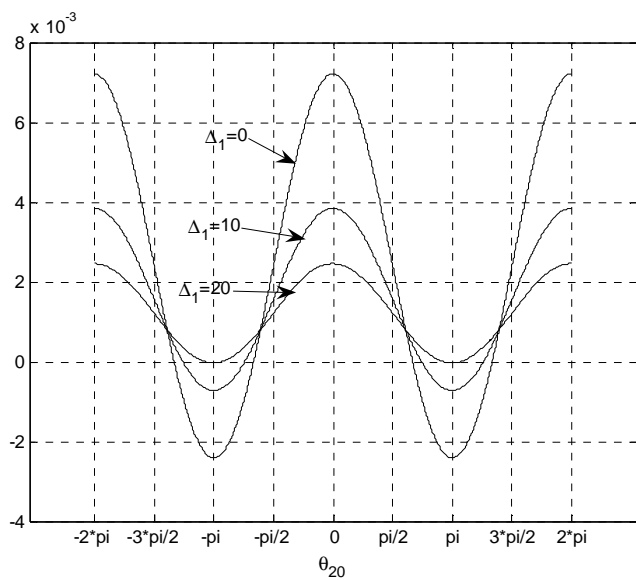


Рис. 6.16. Сечение поверхности $\theta_{10} = 0$, $\Delta_2 = 0$

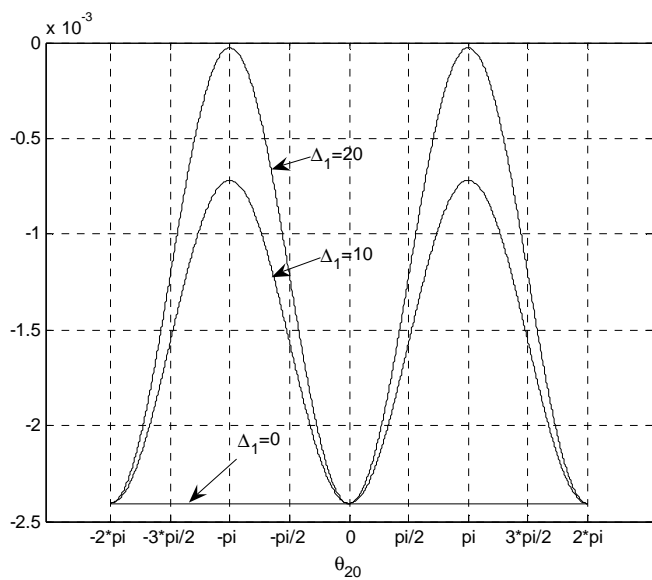


Рис. 6.17. Сечение поверхности $\theta_{10} = \pi$, $\Delta_2 = 0$

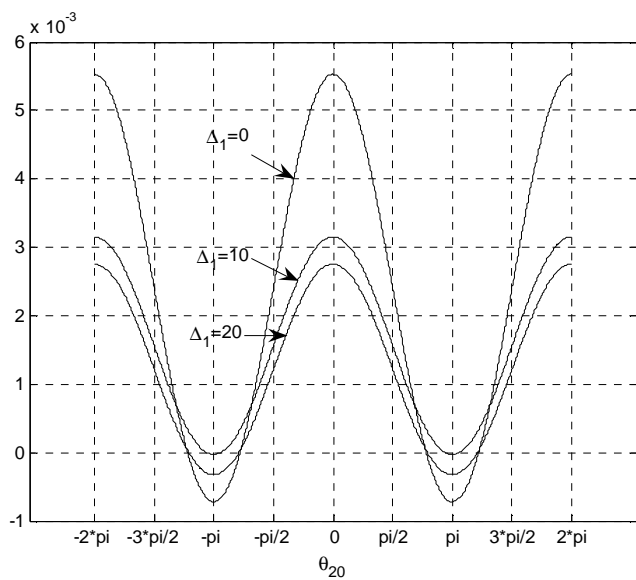


Рис. 6.18. Сечение поверхности $\theta_{10} = 0$, $\Delta_2 = 10$

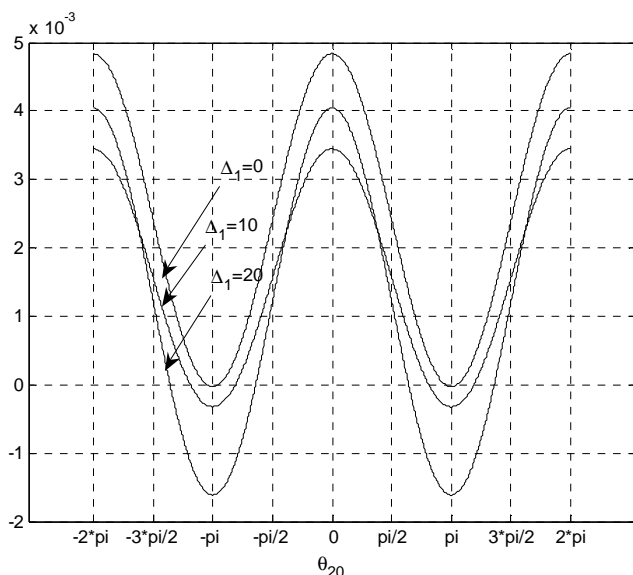


Рис. 6.19. Сечение поверхности $\theta_{10} = 0$, $\Delta_2 = 20$

Выводы

Режим синхронизации, определяемый резонансным соотношением $\Omega_1 - \Omega_2 = 0$, обнаруженный во втором приближении, является устойчивым стационарным режимом, более того, является режимом фазовой синхронизации (синхронно - противофазный) двух двигателей, установленных на общем вязкоупругом основании, роторы которых вращаются в одном направлении. Для системы трех несбалансированных двигателей, работающих в режиме самосинхронизации (стационарный режим): $\Omega_1 - \Omega_2 = 0$, $\Omega_2 - \Omega_3 = 0$ выявлены области неустойчивости стационарных режимов колебаний.

ГЛАВА 7

АКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРООПОРАМИ

7.1. Синтез системы активного управления

Рассматривается задача синтеза системы активного силового управления для нового класса усовершенствованных гидроопор на примере простейшей линейной модели с одной степенью свободы. При интегральном квадратичном ограничении на интенсивность искомого управляющего воздействия решение получено на основе процедуры, включающей применение метода гармонической линеаризации и вариационных методов [9]. В качестве критерия оптимальности используется минимум величины коэффициента передачи усилия в установившемся периодическом режиме. Отыскиваются различные законы управления с обратной связью. Решаются задачи синтеза цепей обратной связи. Повышение эффективности разработанного в ИПМ РАН нового класса гидроопор, связано с введением активных виброгасящих воздействий.

В соответствии с приведенной на рис. 7.1 схемой поэлементные уравнения динамики гидроопоры имеют вид:

$$m_0\ddot{x} + c_r\dot{x} = F(t) - p_1A, \quad p_1 - p_2 = rA\dot{x} + LA\ddot{x}, \quad p_2E - Ax = \frac{E}{s}u, \quad (7.1)$$

где m – масса объекта; A – площадь поршня; c_r – жесткость конической резиновой обечайки; L – гидравлическая инерционность; E — емкость дополнительной камеры, s – площадь поперечного сечения мембраны, r – линейное гидравлическое диссипативное сопротивление канала, p_1 – давление в рабочей камере; A_2 – давление в дополнительной камере; $F(t) = B \sin(\omega t)$ – возмущающая сила с переменной частотой; $u(x, \dot{x})$ — подлежащее определению активное силовое виброгасящее воздействие.

Выражая из третьего уравнения (7.1) p_2 через x и u и подставляя полученное выражение во второе, а из второго уравнения (7.1) выражая p_2 через \dot{x} и \ddot{x} , получим уравнение, связывающее \ddot{x} , \dot{x} , x , $F(t)$ и u :

$$(m_0 + LA^2)\ddot{x} + rA^2\dot{x} + \left(c_r + \frac{A^2}{E}\right)x = F(t) - \frac{A}{s}u(x, \dot{x}). \quad (7.2)$$

Введем следующие обозначения: $m = m_0 + LA^2$, $m_1 = LA$, $2k = rA^2$, $\omega_0^2 = c_r + (A^2/E)$, $A/s = N_1$.

С учетом этих обозначений уравнение (7.2) переписываем в виде

$$m\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2x = F(t) - N_1u(x, \dot{x}). \quad (7.3)$$

В соответствии со схемой (рис. 7.1) величина коэффициента, передаваемого на основание усилия - $n(t) = (m_1\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2x)/B$.

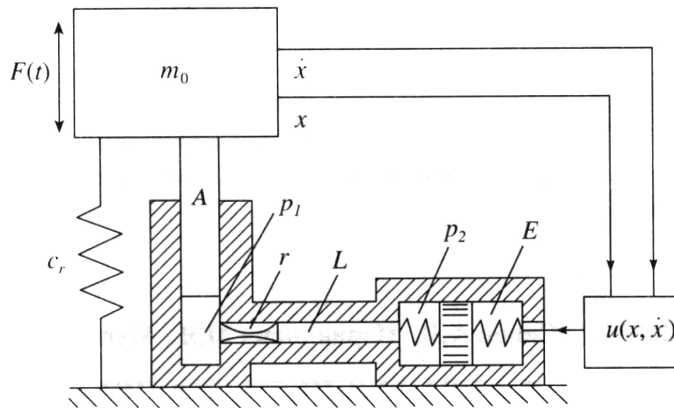


Рис. 7.1. Схема

Задача построения активного виброгасящего воздействия заключается в определении такого закона $u^*(x, \dot{x})$, который, при ограничении на его интенсивность

$$\int_0^{2\pi/\omega} u^2 dt \leq V \quad (7.4)$$

обеспечивает в установившемся периодическом режиме с фиксированной частотой минимальное значение амплитуды величины $n(t)$

$$\min \bar{n} = \min_{t \in [0; 2\pi/\omega]} \max |n(t)|. \quad (7.5)$$

Решение этой задачи осуществляем в соответствии с процедурой, включающей применение метода гармонической линеаризации и вариационных методов [3, 4, 8].

Предполагаем, что решение уравнения (7.3) можно аппроксимировать в гармоническом приближении $x = A \sin \Psi$, $\Psi = \omega t + \varphi$. Поскольку, в силу этого, подлежащий минимизации критерий \bar{n} (7.5) в соответствии с (7.4) определяется в виде

$$\bar{n} = \left[(m_1 \omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 \omega^2 \right]^{1/2} (A/B),$$

то минимизация величины \bar{n} эквивалентна минимизации амплитуды колебаний A . Для этого сначала определяем программный закон $u^*(\psi)$, обеспечивающий минимальную амплитуду A^*

$$u^*(\Psi) = \frac{\sqrt{\omega V / \pi}}{|Q(\omega)|} \left[(\omega_0^2 - m\omega^2) \sin \Psi + 2k\omega \cos \Psi \right], |Q(\omega)| = \left[(\omega_0^2 - m\omega^2)^2 + 4k^4 \omega^2 \right]^{1/2}. \quad (7.6)$$

При этом

$$A^* = \left[B - \sqrt{(\omega V / \pi)} N_1 \right] / |Q(\omega)| \quad (7.7)$$

и предполагается, что $\sqrt{(\omega V / \pi)} N_1 < B$.

Поскольку $u^*(\psi)$ является гармонической функцией, то решение системы (7.1) ищется в виде $x^* = A^* \sin \Psi$, $\dot{x} = \omega A^* \cos \Psi$. С учетом этого из (7.1), учитывая соотношение (7.7), находится решение задачи синтеза:

$$u^*(x, \dot{x}) = M(x) \left[(\omega_0^2 - m\omega^2)x + 2k\dot{x} \right], M(\omega) = \sqrt{\omega V / \pi} / (B - N_1 \sqrt{\omega V / \pi}) \quad (7.8)$$

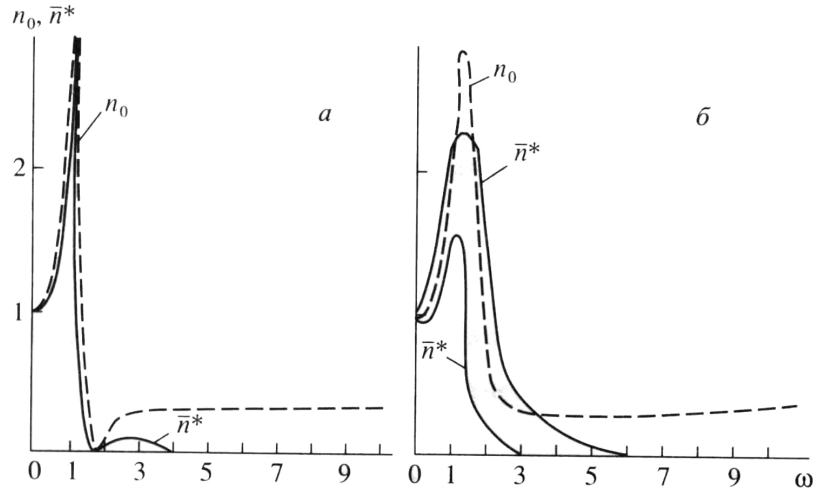


Рис. 7.2. Зависимости коэффициента передачи усилия от частоты возмущения при $c_r + A^2/E = 1$, $m_0 = 1$, $LA^2 = 0,5$; $a - rA^2 = 0$; $b - 0,3$.

В силу (7.7) и (7.8) выражение для минимального амплитудного значения коэффициента передачи усилия, принимает вид:

$$\bar{n}^* = |Q_1(\omega)|/|Q(\omega)| \left[1 - \left(\sqrt{\omega V / \pi N_1 / B} \right) \right]_{\text{сде}} |Q_1(\omega)| = \left[(m_1 \omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 \omega^2 \right]^{1/2}.$$

На рис. 7.2 изображены зависимости $\bar{n}^*(\omega)$. Пунктиром представлены соответствующие зависимости при отсутствии активного виброгасящего воздействия.

Следует отметить, что хотя для построения закона $u^*(x, \dot{x})$ (7.8) использовали приближенную процедуру, замкнутая система (7.1) имеет точное гармоническое решение $x^* = A^* \sin \Psi$.

Решение задачи синтеза в виде (7.8) не является единственным. Действительно, поскольку $\ddot{x} = -\omega^2 A^* \sin \Psi$, то вместо (7.8) получаем закон с обратной связью в виде функции ускорения и скорости:

$$u^*(x, \dot{x}) = M(\omega) \left[-\frac{(\omega_0^2 - m\omega^2)}{\omega^2} \ddot{x} + 2k\dot{x} \right].$$

Более общую структуру закона с обратной связью можно получить, исходя из тождества:

$$\sin \Psi = \frac{1}{A^*} \left(\gamma \cdot x \frac{1-\gamma}{\omega^2} \ddot{x} \right). \quad (7.9)$$

где γ - произвольный параметр. С учетом (7.9) из (7.8) получим закон с обратной связью

$$u^*(x, \dot{x}, \ddot{x}) = M(\omega) \left[(\omega_0^2 - m\omega^2) \left(\gamma \cdot x \frac{1-\gamma}{\omega^2} \ddot{x} \right) + 2k\dot{x} \right], \quad (7.10)$$

Допустим, что частота возмущения не соответствует заранее рассчитанной величине, а изменяется в процессе функционирования системы. Тогда уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$\left[n - N_1 M (\omega_0^2 - m\omega^2) \frac{1-\gamma}{\omega^2} \ddot{x} \right] + 2k(1 + N_1 M) \dot{x} + [\omega_0^2 - N_1 M (\omega_0^2 - m\omega^2) \gamma] x = B \sin \tilde{\omega} t, \quad (7.11)$$

где $\tilde{\omega}$ - переменная частота возмущения.

Для системы (7.11) амплитудное значение коэффициента передачи усилия

$$n(\gamma, \tilde{\omega}) = \frac{|\tilde{Q}_1(\gamma, \tilde{\omega})|}{|\tilde{Q}(\gamma, \tilde{\omega})|}, \quad (7.12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1(\gamma, \tilde{\omega}) &= \left[(m_1 \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 (1 + N_1 M)^2 \tilde{\omega}^2 \right]^{1/2}, \\ \tilde{Q}(\gamma, \tilde{\omega}) &= \left[(m \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 (1 + N_1 M)^2 \tilde{\omega}^2 \right]^{1/2}, \\ \tilde{m} &= m - N_1 M (\omega_0^2 - m\omega^2) \frac{1-\gamma}{\omega^2}, \quad \tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 - N_1 M (\omega_0^2 - m\omega^2) \gamma \end{aligned}$$

Если предполагать, что частота $\tilde{\omega}$, равная двойной частоте оборотов двигателя, может изменяться в процессе функционирования системы, то параметр γ может настраиваться в функции величины $\tilde{\omega}$, т.е. $\gamma = \gamma(\tilde{\omega})$. За счет выбора структуры функции $\gamma(\tilde{\omega})$ можно обеспечить некоторые дополнительные полезные свойства системы (7.11). В частности, можно обеспечить постоянство амплитудного значения коэффициента передачи усилия при изменении $\tilde{\omega}$. Пусть $n(\gamma, \tilde{\omega}) = n$ - заданное постоянное значение. Тогда из (7.12) получим уравнение относительно γ : $\tilde{Q}_1(\gamma, \tilde{\omega}) / \tilde{Q}_2(\gamma, \tilde{\omega}) = \bar{n}$. Это уравнение сводится к квадратному уравнению относительно γ :

$$\begin{aligned}
& (m_I \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 - 2(m_I \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2) N_I M (\omega_0^2 - m \omega^2) \gamma + [N_I M (\omega_0^2 - m \omega^2)]^2 \gamma^2 + \\
& 4k^2 (1 + N_I M)^2 \tilde{\omega}^2 = \bar{n} \left\{ (m \omega^2 - \omega_0^2)^2 - 2(m \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2) N_I M (\omega_0^2 - m \omega^2) \left(\frac{1-\gamma}{\omega^2} + \gamma \right) + \right. \\
& \left. + [N_I M (\omega_0^2 - m \omega^2) \left(\frac{1-\gamma}{\omega^2} + \gamma \right)]^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

В результате решения уравнения (7.13) определяем зависимость $\gamma(\tilde{\omega}, \bar{n})$, обеспечивающую постоянство величины $n(\gamma, \tilde{\omega}) = \bar{n}$.

7.2. Применение инерционных магнитореологических трансформаторов в системах виброизоляции

Применение гидравлических виброопор для гашения вибрации и шума предполагает использование гидравлических трансформаторов, настроенных на определенные частоты, которые являются их основными элементами [32, 111, 112]. Гидравлические трансформаторы, по сути, являются дроссельными каналами, соединяющими рабочие и компенсационные камеры гидроопоры. Настройка гидравлических трансформаторов связана с проведением большого объема экспериментальных работ, а при эксплуатации гидроопоры собственные частоты настройки всегда смещаются [1, 2]. Это вызвано тем, что интенсивная диссипация энергии колебаний приводит к нагреванию реологического заполнителя гидроопоры на десятки градусов, что влечет снижение вязкости рабочей жидкости, протекающей через дроссельные каналы на порядок и более. Исследования, проводимые с различными реологическими заполнителями, позволили выбрать наиболее оптимальные по своим характеристикам на частотах ниже резонансных [51].

Одной из возможных модернизаций гидроопоры, впервые предложенной в 1989 г. [10], является применение магнитореологических жидкостей, заполняющих рабочую и компенсационную камеры.

Гидроопора с магнитореологической жидкостью (рис.3.1) содержит, например, пять параллельных инерционных трубок 1, причем четыре из них содержат

магнитореологические жидкостные клапаны 2, которые могут управлять потоками жидкости через эти трубки. Включением - выключением клапанов с помощью комбинаций “открыто - закрыто” выбирается шестнадцать различных частот настройки в диапазоне 18 - 43 Гц.

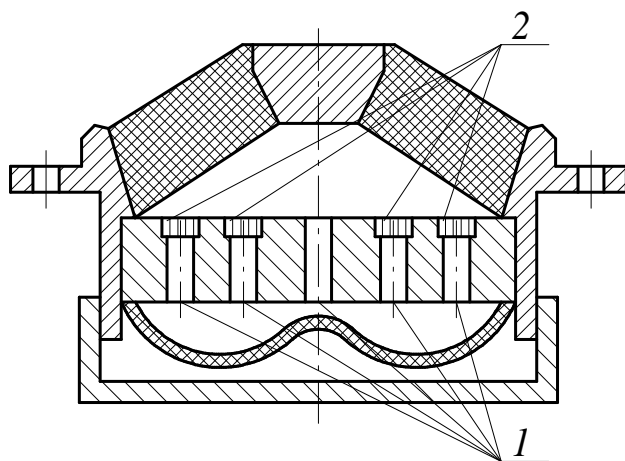


Рис. 7.3. Гидроопора с магнитореологической жидкостью

Это достигается приложением внешнего магнитного поля, под действием которого резко увеличивается вязкость в отдельной трубке и течение через эту трубку прекращается. Если же давление жидкости преодолевает напряжение магнитного поля, клапаны открываются. С другой стороны, под действием магнитного поля изменяется вязкость жидкости. Показано, что низкая динамическая жесткость относительно статической жесткости без потери последней достигается в широком диапазоне частот, так как реологическая гидроопора может обеспечивать шестнадцать дискретных частот настройки, создавая виброизоляцию при узкополосном случайном возбуждении. Магнитореологическая гидроопора, работающая на эффекте изменения вязкости магнитореологической жидкости, описанная в [23], имеет три рабочие камеры, заполненные магнитореологической жидкостью. Верхняя и нижняя камеры имеют эластичные обечайки, дроссельные каналы выполнены в жестких перегородках из магнитострикционного материала и неподвижно закреплены на штоке, который воспринимает внешнюю нагрузку.

