

И.С. Куликов, Г.А. Маковкин

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет» (ННГАСУ)

И.С. Куликов, Г.А. Маковкин

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Нижний Новгород
2013

ББК 22.21
К 90
М 16

Куликов И.С., Маковкин Г.А.

Динамика механических систем: Учеб. пособие. – Н.Новгород, Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун-т, 2013г. – 147 с.
ISBN 5-87941-357-8

Изложены основы динамики материальной точки и механической системы. В популярной форме авторы знакомят с основными понятиями и методами этого раздела теоретической механики, необходимыми для изучения дисциплин курса и специальных дисциплин. Изложение сопровождается примерами, помогающими успешно овладеть теорией и приобрести минимальные навыки в решении задач.

Для студентов вузов строительного направления.

Рецензенты:

В.В. Новиков – зав. кафедрой теоретической механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, доктор физико-математических наук;
А.Ю. Панов – зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Нижегородского государственного технического университета, доктор технических наук, профессор.

ББК 22.21

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход к многоуровневой системе образования проходит в условиях создания новых информационно-вычислительных систем, уменьшения числа естественнонаучных и увеличения числа гуманитарных дисциплин, осваиваемых студентами в период обучения. Этот естественный процесс сопровождается значительным сокращением времени, отводимого на изучение механики в целом и особенно теоретической механики.

В значительной мере это объясняется тем, что в школьных и вузовских учебниках механика традиционно ассоциируется с разделом физики, и ей нередко отводят место в ряду общеобразовательных дисциплин. Хотя в действительности она играет гораздо более важную роль в подготовке специалистов по строительству.

И если у разработчиков стандартов и программ сохраняется уверенность в необходимости изучения сопротивления материалов, то далеко не всегда то же самое можно сказать о программах по теоретической механике, где намечается разрыв между декларативными требованиями и реальными возможностями образовательного процесса, проходящего в условиях падения уровня подготовки абитуриентов.

Все это приводит к формированию чрезмерно профилированных и адаптированных курсов теоретической механики, в которых много внимания уделяется статике в ущерб динамике. Если сравнительно недавно считалось нормой, когда динамика составляет около 70% от объема курса теоретической механики, то сейчас доля этого раздела, как правило, не превышает 30–40% всего объема.

Это имеет, по крайней мере, два негативных последствия.

Во-первых, возрастают сложности при изучении таких разделов строительной механики, как динамика и устойчивость. А это именно те факторы в работе сооружений, которые наряду с проблемой качества строительных материалов являются в настоящее время основной причиной катастроф и аварий.

Во-вторых, теоретическая механика утрачивает ту роль, которую она всегда выполняла в деле консолидации технического образовательного пространства, устанавливая междисциплинарные связи и формируя научное мировоззрение.

Поэтому нетрудно понять, как важна разработка сбалансированного и лишённого отмеченных недостатков курса по этой дисциплине. Как и то, что успешное овладение основами этой науки по сокращенной программе представляет непростую задачу как для лектора, так и для студентов.

Первым шагом на пути её решения является определение целей этой работы, которые сформулированы так:

- разработка методического обеспечения минимального по объёму курса основ теоретической механики, дающего представление о предмете, методах исследования и задачах этой дисциплины;
- анализ места механики и теоретической механики в системе естествознания и среди других учебных дисциплин с учетом ГОС по математике и физике;
- подготовка предложений по корректировке учебных программ с учетом преподавания механики на кафедрах сопротивления материалов и строительной механики.

Настоящее пособие является попыткой содействовать решению этой задачи. Его содержание не претендует на полноту и отражает точку зрения авторов на то, каким должен быть вводный курс этой дисциплины. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением тщательно подобранных примеров, необходимых как для понимания теории, так и для приобретения минимальных навыков в решении задач.

В пособии дается представление о предмете, методах исследования и задачах динамики, позволяющее студенту чувствовать себя уверенно при её изучении.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

1.1. Основные понятия динамики

Приступая к изучению новой учебной дисциплины, полезно иметь представление о ее предмете, методе исследования, а также месте в системе естествознания и образования среди других наук и дисциплин.

Напомним, что динамика – это раздел механики, а механика – это наука, изучающая механическое движение материальных объектов, то есть их взаимное перемещение в пространстве и во времени.

Материальными объектами помимо дискретных тел могут быть среды, например, жидкость или газ и поля, поэтому круг объектов, изучаемых механикой, очень широк.

В зависимости от физических свойств этих объектов и их размеров всю механику можно разделить на классическую, или ньютонову, и неклассическую.

Неклассическая механика – это часть физики, в которой исследуются объекты микро- и макромира с учетом пространственно-временной зависимости.

Классическая механика имеет дело с объектами, протяженность которых приблизительно и с точностью до нескольких порядков заключена в интервале от 10^{-10} до 10^{10} метра. При их изучении свойства пространства и времени можно считать постоянными. Именно такую ньютонову механику мы и будем рассматривать в дальнейшем.

В зависимости от особенностей модели реальных объектов классическая механика делится на теоретическую механику – с моделью абсолютно твердого тела и механику сплошной среды с моделью деформируемого тела.

Основным методом исследования в механике является *гипотетико-дедуктивный*. Его суть заключается в выдвижении гипотезы, которая подтверждается или опровергается опытом.

Теоретическая механика – это раздел механики, изучающий движение абсолютно твердого тела.

Абсолютно твердым, или недеформируемым, называется тело, у которого расстояния между двумя любыми точками остаются неизменными.

Частным случаем твердого тела является *материальная точка* – это тело, размерами которого в условиях конкретной задачи можно пренебречь.

В зависимости от особенностей механического движения теоретическая механика (ТМ) делится на статику, кинематику и динамику.

Статика рассматривает частный случай механического движения, когда оно не зависит от времени – речь идет о рассмотрении равновесия твердого тела (ТТ), нагруженного системой сил и находящегося в состоянии покоя.

Кинематика рассматривает внешнюю сторону механического движения независимо от вызвавших его причин. Это не что иное, как геометрия в четырехмерном пространстве, где время играет роль четвертого измерения.

Динамика исследует общий случай механического движения ТТ с учетом причин, вызвавших его.

Характер движения тела определяется двумя группами факторов:

- воздействием на тело других материальных объектов;
- внутренними собственными инертными свойствами тела, проявляющимися в его способности противодействовать всякому изменению его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения.

К числу основных понятий классической динамики относятся следующие.

Сила – векторная величина, характеризующая воздействие на рассматриваемое тело другого материального объекта.

Масса – скалярная величина, определяющая инертность тела.

Пространство – в классической механике принимается за трехмерное евклидово пространство, свойства которого не зависят от помещенных в него материальных объектов.

Время – считается абсолютным и одинаковым для всех точек пространства.

Основателем динамики является Г. Галилей (1564–1642), который ввел понятия скорости, ускорения и сформулировал закон инерции.

Выдающийся вклад в становление механики как науки внес И. Ньютон (1643–1727).

Высокая степень абстракции модели абсолютно твердого тела позволяет применять в ТМ, как и в математике, *аксиоматико-дедуктивный* метод исследования.

Таким образом, ТМ подобно геометрии построена на системе аксиом, сформулированных Ньютоном, которые играют в механике ту же роль, что и аксиомы Евклида в геометрии. Часть этих аксиом известна из школьного курса физики как законы Ньютона.

1.2. Аксиомы динамики

Законы, к рассмотрению которых мы переходим, были сформулированы Ньютоном для абсолютной неподвижной системы отсчета, но они справедливы также и для любых инерциальных – галилеевых систем отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно такой неподвижной системы координат.

Вопрос о том, можно ту или иную систему считать инерциальной, решается путем проведения физического эксперимента.

Например, для задач астрономии инерциальной можно считать гелиоцентрическую систему отсчета с осями координат, направленными на «неподвижные» звезды, а при решении технических задач – систему координат, связанную с Землей.

Отметим, что эти законы были сформулированы для частного случая ТТ – материальной точки.

Аксиома 1. (Закон инерции). Под действием уравновешенной системы сил тело движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.

Аксиома 2. (Основной закон динамики). Ускорение a , приобретаемое телом, пропорционально приложенной к нему силе F и обратно пропорционально массе этого тела m .