Работа гидропоры с магнитореологическим заполнением, имеющая трущиеся части, разобрана в работе [24]. Реактивное сопротивление трансформаторов регулируется изменением внутреннего магнитного поля, которое создается в дроссельных каналах электрическим током от внешнего источника. Данное устройство предназначено, в основном, для демпфирования ударных перегрузок и имеет невысокую надежность.

Работа отдельных магнитореологических трансформаторов с трущимися подвижными поршнями изложена в работе [25]. Трансформаторы выполнены в виде гидроцилиндров, активное и реактивное сопротивления которых изменяются под действием внешнего магнитного поля.

Первые отечественные разработки гидропор с применением инерционных электрогидравлических и магнитогидравлических трансформаторов появились в 1989 году [55].

Виброизолирующее устройство, представленное на рис. 7.4, работает следующим образом.

При воздействии на нагрузочный элемент 1, и, следовательно, на шток 4 внешней периодической силы F с частотой ω_0 происходит деформация резинометаллического корпуса 2 и смещение мембраны 3 с той же частотой ω_0 . Так как мембрана выполнена сплошной и объемы камеры, разделенной мембраной, сообщаются только посредством канала 5 выполненного в штоке из магнитострикционного материала, то под действием внешней силы индукция B возникающего магнитного поля возрастает при увеличении внешней силы F . Распределение вектора магнитной индукции B по сечению гидравлического

трансформатора 5 представлено в виде [55]: $B = \frac{a^2 \cdot \Delta P}{L} \cdot \mu_a \cdot \left(\frac{\gamma}{\nu \rho} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot B_0$, где a - радиус дроссельного канала трансформатора, ΔP - разность давлений на входе и выходе дроссельного канала, L - длина канала, μ_a - магнитная проницаемость реологического заполнителя, γ - проводимость реологического заполнителя, ν - кинематическая вязкость заполнителя, ρ - плотность заполнителя, B_0 - магнит-

ная индукция материала штока.

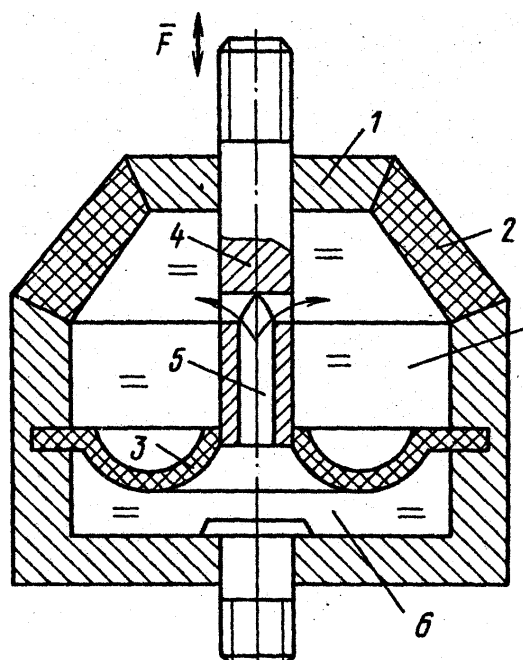


Рис. 7.4. Гидроопора с инерционным магнито реологическим трансформатором

Плотность тока J , возникающего от движения жидкости по каналу определяется по формуле $J = \gamma[VB]$, где V - скорость движения жидкости в канале. От величины этого тока зависит величина пондемоторных сил, действующих на протекающую жидкость.

Следует отметить, что особенностью гидроопор с инерционными трансформаторами является независимость частот внутренних резонансов автономной гидроопоры от динамических свойств присоединенных конструкций [32]. Эти резонансные частоты автономной гидроопоры в составе полной системы переходят в нули передаточных функций (без учета диссипации). Это свойство имеет важное практическое значение, так как позволяет переносить экспериментальные результаты изучения автономной гидроопоры на систему в целом. Вертикальная жесткость резиновой конической обечайки определяется как жесткость эквивалентной конструкционной пружины, к которой через поршневое действие резиновой конической поверхности обечайки подсоединяется эквивалентная

гидравлическая пружина [69]. В ряде работ, посвященных гашению вибраций гидропорой силового агрегата транспортного средства одним из основных факторов, влияющих на демпфирование в области резонансных частот, является инерционность столба рабочей жидкости, заключенной в дроссельном канале [69]. При использовании магнитореологических заполнителей возрастает влияние факторов внутреннего трения, так как при дросселировании в каналах нарушается ламинарный поток. С одной стороны такие факторы облегчают настройку гидропоры на частоту нуля передаточной функции, а с другой изменяют ее характеристики на низких частотах, в частности, на резонансной частоте в области 8 Гц. Поэтому учет основных явлений в магнитореологических и электрореологических средах, сопровождающих процессы гашения гидропорой энергии колебаний силового агрегата, позволит более точно обосновать концепцию конструктивного исполнения.

При составлении уравнений движения магнитореологических сред в магнитных полях гидропоры предполагаются следующие условия. Электропроводность среды однородна и изотропна во всем объеме действия и не зависит от напряженности магнитного поля H . Это условие имеет место при $\omega_0 \tau \ll 1$, где ω_0 – ларморова частота прецессии для ионизированных молекул рабочей жидкости, τ – среднее время свободного пробега ионизированной частицы, электропроводность- γ достаточно велика $\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\omega}{\gamma} \ll 1$, где ω – частота внешнего сигнала, ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды. При дросселировании магнитореологической жидкости в магнитном поле возникает индукционный ток с плотностью $J = \frac{\gamma}{c} [VH]$, сила Лоренца $f_L = \rho_e E + \frac{1}{c} [jH]$, где $j = J + \rho_e V + \gamma E$, ρ_e – плотность электрических зарядов в среде, H - напряженность внешнего магнитного поля, E - напряженность внешнего электрического поля, V - скорость протекания магнитореологической жидкости через дроссельные каналы.

Система уравнений, описывающих движение магнитореологической сре-

ды в магнитном поле дроссельных каналов включает в себя уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{VH}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \text{div} \mathbf{H} = 0, \quad \text{где } \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\gamma} - \text{коэффициент магнитной вязкости, который тем меньше, чем выше электропроводность среды; гидродинамические уравнения движения среды; обобщенное уравнение Навье-Стокса:}$$

уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$; уравнение состояния среды:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{H}] + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad} \text{div} \mathbf{V};$$

уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$; уравнение состояния среды:

$p = p(\rho, T)$; уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho u + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div} W, \quad \text{где } \rho - \text{плотность среды, } V - \text{скорость движения}$$

среды в дроссельных каналах, u – внутренняя энергия, H – напряженность внешнего магнитного поля, W – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга). Диссипация плотности потока энергии W резко возрастает, если в потоке магнитореологической среды нарушается химическое равновесие. С учетом параметров реологического заполнителя и внешнего магнитного поля плотность потока энергии можно представить в виде [100]:

$$W = \rho \cdot \mathbf{V} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) - K \nabla T + \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{V})^2 + \zeta (\text{div} \mathbf{V})^2 \mathbf{V} + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}[\mathbf{VH}]] - \frac{\nu_m}{4\pi} [\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{H}]$$

Здесь $\nu_m = c^2 / 4\pi\gamma$ – коэффициент магнитной вязкости, u – удельная внутренняя энергия среды, K – коэффициент теплопроводности, η и ζ – коэффициенты первой и второй вязкостей магнитореологической среды, T – абсолютная температура.

В данной модели не учтено влияние внутреннего магнитного поля, возникающего при движении магнитореологической жидкости в каналах.

В работе [90] рассматривается трехмерная многочастичная упорядочен-

ная модель электрореологических жидкостей. Показано, что в этом случае ее поведение может быть описано в рамках вязкоупругого приближения. Ранее в работах [89, 92] модель электрореологической жидкости представлялась в виде тетрагональной объемно - центрированной кристаллической решетки. Такая модель предназначена только для неньютоновских жидкостей и для описания динамических процессов с изменяющимися давлениями и магнитными полями в дроссельных каналах требует уточнения.

Рассмотрим наиболее простой случай аксиально-симметричного поля, когда $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \neq 0, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0, E_\varphi = 0$, где U – скалярный потенциал электрического поля, E_r, E_z, E_φ – координаты вектора напряженности E в цилиндрической системе координат. При условии $V \approx V_z$, где V_z – скорость вдоль оси z , потоки заряженных частиц через дроссельные каналы можно считать параксиальными.

Первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид [101]:

$$\operatorname{rot} \dot{H} = \gamma \dot{E} = \dot{\delta}, \quad (7.14)$$

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H}, \quad (7.15)$$

где \dot{H} и \dot{E} – комплексные напряженности магнитного и электрического полей соответственно, $\dot{\delta}$ – комплексная плотность тока, направленная по вертикальной оси z в дроссельном канале, ω – частота внешнего динамического воздействия, μ_a – магнитная проницаемость среды.

Из выражений (7.14) и (7.15) следует, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\delta} = -j\omega\mu_a \dot{\delta}$ или $\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\delta} - \nabla^2 \dot{\delta} \cdot z_0 = (-j\omega\mu_a) \cdot \dot{\delta} \cdot z_0$. Принимая во внимание, что $\operatorname{div} \dot{\delta} = 0$, получим $\nabla^2 \dot{\delta} = j\omega\mu_a \dot{\delta}$. Раскрывая оператор Лапласа в цилиндрической системе координат и учитывая, что $\dot{\delta}$ от α и z не зависит, приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\dot{\delta}}{dr} + r \frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} \right) = j\omega\mu_a \dot{\delta}, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega\mu_a \dot{\delta}; \quad \text{вводя обозначение}$$

$q^2 = -j\omega\mu_a$, получаем уравнение $\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\dot{\delta}}{dr} + q^2\dot{\delta} = 0$, или

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \cdot \frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0 \quad (7.16)$$

Уравнение (7.16) является частным случаем уравнения Бесселя, решение которого можно представить следующим образом:

$$\dot{\delta} = \dot{A} \cdot J_0(qr) + \dot{B} \cdot N_0(qr), \quad (7.17)$$

где \dot{A} и \dot{B} - комплексные постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ - функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ - функция Бесселя нулевого порядка второго рода. Второе слагаемое в решении (7.17) лишено физического смысла, так как при $qr = 0$ функция $N_0(qr) \rightarrow \infty$ и плотность тока неограниченно возрастает, что на практике не наблюдается. Исходя из уравнения (7.16) и соотношения (7.17)

$$\dot{H} = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{d}{dr} [\dot{A} \cdot J_0(qr)] = -\frac{\dot{A}}{q^2} \cdot \frac{d[J_0(qr)]}{d(qr)} \cdot \frac{d(qr)}{dr} = -\frac{\dot{A}}{q^2} \cdot q[-J_1(qr)] = \frac{\dot{A}}{q} \cdot J_1(qr),$$

или

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad (7.18)$$

где $J_1(qr)$ - функция Бесселя первого рода первого порядка. Для определения \dot{A} найдем значение \dot{H} у стенок дроссельного канала применяя закон полного тока, получим $\frac{I}{2\pi a} = \frac{\dot{A}}{q} \cdot J_1(qa)$; отсюда:

$$\dot{A} = \frac{qI}{2\pi a \cdot J_1(qa)}. \quad (7.19)$$

Подставив найденное значение \dot{A} в формулы (7.16) и (7.17), получим следующие выражения:

$$\dot{\delta} = \frac{qIJ_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)}; \quad (7.20)$$

$$\dot{H} = \frac{J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (7.21)$$

Используя формулы (7.20) и (7.21) можно определить плотность потока заряженных частиц через дроссельный канал и напряженность магнитного поля в канале, где

$$J_0(qr) = b_0 e^{j\beta_0}; \quad (7.22)$$

$$J_1(qr) = b_1 e^{j\beta_1} - \quad (7.23)$$

функции Бесселя нулевого и первого порядка первого рода.

Рассмотрим конкретный пример. По дроссельному каналу диаметром 4 мм перемещаются заряды с силой тока 0,1 А, проводимость среды $\gamma = 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu = 10^3$, частота внешнего вибросигнала $f = 10$ Гц. Для определения распределения плотности тока по сечению канала и напряженности магнитного поля используются формулы (7.20) и (7.21).

$$q = \sqrt{\omega \gamma \mu_a} = \sqrt{2\pi \cdot 10 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} \cdot \sqrt{-j} = 888,35 \cdot \sqrt{-j} = 888,35 \cdot e^{-j45^\circ};$$

$$r = a \sqrt{\omega \gamma \mu_a} = 0,002 \cdot 888,35 \approx 2. \quad \mu_a = \mu_0 \mu = 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м.}$$

По таблицам бесселевых функций [150]:

$$J_0(qr) = J_0(2\sqrt{-j}) = 1,22 \cdot e^{j52^\circ}; b_0 = 1,22; \beta_0 = 52^\circ$$

$$J_1(qr) = J_1(2\sqrt{-j}) = 1,04 \cdot e^{-j16,7^\circ}; b_1 = 1,04; \beta_1 = -16,7^\circ$$

По формуле (7.20) найдем плотность тока на осевой линии дроссельного

$$\text{канала } \dot{\delta}_0 = \frac{qI}{2\pi a \cdot J_1(qr)} = \frac{888,35 e^{-j45^\circ} \cdot 0,1}{2\pi \cdot 0,002 \cdot 1,04 e^{-j16,7^\circ}} = 6,8 \cdot 10^3 \cdot e^{-j28,3^\circ} \left[\text{А/м}^2 \right]$$

Используя полученный результат, найдем плотность тока у стенки дроссельного

$$\text{го канала } \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_0 \cdot J_0(qr) = 6,8 \cdot 10^3 e^{-j28,3^\circ} \cdot 1,22 e^{j52^\circ} = 8,296 \cdot 10^3 e^{j23,7^\circ} \left[\text{А/м}^2 \right]$$

На низких частотах входного вибросигнала распределение заряженных частиц по сечению канала незначительное – порядка 15%. Рассмотрим поведение магнитореологического заполнителя на частоте 100 Гц, когда при заполнении камер гидропоры обычной рабочей жидкостью дроссельные каналы запираются:

$$q = \sqrt{\omega \mu_a} = \sqrt{2\pi 100 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} \cdot \sqrt{-j} = 2,8 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{-j}.$$

$$r = a \sqrt{\omega \mu_a} = 0,002 \cdot 2,8 \cdot 10^3 = 5,6.$$

$J_0(qr) = J_0(5,6\sqrt{-j}) \approx 8,5 \cdot e^{i195^\circ}$, $J_1(qr) = J_1(5,6\sqrt{-j}) \approx 7e^{i105^\circ}$. Используя полученные результаты, определим плотность тока в центре дроссельного канала и на его периферии:

$$\dot{\delta}_0 = \left| \frac{2800 \cdot 0,1}{2\pi \cdot 0,002 \cdot 7} \right| = 3,184 \cdot 10^3 [\text{A}/\text{m}^2].$$

$\dot{\delta}_1 = \left| \dot{\delta}_0 \cdot J_0(qr) \right| = 3,184 \cdot 10^3 \cdot 8,5 = 27,07 \cdot 10^3 [\text{A}/\text{m}^2]$. Здесь плотность распределения зарядов более неравномерная, на периферии она выше в 8,5 раз. Поэтому на частотах свыше 50 Гц начинается радиальное движение частиц магнитореологического заполнителя в дроссельных каналах. Причем, в отличие от обычных реологических заполнителей, эпюры скоростей в каналах не будут соответствовать параболическому закону. На частотах свыше 100 Гц скорость частиц магнитореологического заполнителя в пристеночной области будет даже выше, чем на осевой линии. Это свидетельствует о том, что на высоких частотах динамическая жесткость гидропоры имеет тенденцию к понижению и, следовательно, к возрастанию диссипации энергии внешнего вибросигнала. При расчетах вязкостного сопротивления движению рабочей жидкости на частотах свыше 100 Гц необходимо произвести оценку влияния внутреннего индуктивного сопротивления.

Для определения активного R и индуктивного X сопротивлений можно применить теорему Умова-Пойнтинга в комплексной форме записи [90].

$$R = \frac{\sqrt{\omega \mu_a} b_0}{2\pi \cdot a \gamma b_1} \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ); \quad (7.24)$$

$$X = \frac{\sqrt{\omega \mu_a} b_0}{2\pi \cdot a \gamma b_1} \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ). \quad (7.25)$$

Следует учитывать, что формулы (7.24) и (7.25) применимы для расчета сопротивлений единицы длины канала. Используя эти формулы, рассчитаем актив-

ное и реактивное сопротивления движению магнитореологического заполнителя в каналах:

$$R = \frac{\sqrt{\omega \mu_a} b_0}{2\pi a \gamma b_1} \cos(195^\circ - 105^\circ - 45^\circ) = \frac{2800 \cdot 8,5}{2\pi \cdot 0,002 \cdot 10^7 \cdot 7} \cos 45^\circ = 0,02 \text{ Ом};$$

$$X = \frac{\sqrt{\omega \mu_a} b_0}{2\pi \cdot a \gamma b_1} \sin(195^\circ - 105^\circ - 45^\circ) = 0,02 \text{ Ом}.$$

Частота входного вибросигнала 100 Гц является критической для магнитореологического заполнителя с приведенными выше параметрами. На частотах ниже 100 Гц влиянием комплексного сопротивления можно пренебречь, а на более высоких частотах начинает превалировать индуктивное сопротивление.

Сложность и нелинейность поведения электро - и магнитореологических жидкостей (ЭРЖ и МРЖ), а также относительно высокие напряженности полей, необходимых для управления вязкостью этих составов, сыграли свою роль в том, что на протяжении почти полувека магнитореологический эффект не получил распространения на практике. И только в последнее время, используя новые технологии, начинают находить применение ЭРЖ и МРЖ в системах гашения вибраций и демпфирования ударов [51, 69, 102].

7.3. Вращающееся магнитное поле в управлении магнитореологическим трансформатором

В настоящее время для активных систем виброзащиты, таких как гидроопоры с МРТ, до сих пор широко не применялись способы регулирования вязкости МРЖ посредством создания вращающегося магнитного поля [1 - 4]. Создание такого поля приводит не только к изменению вязкости МРЖ, но и к созданию магнитного вихря [5], который прекращает процессы седиментации и осаждения МРЖ и противодействует гравитационным силам [6].

В работах [1 - 4, 7] показано применение постоянного магнитного поля или меняющегося с частотой основной гармоники входного вибросигнала для управления демпфированием гидроопоры.

Регулирование вязкости МРЖ осуществляется в этих случаях за счет изменения напряжённости постоянного магнитного поля в дроссельных каналах и не влияет на седиментацию магнитных частиц.

При создании магнитного вихря в коаксиальном дроссельном канале МРТ гидропоры происходит изменение параметров потока МРЖ за счет изменения её гидродинамического сопротивления.

Устранение седиментации в МРТ достигается посредством гиромагнитных свойств частиц магнетика и гироскопических свойств жидкой несущей среды. Создаваемый управляющим полем магнитный вихрь увлекает за собой частицы МРЖ. Наличие гироскопических свойств у МРЖ позволяет более эффективно управлять её вязкостью в коаксиальном канале МРТ [4].

Необходимо совершенствовать методы управления вязкостью и регулирования расхода МРЖ при её дросселировании в МРТ. Поэтому необходимо совершенствовать конструкцию самой гидропоры с МРТ.

Для создания вращающегося поля в МРТ гидропоры целесообразно применять однофазный индуктор, получающего питание от однофазного источника переменного напряжения [8, 9].

На рисунке 7.5 приведена структурная схема гидропоры с МРТ с коаксиальным дроссельным каналом, управляемым вращающимся магнитным полем.

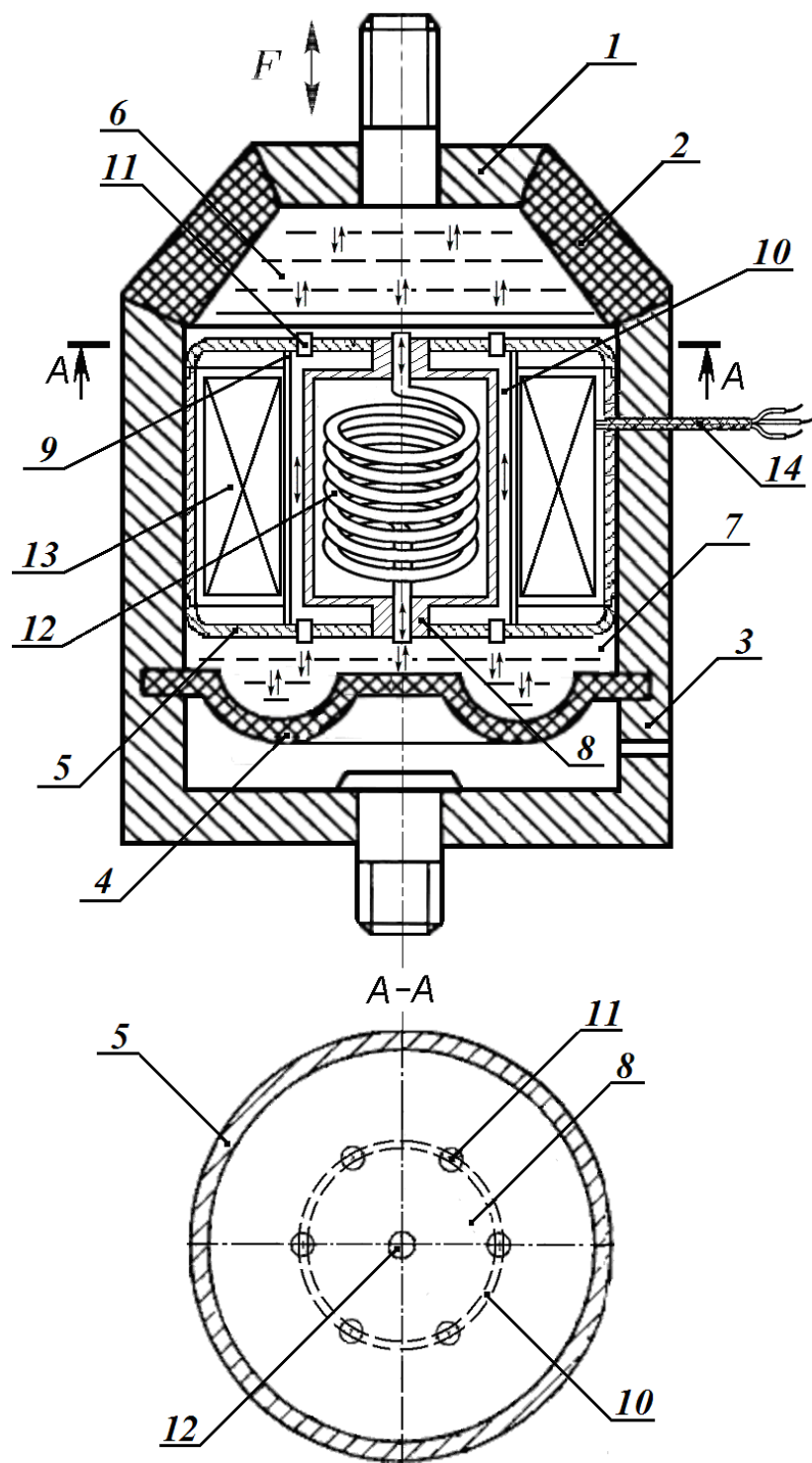


Рис.7.5. Структурная схема гидропоры с МРТ: 1 – опорная плата; 2 – обечайка; 3 – корпус опоры; 4 – мембрана; 5 – корпус дроссельной перегородки; 6, 7 – рабочая и компенсационная камеры; 8 – внутренний неподвижный цилиндр; 9 – внешняя цилиндрическая втулка; 10 – коаксиальный цилиндрический зазор с МРЖ; 11 – входные и выходные отверстия дроссельной перегородки; 12 – спиральный винтовой дроссельный канал; 13 – внешний однофазный индуктор; 14 – кабель питания внешнего индуктора гидропоры.

Коаксиальный цилиндрический дроссельный канал 8 образован внутренней поверхностью внешнего цилиндра 7 и внешней рабочей поверхностью внутреннего полого цилиндра 6.

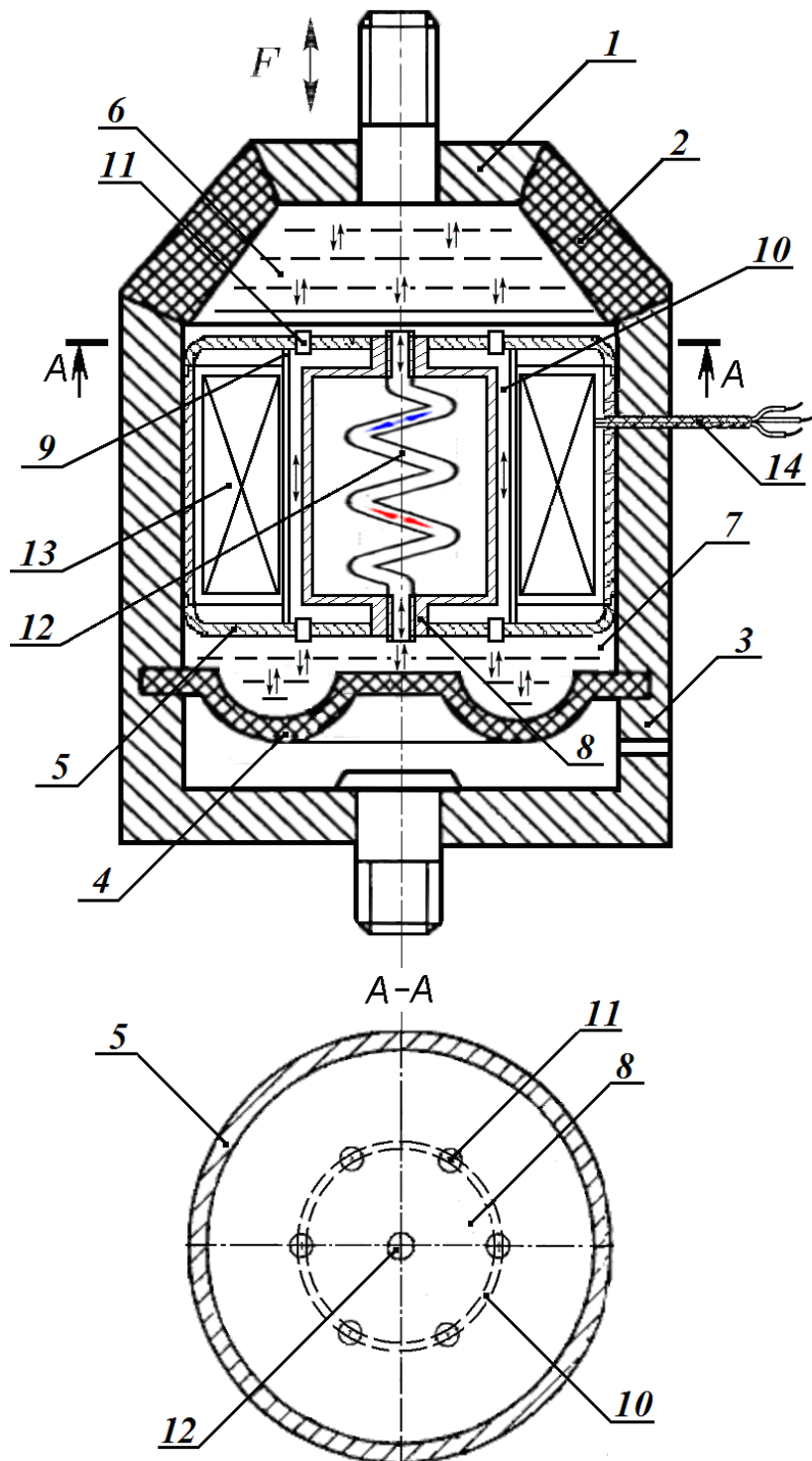


Рис. 7.6. Структурная схема гидропоры с МРТ с коаксиальным дроссельным каналом, управляемым вращающимся магнитным полем

Вращающееся магнитное поле в МРТ гидропоры создаётся обмотками внешнего однофазного индуктора 10, поперечный разрез которого схематично представлен на рис. 7.6.

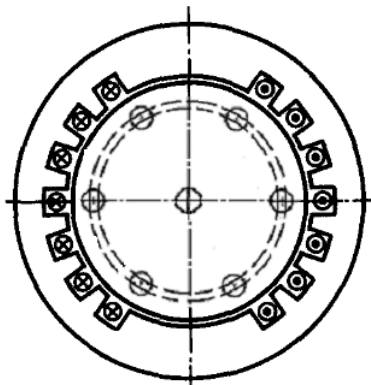


Рис. 7.7. Схематичное представление поперечного разреза внешнего однофазного индуктора МРТ гидропоры

Обмотка однофазного индуктора МРТ (рис. 7.7) расположена в пазах, занимающих примерно $\frac{2}{3}$ окружности индуктора, которая соответствует паре полюсов. В результате распределение индукции магнитного поля в коаксиальном цилиндрическом дроссельном канале с МРЖ близко к синусоидальному.

Значение индукции в каждой точке коаксиального цилиндрического дроссельного канала с МРЖ будет изменяться во времени по гармоническому закону $B_a = B_{\max} \cos \alpha$, где $\alpha = x/R$ – угловая координата точки на окружности радиуса R , выраженная в дуговых единицах (радианах); x – координата точки в линейных единицах.

Поскольку по обмотке однофазного индуктора 10 проходит переменный ток, то амплитуда индукции магнитного поля пульсирует во времени с частотой ω источника питания МРТ.

Пульсирующую волну магнитной индукции в произвольной точке коаксиального цилиндрического дроссельного канала с МРЖ можно представить разностью двух вращающихся волн:

$$\begin{aligned}
 B_p &= B_{max} \cos \alpha_e \cos \omega t = \\
 &= \frac{B_{max}}{2} \cos(\alpha_e - \omega t) + \frac{B_{max}}{2} \cos(\alpha_e + \omega t) = B_{l+} + B_{l-}
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

т.е. волнами с половинной амплитудой и вращающимися в противоположных направлениях - прямом (B_{l+}) и обратном (B_{l-}).

В выражении (7.26) $\alpha_e = z_p \alpha$ – угловая координата точки на периоде пульсирующей волны T_a ; z_p – число пар полюсов; $\alpha = x/R$ – угловая координата точки на окружности радиуса R , выраженная в дуговых единицах (радианах); x – координата точки в линейных единицах.

Период пульсирующей волны T_a соответствует полному циклу электромагнитных процессов во временной области, поэтому угловая мера $\alpha_e = z_p \alpha$ соответствует угловой мере фазового угла.

Таким образом, однофазная обмотка индуктора 10 МРТ создает неподвижный пульсирующий поток, изменяющийся во времени, и по длине коаксиального цилиндрического дроссельного канала с МРЖ образуется пульсирующая волна с узлами и пучностями, расположенными на расстоянии $T_a/2$ друг от друга (рис. 7.8), где период пульсирующей волны T_a пропорционален длине коаксиального дроссельного канала.

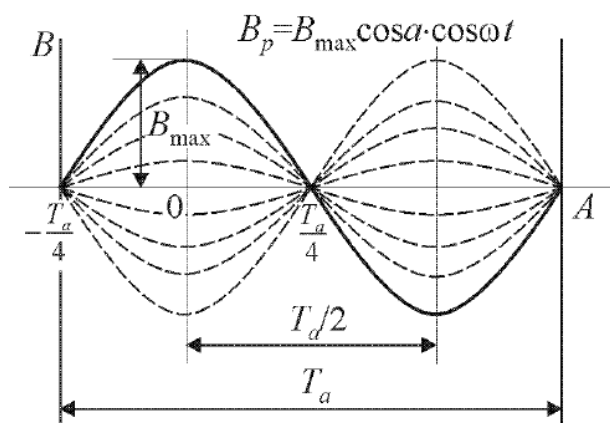


Рис. 7.8. Пульсирующая волна магнитной индукции в коаксиальном цилиндрическом дроссельном канале с МРЖ

Здесь и в выражении (7.26) неподвижный пульсирующий поток заменяется суммой идентичных круговых полей, вращающихся в противоположных направлениях и имеющих одинаковые частоты вращения: $n_{1пр} = n_{1обр} = n_1$, где $n_{1пр}$ – скорость поля прямой последовательности, $n_{1обр}$ – скорость поля обратной последовательности.

Электромагнитные моменты $M_{пр}$ и $M_{обр}$, образуемые прямым и обратным магнитными полями внешнего однофазного индуктора МРТ, направлены в противоположные стороны, а его результирующий момент $M_{рез}$ равен алгебраической сумме моментов при одной и той же частоте вращения магнитного поля.

Скольжение МРЖ относительно прямого потока магнитного поля $\Phi_{пр}$

$$s_{пр} = (n_{1пр} - n_2) / n_{1пр} = (n_1 - n_2) / n_1 = 1 - n_2 / n_1, \quad (7.27)$$

где n_2 – скорость вращения МРЖ в вихревом магнитном поле.

Скольжение МРЖ относительно обратного потока магнитного поля $\Phi_{обр}$

$$s_{обр} = (n_{1обр} + n_2) / n_{1обр} = (n_1 + n_2) / n_1 = 1 + n_2 / n_1. \quad (7.28)$$

Из (7.27) и (7.28) следует, что

$$s_{обр} = 1 + n_2 / n_1 = 2 - s_{пр}. \quad (7.29)$$

Скольжение МРЖ в коаксиальном цилиндрическом дроссельном канале МРТ определяет величину снижения частоты вращения МРЖ относительно частоты вращения вихревого магнитного поля внешнего однофазного индуктора. У стенок прямолинейного проходного канала $\vec{V}_ж = 0$, а в его центре она максимальна $\vec{V}_ж = \text{maks}$. С расстоянием $r_{вар}$ от дроссельного канала скорость $\vec{V}_ж$ изменяется по параболическому закону (рис. 7.9):

$$\vec{V}_ж(r) = \vec{V}_{ж0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (7.30)$$

где R – радиус проходного канала; $\vec{V}_{ж0}$ – скорость рабочей жидкости на оси

проходного канала, определенная формулой:

$$\bar{V}_{ж0} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2. \quad (7.31)$$

Здесь $P_1 - P_2 = \Delta p$ – разность давлений на концах проходного канала; l – длина проходного канала; η – динамическая вязкость рабочей жидкости.

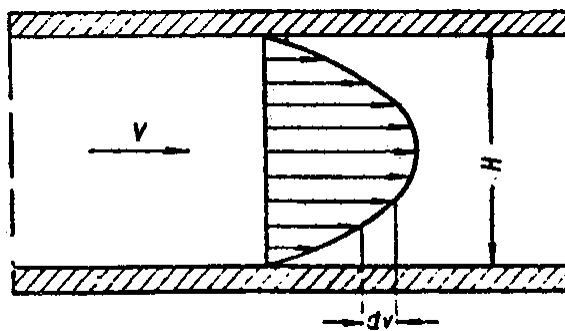


Рис.7.9. Движение отдельных слоев жидкости с различными скоростями при ламинарном течении рабочей жидкости в проходном дроссельном канале.

Поток рабочей жидкости Q , т. е. объем рабочей жидкости, протекающий через поперечное сечение проходного канала рабочей длиной $l = 500$ мм за единицу времени определяется формулой Пуазейля [16]:

$$Q = \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta l} \pi R^4. \quad (7.32)$$

Зная скорость V_{CP} потока вещества и объемную плотность ρ вещества, можно определить массовый расход:

$$Q \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}} \right] = S_K \rho V_{CP}, \quad (7.33)$$

где S_K – площадь поперечного сечения потока на измерительном участке.

При составлении уравнений движения магнитореологических сред в магнитных полях гидропоры предполагаются следующие условия [5]. Магнитная проницаемость магнитной среды однородна и изотропна во всем объеме действия и не зависит от напряженности магнитного поля H . Это условие имеет место при $\omega_0 \tau \ll 1$, где ω_0 – ларморова частота прецессии для полярных частиц

МРЖ, τ – среднее время свободного пробега частицы, электропроводность γ достаточно мала, так как нет свободных носителей заряда.

Система уравнений, описывающих движение МРЖ в магнитном поле дроссельных каналов, включает в себя уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{VH}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \text{div} \mathbf{H} = 0,$$

где $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\gamma}$ – коэффициент магнитной вязкости, который тем больше, чем ниже электропроводность среды.

В гидродинамические уравнения движения среды входят:

- обобщенное уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{H}] + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad} \text{div} \mathbf{V};$$

- уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0;$

- уравнение состояния среды: $p = p(\rho, T);$

- уравнение закона сохранения энергии: $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho u + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div} W,$ где ρ – плот-

ность среды, V – скорость движения среды в дроссельных каналах, u – внутренняя энергия, H – напряженность внешнего магнитного поля, W – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга).

Диссипация плотности потока энергии W резко возрастает, если в потоке МРЖ нарушается химическое равновесие. С учетом параметров реологического заполнителя и внешнего магнитного поля плотность потока энергии можно представить в виде [6]:

$$W = \rho \cdot \mathbf{V} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) - K \nabla T + \eta \left[2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{V})^2 + \zeta (\text{div} \mathbf{V})^2 \right] + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}[\mathbf{VH}]] - \frac{\nu_m}{4\pi} [\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{H}] \quad (7.34)$$

здесь $\nu_m = c^2 / 4\pi\gamma$ – коэффициент магнитной вязкости, u – удельная внутренняя энергия среды, K – коэффициент теплопроводности, η и ζ – коэффициенты пер-

вой и второй вязкостей МРЖ, T – абсолютная температура.

В уравнении (7.34) напряженность магнитного поля H изменяется по гармоническому закону и направлена по оси z : $\vec{H} = \vec{x}_0 H_0 e^{-ikz}$, тогда

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{H} = -\vec{k}^2 H_0 e^{-ikz} \text{ и } [\vec{H} \text{rot}\vec{H}] = -k^2 H_0^2 e^{-i2kz}.$$

Будем рассматривать движение МРЖ в коаксиальном цилиндрическом зазоре МРТ при $\text{div} = 0$, так как объём рабочей среды в коаксиальном дроссельном канале не изменяется.

Пусть напряженность магнитного поля ортогональна направлению скорости в коаксиальном зазоре $\vec{H} \perp \vec{v}$, тогда $[\vec{v}\vec{H}] = v_0 H$.

С учетом этих допущений перепишем уравнение (7.34)

$$W_{x=0} = \rho \cdot v_0 \left(u + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} \right) - k \nabla T + \frac{1}{4\pi} H_0^2 v_0 + \frac{v_m}{4\pi} H_0^2. \quad (7.35)$$

Коэффициент поглощения β альфеновской волны (т.е. электромагнитной волны, направление распространения которой, понимаемое как направление ее групповой скорости, совпадает с направлением поля \vec{H}) можно найти из формулы [8]:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2U_A^3} \left(\frac{\eta}{\rho} + v_m \right) \quad (7.36)$$

где ω - частота магнитного поля, U_A – скорость распространения альфеновской волны,

$$U_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (7.37)$$

из уравнений (7.36) и (7.37) выразим магнитную вязкость v_m :

$$v_m = \frac{\beta 2H^3}{(4\pi\rho)^{3/2}} - \frac{\eta}{\rho}. \quad (7.38)$$

Подставляя (7.38) в (7.35) получим:

$$W_{z=0} = \rho \cdot v_0 \left(u + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} \right) - k \nabla T + \frac{1}{4\pi} H_0^2 v_0 + \frac{1}{2\pi} \beta \frac{H_0^5}{\omega^2 (4\pi\rho)^{3/2}} - \frac{\eta}{4\pi\rho} H_0^2 \quad (7.39)$$

Из выражения (7.39) следует, что плотность потока энергии зависит от H

как функция пятой степени [8].

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть: $v_0 = 0,5 \text{ м/с}$; $u = 30 \text{ Дж}$; $k = 7,0$; $k\nabla = \frac{\partial T^2}{\partial t} = 2T\Delta T$; $0 \leq T \leq 70^\circ$; $a = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

$H_0 = 200 \cdot 10^3 \sin(\omega t + \varphi(t))$; $\beta = 0,1$.

Чтобы упростить выражение (7.39), будем считать, что температура жидкости в канале постоянна (т.е. $\nabla T = 0$), так же примем, что в первом приближении вязкость жидкости не зависит ни от напряженности магнитного поля ни от скорости течения ($\eta = \text{const}$).

В качестве рабочей жидкости возьмем магнитореологический наполнитель на основе глицерина при 20°С . Тогда $\rho = 1,26 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 1480 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м} \cdot \text{сек}$. Пусть $r_0 = \frac{1}{3}a$; тогда $v_0 = \frac{a^2 \Delta p}{4\eta l} (1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{a^2 \Delta p}{9\eta l}$.

Перепад давления в гидроопоре $\Delta p = p_1 - p_2$ (рис. 7.8) $p_1 = \frac{F}{S_1}$ а $p_2 = \frac{F}{S_{\text{кан}}}$,

где F - сила, действующая на гидроопору, $S_{\text{кан}} = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ - площадь поперечного сечения коаксиального канала, $S_1 = 36,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ - площадь нижнего сечения рабочей камеры гидроопоры. Пусть сила воздействия на гидроопору изменяется по гармоническому закону, с частотой, равной частоте магнитного поля $F = F_0 \sin(\omega t)$. Таким образом:

$$\Delta p = \frac{F_0}{S_1} \sin(\omega t) - \frac{F_0}{S_{\text{кан}}} \sin(\omega t). \quad (7.40)$$

Сила воздействия $F_0 = 1000 \text{ Н}$. Учитывая все сказанное выше, построим зависимость плотности потока энергии в коаксиальном дроссельном канале гидропоры с МРЖ $W(\text{Н}, t)|_{x=0}$ при частоте магнитного поля $\omega = 2\pi \cdot 25 \text{ рад/сек}$ и коэффициенте поглощения альфеновской волны $\beta = 0,1$ (рис. 7.10).