Мы будем записывать этот закон в виде

$$ma = F. \quad (1.1)$$

Отметим, что $a \uparrow F$, а закон и соответственно уравнение (1.1) называются *основными* потому, что связывают кинематические характеристики – a , внешние воздействия – F и внутренние свойства носителя движения – m .

Аксиома 3. (Закон равенства действия и противодействия). Два тела взаимодействуют с силами, равными по величине, действующими вдоль одной прямой, соединяющей точки их приложения, и направленными в противоположные стороны.

Аксиома 4. (Закон независимости действия сил). Если на тело одновременно действует несколько сил, то ускорение, приобретаемое телом, равно геометрической сумме ускорений от каждой силы в отдельности.

Это обобщение аксиомы параллелограмма из статики на динамику, допускающее в соотношении (1.1) для i -й силы

$$ma_i = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

провести операцию суммирования:

$$\Sigma ma_i = \Sigma F_i$$

и получить в результате соотношение (1.1), где $a = \Sigma a_i$ и $F = \Sigma F_i$ соответственно – ускорение материальной точки и равнодействующая всех сил, приложенных к ней.

Аксиома 5. (Принцип освобожденности от связей). Несвободное тело можно считать свободным, если вместе с активными силами приложить к нему реакции отброшенных связей.

Примечания:

1. Напомним, что основными единицами измерения в системе СИ являются метр (м), килограмм (кг) и секунда (с), а единица измерения силы (Н) – производной. Из соотношения (1.1) следует, что

$$[F] = [m][a] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} = \text{Н}.$$

Таким образом, сила в 1 Н сообщает телу с массой в 1 кг ускорение, равное $1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$. Применяют и более крупные единицы измерения: кН = $\text{Н} \cdot 10^3$ и МН = $\text{Н} \cdot 10^6$.

2. Напомним, что вес тела P связан с его массой m соотношением: $P = mg$, где g – ускорение свободного падения, приблизительно равно $9,81 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$.

В быту, а также в старой технической литературе применяют внесистемную единицу измерения силы – килограмм силы (кгс). Килограмм силы численно равен весу тела массой в 1 килограмм.

Таким образом, $1 \text{ кгс} \approx 9,81 \text{ Н}$.

Аналогично определяется тонна силы $1 \text{ тс} = 10^3 \text{ кгс} \approx 9,81 \cdot 10^3 \text{ Н} \approx 9,81 \text{ кН}$.

3. Говоря в дальнейшем о силе, приложенной к материальной точке, будем подразумевать под ней равнодействующую приложенных к этой точке сил.

4. Последняя, пятая аксиома отсутствует в оригинальной работе у И. Ньютона, который не рассматривал движение несвободных тел, и существенно отличается от принципа освобожденности из статики, поскольку понятие связи в динамике гораздо шире, чем в статике. Подробнее этот вопрос обсуждается в третьей главе. Впервые движение несвободных материальных тел было рассмотрено Даламбером и Лагранжем.

1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Под законом движения в кинематике понимают алгоритм, позволяющий определить положение движущейся точки в пространстве в любой момент времени.

Различают три способа задания движения: векторный, координатный и естественный. Первый из них представляет собой, главным образом, теоретический интерес, а два последних имеют непосредственное практическое значение.

Дифференциальные уравнения в декартовых координатах. Проектируя основное уравнение динамики (1.1) на оси декартовой прямоугольной системы координат, получим:

$$\begin{aligned} ma_x &= m\ddot{x} = F_x, \\ ma_y &= m\ddot{y} = F_y, \\ ma_z &= m\ddot{z} = F_z. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полученная система трех дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение материальной точки, и называется дифференциальными уравнениями (ДУ) движения материальной точки в декартовых координатах.

Дифференциальные уравнения в естественных координатах. Проектируя основное уравнение динамики (1.1) на оси естественной системы координат, получим:

$$\begin{aligned} ma_\tau &= m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \\ ma_n &= m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \\ 0 &= F_b. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Полученная система дифференциальных уравнений называется дифференциальными уравнениями движения материальной точки в естественных координатах.

Напомним, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и проекция ускорения на бинормаль – a_b равна нулю.

ГЛАВА 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Две задачи динамики

В динамике решают две основные задачи, которые мы и рассмотрим. Методика решения каждой из этих задач зависит от способа задания движения точки.

2.1.1. Первая задача динамики

Задача формулируется следующим образом: *найти силу, действующую на точку с массой m , движущуюся по известному закону.*

Решение задачи основано на умении находить вектор ускорения \mathbf{a} при различных способах задания движения.

- *Векторный способ задания движения* предполагает, что известна зависимость $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Чтобы решить поставленную задачу, нужно определить ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$, а затем с помощью (1.1) – искомую силу $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = md^2\mathbf{r}/dt^2$.

- *Координатный способ задания движения* предполагает, что известны зависимости:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

Дифференцируя их дважды, найдем проекции вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \ddot{x} = f_1''(x),$$

$$a_y = \ddot{y} = f_2''(x),$$

$$a_z = \ddot{z} = f_3''(x),$$

откуда с помощью (1.2) – проекции искомой силы: F_x , F_y и F_z , по которым легко найти ее модуль и направление:

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = F_x/F, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = F_y/F, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{k}) = F_z/F.$$

Пример 2.1. Найти силу, под действием которой точка с массой m движется по закону:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t), \\ y &= b \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Решение. Исключив из этих соотношений время t , получим уравнение траектории движущейся точки:

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$$

Дифференцируя (a), получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Подставляя в (1.2), найдем:

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = -m\omega^2 x, \\ F_y &= m\ddot{y} = -m\omega^2 y, \end{aligned}$$

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 r, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = -x/r, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = -y/r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 2.1).

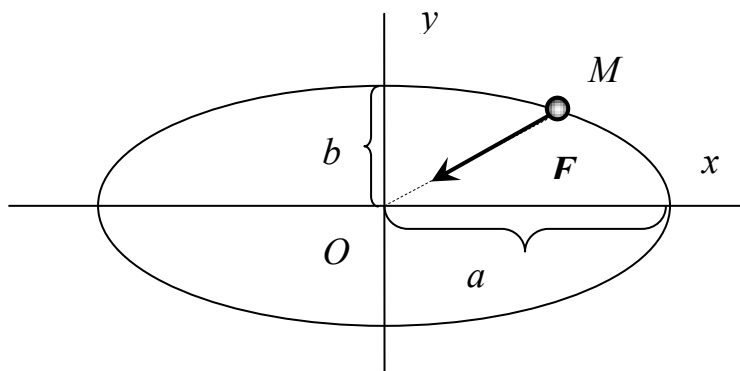


Рис. 2.1

Ответ: точка движется в плоскости xOy под действием квазиупругой силы $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$.

• *Естественный способ задания движения* предполагает, что известна траектория и закон движения точки по траектории: $s = f(t)$.

Чтобы найти действующую на точку силу, нужно вычислить проекцию вектора скорости на направление орта касательной:

$$v_\tau = ds/dt = \dot{s},$$

проекции касательного и нормального ускорений:

$$a_\tau = d^2s/dt^2 = \ddot{s}, a_n = v^2/\rho,$$

а затем из уравнений (1.3) определить проекции вектора силы на эти направления:

$$F_\tau = ma_\tau \text{ и } F_n = ma_n.$$

После этого легко найти ее модуль и направление:

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) = F_\tau/F, \cos(\mathbf{F}, \mathbf{n}) = F_n/F.$$

Пример 2.2. Найти силу натяжения нити \mathbf{T} и скорость \mathbf{v} конического маятника весом \mathbf{P} , если нить длиной l образует с вертикалью угол α (рис. 2.2).