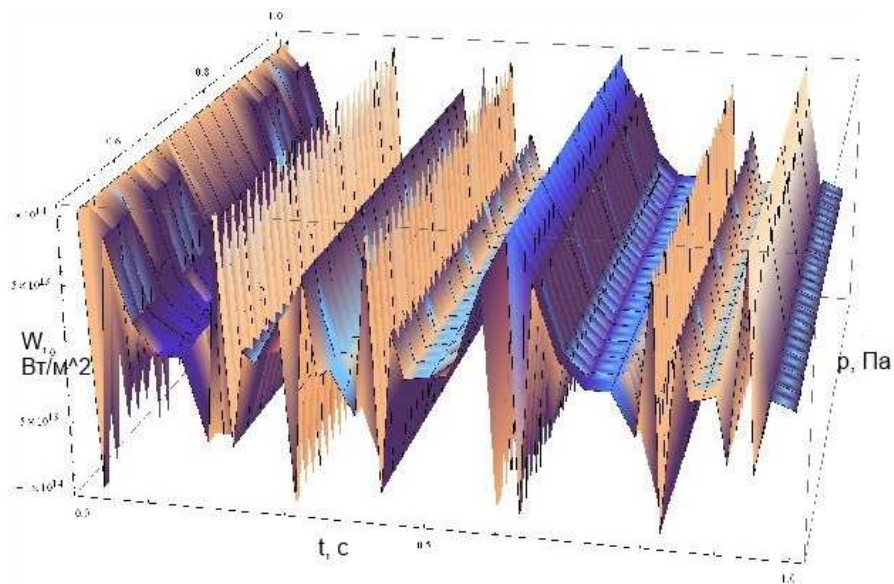


Рис. 7.10. Зависимость плотности потока энергии магнитного поля от времени и давления при $f_1 = 30$ Гц и $T_1 = 20^\circ \text{C}$.

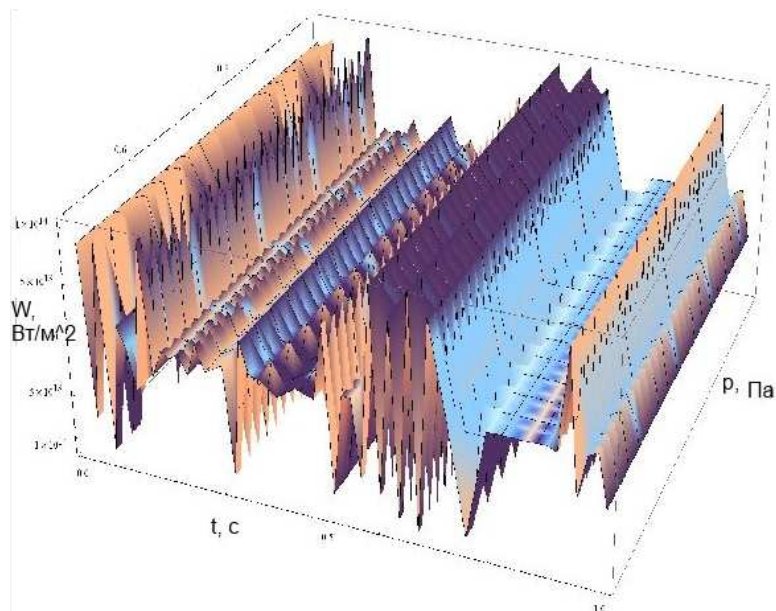


Рис. 7.11. Зависимость плотности потока энергии магнитного поля от времени и давления при $f_1 = 30$ Гц и $T_1 = 50^\circ \text{C}$.

Вывод.

Из рис. 7.10 и 7.11 следует, что плотность потока энергии зависит от напряжённости магнитного поля как функция пятой степени, что так же следует и из уравнения (7.39).

С повышением частоты входного вибросигнала возникает частотная модуляция вектора Умова-Пойнтинга, поэтому процесс демпфирования обогащается высокочастотными составляющими, которые в вязкой магнито-реологиче-

ской среде активно поглощается. Поэтому вращающееся магнитное поле в коаксиальном дроссельном канале способствует более эффективному демпфированию. Также следует, что в цилиндрическом зазоре возникают высокочастотные пульсации гидравлического давления в рабочей МРЖ, которые уничтожают седиментацию магнитных частиц МРЖ.

ГЛАВА 8

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Вибрационные процессы в естественных и технических системах сложны и зависят от множества разнообразных причин, поэтому представляется обоснованным рассмотрение их как процессов случайных, однозначно непредсказуемых, но обладающих определенными усредненными характеристиками. Причины такого подхода к вибрационным процессам и устройствам их преобразования следующие: во - первых, это широкополосность этих процессов по частоте, в результате чего даже полностью детерминированный полигармонический процесс представляется в итоге полностью хаотическим временным процессом; во - вторых, при динамическом анализе работы устройств генерации и преобразования вибрации (усилители, гасители, смесители, линии задержки и пр.) учесть все реально существующие внешние и внутренние факторы сложно и невозможно. Вероятностный же подход позволяет учесть влияние этих второстепенных факторов, пусть в достаточно грубой форме, но вполне способной оценить их влияние. При этом следует помнить, что даже на детерминированные входные и выходные процессы устройств накладываются чисто случайные процессы - помехи с определенными характеристиками.

8.1. Случайные события и величины

При наблюдении в опыте за каким-либо случайным явлением мы фиксируем его результат (исход), который будем называть событием. События в наблюдениях случайны и непредсказуемы, но числовой мерой возможности их наступления является вероятность события. Так, если события в опыте происходят массово и при одних условиях, то статистическая вероятность этих событий характеризуется относительной частотой их повторения:

$$p_i \approx v_i; \quad v_i = n_i / n; \quad n = \sum_i n_i,$$

где n_i - число i - го события в серии из n наблюдений. Множество всех возможных событий в опыте объединяется понятием случайной величины. *Случайная величина X есть числовая величина, которая при наблюдении принимает случайным образом одно и только одно числовое значение, соответствующее событию из всех возможных в данном опыте.* Событие есть реализация случайной величины. Для описания случайной величины необходимо помимо задания области ее возможных значений определить закон ее распределения, то есть правило, позволяющее вычислять вероятности всех возможных значений случайной величины:

$$X = \{\Omega_x; P_x(x)\}.$$

Здесь $\Omega_x = \{x\}$ - множество возможных значений x , а $P_x(x)$ - закон распределения случайной величины. Задание этих элементов и определяет случайную величину как вероятностную модель наблюдаемого случайного явления.

Случайные величины могут быть дискретными или непрерывными, но колебательные и вибрационные явления, рассматриваемые ниже, являются непрерывными, и поэтому рассматриваем только непрерывные величины. Для их описания необходимо задать: $\Omega_x = (a, b), \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$

$$F_x(x) = P(X < x) \text{ и } f_x(x) = \frac{dF_x}{dx} \geq 0.$$

Здесь a, b - границы односвязной конечной или бесконечной непрерывной области, $F_x(x)$ - функция распределения случайной величины X , определяющая вероятность того, что случайная величина принимает значения меньше, чем ее аргумент x , а $f_x(x)$ - функция плотности распределения вероятности случайной величины. Каждая из этих функций и задает закон распределения случайной величины, для них выполняются следующие формулы:

$$F_X(x) = \int_a^x f_x(\zeta) d\zeta; \quad F_X(a) = 0; \quad F_X(b) = \int_a^b f_x(x) dx = 1,$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx,$$

которые иллюстрируются на рис.8.1.

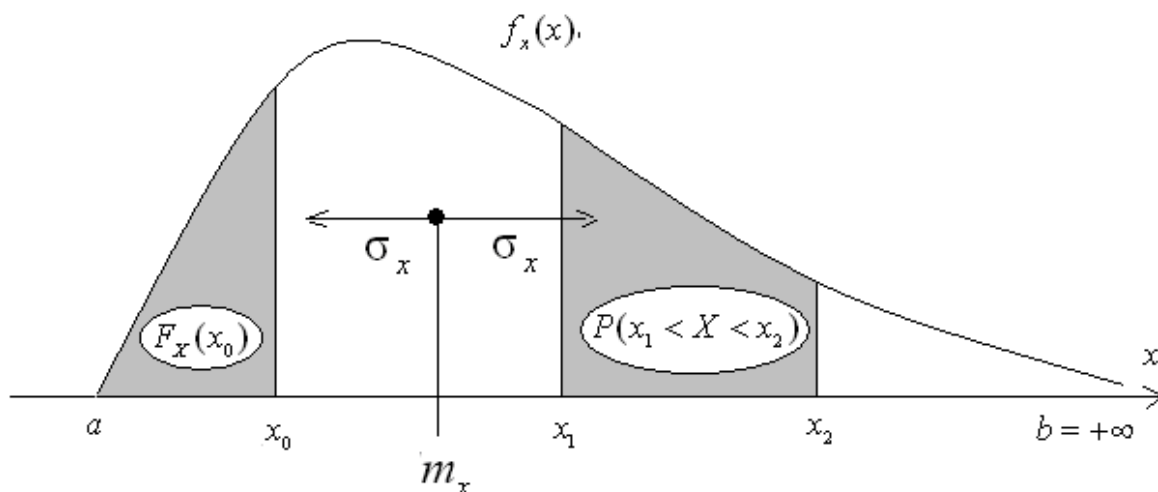


Рис. 8.1. Иллюстрация закона распределения случайной величины и ее основных числовых характеристик

Функции распределения или плотности распределения при исследованиях часто не известны и предполагаются гипотетической моделью явления, кроме того, они часто являются избыточной информацией. Обычно в инженерных расчетах и оценках достаточно знать некоторые основные числовые характеристики случайных величин, таковыми являются два первых начальных момента и второй центральный момент:

$$M[X] = m_x = \int_{\Omega_x} x f_x(x) dx; \quad M[X^2] = m_{x^2} = \int_{\Omega_x} x^2 f_x(x) dx;$$

$$D[X] = D_x = \int_{\Omega_x} (x - m_x)^2 f_x(x) dx; \quad D_x = m_{x^2} - m_x^2.$$

Эти величины есть постоянные (неслучайные) числовые величины и они час-

точно дают представление о распределении. Величина m_x называется математическим ожиданием (МО) и характеризует средневзвешенное значение случайной величины. Дисперсией D_x является второй центральный момент и она характеризует средний разброс значений СВ около своего центра. Действительно, если $\tilde{X} = X - m_x$ - отклонение СВ от своего центра, то:

$$D_x = M[\tilde{X}^2] = m_{x^2} - m_x^2.$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому удобно ввести величину $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, называемую средним квадратическим отклонением (СКО) случайной величины. Смысловое значение математического ожидания и СКО так же иллюстрируются на рис. 8.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины обладают следующими свойствами:

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y], \quad M[\tilde{X}] = 0,$$

$$M[\alpha] = \alpha, \quad M[\alpha X] = \alpha M[X], \quad \alpha = const.$$

$$D[\alpha] = 0, \quad D[\alpha X] = \alpha^2 D[X]$$

Используя эти свойства, любую случайную величину X можно привести к стандартному виду, проведя ее центрирование $\tilde{X} = X - m_x$ и нормирование $\tilde{X}^\circ = \tilde{X} / \sigma_x = (X - m_x) / \sigma_x$. При этом $m_{\tilde{X}^\circ} = m_{\tilde{X}} / \sigma_x = 0$, $\sigma_{\tilde{X}^\circ} = 1$.

В качестве примеров приведем некоторые случайные величины, которые достаточно часто применяются для описания случайных явлений.

- Равномерная СВ $X = Rn(a, b)$:

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}; F_x(x) = \frac{x-a}{b-a}; \quad m_x = \frac{a+b}{2}; D_x = \frac{(b-a)^2}{12};$$

- Показательная СВ $X = E(\lambda)$:

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}; F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}; \quad m_x = \frac{1}{\lambda}; D_x = \frac{1}{\lambda^2};$$

- Релеевская СВ $X=Re(\sigma)$:

$$f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-0.5(x/\sigma)^2}; F_x(x) = 1 - e^{-0.5(x/\sigma)^2}; m_x = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; D_x = \sigma^2(2 - \pi/2)$$

и ряд других величин [133], но самой известной и широко используемой является нормальная случайная величина $X=N(m, \sigma)$:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}; F_x(x) = 0.5 + \hat{O}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right); m_x = m; D_x = \sigma^2,$$

где $\hat{O}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta$ - функция Лапласа (интеграл вероятностей). Уникальность нормальной величины состоит в том, что согласно центральной теореме закона больших чисел чем сложнее случайная величина, чем больше случайных факторов влияет на ее значение, тем ближе она к нормальной величине [131].

Когда в опыте по наблюдению за случайным явлением наблюдаются сразу две или несколько случайных величин, то оказывается недостаточно знать распределение и характеристики каждой наблюдаемой СВ. Дело в том, что случайные величины могут быть полностью независимыми или статистически зависимыми. *Статистическая зависимость* случайных величин имеет место, когда распределение одной случайной величины зависит от того, какие значения принимает другая величина.

Пусть имеются две случайные величины X_1 и X_2 со своими распределениями, но они статистически зависимы. Тогда их распределения могут быть описаны через функции совместного распределения или функции условного распределения $f_{x_1}(x_1|x_2), f_{x_2}(x_2|x_1)$. В качестве числовой характеристики степени зависимости случайных величин вводится корреляционный момент:

$$K_{12} = \text{cov}(X_1, X_2) = M[\tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_2] = M[X_1 \cdot X_2] - M[X_1] \cdot M[X_2].$$

Для его вычисления необходимо знать совместное распределение СВ, но известно, что ковариационный момент обладает свойствами:

- если X_1 и X_2 - независимые, то $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$
- если X_1 и X_2 - линейно зависимые, то $\text{cov}(X_1, X_2) = \sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}$
- если $\text{cov}(X_1, X_1) = D_{x_1}$, $\text{cov}(X_2, X_2) = D_{x_2}$, то

$$M[X_1 \cdot X_2] = m_{x_1} \cdot m_{x_2} + \text{cov}(X_1, X_2),$$

$$D[X_1 + X_2] = D_{x_1} + D_{x_2} + 2\sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \text{cov}(X_1, X_2).$$

Вводится безразмерная нормированная ковариация (коэффициент корреляции):

$$R_{12} = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}},$$

причем для него всегда выполняется $-1 \leq R_{12} \leq 1$. Если в опыте одновременно наблюдается несколько случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , то вводятся симметричные матрицы ковариационных моментов K_{ij} или коэффициентов корреляции R_{ij} :

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}; \quad R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

Для вычисления характеристик случайных величин необходимо знать их законы распределения, а для вычисления ковариаций еще и совместные распределения, что как отмечалось выше сложно, а то и избыточно.

Для оценки этих теоретических характеристик можно воспользоваться *статистическим* набором наблюдательных данных за этой величиной или несколькими величинами. Эти наблюдения, объединяются в *выборку* опреде-

ленного объема n :

$$x_V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i; i = \overline{1, n}\}.$$

Выборка должна иметь достаточный объем для получения надежных оценок характеристик случайной величины и не искажать пропорции самой величины, что возможно, например, при случайном отборе наблюдений (измерений). По выборке можно построить ее основные характеристики (моменты), такие как:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ - выборочное среднее,}$$

$$\bar{D}_x = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ - выборочная дисперсия,}$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\bar{D}_x} \text{ - выборочное СКО.}$$

При одновременном наблюдении за двумя и более случайными величинами получаются многофакторные выборки $x_V = \{x_{i,j}; j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}\}$, по которым можно построить выборочные ковариации k_{jk} и коэффициенты корреляции r_{jk} :

$$k_{jk} = \overline{x_j \cdot x_k} - \bar{x}_j \cdot \bar{x}_k; \quad r_{jk} = \frac{\overline{x_j \cdot x_k} - \bar{x}_j \cdot \bar{x}_k}{\bar{\sigma}_{x_j} \cdot \bar{\sigma}_{x_k}}, \text{ где } \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad \overline{x_j \cdot x_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji} \cdot x_{ki}.$$

Построенные выборочные характеристики являются случайными величинами, так как получены по результату случайного выбора наблюдений. Это серьезно отличает их от их теоретических аналогов математического ожидания m_x , дисперсии D_x и др. характеристик, являющихся постоянными величинами. Вопрос об их близости, то есть о качестве оценок $m_x \approx \bar{x}$, $D_x \approx \bar{D}_x$, $R_{12} \approx \bar{R}_{12}$ и других, подробно рассматривается в теории статистических оценок.

Здесь только отметим, что величина

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \bar{D}_x$$

называется несмещенной (исправленной) дисперсией, а величина S_x несмещенным СКО, или *стандартом* выборки. Ее введение связано с тем, что именно ее математическое ожидание совпадает с теоретической дисперсией $M[S_x^2] = D_x$, поэтому оценка $D_x \approx S_x^2$ является несмещенной, как и оценка $m_x \approx \bar{x}$, и именно они будут использоваться далее в статистических расчетах.

8.2. Случайные процессы в анализе вибрации

Наблюдая за случайной величиной, мы предполагали ее неизменность при наблюдениях в различные моменты времени. Если случайное явление таково, что его характеристики изменяются с течением времени, то говорят о случайном процессе. Если наблюдается случайный процесс $X(t)$, то в каждый момент $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ мы наблюдаем случайные величины $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ со своими распределениями и числовыми характеристиками. При наблюдении за процессом в целом мы получим его реализацию в виде некоторой неслучайной функции $x(t)$. Таким образом, временным срезом (сечением) случайного процесса является случайная величина, а его реализациями - набор неслучайных функций [119]. Случайный процесс и его связь с мгновенными случайными величинами и неслучайными реализациями иллюстрируется на рис.8.2.

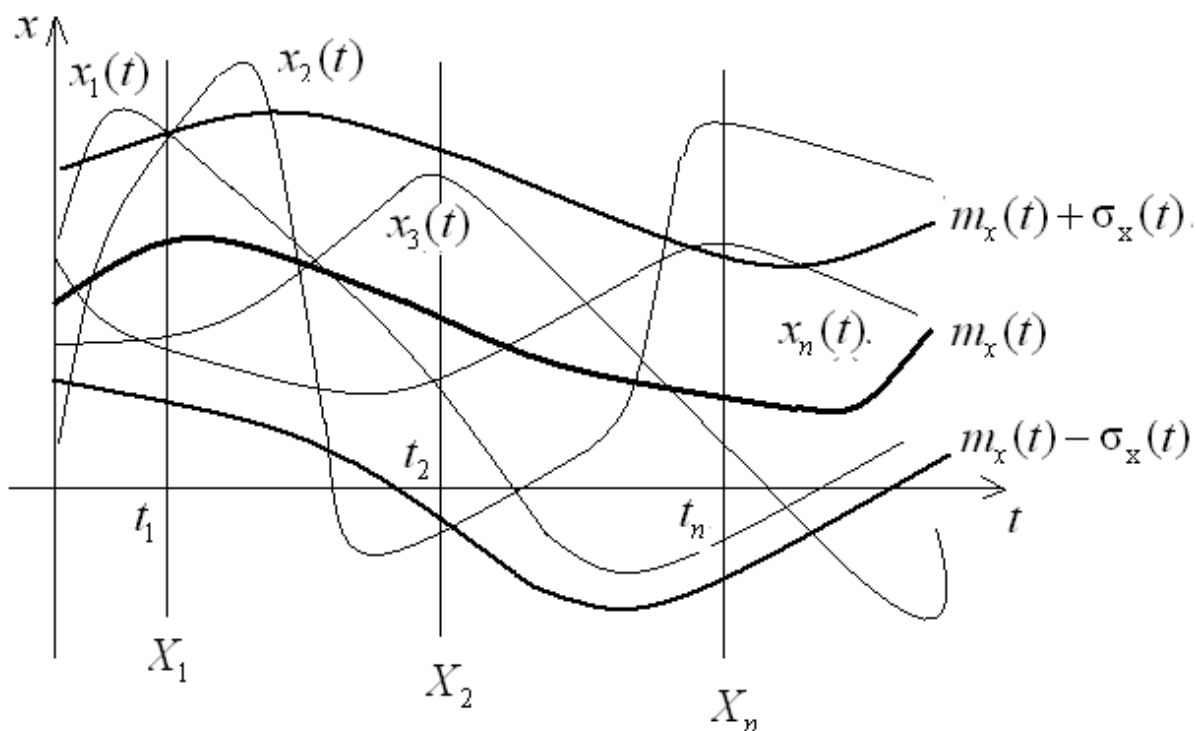


Рис.8.2. Иллюстрация случайного процесса, его реализаций $x_i(t)$ и сечений X_j в моменты t_j

Закон распределения для случайного процесса $X(t)$ может быть описан через функции распределения и плотности распределения:

$$F_x(x, t) = P(X(t) < x) \quad \text{и} \quad f_x(x, t) = \frac{\partial F_x}{\partial x} \geq 0.$$

Числовые же характеристики случайного процесса являются неслучайными функциями времени:

$$M[X(t)] = m_x(t) = \int_{\Omega_x} x \cdot f_x(x, t) dx; \quad M[X^2(t)] = m_{x^2}(t) = \int_{\Omega_x} x^2 \cdot f_x(x, t) dx,$$

$$D[X(t)] = D_x(t) = \int_{\Omega_x} (x - m_x(t))^2 \cdot f_x(x, t) dx; \quad D_x(t) = m_{x^2}(t) - m_x^2(t),$$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Их смысловое значение аналогично значениям характеристик случайной величины и иллюстрируется на рис.8.2.

Случайный процесс помимо введенных функций характеризуется корреляционной функцией, которая показывает корреляционную зависимость между временными сечениями случайного процесса:

$$K_x(t, t') = \text{cov}(X(t), X(t')) = M[\tilde{X}(t) \cdot \tilde{X}(t')], \quad R_x(t, t') = K_x(t, t') / \sigma_x(t) \cdot \sigma_x(t').$$

Здесь $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ - центрированный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, а $R(t, t')$ - нормированная корреляционная функция. Корреляционные функции имеют следующие важные свойства:

$$K_x(t, t) = D_x(t), \quad K_x(t, t') = K_x(t', t), \quad R_x(t, t) = 1, \quad -1 \leq R_x(t, t') \leq 1.$$

Смысл корреляционной функции иллюстрирует рис. 8.3, на котором изображены процессы с высокой корреляцией и с малой корреляцией. Видим, что при примерно одинаковом математическом ожидании и приблизительно равной дисперсии характер случайных процессов резко отличается.

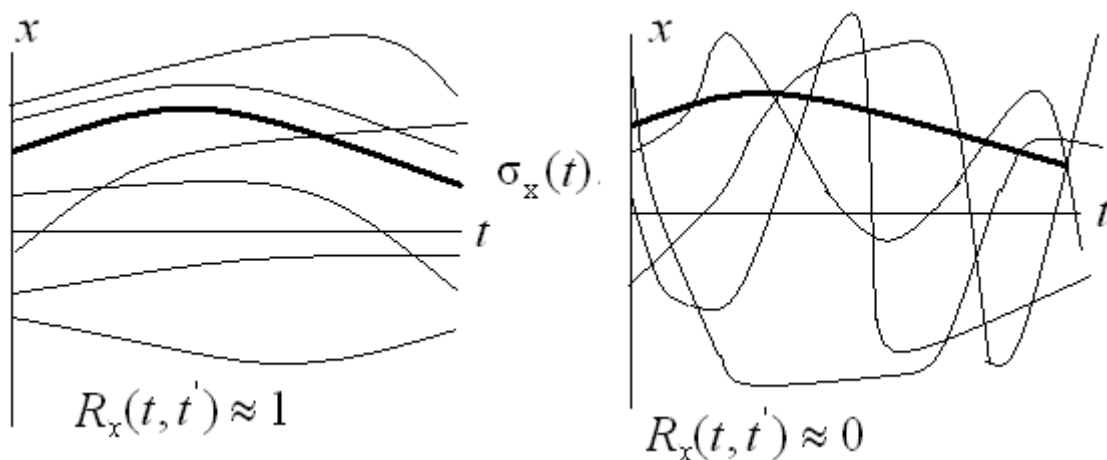


Рис.8.3. Иллюстрация случайных процессов с различными корреляционными функциями

Мы рассматриваем случайный процесс с непрерывными состояниями и непрерывным временем, если же процесс дискретен по времени, то он описывается системой случайных величин $X(t_j)$, а вместо корреляционной функции рассматривается корреляционная матрица: $K_{jk} = \text{cov}(X(t_j), X(t_k))$.

Если процесс наблюдается только в некоторые дискретные моменты, то имеется статистическая выборка $x_v = \{t_j, x_{i,j}; j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}\}$, по которой может быть построена выборочная корреляционная матрица k_{jk} или r_{jk} .

Рассмотрим примеры случайных процессов, параметрами которых являются нормальная случайная величина $X=N(m, \sigma)$ и константы $m, \sigma, \alpha, \omega$. Такие процессы будем называть *элементарными случайными процессами* (ЭСП). Вычислим характеристики этих процессов, используя свойства математического ожидания и дисперсии [119]. Рассматриваемые процессы приведены на рис.8.4.

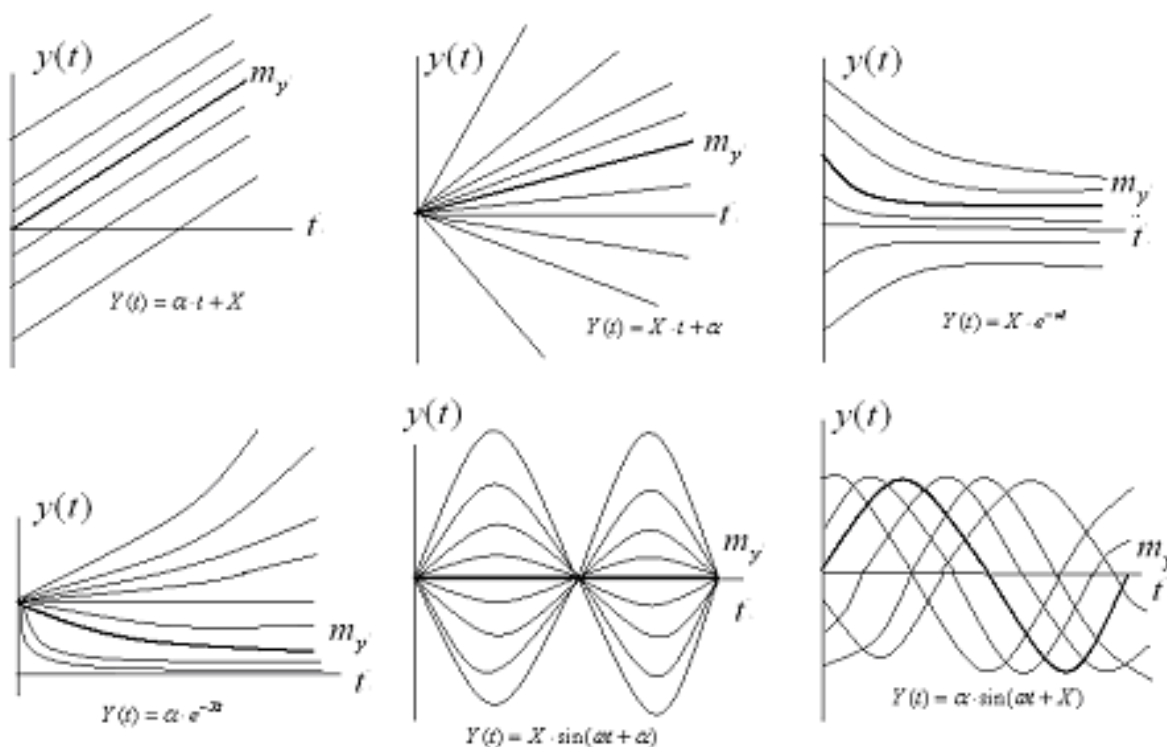


Рис.8.4. Элементарные случайные процессы с $X=N(m, \sigma)$, $\alpha, \omega = const$

Пример 1. ЭСП $Y(t) = \alpha \cdot t + X$ линейный процесс со случайным началом.

$$m_y = M[Y(t)] = \alpha \cdot t + m, \quad D_y = D[Y(t)] = D_x = \sigma^2,$$

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = (X - m_x) = \tilde{X},$$

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[\tilde{X} \cdot \tilde{X}'] = \hat{E}_\sigma(t, t'), \quad R_y(t, t') = K_y(t, t') / (\sigma(t)\sigma(t')) = 1.$$

Пример 2. ЭСП $Y(t) = X \cdot t + \alpha$ линейный процесс со случайным наклоном

$$m_y = M[Y(t)] = M[X] \cdot t + \alpha = m \cdot t + \alpha, \quad D_y = D[Y(t)] = D_x \cdot t^2 = \sigma^2 t^2,$$

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = (X - m_x)t = \tilde{X}t,$$

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[\tilde{X}t \cdot \tilde{X}t'] = \sigma^2 t \cdot t', \quad R_y(t, t') = K_y(t, t') / (\sigma(t)\sigma(t')) = 1.$$

Пример 3. ЭСП $Y(t) = X \cdot e^{-\omega t}$ - затухание со случайным началом.

$$m_y = M[Y(t)] = M[X] \cdot e^{-\omega t} = m \cdot e^{-\omega t}, \quad D_y = D[Y(t)] = D_x \cdot (e^{-\omega t})^2 = \sigma^2 e^{-2\omega t},$$

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[\tilde{X}e^{-\omega t} \cdot \tilde{X}e^{-\omega t'}] = \sigma^2 e^{-\omega(t+t')}, \quad R_y(t, t') = K_y(t, t') / (\sigma(t)\sigma(t')) = 1.$$

Пример 4. ЭСП $Y(t) = X \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ - гармонический процесс со случайной амплитудой.

$$m_y = M[Y(t)] = m \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad D_y = D[Y(t)] = \sigma^2 \cdot \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = (X - m_x) \sin(\omega t + \alpha) = \tilde{X} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[\tilde{X}t \cdot \tilde{X}t'] = \sigma^2 \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t' + \alpha), \quad R_y(t, t') = 1.$$

Пример 5. ЭСП $Y(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t - X)$ гармонический процесс со случайной фазой. Так как $Y(t) = \alpha \cdot (\cos \omega t \cos X + \sin \omega t \sin X)$ и:

$$M[\cos(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos X dX = 0, \quad M[\sin(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin X dX = 0, \quad M[\cos(X) \sin(X)] = 0,$$

$$D[\cos(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 X dX = \frac{1}{2}, \quad D[\sin(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 X dX = \frac{1}{2}$$

$$\text{то: } m_y = M[Y(t)] = 0, \quad D_y = D[Y(t)] = \sigma^2 / 2$$

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[\tilde{X}t \cdot \tilde{X}t'] = \sigma^2 \cos(t - t') / 2.$$

Если случайный процесс проходит однородно во времени и инвариантен к сдвигу по времени, то его называют *стационарным*. Например, такие процессы, как входное напряжение прибора от сети, шум от автомагистрали, давление газа в трубопроводе и другие процессы не зависят от момента времени.

Для стационарного процесса $X(t)$ выполняется следующее:

$$f_X(t, x) = f_X(t', x) = f_X(t'', x) = \dots = f_X(x),$$

$$M[X(t)] = \int_{\Omega_x} x \cdot f_X(x) dx = m_x = \text{const}, \quad D[X(t)] = \int_{\Omega_x} (x - m_x)^2 \cdot f_X(x) dx = D_x = \text{const}.$$

Корреляционная функция при этом тоже не зависит от моментов сечений t, t' , а зависит от интервала между ними $\tau = t - t'$:

$$K_x(t, t') = k_x(\tau), \quad D_x = K_x(t, t) = k_x(0) \geq 0, \quad k_x(\tau) = k_x(-\tau), \quad |k_x(\tau)| \leq k_x(0).$$

Нормированная корреляционная функция определяется так:

$$r_x(\tau) = k_x(\tau) / D_x = k_x(\tau) / k_x(0), \quad r_x(\tau) = r_x(-\tau), \quad r_x(0) = 1, \quad |r_x(\tau)| \leq 1.$$

Если $r_x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$, то говорят, что стационарный процесс *эргодичный*. Свойство эргодичности состоит в том, что любая реализация случайного процесса в течение времени проходит все возможные состояния, то есть является полной (возможно, очень продолжительной) представительницей всего случайного процесса.

Рассмотрим примеры стационарных процессов.

Пример 6. Элементарный случайный гармонический процесс:

$$Y(t) = U \cdot \cos \omega t + V \cdot \sin \omega t, \quad \text{где } U, V = N(0, \sigma), \quad K_{UV} = 0, \quad \omega = \text{const}.$$

$$m_y = M[Y(t)] = M[U] \cdot \cos \omega t + M[V] \cdot \sin \omega t = 0,$$

$$D_y = D[Y(t)] = D_u \cdot \cos^2(\omega t) + D_v \cdot \sin^2(\omega t) = \sigma^2,$$

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[U^2] \cos(\omega t) \cos(\omega t') + M[V^2] \sin(\omega t) \sin(\omega t') = \sigma^2 \cos(t - t'),$$

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = Y(t), \quad R_y(t, t') = \cos(t - t') = \cos(\tau).$$

Процесс является стационарным, но не эргодическим.

Пример 7. Случайная телеграфная волна: рассматриваем случайный процесс $Y(t, \lambda)$, состоящий из потока переключений с интенсивностью λ (переключений за единицу времени). Интервал времени между переключениями Δ , есть

случайная величина, распределенная по показательному закону $\lambda e^{-\lambda t}$ (простейший поток). При каждом переключении, независимо от других переключений, процесс $Y(t, \lambda)$ принимает значение случайной величины X с МО m_x и СКО σ_x и остается постоянно такой до следующего переключения. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ - случайные времена переключений, а $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - независимые случайные величины, реализуемые при переключении (рис.8.5).

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[X_i] = m_x = \text{const}, \quad D_y(t) = D[Y(t)] = D[X_i] = \sigma_x^2 = \text{const}.$$

Пусть t, t' - два произвольных сечения процесса $Y(t)$ с интервалом $\tau = t' - t$, между ними с вероятностью $e^{-\lambda \tau}$ нет переключений и с вероятностью $1 - e^{-\lambda \tau}$ есть хотя бы одно переключение. Тогда корреляционная функция:

$$K_y(t, t') = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t)] \cdot e^{-\lambda \tau} + M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] \cdot (1 - e^{-\lambda \tau}) = \sigma_x^2 e^{-\lambda |\tau|} = k_x(\tau, \lambda).$$

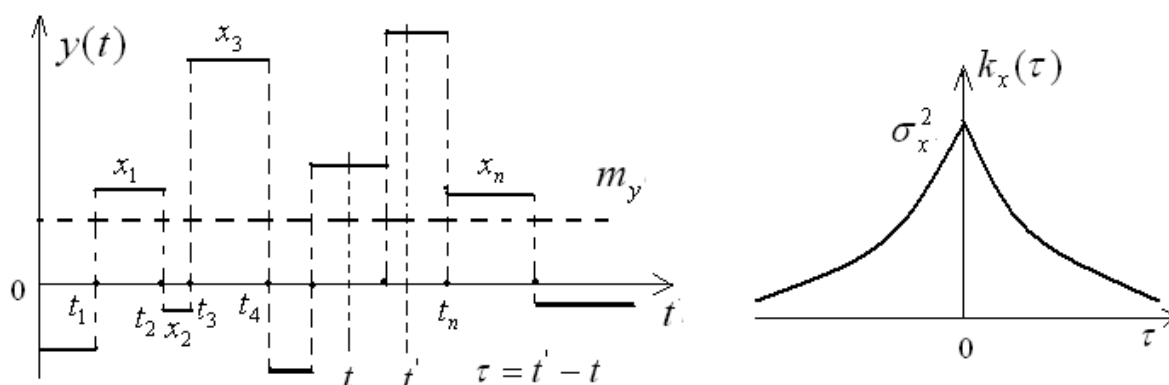


Рис.8.5. Независимые импульсы телеграфной волны и ее корреляционная функция

Таким образом, при независимости различных временных сечений ($M[\tilde{Y}(t) \cdot \tilde{Y}(t')] = 0$) случайная величина $Y(t)$ является стационарной и эргодической.

Пример 8. Стационарный белый шум: рассмотрим поведение телеграфной волны с ростом интенсивности переключений $\lambda \rightarrow \infty$, но и при условии, что дисперсия σ_x^2 так же неограниченно растет, причем так что $\sigma_x^2 / \lambda = c$. Тогда

$Z(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Y(t)$ есть случайный процесс со следующими характеристиками:

$$m_z(t) = M[Z(t)] = m_y = \text{const}, \quad D_z(t) = D[Z(t)] = \sigma_x^2 = \text{const},$$

$$k_z(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x^2}{\lambda} \lambda e^{-\lambda|\tau|} = c \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda e^{-\lambda|\tau|} = 2c \cdot \delta(\tau).$$

Здесь $\delta(\tau)$ - дельта - функция Дирака со следующими свойствами:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \infty & \tau \rightarrow 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1,$$

а так же учтено, что $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = 1$.

Таким образом, белый шум представляется случайным процессом с высокоинтенсивным переключением (реализацией) значений случайной величины с очень большой дисперсией, является стационарным и эргодичным. Величина c называется интенсивностью шума. Белый шум с нулевым мат. ожиданием часто рассматривается как модель различного рода помех.

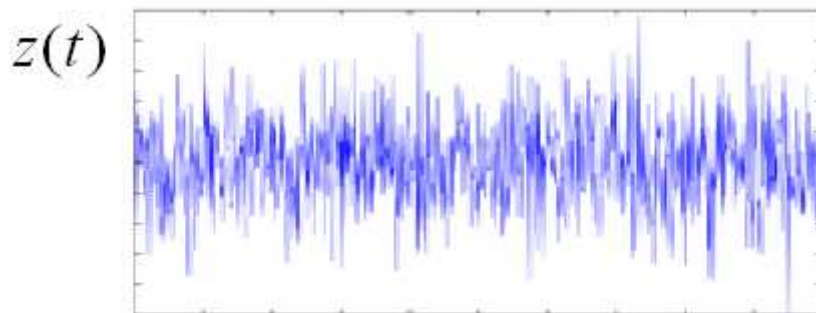


Рис.8.6. Возможная реализация белого шума

8.3. Каноническое представление случайных процессов и их спектральное разложение

Неслучайную (регулярную), ограниченную и периодическую с периодом $2T$, как известно, можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям кратных частот, причем единственным способом:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_k = \omega \cdot k,$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t) \cos \omega_k t dx, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t) \sin \omega_k t dx,$$

а с учетом формул Эйлера $\sin \omega_k t = -0.5i(e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t})$ и $\cos \omega_k t = 0.5(e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t})$,

где $i = \sqrt{-1}$ - символ мнимой единицы, получим комплексное разложение:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\omega_k t} dx, \quad \text{или } c_{\pm k} = 0.5(a_k \pm ib_k).$$

Пугачев В.С. доказал [118], что любой случайный процесс может быть представлен в виде разложения по элементарным случайным функциям базиса:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t),$$

$$K_x(t, t') = M\left[\sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} V_r \varphi_r(t')\right] = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k(t) \cdot \varphi_k(t'), \quad D_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k^2(t),$$

где V_k - независимые центрированные случайные величины: $M[V_k] = 0$, $M[V_k \cdot V_l] = \delta_{kl}$, $D[V_k] = D_k$, а $\varphi_k(t)$ - неслучайные базисные функции, которые могут быть выбраны множеством различных способов.

К каноническому представлению ограниченного случайного процесс может быть применено известное преобразование Лапласа:

$\hat{X}(p) = \int_0^{\infty} X(t)e^{-pt} dt$, где $p = s + i\omega$ - комплексное число с положительной действительной частью $s > 0$, тогда образом Лапласа случайного процесса будет

$$\hat{X}(p) = \hat{X}(p) = m_x(p) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \hat{\phi}_k(p).$$

В частности, при базисе $\phi_k(t) = U_k \cos(\omega_k t) + V_k \sin(\omega_k t)$ с центрированными и независимыми случайными коэффициентами U_k, V_k ($M[U_k] = M[V_k] = 0$, $D[U_k] = D[V_k] = D_k$, $M[U_k \cdot V_l] = \delta_{kl}$) разложение будет:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos(\omega_k t) + V_k \sin(\omega_k t)).$$

При этом имеет место следующее:

$$D(X(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k = const, \quad K(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(t-t') = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(\tau) = k(\tau),$$

а его образ Лапласа будет: $\hat{X}(t) = \hat{m}_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k \frac{p}{p^2 + \omega^2} + V_k \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)$.

Это представление называется *спектральным* разложением случайного стационарного процесса. Его можно представить графически на рис.8.7, а также

в комплексном виде: $X(t) = m_x + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{W}_k e^{i\omega_k t}$, $\hat{W}_{\pm k} = 0.5(U_k \pm iV_k)$.

С другой стороны корреляционная функция стационарного процесса - функция не случайная и может быть так же разложена в ряд Фурье:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad D_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T k_x(\tau) d\tau.$$

Таким образом, видим, что дисперсии коэффициентов спектрального разложения совпадают с коэффициентами Фурье разложения корреляционной функции.

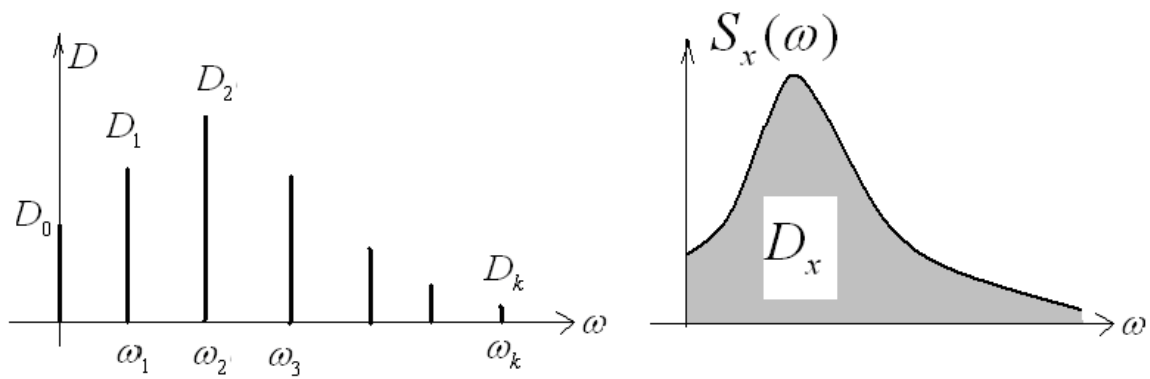


Рис.8.7. Спектральное разложение стационарного процесса

В случае не периодического процесса ($T \rightarrow \infty$) корреляционная функция четна и может быть представлена косинус - преобразованием Фурье:

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad \text{и обратно} \quad S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Величина $S_x(\omega) \geq 0$ называется *спектральной плотностью* случайного стационарного процесса. Она показывает распределение дисперсии процесса по частотам:

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad D_x(\Delta\omega) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega) d\omega \approx S_x(\omega) \Delta\omega.$$

Нормированная спектральная плотность вводится аналогично: $s_x(\omega) = S_x(\omega) / D_x$. Комплексная спектральная плотность $\hat{S}_x(\omega)$ связана с корреляционной функцией соотношениями преобразования Фурье:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad \hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

и является действительной положительной четной функцией:

$$\hat{S}_x(\omega) = \begin{cases} 0.5S_x(\omega), & \omega \geq 0 \\ -0.5S_x(\omega), & \omega < 0 \end{cases}, \quad D_x = k_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_x(\omega) d\omega.$$

Рассмотрим примеры процессов с определенными спектральными плотностями и корреляционными функциями.