Решение. Проектируя основное уравнение динамики для нашей задачи:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

на оси естественной системы координат $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} и \mathbf{b} , получим:

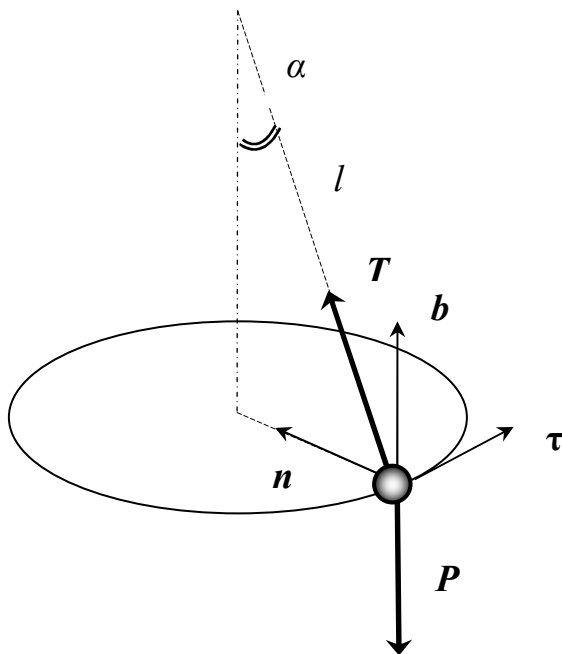


Рис. 2.2

$$mdv/dt=0; \tag{a}$$

$$mv^2/\rho = T\sin\alpha; \tag{б}$$

$$0 = T\cos\alpha - P, \tag{в}$$

где $P = mg$.

Из (а) следует, что $v = \text{const}$, а из (в) найдем:

$$T = P/\cos\alpha.$$

Подставляя последнее выражение в (б), получим

$$mv^2/(l\sin\alpha) = mg \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда найдем скорость конического маятника:

$$v = \sqrt{gl \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}.$$

Ответ: $T = P/\cos\alpha$, $v = \sqrt{gl \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}$.

2.1.2. Вторая задача динамики

Задача формулируется следующим образом: *найти закон движения точки с массой m , движущейся под действием заданной силы при известных начальных условиях.*

Математически поставленная задача сводится к решению задачи Коши для системы ДУ второго порядка (1.2) – (2.1):

$$\begin{aligned} m d^2x/dt^2 &= F_x, \\ m d^2y/dt^2 &= F_y, \\ m d^2z/dt^2 &= F_z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

при заданных *начальных условиях*:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_{x0}, \\ y(0) &= y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_{y0}, \\ z(0) &= z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = v_{z0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При этом F_x , F_y и F_z в общем случае являются функциями следующих переменных: $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

В следующем параграфе мы рассмотрим решение второй задачи в зависимости от вида этих функций.

Примечания:

1. Решение первой задачи динамики сводится к операциям дифференцирования известного закона движения либо заданного закона изменения скорости.

2. Решение второй задачи динамики сводится к операциям интегрирования, и поэтому эта задача, во-первых, является более сложной, а во-вторых, она может допускать различные аналитические выражения одного результата.

3. При решении как первой, так и второй задачи рекомендуется придерживаться следующего плана:

- выбрать тело, движение которого будем рассматривать;
- выбрать систему координат, направив оси в сторону движения;
- приложить к рассматриваемому телу активные силы и, отбросив связи, заменить их неизвестными реакциями;
- записать ДУ движения в координатной (1.2) или естественной (1.3) форме;
- определить действующие на тело силы или найти закон движения.

2.2. Прямолинейное движение точки

Если точка движется вдоль оси Ox , задача (2.1) – (2.2) примет следующий вид: найти решение ДУ

$$m\ddot{x} = F_x \quad (2.3)$$

при заданных начальных условиях:

$$x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = v_0 . \quad (2.4)$$

2.2.1. Интегрирование ДУ движения для случая $F = \text{const}$

Отметим, что если в уравнении (2.3) $F_x = F = \text{const}$, то ускорение $\ddot{x} = a_x = a$ тоже постоянно и мы имеем случай равнопеременного движения, уже изученного в кинематике.

Тем не менее мы остановимся на нем, чтобы рассмотреть два способа решения задачи (2.3) – (2.4).

Первый способ решения задачи (2.3) – (2.4). Дифференциальное уравнение (2.3) второго порядка с помощью *первой подстановки*:

$$a = dv/dt$$

сведем к системе двух ДУ первого порядка:

$$dv/dt = F/m , \quad (2.5)$$

$$dx/dt = v . \quad (2.6)$$

Интегрируя (2.5) с учетом (2.4), получим *закон изменения скорости*, или с точки зрения математики *первый интеграл* ДУ (2.3):

$$v = v_0 + (F/m) t, \quad (2.7)$$

подставляя который в (2.6), получим *закон движения*, или *второй интеграл*, то есть искомое решение задачи (2.3) – (2.4):

$$x = x_0 + v_0 t + (F/2m) t^2 . \quad (2.8)$$

Второй способ решения задачи (2.3) – (2.4). С помощью *второй подстановки*

$$a = (dv/dt)(dx/dx) = (dx/dt)(dv/dx) = v(dv/dx),$$

которая, в отличие от первой, *не зависит от времени t* , сведем уравнение (2.3) к системе двух ДУ первого порядка:

$$v(dv/dx) = F/m, \quad (2.9)$$

$$dx/dt = v. \quad (2.10)$$

Разделяя в (2.9) переменные, получим с учетом (2.4):

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x (F/m) dx,$$

откуда

$$v^2 - v_0^2 = (2F/m)(x - x_0),$$

то есть

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}(x - x_0)}. \quad (2.11)$$

Последняя зависимость $v = v(x)$ также является первым интегралом ДУ (2.3). Подставляя (2.11) в (2.10) и разделяя переменные, получим:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}(x - x_0)}} = \int_0^t dt. \quad (2.12)$$

Это закон движения, или второй интеграл ДУ (2.3), или решение задачи (2.3) – (2.4), аналогичное решению (2.4).

Например, для $x_0 = v_0 = 0$, $m = 2F$ из (2.4) получим: $x = t^2/4$. Вычисляя интеграл (2.12) придем к выражению:

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = \int_0^t dt,$$

откуда $2\sqrt{x} = t$ или $x = t^2/4$.

Пример 2.3. Найти максимальную высоту подъема тела массой m , брошенного вверх со скоростью v_0 , пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение. Проектируя основное уравнение динамики

$$ma = P$$

на ось Ox , направленную вверх – по движению точки, получим:

$$m\ddot{x} = -mg$$

или

$$\ddot{x} = -g . \quad (\text{а})$$

Решим уравнение (а) при заданных начальных условиях

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (\text{б})$$

двумя рассмотренными выше способами.

Первый способ. Зависимости (2.7) – (2.8) для нашей задачи примут вид

$$v = v_0 - gt , \quad (\text{в})$$

$$x = v_0 t + (1/2)gt^2 . \quad (\text{г})$$

Рассмотрим (в) и (г) в момент времени $t = T$, соответствующий достижению максимальной высоты подъема H :

$$\begin{cases} 0 = v_0 - gT ; \\ H = v_0 t + (1/2)gT^2 . \end{cases}$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных T и H , найдем: $T = v_0/g$, $H = v_0^2/(2g)$.

Второй способ. Уравнение (2.11) для нашей задачи примет вид:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gx} .$$

Подставляя $x = H$ и $v = 0$, получим: $H = v_0^2/(2g)$.

Ответ: $H = v_0^2/(2g)$.

2.2.2. Интегрирование ДУ движения для случая $F = F(t)$

Уравнение (2.3) задачи Коши с помощью первой подстановки $a = dv/dt$ приводится к системе двух ДУ, аналогичных (2.5) и (2.6). По аналогии с (2.7) и (2.8) получим первый интеграл – закон изменения скорости и второй интеграл – закон движения:

$$v = v_0 + (1/m) \int_0^t F(t) dt ,$$

$$x = x_0 + v_0 t + (1/m) \int_0^t \left(\int_0^t F(t) dt \right) dt .$$

2.2.3. Интегрирование ДУ движения для случая $F = F(x)$

Уравнение (2.3) задачи Коши с помощью второй подстановки $a = vdv/dx$ позволяет получить первый интеграл – аналогичный (2.11):

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx}$$

и второй – аналогичный (2.11):

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx}} = \int_0^t dt .$$

Пример 2.4. Найти закон движения точки массой m , упруго закрепленной на пружинке с жесткостью c , при начальных условиях: $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение. Движение точки происходит под действием упругой силы пружины, направленной к положению равновесия и равной $F = -cr$ (рис. 2.3).

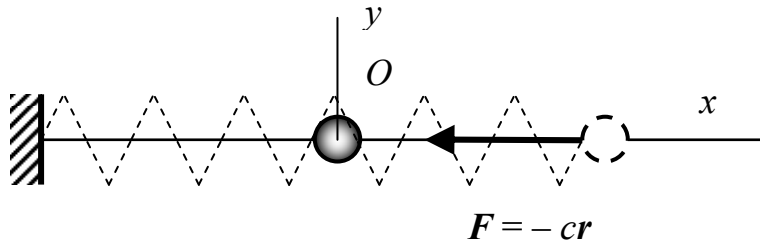


Рис. 2.3

Проектируя основное уравнение динамики $ma = -cr$ на ось Ox , вдоль которой происходит движение, и выбирая начало отсчета на конце недеформированной пружины, получим ДУ движения точки:

$$ma = -cx .$$

Воспользовавшись второй подстановкой и умножив обе части уравнения на dx , найдем первый интеграл:

$$\int_0^v v dv = -(c/m) \int_a^x x dx$$

или

$$v^2/2 = -(c/m)(x^2/2 - x_0^2/2),$$

откуда

$$v = (c/m)(x_0^2 - x^2).$$

Подставляя $v = dx/dt$ и разделяя переменные, получим:

$$\int_{x_0=a}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \int_0^t dt,$$

$$\arcsin \frac{x}{x_0} \Big|_{x_0}^x = \sqrt{(c/m)} \cdot t,$$

$$\arcsin(x/x_0) - \pi/2 = \sqrt{(c/m)} \cdot t,$$

откуда

$$x = a \sin(\omega t + \pi/2) = a \cos \omega t,$$

где $a = x_0$, $\omega = \sqrt{(c/m)}$.

Ответ: $x = a \sin(\omega t + \pi/2) = a \cos \omega t$, где $a = x_0$, $\omega = \sqrt{(c/m)}$.

Пример 2.5. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость падения тела на Землю с высоты H , если сила его притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра Земли, а начальная скорость тела равна нулю.

Решение. Проектируя основное уравнение динамики на ось Ox , направленную вниз – по движению тела, и выбирая начало отсчета в центре Земли, получим:

$$ma = F_x = k^2/(x^2). \quad (a)$$

На поверхности Земли при $x = \pm R$ сила притяжения равна весу тела: $k^2/(R^2) = mg$, откуда

$$F_x = (mgR^2)/(x^2),$$

где R – радиус Земли.

Подставляя в (a) и применяя вторую подстановку $a = vdv/dx$, получим:

$$v dv/dx = (gR^2)/(x^2).$$

Разделяя переменные и интегрируя, придем к выражению:

$$\int_{v=0}^{v=V} v dv = (gR^2) \int_{-R-H}^{-R} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx,$$

откуда

$$V^2 = (2gR^2) \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-R-H}^{-R} = (2gR^2) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right) = \frac{2gRH}{(R+H)},$$

и искомая скорость падения тела будет равна:

$$V = \sqrt{(2gRH)/(R+H)}.$$

Отметим, что предел этого выражения

$$\lim_{H \rightarrow \infty} V = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6370000} = 11,2 \text{ км/сек}$$

равен *второй космической скорости*.

Нетрудно убедиться, что ньютоновское поле тяготения является потенциальным – см. главу 8 и для него выполняется закон сохранения механической энергии, а значит можно рассмотреть обратную задачу. То есть тело, которому у поверхности Земли будет сообщена такая скорость, покинет поле ее тяготения и станет искусственной планетой Солнечной системы

Ответ: $V = \sqrt{(2gRH)/(R+H)}.$

2.2.4. Интегрирование ДУ движения для случая $F = F(v)$

В этом случае рекомендуется пользоваться следующим правилом:

- 1) если в задаче дано или нужно найти время t , применять первую подстановку $a = dv/dt$;
- 2) если в задаче можно обойтись без определения времени, следует применять вторую подстановку $a = vdv/dx$.

Пример 2.6. Найти максимальную высоту подъема тела массой m , брошенного вверх со скоростью v_0 , если сила сопротивления воздуха $R = \alpha mgv^2$.

Решение. Проектируя основное уравнение динамики:

$$ma = P + R,$$

на ось Ox , направленную вверх – по движению тела, и учитывая, что $R = -\alpha mgvv$, получим ДУ:

$$ma = -mg - \alpha mgv^2,$$

которое с помощью второй подстановки $a = vdv/dx$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\int_{v_0}^{v=0} \frac{v dv}{1 + \alpha v^2} = -g \int_{x_0=0}^H dx,$$

или

$$\frac{1}{2\alpha} \int_{v_0}^0 \frac{d(\alpha v^2)}{1 + \alpha v^2} = \frac{\ln(1 + \alpha v^2)}{2\alpha} \Big|_{v_0}^0 = -\frac{\ln(1 + \alpha v_0^2)}{2\alpha} = -gH,$$

откуда искомая высота подъема тела будет равна

$$H = \frac{1}{2\alpha g} \ln(1 + \alpha v_0^2). \quad (\text{а})$$

Чтобы оценить правильность полученного результата, сравним его с решением, полученным ранее в примере 2.3. без учета сопротивления воздуха:

$$H = v_0^2 / (2g). \quad (\text{б})$$

Найдем с этой целью предел выражения (а) при стремлении параметра α , характеризующего силу сопротивления воздуха, к нулю:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha v_0^2)}{2\alpha g} = \frac{0}{0}.$$

Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H = \frac{v_0^2}{2g(1 + \alpha v_0^2)} \Big|_{\alpha=0} = \frac{v_0^2}{2g},$$

что совпадает с результатом (б), найденным ранее.

Ответ: $H = \frac{1}{2\alpha g} \ln(1 + \alpha v_0^2).$

Примечания:

1. Можно сформулировать следующее правило, позволяющее выбрать способ решения второй задачи динамики:

– если в задаче дано $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ либо нужно найти время или закон движения, следует применять первую подстановку $a = dv/dt$;

– если задачу можно решить, не определяя времени или закона движения, следует применять вторую подстановку $a = vdv/dx$.

2. В приведенных примерах рассмотрены простейшие задачи интегрирования уравнений с разделяющимися переменными, но возможны и другие подходы. Например, общая теория решения ДУ с постоянными коэффициентами.

3. В соответствии с рекомендованным в конце 2.1 планом решения задач мы направляем ось Ox или $O\tau$ в сторону движения точки, то есть считаем проекцию ускорения a_x или соответственно a_τ на орт этой оси положительной. Если ускорение окажется отрицательным, как, например, в примере 2.5, то это будет означать, что наше предположение не оправдалось – все обстоит так же, как при определении опорных реакций в статике.

ГЛАВА 3. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ

3.1. Основные понятия

Под *механической системой* понимают совокупность материальных точек, связанных друг с другом.

В зависимости от того, насколько прочно связаны точки системы, они могут образовать тот или иной материальный объект – от абсолютно твердого тела до системы точек, вообще не связанных друг с другом.

Все силы, действующие на i -ю точку системы, делятся на два класса.

Внешними – $F_i^{(e)}$ называются силы, действующие со стороны тел, не входящих в систему.

Внутренними – $F_i^{(i)}$ называются силы, действующие со стороны других тел той же системы.

Например, для механической системы, состоящей из двух тел – Земли и Луны, силы их взаимного притяжения $F_{Зл}$ и $F_{Лз}$, приложенные к Земле и Луне соответственно, будут внутренними силами системы, а силы притяжения, приложенные к ним со стороны Солнца – $F_{Зс}$ и $F_{Лс}$, – внешними.

На основании аксиомы 3 внутренние силы системы попарно равны и противоположно направлены, поэтому *главный вектор и главный момент внутренних сил системы равны нулю*:

$$\begin{aligned} R^{(i)} &= \sum F_i^{(i)} = 0; \\ M_o^{(i)} &= \sum M_o(F_i^{(i)}) = \sum (r_i \times F_i^{(i)}) = 0. \end{aligned}$$

В общем случае предполагается, что положение и движение каждой точки системы может влиять на положение и движение остальных.

Однако даже в том случае, когда точки системы не связаны друг с другом, i -я точка системы не будет свободной, если она не может занимать в пространстве произвольное положение.

Определение. Условия, ограничивающие свободу перемещения точки системы, называются *связями*.