Пример 9. Пусть $X_k(t) = U_k \cos(\omega_k t) + V_k \sin(\omega_k t)$ - элементарный случайный гармонический процесс, у которого $k_x(\tau) = D_k \cos(\omega_k \tau)$. Его спектральная плотность $S_{x_k}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \cos \omega \tau d\tau = D_k \cdot \delta(\omega - \omega_k)$.

Если процесс представлен суммой гармонических процессов, то:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos(\omega_k t) + V_k \sin(\omega_k t), \quad k_x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \tau), \quad S_x(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot \delta(\omega - \omega_k).$$

Пример 10. Пусть спектральная плотность процесса постоянна $S(\omega) = c$ на интервале (ω_1, ω_2) , найдем его корреляционную функцию.

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = c \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{c}{\tau} [\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau] = \frac{2c}{\tau} \left[\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right].$$

Так как $D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} c d\omega = c(\omega_2 - \omega_1)$, то $c = D_x / (\omega_2 - \omega_1)$ и в итоге:

$$k_x(\tau) = \frac{2D_x}{\tau(\omega_2 - \omega_1)} \left[\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right].$$

Пример 11. Рассмотрим случайную телеграфную волну с корреляционной функцией $k_x(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|}$. Найдем ее комплексную спектральную плотность (интеграл так считать проще):

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\lambda|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \left(\frac{1}{2\lambda - i\omega} - \frac{1}{-2\lambda - i\omega} \right) = \frac{D_x}{\pi} \frac{2\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2} = 2S_x(\omega).$$

Пример 12. Рассмотрим стационарный белый шум с $k_x(\tau) = 2c \cdot \delta(\tau)$.

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{c}{\pi} = const,$$

т.е. стационарный белый шум представляет собой случайные некоррелированные колебания на всех частотах с постоянной дисперсией.

8.4. Преобразование случайных процессов в линейных системах

Случайные процессы, наблюдаемые в технических системах, и в том числе виброзащитных, обычно рассматриваются как входные или выходные для некоторых технических преобразующих их устройств. Например, вибрационный сигнал (механический, акустический, электромагнитный или комбинированный) совместно с некоторой случайной помехой воздействует на устройство, выполняющее определенные функциональные задачи. Главный вопрос пользователя, проектировщика и эксперта этого устройства состоит в том, как отреагирует устройство на такое внешнее воздействие и способно ли оно выполнять свои функции при подобных воздействиях. Устройство будем рассматривать как преобразователь входного сигнала, действующего на него, в выходной сигнал его функционирования (рис.8.8):

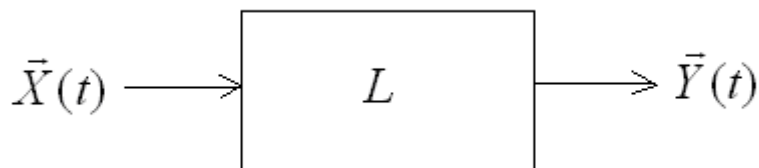


Рис.8.8.Схема преобразователя входных сигналов в выходные

Здесь один или несколько случайных сигналов объединяются в случайные вектора, входной $\vec{X}(t)$ и выходной $\vec{Y}(t)$. Среди различного рода преобразователей мы будем рассматривать один, но весьма обширный и важный класс линейных преобразователей $\vec{Y}(t) = L[\vec{X}(t)]$. Линейный преобразователь (оператор) обладает определенными свойствами:

$$L[X_1 \pm X_2] = L[X_1] \pm L[X_2], \quad L[\alpha X] = \alpha L[X], \quad \alpha = const.$$

Каким образом нужно понимать операторы, и каким образом преобразуются характеристики входного процесса в характеристики выходного процесса? Для ответа на этот вопрос вспомним, что согласно теореме Пугачева любой случайный процесс может быть представлен в каноническом виде линейной

комбинации системы регулярных функций времени с коэффициентами – случайными величинами:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t).$$

$$M[V_k] = 0, \quad K_{kl} = M[V_k \cdot V_l] = \delta_{kl}, \quad D[V_k] = D_k,$$

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k(t) \cdot \varphi_k(t'), \quad D_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k^2(t).$$

Тогда оператор линейного преобразования дает выходной процесс $Y(t)$:

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \psi_k(t), \quad m_y(t) = L[m_x(t)], \quad \psi_k(t) = L[\varphi_k(t)]$$

$$K_y(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \psi_k(t) \cdot \psi_k(t') = L_t[L_{t'}[K_x(t, t')]].$$

Рассмотрим примеры основных линейных операторов:

1. Умножитель (усилитель или гаситель) $\vec{Y}(t) = c\vec{X}(t)$, $c = const$.

$$m_y(t) = c \cdot m_x(t), \quad K_y(t, t') = c^2 \cdot K_x(t, t'), \quad D_y = c^2 \cdot D_x$$

2. Сумматор $\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots\}$, $Y(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots$

$$m_y(t) = c_1 \cdot m_{x1}(t) + c_2 \cdot m_{x2}(t) + \dots, \quad K_y(t, t') = \sum_{k=1}^n c_k \left(\sum_{l=1}^n c_l \cdot K_x(t, t') \right), \quad D_y(t) = \sum_{k=1}^n c_k^2 D_{xk}(t)$$

3. Дифференцирующий оператор (спидометр) $\vec{Y}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{X}(t)) = \dot{\vec{X}}(t)$

$$m_y(t) = \dot{m}_x(t), \quad K_y(t, t') = L_t[L_{t'}[K_x(t, t')]] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t'), \quad D_y(t) = K_y(t, t).$$

4. Интегратор (накопитель во времени) $\bar{Y}(t) = \int_0^t \bar{X}(\tau) d\tau$.

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\zeta) d\zeta, \quad K_y(t, t') = \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta'} K_x(\zeta, \zeta') d\zeta' \right) d\zeta, \quad D_y(t) = K_y(t, t).$$

При стационарных процессах выше приведенные формулы существенно упрощаются, так как $t' = t + \tau$, $K_x(\tau)$, $K_y(\tau)$.

Возможны различные линейные комбинации указанных операторов, например гармонический осциллятор, уже нам известный по главе 1.

Рассмотрим анализ *линейного гармонического* оператора при воздействии *стационарного случайного* сигнала $X(t)$. Оператор преобразования для осциллятора будет:

$$\ddot{Y} + a_1 \dot{Y} + a_0 Y = X(t),$$

где $Y(t)$ - случайная координата (смещение, угол, электрический заряд, ...) осциллятора, a_1, a_0 - постоянные константы трения и жесткости в осцилляторе соответственно. Считаем, что начальных возмущений в осцилляторе нет. В этом случае образ Лапласа для осциллятора будет:

$$p^2 \hat{Y} + a_1 p \hat{Y} + a_0 \hat{Y} = \hat{X}(t) \quad \text{или} \quad \hat{Y}(p) = G(p) \cdot \hat{X}(p),$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{G_1}{p - p_1} + \frac{G_2}{p - p_2}.$$

При постоянном сигнале $X(t) = c$, $\hat{X}(p) = c/p$, $Y(t) = c \cdot G(0)$, а при гармоническом $X(t) = e^{i\omega t}$, $\hat{X}(p) = 1/(p - i\omega)$, $Y(t) = G(i\omega) \cdot e^{i\omega t}$.

Функция $G(p)$ - передаточная функция с полюсами p_1, p_2 , а $G(i\omega)$ - частотная функция осциллятора. Пусть $g(t)$ - оригинал для образа $G(p)$, тогда решение будет:

$$Y(t) = \int_0^t g(\tau)X(t-\tau)d\tau, \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} G(p)e^{pt} dp = G_1 e^{p_1 t} + G_2 e^{p_2 t}.$$

Пусть для входного стационарного сигнала известно математическое ожидание m_x , корреляционная функция $k_x(\tau)$ или его спектральная плотность $S_x(\omega)$. Вычислим эти же характеристики для выходного сигнала на следующем примере.

Пример 13. Пусть входной сигнал случайный полигармонический

$$X(t) = m_x + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot \cos \omega_k t + V_k \cdot \sin \omega_k t = m_x + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \hat{W}_k e^{i\omega_k t} \right\}, \quad k_y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_{xk} e^{i\omega_k \tau}$$

и тогда $Y(t) = m_y + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \hat{W}_k G(i\omega_k) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad m_y = m_x G(0), \quad k_y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_{xk} |G(i\omega_k)|^2 e^{i\omega_k \tau}.$

Величина $|G(i\omega_k)|^2$ называется амплитудной характеристикой осциллятора, в зависимости от ее значения дисперсия выходного сигнала может на различных частотах усиливаться $|G(i\omega_k)|^2 > 1$ или гаситься $|G(i\omega_k)|^2 < 1$.

Если входной стационарный сигнал не гармонический, то его корреляционная функция определяется не спектром дисперсий по частотам, а спектральной плотностью $\hat{S}_x(\omega)$, тогда:

$$m_y = m_x G(0), \quad \hat{S}_y = |G(i\omega_k)|^2 \hat{S}_x, \quad k_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_y(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \quad D_y = k_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_y(\omega) d\omega.$$

Пример 14. Пусть входной стационарный сигнал - белый шум интенсивности c , для которого $m_x = 0$, $k_x(\tau) = c\delta(\tau)$ и $\hat{S}_x(\omega) = \frac{c}{2\pi}$, тогда:

$$m_y = 0, \quad \hat{S}_y = |G(i\omega_k)|^2 \frac{c}{2\pi}, \quad k_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_y(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega$$

8.5. Статистическая модель линейной системы по наблюдениям входных и выходных случайных процессов

Задачей статистического анализа данных, получаемых на измерительном стенде, является анализ и установление зависимостей между измеряемыми данными и параметрами исследуемого устройства (гидроопора), которое обычно представляет сложную многофазную и многорезонансную систему [120]. Исследование взаимосвязей входных и выходных сигналов экспериментальными методами позволяет получить данные по временным и частотным отсчетам. Для анализа и обобщения таких данных, выявления связей между сигналами и определения их значимости используются методы статистического анализа [132].

Учитывая структуру измерительного комплекса и технологию проведения измерений, все полученные данные об амплитудах гармонических составляющих сигналов объединим в пространственно - временной куб данных со следующими условно обозначенными ребрами:

- *диапазон* объединяет все измерения, получаемые при фиксированной частоте f_0 возбуждения вибростенда.

- *канал* объединяет данные временных отсчетов, получаемые в одном частотном канале в различные моменты времени измерения. Анализатор спектра имеет $L = 24$ гармонических составляющих, не зависящих от частоты основной гармоники вибростенда:

$$f_k \in \{0.8; 1.25; 1.6; 2; 2.5; 3.15; 4; 5; 6.3; 8; 10; 12.5; 16; 20; 25; 31.5; 40; 50; 63; 80; 100; 125; 160\} \text{Гц.}$$

Канал представляет собой вектор временных отсчетов значений амплитуд гармонических составляющих спектра входных и выходных сигналов.

- *шина* объединяет данные в каналах получаемые в один момент времени измерения и представляет собой вектор 24-х амплитуд во всех диапазонах. Количество таких измерений определяется необходимостью и возможностью измеряющего субъекта (в нашем случае мы имеем 5 измерений).

Кроме того, все данные поделим на два вида - **Входные** и **Выходные** по отношению к испытуемым на стенде изделиям (гидроопорам).

Если не рассматривать междиазонную обработку данных и оставабсья в рамках определенного варианта диапазона по частоте возбуждения вибростенда, то слой куба данных в фиксированном варианте возбуждения вибростенда будет выглядеть следующим образом:

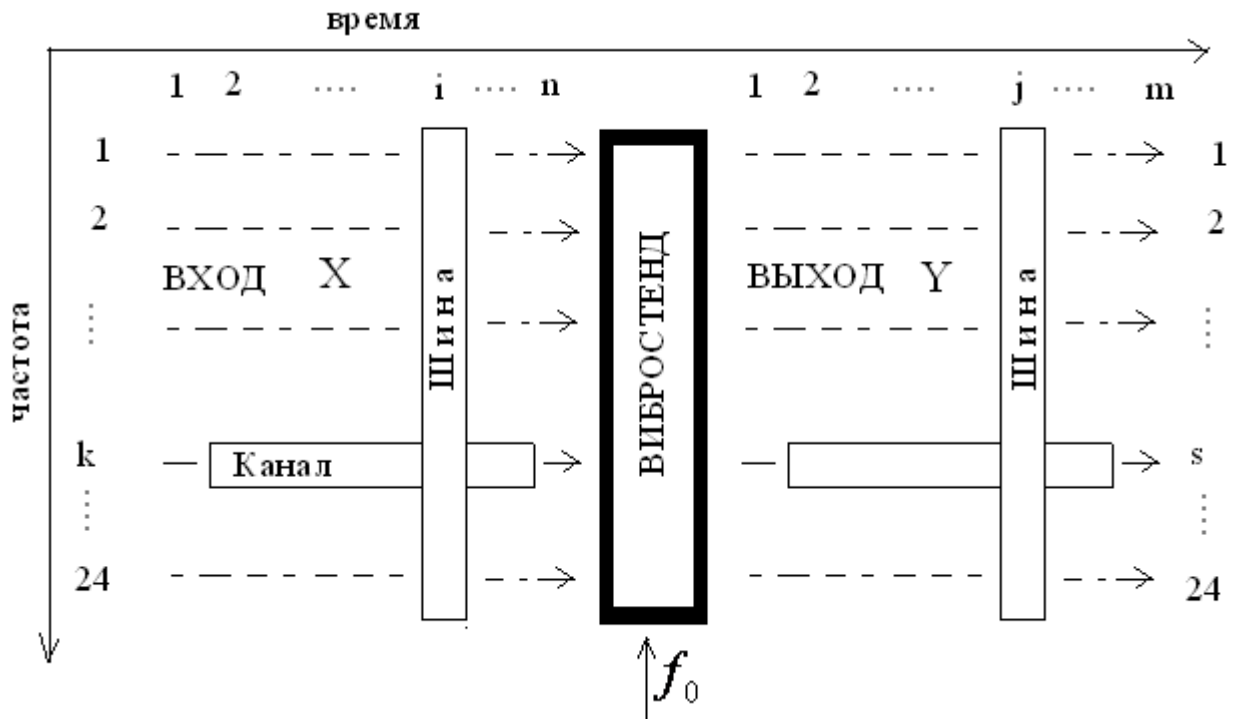


Рис. 8.9. Структура входных и выходных данных измерительного комплекса

Входная и выходная матрицы измерения $X = (x_{k,i})$ и $Y = (y_{k,i})$ представляют собой измеренные в децибелах амплитуды вибрации и вместе с основными числовыми характеристиками [134] выглядят следующим образом:

S_{x1}^t	D_{x1}^t	\bar{x}_1^t	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	\cdot	\cdot	\cdot	$x_{n,1}$
S_{x2}^t	D_{x2}^t	\bar{x}_2^t	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	\cdot	\cdot	\cdot	$x_{n,2}$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
S_{xk}^t	D_{xk}^t	\bar{x}_k^t	\cdot	\cdot	$(x_{k,i})$	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
S_{x24}^t	D_{x24}^t	\bar{x}_{24}^t	$x_{1,24}$	$x_{2,24}$	\cdot	\cdot	\cdot	$x_{n,24}$
			\bar{x}_1^f	\bar{x}_2^f	\cdot	\bar{x}_i^f	\cdot	\bar{x}_n^f
			D_{x1}^f	D_{x2}^f	\cdot	D_n^f	\cdot	D_m^f
			S_{x1}^f	S_{x2}^f	\cdot	S_n^f	\cdot	S_m^f

Здесь

$X = (x_{k,i})$ - входные частотно-временные измерения, $k = \overline{1,24}$, $i = \overline{1,n}$,

$\bar{x}_k^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{k,i}$ - среднее значение в k - канале по времени,

$D_{xk}^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{k,i} - \bar{x}_k^t)^2$ - дисперсия в k - канале по времени,

$S_{xk}^t = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{xk}^t}$ - стандартное отклонение в k - канале по времени.

Аналогичные величины вычисляются в шинах

$\bar{x}_i^f = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_{k,i}$ - среднее значение в i - шине по частоте,

$D_{xi}^f = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (x_{k,i} - \bar{x}_i^f)^2$ - дисперсия в i - шине по частоте,

$S_{xi}^f = \sqrt{\frac{L}{L-1} D_{xi}^f}$ - стандартное отклонение в i - шине по частоте.

Так же и для выходных данных строится матрица измерений $Y = (y_{k,i})$ и ее основные статистические характеристики.

Главной задачей статистического анализа [130] является установление связи между входными X и выходными Y измеряемыми величинами амплитуд гармоник и определение формы такой связи в виде регрессионных функций:

$$Y_{шины}^f = F(f_0, X_{шины}^f), Y_{канал}^f = \varphi(f_0, X_{каналы}^f).$$

Задачей корреляционного анализа [130] является установление связи между измерениями в каналах и в шинах на входе и выходе вибростенда, определение их жесткости и значимости.

Для целей корреляционного анализа вычисляется корреляционная матрица между шинами:

$$R_{ij}^f = \frac{\overline{x_i^f \cdot y_j^f} - \overline{x_i^f} \cdot \overline{y_j^f}}{\sqrt{D_{xi}^f D_{yj}^f}},$$

здесь $\overline{x_i^f \cdot y_j^f} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_{ri} \cdot y_{rj}$ - среднее произведение шин. Каждый элемент этой матрицы есть парный коэффициент корреляции между входной i - шиной и выходной j - шиной. Для определения значимости каждого коэффициента вычисляется наблюдаемая и критическая статистика Стьюдента:

$$St_{ij}^f = R_{ij}^f \sqrt{\frac{n-L-1}{1-(R_{ij}^f)^2}}, \quad St_{крит}^f = \text{СТЬЮДЕНТОБР}(\alpha, n-L-1).$$

где α - уровень значимости проверяемых гипотез об отсутствии связи между шинами (допустимый риск отвергнуть существующую на самом деле связь шин). Критерий Стьюдента по уровню значимости устанавливает порог $St_{крит}^f$, превышение которого наблюдаемой статистикой St_{ij}^f говорит о значимости корреляционной связи между шинами. Жесткостью связи является отношение

$$Sz_{ij}^f = |St_{ij}^f| / St_{крит}^f,$$

которое чем больше единицы, тем более значима связь между шинами.

Для вычисления значимости и жесткости корреляционных связей необходимо, чтобы величина степеней свободы $\nu = n - L - 1 \geq 3$.

Задачей регрессионного анализа [131] является установление формы связи между коррелирующими каналами и шинами. В основу анализа ложится линейная регрессионная модель:

$$\vec{y}_j^f = b_{0j}^f + b_{1j}^f \vec{x}_1^f + b_{2j}^f \vec{x}_2^f + \dots + b_{nj}^f \vec{x}_n^f + \varepsilon_j^f.$$

Здесь $\vec{y}_j^f = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}, \dots, y_{24j})^T$ - вектор измерений выходной j - шины,

$\vec{x}_i^f = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, \dots, y_{24i})^T$ - вектора измерений входных шин,

$\vec{b}_j^f = (b_{0j}^f, b_{1j}^f, \dots, b_{ij}^f, \dots, y_{nj}^f)^T$ - вектора коэффициентов регрессии для j - шины,

$\vec{\varepsilon}_j^f = (\varepsilon_{1j}^f, \varepsilon_{2j}^f, \dots, \varepsilon_{sj}^f, \dots, \varepsilon_{24j}^f)^T$ - вектора ошибок (невязок) регрессии.

Линейная регрессия строится методом наименьших квадратов, согласно ко-

торому среднее значение вектора ошибок $\bar{\vec{\varepsilon}}_j^f = 0$, а его дисперсия $D(\vec{\varepsilon}_j^f)$ минимальна среди всех линейных зависимостей \vec{y}_j^f от \vec{x}_i^f . Согласно методу коэффициенты регрессии вычисляются как $\vec{b}_j^f = (X^N \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot \vec{y}_j^f)$, при этом вектор $\hat{\vec{y}}_j^f = (\vec{x}_i^f)^T \cdot \vec{b}_i^f$ есть объясненная часть зависимости выходной j -шины от входных шин, а регрессия $\vec{y}_j^f = \hat{\vec{y}}_j^f + \varepsilon_j^f$ представляется как сумма объясненной и необъясненной части зависимости выходной шины от входных.