В простейшем случае связь – это линия или поверхность, по которой может перемещаться точка. Уравнение такой поверхности

$$f(x, y, z) = 0 \tag{3.1}$$

называется *уравнением связи*. Этому уравнению должны удовлетворять координаты движущейся точки.

Однако понятие связи в динамике шире, чем в статике. Например, поверхность, представляющая собой связь, может меняться во времени. И в общем случае уравнение связи имеет вид

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \tag{3.2}$$

Таким образом, движение точки, на которую действует сила сопротивления, пропорциональная скорости, также представляет пример точки с *наложенной на нее связью*.

Все силы, действующие на i -ю точку системы, делят, как и в статике, на *активные и реакции связей*.

Реакции связей в динамике, в отличие от статики, зависят не только от активных сил, но и от характера движения тела.

Классификацию связей можно проводить по различным признакам.

По зависимости от скорости связи делятся на:

– *голономные*, или *геометрические*, – уравнения таких связей не зависят от скорости точки;

– *неголономные* – это связи, которые зависят от скорости.

По зависимости от времени связи подразделяются на:

– *стационарные*, которые не зависят явно от времени;

– *нестационарные*, уравнения которых зависят от времени;

В зависимости от конструктивных особенностей различают:

– *неудерживающие*, или *односторонние*;

– *удерживающие*, или *двусторонние* связи.

Примером последней связи служит точка на конце стержня длиной l , закрепленного шарнирно в центре O и вращающегося в плоскости xOy .

Такая геометрическая, стационарная и двусторонняя связь описывается уравнением:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

Если вместо стержня взять гибкую нить, получим пример односторонней связи:

$$x^2 + y^2 - l^2 \leq 0.$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением голономных механических систем.

3.2. Степени свободы системы

Как уже было отмечено, точки системы с наложенными на них связями, являются несвободными.

Определение. Степенью свободы голономной системы называется минимальное число параметров s , определяющих положение системы в пространстве.

Для точки на плоскости $s = 2$, и в качестве параметров можно выбрать ее декартовы координаты, а система N точек на плоскости будет иметь $2N$ степеней свободы.

Если две свободные точки на плоскости ($s = 4$) соединить стержнем, получим систему с тремя степенями свободы, и естественно предположить, что

всякое наложение дополнительной связи уменьшает степень свободы системы на единицу.

Поэтому число степеней свободы плоской статически определимой фермы можно найти по формуле

$$s = 2U - C - C_0, \quad (3.3)$$

где U – число узлов (шарниров) фермы, C – число ее стержней, а C_0 – число опорных связей.

Чтобы однозначно определить положение плоской фигуры, нужно задать уже три параметра: координаты полюса $A - x_A, y_A$ и угол ее поворота вокруг этого полюса – φ .

На практике бывает удобнее пользоваться другим определением, эквивалентным предыдущему:

Определение. Степень свободы системы s равна минимальному числу дополнительных связей, превращающих ее в неподвижную систему.

При определении числа степеней свободы системы необходимо проанализировать ее структуру, уточнить, какие связи в явной или неявной форме уже наложены на систему и какие возможные перемещения системы они допускают. Эти условия надо соблюдать и при наложении дополнительных связей.

Пример 3.1. Определить число степеней свободы фермы (рис. 3.1).

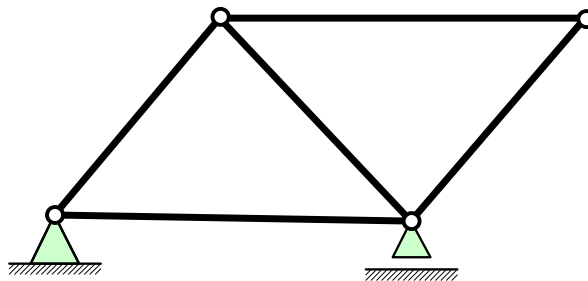


Рис. 3.1

Решение. Число узлов фермы – 4, число ее стержней – 5, число опорных связей – 3. По формуле (3.3) получим:

$$s = 2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0.$$

Ответ: число степеней свободы фермы $s = 0$.

Пример 3.2. Определить число степеней свободы системы, предполагая, что все грузы движутся прямолинейно (рис. 3.2).

Решение. Закрепим тело массой m_1 , то есть наложим на систему дополнительную – линейную связь, препятствующую смещению этого тела. Тогда

диск A с прикрепленной к нему массой m_2 сможет перемещаться только вследствие вращения диска с центром O_2 .

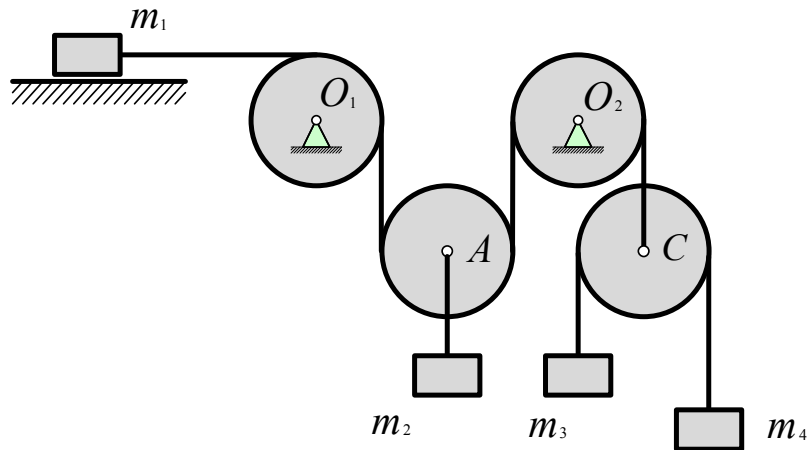


Рис. 3.2

Наложим на систему вторую дополнительную – *моментную* связь, препятствующую вращению этого диска. Тогда грузы с массами m_1 и m_2 будут оставаться неподвижными, а грузы с массами m_3 и m_4 смогут перемещаться вследствие вращения диска с центром C .

Наложим на систему третью дополнительную связь, препятствующую вращению этого диска. Теперь все четыре груза будут неподвижными. Таким образом, $s = 3$.

Ответ: число степеней свободы системы $s = 3$.

Пример 3.3. Определить число степеней свободы системы, состоящей из поступательно движущегося тела A , барабана B и дисков C и D с намотанными на них нитями, если центры последних движутся вертикально (рис. 3.3, а).

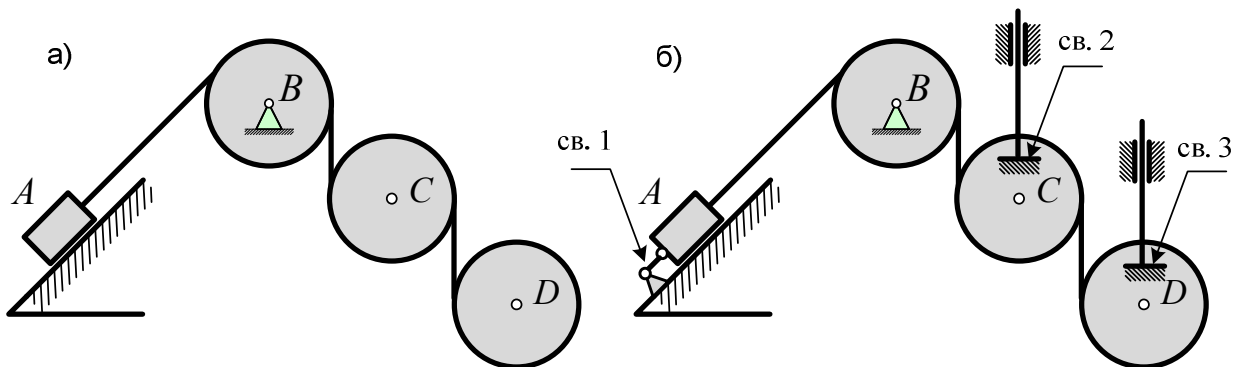


Рис. 3.3

Решение. Закрепим тело A , наложив на систему дополнительную линейную связь, препятствующую его смещению. При этом барабан B также будет оставаться неподвижным, а перемещаться смогут только диски C и D .

Наложим на систему вторую дополнительную – моментную связь, препятствующую вращению диска C .

Фактически это означает, что на него наложена связь в виде скользящей заделки, поскольку по условию задачи этот диск может перемещаться только вертикально. При этом центр диска C также будет оставаться неподвижным, а нить между телами B и C – натянутой и перемещаться сможет только диск D .

Вводя, наконец, третью дополнительную связь, препятствующую вращению диска D , мы получим систему, число степеней свободы которой равно нулю. Таким образом, $s = 3$. При этом с учетом условий задачи и дополнительно наложенных связей система примет вид, показанный на рис. 3.3, б.

Отметим, что было бы неправильно вместо второй дополнительной моментной связи, препятствующей вращению диска C , ввести линейную связь, которая исключает линейное перемещение его центра, поскольку нить не препятствует вращению этого диска по ходу часовой стрелки.

Аналогичное замечание касается и диска D .

Ответ: число степеней свободы заданной системы равно трем: $s = 3$.

3.3. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_i с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), на каждую из которых действует равнодействующая внешних $F_i^{(e)}$ и внутренних $F_i^{(i)}$ сил.

Для каждой точки системы можно записать основное уравнение динамики:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

Проектируя каждое из уравнений (3.4) на оси координат, получим систему $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение системы:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{xi}^{(e)} + F_{xi}^{(i)}, \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{yi}^{(e)} + F_{yi}^{(i)}, \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{zi}^{(e)} + F_{zi}^{(i)}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

Эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями движения системы. Вместе с соответствующими начальными условиями они образуют задачу Коши, решив которую, мы найдем закон движения механической системы.

О том, насколько сложной является поставленная задача, можно судить хотя бы по тому, что к настоящему времени в общем виде она решена только для $n = 2$.

Как же изучать движение систем с большим числом степеней свободы и систем с *распределенными параметрами*, у которых число степеней свободы равно бесконечности?

Во-первых, для решения уравнений (3.5) остаются численные методы, и каждый раз, например, такую задачу решают при стыковке космического корабля с орбитальной станцией.

Во-вторых, очень часто нет необходимости в детальном исследовании движения каждой точки системы и достаточно знания некоторых его интегральных характеристик. Например, при изучении движения потока жидкости или газа.

Эффективным методом исследования движения механических систем является применение *общих теорем динамики*.

Для реализации этого подхода нужно уметь описывать:

- конфигурацию и распределение масс точек системы в пространстве, что носит условное название *геометрии масс*;
- движение центра масс системы;
- движение точек системы вокруг центра масс.

К изучению этих вопросов мы переходим и будем их рассматривать в четырех последующих главах.

Примечание.

В динамике механических систем, как и в динамике точки, можно говорить о постановке первой и второй задачи динамики. Однако если при решении второй задачи для точки трудности начинаются только с вычисления первого интеграла – закона изменения скорости, то в динамике систем сложности могут возникнуть уже на стадии определения ускорений тел, входящих в систему.

ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЯ МАСС СИСТЕМЫ

Как известно из курса сопромата, прочность балки зависит не только от материала, из которого она изготовлена, и площади поперечного сечения, но и от формы этого сечения. Момент сопротивления – основная геометрическая характеристика прочности балки – зависит от момента инерции ее сечения.

Аналогично динамические характеристики механической системы могут определяться законом распределения масс этой системы в пространстве.

4.1. Центр масс системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_i (рис. 4.1) с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

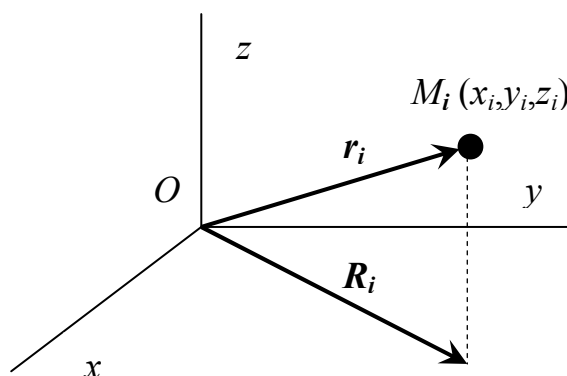


Рис. 4.1

Определение. Центром масс системы называется точка C с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_c = (\sum m_i \mathbf{r}_i) / (\sum m_i). \quad (4.1)$$

Проектируя на оси $Oxyz$, получим координаты центра масс системы:

$$\begin{aligned} x_c &= (\sum m_i x_i) / M, \\ y_c &= (\sum m_i y_i) / M, \\ z_c &= (\sum m_i z_i) / M, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $M = \sum m_i$ – масса системы.

Если точки системы сплошь заполняют некоторый объем V , образуя твердое тело, из формулы (4.1) получим выражение радиус-вектора центра масс этого тела:

$$\mathbf{r}_c = (1/M) \int_V \mathbf{r} dm, \quad (4.3)$$

где $M = \int_V dm$ – масса тела.

Проектируя (4.3) на оси $Oxyz$, получим координаты центра масс этого тела:

$$\begin{aligned}x_c &= (1/M) \int_V x dm, \\y_c &= (1/M) \int_V y dm, \\z_c &= (1/M) \int_V z dm.\end{aligned}\tag{4.4}$$

При этом, очевидно, центр масс тела совпадает с его центром тяжести.

4.2. Моменты инерции относительно центра и оси

Определение. Момент инерции системы относительно центра (оси) равен сумме произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до этого центра (оси).

В частности, момент инерции относительно центра O – полярный равен:

$$J_o = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).\tag{4.5}$$

Осевые моменты инерции:

$$\begin{aligned}J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \\J_z &= \sum m_i R_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Из формул (4.5) и (4.6) следует, что

$$J_x + J_y + J_z = 2J_o,\tag{4.7}$$

то есть полярный момент инерции равен полусумме осевых.

Если точки системы сплошь заполняют некоторый объем V , образуя твердое тело, формулы (4.5) и (4.6) примут вид

$$\begin{aligned}J_o &= \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_V r^2 dm; \\J_x &= \int_V (y^2 + z^2) dm; J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm; \\J_z &= \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V R^2 dm.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Примечания:

1. Если все точки системы M_i лежат в плоскости xOy , то $J_o = J_z$ и из (4.7) следует, что

$$J_x + J_y = J_o;\tag{4.9}$$

2. Радиусом инерции тела относительно центра O (оси Oz) называется величина i_o (i_z), определяемая зависимостью:

$$J_o = M i_o^2, \text{ соответственно } J_z = M i_z^2,$$

где M – масса тела.

3. Из (4.5) и (4.6) следует, что моменты инерции имеют размерность кг м² и поэтому называются моментами второго порядка в отличие от статических моментов, которые входят в числитель формулы (4.2), имеют размерность кг м и называются моментами первого порядка.

4. В формуле (4.2) и далее мы традиционно обозначаем через $M = \sum m_i$ и $M = \int_V dm$ массу всего тела или системы вместо более последовательного обозначения m .

4.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

Теорема. Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями:

$$J_z = J_{\bar{z}} + Md^2. \quad (4.10)$$

Доказательство. Пусть центр тяжести тела в системе $Oxyz$ определяется координатами:

$$\begin{aligned} x_c &= (1/M) \int_V x dm, \\ y_c &= (1/M) \int_V y dm, \\ z_c &= (1/M) \int_V z dm. \end{aligned} \quad (4.4')$$

Введем еще одну систему отсчета с началом в центре C , оси которой параллельны осям первой системы $Oxyz$ (рис. 4.2), а координаты связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_c, \\ y &= \bar{y} + y_c, \\ z &= \bar{z} + z_c. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В системе $\bar{C}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ координаты точки C равны нулю:

$$\bar{x}_c = (1/M) \int_V \bar{x} dm = 0, \quad \bar{y}_c = (1/M) \int_V \bar{y} dm = 0, \quad (4.12)$$

Подставляя (4.11) в (4.8), получим:

$$\begin{aligned} J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm &= \int_V (\bar{x} + x_c)^2 dm + \int_V (\bar{y} + y_c)^2 dm = \int_V (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) dm + \\ &+ 2x_c \int_V \bar{x} dm + 2y_c \int_V \bar{y} dm + (x_c^2 + y_c^2) \int_V dm = J_{\bar{z}} + 2x_c M \cdot \bar{x}_c + 2y_c M \cdot \bar{y}_c + Md^2, \end{aligned}$$

где $d^2 = (x_c^2 + y_c^2)$ – квадрат расстояния между осями z и \bar{z} .

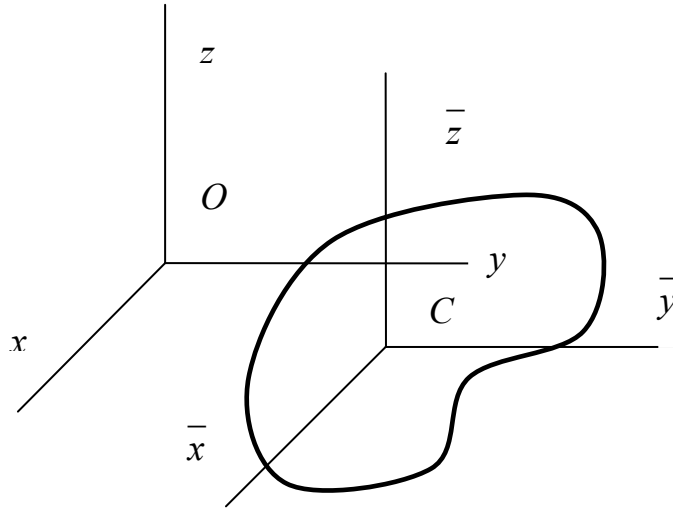


Рис. 4.2

С учетом (4.12) второе и третье слагаемые в последнем выражении равны нулю, откуда и следует соотношение (4.10). Теорема доказана.

4.4. Моменты инерции простейших тел

1. Тонкий однородный стержень. Рассмотрим прямолинейный стержень массой M и длиной l , расположенный в системе координат Oxz , где ось Ox совпадает с осью стержня (рис. 4.3).

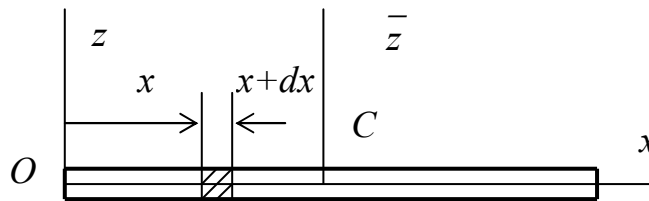


Рис. 4.3

Под стержнем понимают тело, у которого один размер – длина значительно больше двух остальных. Соответственно поперечными размерами стержня можно пренебречь по сравнению с его длиной, и последнее выражение в (4.8) примет вид

$$J_z = \int_V x^2 dm. \quad (4.13)$$

Выберем в качестве dm массу участка стержня, заключенного между двумя сечениями, проведенными на расстоянии x и $x + dx$ от его начала. Тогда $dm = \rho dx$, где $\rho = M/l$ – линейная плотность стержня и (4.13) примет вид:

$$J_z = \int_0^l \rho x^2 dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}. \quad (4.14)$$

В силу (4.10) $J_z = J_{\bar{z}} + Md^2$, где $d = (l/2)$, откуда:

$$J_{\bar{z}} = (Ml^2)/3 - (Ml^2)/4 = (Ml^2)/12.$$

Отметим, что при этом $J_z = J_o$, $J_{\bar{z}} = J_c$.

2. Тонкая прямоугольная пластинка. Рассмотрим однородную пластинку массой M и размерами $a \times b$, лежащую в плоскости xOy (рис. 4.4).

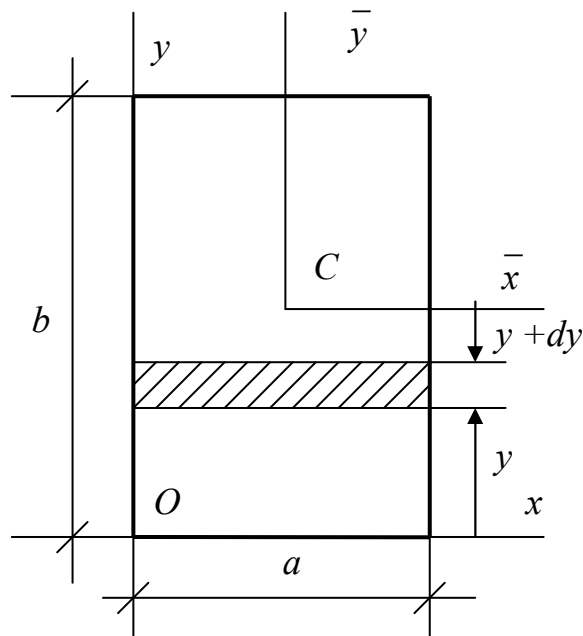


Рис. 4.4

Выберем в качестве dm массу полоски, параллельной оси Ox с площадью $dF = a \times dy$. Тогда, пренебрегая толщиной пластинки и учитывая, что $dm = \sigma dF$, где $\sigma = M/(ab)$ – поверхностная плотность пластинки, получим из (4.8):

$$J_x = \int_V y^2 dm = \int_0^b y^2 \sigma dF = \sigma a \int_0^b y^2 dy = \frac{Ma}{ab} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}. \quad (4.15)$$

Последнюю формулу можно вывести иначе, если разбить пластинку на узкие полоски, параллельные оси Oy с массой Δm . Принимая каждую за стержень, по формуле (4.14) найдем: $\Delta J_x = (\Delta m)b^2/3$. Суммируя, и получим (4.15), где $J_x = \sum \Delta J_x$, $M = \sum \Delta m$.

По аналогии с (4.15) можно найти $J_y = (Mb^3)/3$, а с учетом (4.9) вычислить момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки:

$$J_o = J_z = J_x + J_y = (M/3)(a^2 + b^2). \quad (4.16)$$

Далее, с помощью (4.10) можно вычислить моменты инерции относительно параллельных центральных осей:

$$J_{\bar{x}} = (Mb^2)/12; J_{\bar{y}} = (Ma^2)/12; J_c = J_{\bar{z}} = (M/12)(a^2 + b^2). \quad (4.17)$$

3. Тонкое однородное кольцо. Рассмотрим такое кольцо массой M и радиусом R (рис. 4.5).

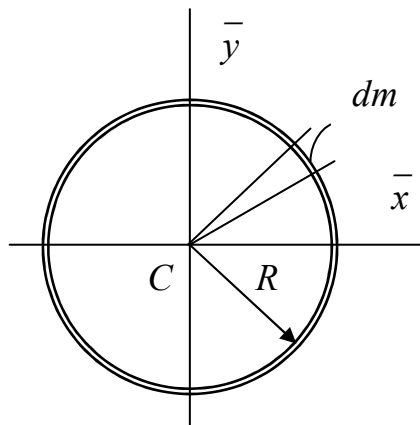


Рис. 4.5

Каждая частица этого кольца с массой Δm , заключенная между двумя лучами, выходящими из центра C , удалена от него на расстояние R и имеет момент инерции $\Delta J_c = \Delta m R^2$, поэтому полярный момент инерции всего кольца равен

$$J_c = \sum \Delta J_c = R^2 \sum \Delta m = MR^2.$$

Далее, воспользовавшись формулой (4.8), можно вычислить момент инерции кольца относительно его диаметра:

$$J_{\bar{x}} = J_{\bar{y}} = J_c/2 = MR^2/2.$$

Примечания:

1. Для кольца $J_c = J_{\bar{z}} = MR^2$.
2. Формула $J_{\bar{z}} = MR^2$ справедлива также для тонкой однородной цилиндрической оболочки, все точки которой равноудалены от этой оси.

4. Тонкая круглая пластинка. Рассмотрим однородный диск массой M и радиусом R , лежащий в плоскости Oxy (рис. 4.6).

Проще всего начать вычисление моментов инерции с полярного момента относительно центра C , совпадающего с центром тяжести пластинки.

Пренебрегая толщиной пластинки и полагая в формуле (4.8) $z = 0$, получим:

$$J_o = \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V r^2 dm. \quad (4.8')$$

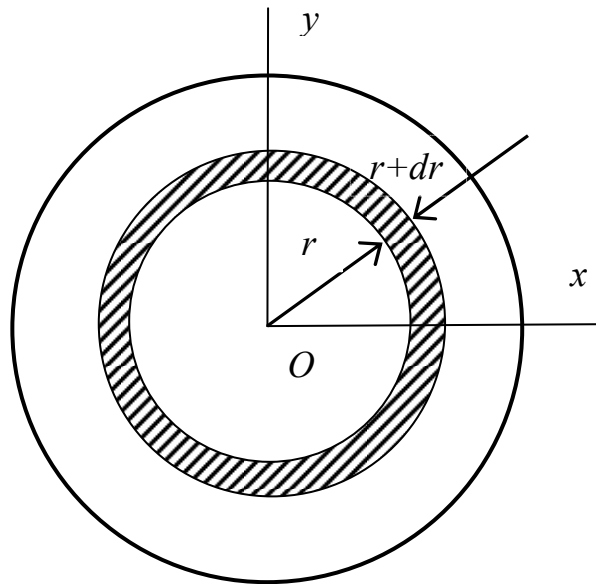


Рис.4.6

Для вычисления последнего интеграла выберем в качестве элементарной массу кольца, заключенного между двумя окружностями с радиусами r и $r + dr$.

При этом $dm = \sigma dF$, где $\sigma = M/F = M/(\pi R^2)$ – поверхностная плотность пластинки, а с точностью до бесконечно малых первого порядка элементарная площадь dF равна площади полоски, полученной из разрезанного кольца: $dF = 2\pi r dr$.

Подставляя в (4.8'), получим:

$$J_o = \int_V r^2 dm = \sigma \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}. \quad (4.18)$$

Теперь, воспользовавшись формулой (4.9), можно вычислить момент инерции диска относительно его диаметра:

$$J_x = J_y = J_c/2 = MR^2/4.$$

Примечания:

1. Для диска в данной системе отсчета $J_o = J_c = J_{\bar{z}} = J_z = MR^2/2$.
2. Формула $J_{\bar{z}} = J_z = MR^2/2$ будет также справедлива для однородного цилиндра, который, очевидно, можно представить состоящим из таких дисков одинакового радиуса.
3. При вычислении моментов инерции плоских фигур можно применять соответствующие формулы из сопромата.

Отметим, что если в сопромате $J_x^{CM} = \int_F y^2 dF$, то в теоретической механике $J_x^{TM} = \int_F y^2 dm$, где $dm = (M/F)dF$, а M и F – соответственно масса и площадь пластинки. Таким образом, между этими моментами инерции существует зависимость:

$$J_x^{TM} = J_x^{CM}(M/F).$$

Например, для балки прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h для центральной горизонтальной оси $J_x^{CM} = (bh^3)/12$, откуда $J_x^{TM} = [(bh^3)/12](M/bh) = (Mh^2)/12$, что совпадает с результатом, подсчитанным по формуле (4.17).

4. Для тел сложной формы помимо моментов инерции относительно центра и осей приходится вводить определение *центробежных моментов инерции*:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_V xydm, \\ J_{xz} &= \int_V xzdm, \\ J_{yz} &= \int_V yzdm, \end{aligned} \tag{4.19}$$

которые, как и в сопромате, для *главных осей инерции* тела равны нулю. Если только ось Oz является главной осью инерции тела, то $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Эти вопросы будут рассмотрены позднее по мере необходимости.

5. Напомним, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось будет главной центральной осью инерции тела, а если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось Oz , перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела.

ГЛАВА 5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

5.1. Количество движения системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_i с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Определение. *Количеством движения точки называется произведение массы этой точки на ее скорость:*

$$\mathbf{q}_i = m_i \mathbf{v}_i .$$

Как следует из определения, количество движения – это вектор, приложенный в точке M_i и направленный по вектору скорости этой точки.

Определение. *Количеством движения системы называется геометрическая сумма количеств движений всех точек этой системы:*

$$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i . \quad (5.1)$$

Чтобы выяснить, где приложен вектор \mathbf{Q} , воспользуемся формулой из предыдущей главы:

$$\mathbf{r}_c = (\sum m_i \mathbf{r}_i) / (\sum m_i) , \quad (4.1')$$

откуда следует, что:

$$(\sum m_i \mathbf{r}_i) = M \mathbf{r}_c , \quad (5.2)$$

где $M = \sum m_i$.

Представим вектор скорости в (5.1) как производную от радиус-вектора:

$$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i (d\mathbf{r}_i/dt) = \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}_i \stackrel{(5.2)}{=} \frac{d}{dt} (M \mathbf{r}_c) = M \mathbf{v}_c .$$

Итак, с учетом формулы (5.2):

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_c , \quad (5.3)$$

то есть *вектор количества движения системы приложен в центре масс этой системы и равен произведению массы системы на скорость центра масс.*

5.2. Теорема для точки

Все общие теоремы динамики выводятся из основного уравнения динамики (1.1):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (1.1')$$

Воспользовавшись первой подстановкой $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, получим дифференциальную форму теоремы:

$$(d/dt)(m\mathbf{v}) = d\mathbf{q}/dt = \mathbf{F}, \quad (5.4)$$

то есть производная по времени от количества движения точки равна равнодействующей всех сил, действующих на эту точку.

Умножая обе части (5.4) на dt и интегрируя по времени в промежутке от t_1 до t_2 , получим интегральную форму теоремы об изменении количества движения точки:

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{S}(\mathbf{F}), \quad (5.5)$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ – импульс силы \mathbf{F} , действующей на точку за указанное время.

То есть изменение количества движения точки за промежуток времени от t_1 до t_2 равно импульсу всех сил, действующих на точку, за это время.

5.3. Теорема для системы

Записывая основное уравнение динамики (3.4) для i -й точки системы:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.4')$$

с помощью первой подстановки $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$ придем к соотношениям, аналогичным (5.4):

$$(d/dt)(m_i \mathbf{v}_i) = d\mathbf{q}_i/dt = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)},$$

суммируя которые по всем точкам системы:

$$(d/dt)(\sum m_i \mathbf{v}_i) = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum \mathbf{F}_i^{(i)},$$

получим по аналогии с (5.4) дифференциальную форму теоремы:

$$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{R}^{(e)} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)}$ – главный вектор внешних сил системы. Напомним, что главный вектор внутренних сил системы равен нулю: $\mathbf{R}^{(i)} = \sum \mathbf{F}_i^{(i)} = 0$.

Итак, справедлива теорема.

Теорема. Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил.

Проектируя (5.6) на оси координат, получим:

$$dQ_x/dt = R_x^{(e)}, dQ_y/dt = R_y^{(e)}, dQ_z/dt = R_z^{(e)}, \quad (5.7)$$

то есть производная по времени от проекции вектора количества движения системы на какую-либо ось равна проекции главного вектора внешних сил на ту же ось.

Следствие. Из формул (5.6) и (5.7) следует:

- 1) если $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{Q} = \text{const}$,
- 2) если $R_x^{(e)} = 0$, то $Q_x = \text{const}$,

то есть если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось остается постоянной.

Умножая обе части (5.6) на dt и интегрируя по времени в промежутке от t_1 до t_2 , получим интегральную форму теоремы об изменении количества движения системы:

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}^{(e)} dt = \mathbf{S}^{(e)}, \quad (5.8)$$

то есть изменение количества движения системы за промежуток времени от t_1 до t_2 равно главному импульсу всех сил, действующих на систему, за это время.

5.4. Теорема о движении центра масс

Подставляя формулу (5.3) в (5.6), получим:

$$d\mathbf{Q}/dt = d(M\mathbf{v}_c)/dt = M\mathbf{a}_c = \mathbf{R}^{(e)},$$

где \mathbf{a}_c – ускорение центра масс системы.

Полученное соотношение:

$$M\mathbf{a}_c = M(d\mathbf{v}_c/dt) = \mathbf{R}^{(e)} \quad (5.9)$$

по форме и с точки зрения математики не отличается от основного уравнения динамики для материальной точки (1.1):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1.1')$$

откуда следует, что и законы движения этих двух объектов будут одинаковы, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, на которую действует главный вектор внешних сил.*

Проектируя (5.9) на оси координат, получим:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= M \frac{d\dot{x}_c}{dt} = R_x^{(e)}, \\ M\ddot{y}_c &= M \frac{d\dot{y}_c}{dt} = R_y^{(e)}, \\ M\ddot{z}_c &= M \frac{d\dot{z}_c}{dt} = R_z^{(e)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Следствие. Из формул (5.9) и (5.10) следует:

- 1) внутренние силы не влияют на движение центра масс системы;
- 2) если $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}$, то