Долю дисперсии объясненной части в регрессии в общей дисперсии наблюдаемого выхода называют коэффициентом детерминации для регрессии:

$$R_j^2 = D(\hat{\vec{y}}_j^f) / D(\vec{y}_j^f),$$

корень из него $R_j = \sqrt{R_j^2}$ - множественным коэффициентом корреляции, а $\bar{R} = \sum_{j=1}^m R_j$ средним коэффициентом множественной корреляции. Для проверки значимости коэффициентов детерминации вычисляется наблюдаемый вектор статистики Фишера и его критическое значение:

$$F_j = \frac{R_j^2 \cdot (n - L - 1)}{1 - R_j^2}, \quad F_{\text{крит}} = \text{ФОБР}(\alpha, n, n - L - 1).$$

Превышение наблюдаемой статистикой Фишера критического порога говорит о значимости по уровню α построенной регрессии для выходной j -шины.

Построенная значимая регрессионная модель, по сути, объясняет линейную часть преобразования спектра входного сигнала на виброопору в спектр выходного сигнала, что является характеристикой работы виброопоры. Модель может быть использована для прогноза преобразования задаваемой произвольной входной шины \vec{x}_p^f в выходную: $\hat{\vec{y}}_p^f = (\vec{x}_p^f)^T \cdot \vec{b}^f$.

Пример статистического анализа испытаний диапазона 6 Гц

Приводим спектры входных и выходных сигналов, полученные в измерениях при возбуждении вибростенда на частоте $f_0 = 6$ Гц.

Ниже в таблице приведены амплитуды входных и выходных сигналов во всех 24 - х частотных каналах. Всего проведено 5 экспериментальных серий измерений, в таблице приведена только 1 серия.

Все данные измерений образуют входную X и выходную Y матрицу измерений, которые вместе с результатами первичной статистической обработки (вычисление средних, дисперсий, среднеквадратических и стандартных отклонений) приводятся ниже.

станд. откл.	срkv. откл.	дисперс.	среднее	матрица входных измерений X [дБ]					№ каналов	f
6,5979	5,9013	34,8256	63,02	59,4	67,8	56,2	59,7	72	1	0,8
4,5642	4,0824	16,6656	60,02	57,2	62,3	57,4	56,2	67	2	1
4,3084	3,8535	14,8496	57,78	55	65,4	56,8	55,7	56	3	1,3
14,22	12,719	161,7696	85,18	60,6	85	93,7	93,6	93	4	1,6
1,695	1,516	2,2984	72,04	69,6	72,5	71,1	73,8	73,2	5	2
4,3855	3,9226	15,3864	66,36	62,8	63,7	63	71,2	71,1	6	2,5
16,645	14,888	221,6536	87,62	57,9	94,2	93,9	96,3	95,8	7	3,2
0,507	0,4534	0,2056	70,58	71,3	70,4	69,9	70,7	70,6	8	4
6,9769	6,2403	38,9416	103,18	90,7	106,3	106,4	106,2	106,3	9	5
5,5612	4,9741	24,7416	85,62	95,5	83,7	83,8	82,2	82,9	10	6,3
2,9813	2,6665	7,1104	80,64	75,9	83,7	79,9	81,5	82,2	11	8
1,8458	1,6509	2,7256	87,28	84	88,3	88,3	87,8	88	12	10
0,6301	0,5636	0,3176	85,92	84,8	86,2	86,3	86,1	86,2	13	13
7,3895	6,6094	43,684	90	76,8	92,7	93,8	93,4	93,3	14	16
4,9757	4,4504	19,8064	78,06	69,2	80	81,1	80	80	15	20
5,9804	5,349	28,612	85	74,4	86,3	87,8	88,4	88,1	16	25
8,7244	7,8033	60,892	95,5	79,9	99,1	99,8	99,3	99,4	17	32
7,1042	6,3542	40,376	89,5	76,8	93,1	92,6	92,4	92,6	18	40
6,0575	5,418	29,3544	81,66	70,9	84,4	85,5	83,7	83,8	19	50
6,3763	5,7031	32,5256	78,98	67,6	81,3	82,5	81,8	81,7	20	63
4,4121	3,9463	15,5736	80,38	72,5	82	82,7	82,3	82,4	21	80
4,0268	3,6017	12,972	85,9	78,7	87,5	87,8	87,7	87,8	22	100
3,9996	3,5774	12,7976	82,18	75,1	83,9	84,9	83,4	83,6	23	125
4,5024	4,0271	16,2176	81,92	73,9	83,9	84,6	83,5	83,7	24	160
			среднее	72,521	82,654	82,075	82,371	83,363		
			дисперс.	104,41	117,6	172,35	156,68	119,4		
			срkvоткл.	10,218	10,845	13,128	12,517	10,927		
			стандоткл.	10,438	11,078	13,41	12,787	11,162		

№ каналов	f	матрица выходных измерений Y [дБ]					среднее	дисперс.	сркв. откл.	станд. откл.
1	0,8	51,6	58,9	49,5	57,6	54,3	54,38	12,4696	3,5312	3,948
2	1	51,1	57,3	53,3	57,5	53	54,44	6,4144	2,5327	2,8316
3	1,3	52,5	56,8	52,6	52	52,5	53,28	3,1416	1,7725	1,9817
4	1,6	76,3	70,8	51,6	61,7	66,6	65,4	70,708	8,4088	9,4013
5	2	69,9	57,9	52,2	55,4	65,2	60,12	42,2776	6,5021	7,2696
6	2,5	67,2	60,4	62,1	66,7	72,4	65,76	17,8344	4,2231	4,7215
7	3,2	75,6	58,2	59,1	56,6	66,9	63,28	50,5576	7,1104	7,9497
8	4	89,2	75,1	75,9	75,4	76,5	78,42	29,2776	5,4109	6,0495
9	5	124,7	124,9	124,9	124,9	124,9	124,86	0,0064	0,08	0,0894
10	6,3	71	65,8	70,1	65,3	66,2	67,68	5,6536	2,3777	2,6584
11	8	58,8	51,9	54,5	54,5	55,2	54,98	4,9176	2,2176	2,4793
12	10	89,7	90,2	89,9	89,8	89,7	89,86	0,0344	0,1855	0,2074
13	13	76,7	77,2	77,2	77,4	77,5	77,2	0,076	0,2757	0,3082
14	16	89,4	90,1	90	90,2	90,1	89,96	0,0824	0,2871	0,3209
15	20	78,7	78,2	78,3	78,1	78,3	78,32	0,0416	0,204	0,228
16	25	85,2	86,2	86,4	86,5	86,5	86,16	0,2424	0,4923	0,5505
17	32	95,8	96,6	96,6	96,8	96,8	96,52	0,1376	0,3709	0,4147
18	40	90,6	91	91,3	91,4	91,4	91,14	0,0944	0,3072	0,3435
19	50	83,9	83,7	83,9	84	84,2	83,94	0,0264	0,1625	0,1817
20	63	66,7	67,1	67,3	67,4	67,9	67,28	0,1536	0,3919	0,4382
21	80	60,2	60,4	60,3	59,8	59,8	60,1	0,064	0,253	0,2828
22	100	61	61,4	62,1	63,6	63,5	62,32	1,1336	1,0647	1,1904
23	125	57,2	57,9	58,3	58,4	58,8	58,12	0,2936	0,5418	0,6058
24	160	58,9	59,5	59,5	59,9	60,1				
		74,246	72,396	71,1208	72,1208	73,263	среднее			
		292,07	293,57	335,356	302,387	286,14	дисперс.			
		17,09	17,134	18,3127	17,3893	16,916	срквоткл.			
		16,71	17,726	18,5071	17,9869	16,942	стандоткл.			

Последующий статистический анализ (корреляционный и регрессионный) проводится между шинами, анализ между каналами при наличии только 5-ти измерений проводить пока нецелесообразно в силу невозможности установить значимые связи между каналами. Ниже приводятся расчеты анализа зависимостей между измерениями в шинах. Строятся матрица корреляции шин и коэффициенты линейной регрессии между входными и выходными шинами.

корреляция между входными и выходными шинами						Уперес
	y1	y2	y3	y4	y5	
x1	0,5306	0,54412	0,6387292	0,5804087	0,555444	58,23
x2	0,6979	0,68032	0,6967186	0,6666446	0,69467	48,405
x3	0,6977	0,65282	0,6566739	0,6336179	0,676363	46,487
x4	0,7121	0,642	0,6460866	0,6316635	0,691614	69,927
x5	0,6938	0,66163	0,6480385	0,6509015	0,688314	63,425
						57,39
						78,351
						60,828
						101,85
$\alpha = 0.05$				Сткрит=	3,182446	81,956
значимость				Стьюдента		75,711
						81,992
						80,638
						83,06
						67,381
						76,943
						90,275
						83,499
						71,62
						68,22
						71,274
						79,294
						73,274

Коэффициенты регрессии между шинами						средние
B0	-24,23	-32,539	-49,19337	-40,94683	-34,0909	-36,20004
B1	0,3082	0,36081	0,6078214	0,5130079	0,39335	0,436642
B2	0,4488	0,7027	1,326864	0,7797478	0,73333	0,798293
B3	-0,9796	-0,0032	-0,71287	-0,690507	-1,36913	-0,75105
B4	1,5639	-0,5246	0,2455292	0,0611213	1,415096	0,552211
B5	-0,1127	0,76959	0,0581558	0,756374	0,168216	0,327937
R Множествен.	0,7329	0,70483	0,7479346	0,7113347	0,7341	0,726229
R-квадрат	0,5372	0,49679	0,5594062	0,5059971	0,538903	0,527661
Станд.ошибка	13,425	14,0346	14,035939	14,112892	13,2635	13,77435
Fнабл	4,1788	3,55408	4,5707912	3,6874065	4,207475	4,039719
Fжест	1,9439	1,65332	2,1262811	1,7153404	1,957271	1,879232
Fкрит	2,1497					

Приводится прямая линия усредненной регрессии на фоне корреляционного поля измерений. Усредненные по измерениям коэффициенты регрессии b_i^f позволяют построить значимый линейный тренд, изображенный на рис. 8.10. Тренд имеет положительный наклон с коэффициентов 0.9, что говорит о значимом в среднем по всем частотным каналам гашении входных вибро-возбуждений.

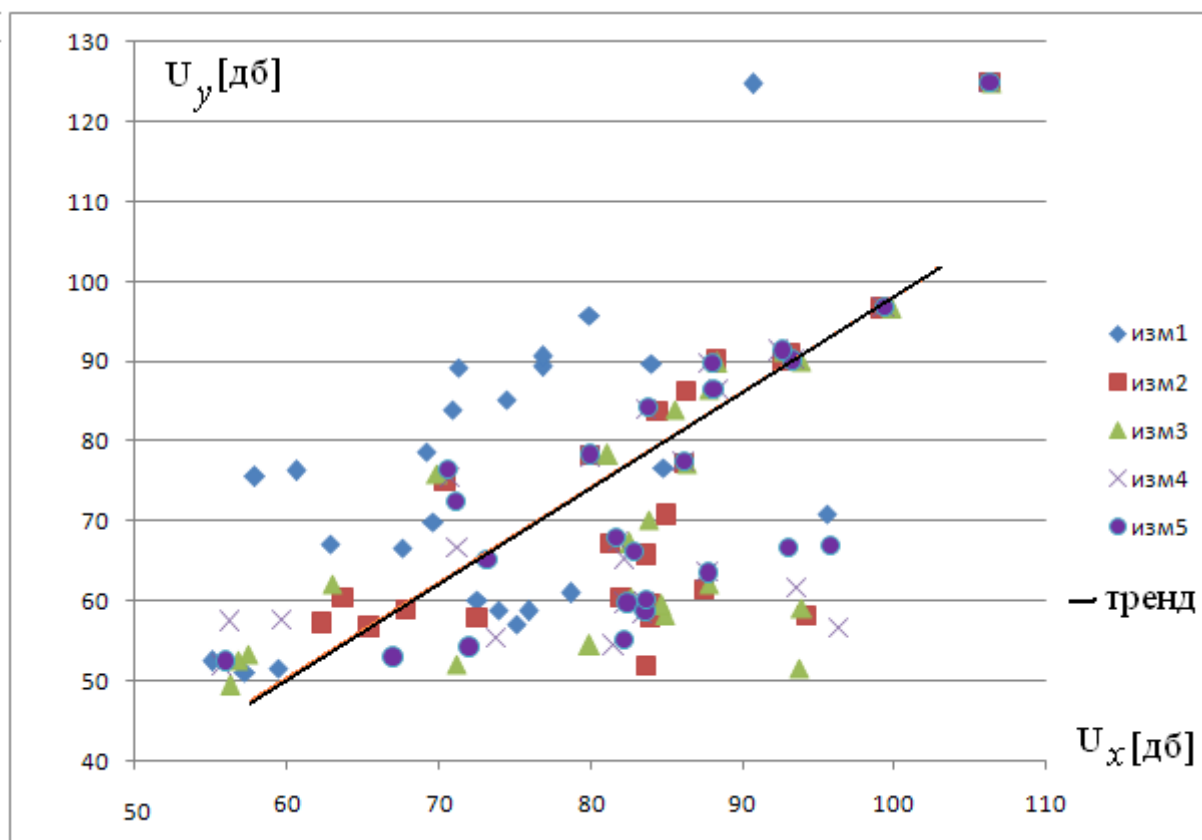


Рис.8.10. Корреляционное поле 5-ти измерений в 24-х каналах при возбуждении вибростенда на частоте 6Гц

Приведенные расчеты показывают:

1. Гармонические составляющие спектра в диапазоне 50 Гц представляют слабо коррелированный массив с коэффициентом множественной корреляции 0,5. Выше 50 Гц Коэффициент корреляции достигает уровня порядка 0,8 – 0,9.
2. Регрессионную зависимость выходных сигналов от входных гармонических составляющих выше 50 Гц можно аппроксимировать линейной зависимостью. На более низких гармониках аппроксимировать корреляционную зависимость между сигналами не представляется возможным.
3. Эффект демпфирования наблюдается только на гармониках выше 50 Гц, в среднем на 10 децибел. На нижних гармониках эффект не наблюдается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии изложен обширный материал, включающий модели обычных линейных колебательных систем с несколькими степенями свободы, рассматриваются свободные и вынужденные колебания в системах с вязким и гистерезисным демпфированием. Изложение материала начинается с весьма простых моделей, вполне понятных студентам старших курсов, и по мере усложнения рассматриваемых динамических процессов в исходные уравнения вводятся дополнительные функции, что, однако, не усложняет первоначальные модели, но способствует более глубокому пониманию их физической сущности. Рассматриваются такие вопросы, как возникновение в строительных конструкциях низкочастотных колебаний, обусловленных наличием энергоемких источников вибрации и шума, синхронизация колебательных процессов, а также трансформация продольных волн в изгибные колебания в распределенных системах типа трубопроводов, которым ранее уделялось недостаточно внимания в специальной литературе.

В качестве примеров представлены методы расчета гидравлических виброопор, которые получают все большее применение на транспорте и на объектах строительства. Рассмотрены проблемы создания адаптивных систем виброгашения, основанных на взаимодействии рабочей среды в гидроопорах с внутренними электромагнитными полями, а также противоударные системы активной виброзащиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А., Ложкин Ф.В. Синев А.В. Предварительная оценка статической жесткости обечаек гидропор силовых агрегатов// Проблемы машиностроения и надежности машин, 2001. № 3, С. 99 - 103.
2. Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В. Ложкин Ф.В. Исследования гидравлических вибропор с различными рабочими жидкостями// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002, №2 С. 33 - 36.
3. Адамов В.Н., Гольштейн Б.Г., Пятов В.Л., Снижение вибрации корпуса грунтоуплотняющих машин ударного действия// Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М.: ИМАШ АН СССР, 1977.
4. Агафонов В.К., Бакланов В.С., Вуль В.М., Попков В.И., Попов А.В. Исследование динамических и виброакустических характеристик самолета и двигателя методом тарированного тестирования// Доклады VIII научно-техн. конф. по аэроакустике, ЦАГИ, М., 1990. С. 141 - 144.
5. Алабужев П.М., Гритчин А.А., Ким Л.И. и др. Виброзащитные системы с квазинулевой жесткостью. Под ред. Рагульскиса К.М. Л. Машиностроение, 1986, 96 с.
6. Алабужев П.М., Гритчин А.А., Степанов П.Т., Хон В.Ф. К вопросу испытаний виброзащитных систем// Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М.: ИМАШ АН СССР, 1977.
7. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М. Наука. 1985. 328 с.
8. Айрапетов Э.Л. Денисенко Т.И., Круглый А.Л., Перминов М.Д. Экспериментальное исследование взаимодействия вибрационного и акустического полей в салоне легкового автомобиля// Всесоюзное научное совещание по проблемам улучшения акустических характеристик машин: материалы ИМАШ АН СССР, М. 1988. С. 91 - 92.
9. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979, 296 с.

10. А.С. № 821988 (СССР). Устройство управления вибростендом// Гордеев Б.А., Золин В.В., Лейфер Л.А. Заявлено 29.03.79, № 2768252/25-28, опубл. 15.04.81. Бюл. №14.

11. А.С. № 930236 (СССР). Устройство для управления вибростендом// Гордеев Б.А., Золин В.В., Беленова Н.А. Заявлено 13.05.80, № 2924293/18-24, опубл. 23.05.82. Бюл. № 19.

12. А.С. № 993218 (СССР). Устройство для формирования спектра случайных вибраций// Гордеев Б.А., Китаев В.Б., Мальцев А.А., Сергеев Е.И. Заявлено 2.06.81, № 3323762/8-24, опубл.30.01.83. Бюл. №14.

13. А.С. № 1087777 (СССР). Устройство для виброакустического контроля// Гордеев Б.А., Золин В.В. Заявлено 28.02.83, № 3557360/18-28, опубл. 23.04.84. Бюл.№ 15.

14. А.С. № 1746093 (СССР). Колебательная система// Черкунов В.Б., Бусаров Ю.П., Черкунов Б.В., Татарченко А.Е., Гордеев Б.А. Заявлено 12.05.88., опубл. 07.07.92, бюл. № 25.

15. А.С. №1654617 (СССР) Упругая опора// Акименко С.И., Глумин В.Б., Гордеев Б.А., Образцов Д.И. бюл. №21, 07.06.91.

16. А.С. №1732076 (СССР) Опора// Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Глумин В.Б., Новожилов М.В. бюл.№17, 07.05.92.

17. А.С. №1779843 (СССР) Виброизолирующее устройство// Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Юдин В.А., Поташев О.А. бюл. №45, 07.12.92.

18. Авторское свидетельство Российской Федерации на полезную модель №16532. Гидравлическая виброопора// Аббакумов Е.И., ГордеевБ.А., Ложкин Ф.В. бюл.№1, 10.01.2001.

19. Бакланов В.С., Горобцов А.С., Карцов С.К., Синев А.В., Фролов В.В. Анализ реактивных свойств динамических жесткостей и передаточных функций гидропор// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1999. № 3. С. 31 - 37.

20. Бакланов В.С., Горобцов А.С., Карцов С.К., Синев А.В., Фролов В.В. Анализ реактивных свойств динамических жесткостей и передаточных функ-

ций гидроопор при введении промежуточных масс// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2000. № 1. С.41 - 50.

21. Бакланов В.С., Морозков А.С. Измерение динамических характеристик газотурбинного двигателя при увеличении степени двухконтурности. XXVIII научно-техн. совещание по проблемам прочности двигателей, 26-28 ноября 2002 г. тез. докл. М. 2002. С. 10 - 12.

22. Беляковский Н.Г. Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах// Л., Судостроение, 1965. с.

23. Бендат Д., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа//М.: Мир, 1963. 312 с.

24. Блехман И.И. Синхронизация механических систем. М. Наука. 1971.

25. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем// М.: Наука, 1979. 336 с.

26. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем: Наука , 1983. 257 с.

27. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. Метод граничных элементов// М., Мир, 1987.

28. Бреббия, С. Уокер. Применение метода граничных элементов в технике// М., Мир, 1982.

29. Васин В.А., Лазарев С.О., Чиков А.Н., Фролов В.В. Применение гидроопор с динамическими гасителями в системах виброизоляции объектов для защиты от структурного шума// Проблемы машиностроения и надежности машин, №4, 1998, С.31 - 38.

30. Весницкий А.И., Гордеев Б.А. Газогидравлические способы демпфирования вибраций// Третья международная конференция железнодорожных экспертов. Югославия, Белград, октябрь 1996, с. 353.

31. Вибрации в технике// Под редакцией К.В. Фролова. Т. 6: Машиностроение, 1981, 456 с.

32. Генкин М.Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов// М.: Машиностроение, 1978, 282 с.

33. Генкин М.Д., Рябой В.М., Яблонский В.В. Об одной обратной задаче виброакустики//Акуст. журн. 1980. Т.26, вып. 4. С. 618 - 620. Генкин М.Д., Рябой В.М. Упругоинерционные виброизолирующие системы// АН СССР М. Наука, 1988, 191 с.

34. Гордеев Б.А., Образцов Д.И. Виброизолирующая подвеска силового агрегата автомобиля// Автомобильная промышленность, №6, 1990. С. 17.

35. Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Новожилов М.В. Применение диссипативных элементов в виброопорах силовых агрегатов машин// АН СССР, Горьковский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова. Препринт, Горький, 1989 г., 10 с.

36. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И., Шишкин В.И. Технологические особенности изготовления гидравлических виброопор// Физические технологии в машиностроении, Нижегородский Государственный Технический Университет. 1998, с. 82 - 84.

37. Гордеев Б.А., Ковригин Д.А., Аббакумов Е.И. Применение гидравлических виброопор для демпфирования вибраций силовых агрегатов подвижного состава// The 5 th international scientific conference of railway experts. Yugoslavia, October 28-30, 1998, p. 240 - 241.

38. Гордеев Б.А., Ильичев Н.А., Золотарев Ю.П. Расчет жесткости шинных блоков// Сб. докладов. Модели и анализ систем. Изд-во ВВКЦ. Н. Новгород.1995. С. 40 - 43.

39. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И. Применение газогидравлических виброопор в машиностроении// Сб. докладов научно-технической конференции. Проблемы машиностроения. Интелсервис. Н. Новгород, 1997.

40. Гордеев Б.А., Аббакумов Е. И. Методы расчета основных параметров газогидравлических виброопор и результаты экспериментальных исследований// Сб. научных трудов Прикладная механика и технология машиностроения, часть 3. Интелсервис. Н. Новгород, 1997.

41. Гордеев Б.А. Применение неньютоновских реологических сред для гашения колебаний силовых агрегатов транспортных средств Волновые задачи

механики// Сб. научных трудов. Н. Новгород. Изд. Нф ИМАШ РАН. 1991. Вып. 2 С. 165 - 173.

42. Гордеев Б.А., Весницкий А.И., Аббакумов Е.И. Методы расчета демпфирующих характеристик газогидравлических виброопор транспортных средств// 4th international scientific conference of railway experts/ 1997. Yugoslavia. P. 325 - 328.

43. Гордеев Б.А., Куклина И.Г. Моделирование динамических процессов роторно - винтовых машин с газогидравлическими демпферами// Физические технологии в машиностроении Н. Новгород. Интелсервис 2000. С. 197 - 202.

44. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И., Куклина И.Г. Расчетные методы выбора характеристик гидравлических виброопор// Физические технологии в машиностроении Н. Новгород. Интелсервис 2000. С. 203 - 208.

45. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И., Ложкин Ф.В. Экологические требования к современному автомобильному транспорту// Тезисы докладов Всероссийской конференции. Необратимые процессы в природе и технике. М. Изд - во МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 62 - 64.

46. Гордеев Б.А., Синев А.В. Эффективность гашения вибрации гидроопорой силового агрегата в зависимости от размеров соединительной трубки и свойств рабочей жидкости// Проблемы машиностроения и надежности машин. № 1. 2001

47. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Ковригин Д.А., Синев А.В., Аббакумов Е.И. Взаимодействие силового агрегата мотор - компрессора электровоза с вибрационными полями в переходных режимах //Проблемы машиностроения и надежности машин, №4, 2002. С.105 - 111.

48. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В. Применение инерционных электрореологических трансформаторов в системах виброизоляции //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003 г. 6 выпуск. С.22 - 27.

49. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Аббакумов Е.И., Ложкин Ф.В. Особенности применения газогидравлических демпфирующих элементов для снижения вибрации и шума транспортных средств//Известия ВУЗов. Северо-Кавказский

регион. 2001. Спецвыпуск, с. 53 - 55.

50. Гордеев Б.А., В.И. Ерофеев, А.В. Синев, О.О. Мугин. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред// Физматлит, 2004. 173 с.

51. Градецкий А.В., Пашков А.И., Рыбак Л.А., Синев А.В. Соловьев В.С. Инвариантная система виброизоляции с цифровым управлением для защиты от микрогравитации// Проблем машиностроения и надежности машин. 1995, № 4. с. 78 - 86.

52. Диментберг Ф.М., Фролов К.В. Вибрация в технике и человек// М., Знание, 1987

53. Елисеев С.В. Структурная теория виброзащитных систем// Новосибирск. "Наука". 1978. 220 с.

54. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой//Издательство МГУ. 1999. 320 с.

55. Елисеев С.В., Волков Л.Н., Кухаренко В.П. Динамика механических систем с дополнительными связями// Новосибирск. "Наука". Сибирское отделение. 1990. 214 с.

56. Завьялов В.Б., Куликовский Г.К., Тютин В.А. Расчетное исследование изгибных колебаний трансмиссии легкового автомобиля// Автомобильная промышленность №8, 1979.

57. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г. Описание реологических свойств электрореологических жидкостей на основе многочастичной, упорядоченной, трехмерной модели//Механика композиционных материалов и конструкций, 2002. Т. 8, №4. С. 577 - 584.

58. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г. Описание реологических свойств электрореологических жидкостей на основе кристаллической модели композита//Механика композиционных материалов и конструкций. 2001.Т. 7, №3. С. 344 - 362.

59. Исследование акустических полей автомобиля ГАЗ-3105// Отчет о НИР Гф ИМАШ АН СССР, научный руководитель Весницкий А.И. ВИНТИ

№ 01870071106, инв. № 02.98.0037526. Горький. 1988. 111 с.

60. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

61. Латышев Г.В. Исследование вибрационных напряжений в картерных деталях силового агрегата автомобиля// Труды НАМИ, №123. 1970.

62. Латышев Г.В., Тольский В.Е. Изгибные колебания силовой передачи и шум в кузове легкового автомобиля// Виброакустика автомобиля. Куйбышев, 1982.

63. Луканин В.Н., Гудцов В.Н., Бочаров Н.Ф. Снижение шума автомобиля// М., Машиностроение, 1981.

64. Ляпунов В.Т., Лавендел Э. Э., Шляпочников С.А. Резиновые виброизоляторы// Л., Судостроение, 1988.

65. Манохин А.Е., Шаматулин А.Е. Стандартизация методов и средств аттестации испытательных виброустановок// Измерительная техника, 1985, № 7. С. 34 - 35.

66. Никифоров А.С., Будрин С.В. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах//Л.: Судостроение, 1986. 286 с.

67. Нюнин Б.Н., Бочаров Н.Ф. Основные источники инфразвука в легковом автомобиле// Автомобильная промышленность, № 4, 1983.

68. Осипов Г.Л., Юдин Е.Я. Снижение шума в зданиях и жилых помещениях. М.: Стройиздат, 1987, 556 с.

69. Пановко Я.М. Введение в теорию механических колебаний// М., Наука, 1971.

70. Патент Российской Федерации № 2104424. Гидравлическая виброопора// Гордеев Б.А., Весницкий А.И., Марков В.И., Аббакумов Е.И. Заявлено 03.01.96. Заявка № 96100147/28. Опубл. 10.02.98. Бюл. № 4.

71. Патент РФ № 2135855. Гидравлическая виброопора.// Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И. бюл. № 24 от 27.08.99.

72. Патент Германии №3612436 MKU F16F13/00.// публ. от 15.10.87.

73. Патент Германии №4205229 MKU F16F13/00.// публ. от 02.09.93.

74. Патент Германии №4126673 MKU F16F13/00.// публ. от 25.02.93.
75. Патент Германии №4117130 MKU F16F13/00.// публ. от 26.11.92.
76. Патент Германии №4027808 MKU F16F13/00.// публ. от 30.04.92.
77. Попков В.И., Мышинский Э.Л., Попков О.И. Виброакустическая диагностика в судостроении//Л.: Судостроение, 1983. 256 С.
78. Попов Э.А., Квартин Л.М. Виброизоляция машин. Ч.1 Учебное пособие: М. РИО МТИ, 1984, 26 с.
79. Рыбак Л.А., Синев А.В. Пашков А.И. Синтез активных систем виброизоляции на космических объектах. М.: Янус - К, 1997, 160 с.
80. Рябой В.М. О наименьшей массе упругоинерционных виброизолирующих систем// Изв. АН СССР. ММТ. 1980. № 4. С. 59 - 67.
81. Рябой В.М. О принципиальной ограниченности возможностей пассивной упругоинерционной виброизоляции // Вибротехника. 1983. № 2. С. 79 - 82.
82. Рябой В.М. Построение динамических схем и определение параметров виброизолирующих систем с заданными свойствами // Машиноведение , 1985, № 5. С. 38 - 44.
83. Рябой В.М., Яблонский В.В. Метод увеличения виброизоляции в некоторых стержневых конструкциях// Виброизолирующие системы в машинах и механизма.: Наука, 1977. С. 67 - 74.
84. Сафронов Ю.Г., Синев А.В., Соловьев В.С. Исследование электрогидравлической системы виброизоляции сиденья человека - оператора//Сб. тр. "Влияние вибраций на организм человека и проблемы виброзащиты". М., Наука, 1974.
85. Сидорова М.Н., Синев А.В. Оптимизация геометрических характеристик и жесткостных характеристик системы виброизоляции автомобильного двигателя// Проблемы машиностроения и надежности машин, № 6, 1997.
86. Синев А.В., Чернявская Н.А., Соловьев В.С., Маков П.В., Пашков А.И., Кочетов О.С. Система виброизоляции (варианты). Патент Российской Федерации № 2152547, Б.И. № 19, 10.07.2000.
87. Синев А.В., Соловьев В.С. Цифровое управление активной подвеской

с адаптацией к внешнему возмущению// Сб. тр. "Колебания и виброакустическая активность машин и конструкций". М.: Наука, 1986. С. 60 - 69.

88. Синев А.В., Соловьев В.С. Исследование активных виброзащитных систем с автоподстройкой частоты// Сб. тр. "Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах". М.: Наука, 1977. С. 38 - 40.

89. Синев А.В. Выбор параметров систем виброизоляции и динамических гасителей на основе методов синтеза цепей// Машиноведение. 1972, № 1. С. 28 - 34.

90. Справочник по ударным нагрузкам. Под ред. С.М. Харриса, Ч.И. Крида. Л.: Судостроение, 1980, 360 с.

91. Тарасов А.Я. Влияние резонансных изгибных колебаний силового агрегата на поломки картерных деталей// Автомобильная промышленность, 1981, №3.

92. Тольский В.Е. Виброакустика автомобиля// М., Машиностроение, 1988.

93. Тольский В.Е., Корчемный Л.В., Латышев Г.В., Минкин Л.М.// Колебания силового агрегата. М., Машиностроение, 1976.

94. Фролов К.В., Тэнг Югенг, Аббакумов Е.И., Синев А.В., Гидроупругие технология виброизоляции – прогрессивное направление в виброзащите мобильных машин// Аналитический обзор. М., Приводная техника, № 6, 2000.

95. Фролов К.В., Тихонов В.А., Чистяков А.Г., Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А. Экспериментальное определение статических и вибрационных характеристик гидроопор двух типов// Проблемы машиностроения и надежности машин. №4. 2001 г. С. 98 - 102.

96. Фролов К.В., Чистяков А.Г., Синев А.В., Мугин О.О., Гордеев Б.А. Идентификация математической модели гидроопоры по экспериментальным данным// Проблемы машиностроения и надежности машин. № 5, 2002. С. 3 - 8.

97. Ходжаев К.Ш. Резонансные и нерезонансные случаи в задаче о возбуждении механических колебаний// ПММ. Т. 32, вып.1 1968. С. 85 - 100.

98. Чернышев Г.Д., Семенов Г.И., Чудаков Л.К., Романов Е.П. Динамиче-

ские нагрузки в зоне соединения двигателя и коробки передач// Автомобильная промышленность, №5, 1975.

99. Andre Gennenseaux. Research for new vibration isolation technique from hydro-mounts// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1993, №931324.

100. Andre Gennenseaux. A new generation of engine mounts// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1995, №951296.

101. Bermuchon M. A new generation of engine mounts// Proceeding of SAE noise and vibration conference, 1984, № 840259.

102. Kazuto Seto and Katsumi Sowatari, Akio Nagamatsu. Optimum design method for hydraulic// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1991, № 911055.

103. Kohito Kadomatsu. Hydraulic mount for stock isolation at acceleration on the FWD cars// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1989, №891138.

104. G. Kim and R. Sigh. Nonlinear analysis of automotive hydraulic engine mount. ASME// J. of dynamic system measurement and control, 115, 1996.

105. John Bretl. Advancements in computer simulation methods for vehicle noise and vibration// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1995, №951252.

106. Kern G. und andere. Computerunterschtutzte Auslegung von hydraulic geparten Grummilager// Automobiltechnische Zeitschrift. 94 (1992) 9.

107. G. Ducloe. An external tunable hydraulic mounts which uses Electro-Rheological fluid// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1987, №870963.

108. Leng the error analysis for inpendance tube measurements.// Banks-Lee., Peng H.// J. Acoust. Soc. Amer. - 1989. - 85, №4. - p.1769 - 1772.

109. Thomas J. Royston and R. Singh. Study of nonlinear hydraulic engine mounts focusing on decoupler modeling and design// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1997, № 971936.

110. Wallace C. Flower. Understanding hydraulic mounts for improved vehicle noise, vibration and ride qualities// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1985, № 850975.

111. Thomas J. Royston and Rajendra Singh. Period's response of nonlinear engine mounting system// Proceedings of SAE noise and vibration conference 1995. № 951297.

112. Steve J. Gan and Jeffry D. Cotton. Experiment study and modeling of hydraulic mounts and engine system// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1995, № 951348.

113. R. Matthew Brach and Aian G. Haddow. One the dynamic response of hydraulic engine mounts. Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1993, № 931328.

114. United States Patent № 5601164. Feb. 11, 1997. Device using electrorheological fluid// Toshiyuki Ohsaki et al. Int. Cl. F16F 9/42.

115. United States Patent № 6029783. Feb. 29, 2000. Variable resistance device using electroactive fluid// Alvin R. Wirthin. Int. Cl. F16F 15/03.

116. United States Patent № 5947238. Sep. 7, 1999. Passive magnetorheological fluid device with excursion dependent characteristic// Marc R. Jolly et al. Int. Cl. F16F 9/06.

117. Optimal protection from impact, shock and vibration// D.V. Balandin, N.N. Bolotnik, W.D. Pelcey. Gordon and Breach Science Publishers/ 2000, 438 p.

118. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: Гостехиздат, 1957. - 659с.

119. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. - М.: Высшая школа. 2000. - 383с.

120. Б.А. Гордеев, С.Н.Охулков, Л.В.Филатов. Корреляционная обработка спектров входных и выходных вибросигналов при испытаниях гидроопор//Приволжский научный журнал/Ниж. Гос. Архитектурн. - строит. Ун-т. - Нижний Новгород, 2016б - N2, - с. 30 - 41.

121. Гордеев Б.А. Применение гидравлических виброопор в синхронизирующихся механических системах / Б.А. Гордеев, А.Б. Гордеев, Д.А. Ковригин, А.В. Леонтьева// Приволжский научный журнал. – 2009. – №3. – С. 49 - 53.
122. Гордеев Б.А., Ковригин Д.А., Леонтьева А.В. Синхронизация вращения роторов двух двигателей на упругом основании// Вестник машиностроения. – 2011. – №10. – С. 3 - 7.
123. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
124. Блехман И.И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин. – Инженерный сборник. 1953, т. 16, с. 75 - 80.
125. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 254 с.
126. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. - 328 с.
127. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Исследование работы двух асинхронных двигателей, установленных на упругом диссипативном основании// Вестник машиностроения. – 2012. – №5. С. 19 - 23.
128. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В., Осмехин А.Н., Охулков С.Н., Бугайский В.В. Экспериментальные исследования сопутствующих эффектов при синхронизации двух двигателей на упругом основании// Вестник машиностроения. – 2013. – № 6. – С. 39 - 42.
129. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Задача о вращении трех асинхронных двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2012. – №9. С. 32 - 40.
130. Андерсен Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., Наука, 1963. - 498с.
131. Кендал М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. Том 2. М., Наука, 1973, - 895с.
132. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. СПб., Питер, 2001, - 752с.

133. Горбиков С.П., Филатов Л.В. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Н.Новгород, ННГАСУ, 2011, - 105 с.
134. Филатов Л.В. Задачи статистического анализа в строительстве. Н.Новгород, ННГАСУ, 2017. - 64с.
135. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Мониц Д.В., Гребнев П.А. Методические погрешности при измерении параметров вибрации строительных конструкций волновыми методами// Измерительная техника. 2015, №2, с. 36 - 47.
136. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Бугайский В.В., Горсков В.П. Частотный метод измерения крутящих моментов вращающихся валов// Вестник машиностроения. 2015. № 2, с. 3 - 7.
137. Гордеев Б.А. Причины возникновения синхронизации в рельсовом транспорте/ Б.А. Гордеев, А.Б. Гордеев, Д.А. Ковригин, А.В. Леонтьева// Приволжский научный журнал. – 2009. – № 4. – С. 47 - 53.
138. Гордеев Б.А., Куклина И.Г. Ультразвуковой фазовый преобразователь угла поворота вала. Патент на изобретение № 2548615, опубликовано 20.04.2015 г. бюл. №11
139. Гордеев Б.А., Куклина И.Г., Охулков С.Н., Бугайский В.В., Гордеев А.Б. Ультразвуковой фазовый вибропреобразователь. Патент на полезную модель № 2013129437. Опубликовано 10.01.2015 года. Бюл. №1
140. Гордеев Б.А., Ерофеев В. И., Охулков С.Н., Тумаков С.Ф. Магнито-реологический амортизатор. Положительное решение о выдаче патента на изобретение от 14.04.2015
141. Гордеев Б.А., Злобин П.А. Влияние ортогональных магнитных полей на движение магнито-реологической жидкости. XIII Всероссийская НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ», МГТУ им. Н.Э. Баумана 22 - 24 апреля 2015 года. Тезисы докладов. С.205 - 208
142. Гордеев Б.А., Куклина И.Г. Концепция системы измерений и снижения уровней вибрации винтового ротора. XIII Всероссийская НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ

ИЗМЕРЕНИЙ» , МГТУ им. Н.Э. Баумана, 22 - 24 апреля 2015 года. Тезисы докладов. С. 193 - 196

143. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Бугайский В.В.// Демпфирующие характеристики тросовых виброизоляторов//Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 1. С.11 - 16

144. Гордеев Б.А., Иванов Е.Г., Охулков С.Н., Корендясев Г.К. // Испытания магнитореологических жидкостей на ударные нагрузки// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 3. с 92 - 98.

145. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Шохин А.Е.//Управление внутренним магнитным полем характеристиками магнитореологического демпфера// Вестник машиностроения. 2016. №12.

146. A. Baykov, B. Gordeev. Mathematical model of electromechanical system with variable dissipativity// VP Vibroengineering PROCEDIA Volume 8 contains papers presented at the 22 - nd International Conference on VIBROENGINEERING held in Moscow, Russia, 4-7 October, 2016. The main theme of this Conference is “Dynamics of Strongly Nonlinear Systems”. Pp. 392 – 396.

147. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Синёв А.В., Ермолаев А.И, Шохин А.Е. Магнитореологический трансформатор, управляемый вращающимся магнитным полем. Проблемы машиностроения и надёжности машин. – М. 2018 г. №4, С. 28 - 35.

148. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Осмехин А.Н., Шохин А.Е. Снижение виброперегрузок, возбуждаемых вращающимися валами в переходных режимах//Вестник машиностроения.- М 2018. №2. С. 9 - 15.

149. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Осмехин А.Н., Корендясев Г.К. Оценка упругих и демпфирующих свойств соединительной магнитореологической муфты вращающихся валов. Вестник машиностроения. 2018. № 5. С. 9 - 14.

150. Айнбиндер Р.М., Гордеев Б.А., Любимов А.К., Охулков С.Н. Определение собственных частот колебаний грузовой платформы автотранспортного средства с целью безопасного крепления груза. Транспорт: наука, техника, управление. – М. ВИНТИ РАН 2018. №5. С. 28 -35.

151. Айнбиндер Р.М., Гордеев Б.А., Любимов А.К., Охулков С.Н. Оценка безопасного крепления груза при вибрации грузовой платформы автотранспортного средства//Транспорт: наука, техника, управление. – М. ВИНТИ РАН 2018 г., №7, С. 27 – 35.
152. Гордеев Б.А., Ильяхинский А.В., Охулков С.Н., Филатов Л.В. Вопросы метрологического обеспечения при статических испытаниях магнитореологических гидропор». Транспорт: наука, техника, управление. – М. ВИНТИ РАН , № 9, 2018 г., С. 62 - 67.
153. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Осмехин А.Н., Степанов К.С. Этапы построения математических моделей магнитоуправляемых гидропор методом электромеханических аналогий. Актуальные проблемы электроэнергетики: сб.ст. / НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Н. Новгород, 2018.– С. 119 - 128.
154. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Плехов А.С., Ермолаев А.И. Тепловые трубы в системах гашения вибрации электромеханических комплексов// НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Н. Новгород, 2018. – С. 102 - 118.
155. Гордеев Б.А., Охулков С.Н., Синёв А.В. Вращающееся магнитное поле в управлении магнитореологическим трансформатором// Вестник машиностроения. 2018. № 11. С. 33-35. РНФ (проект №15-19-10026).
156. В. А. Gordeev, S. N. Okhulkov, A. N. Osmekhin, and A. E. Shokhin. Reducing Transient Vibrations due to Rotating Shafts. Russian Engineering Research, 2018, Vol. 38, No.5, pp. 335 – 341.

Гордеев Борис Александрович
Филатов Леонид Владимирович
Айнбиндер Роман Михайлович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ

Монография

Редактор
Н. В. Викулова

Подписано в печать Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 9,9. Усл. печ. л. 10,3. Тираж 500 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.

Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru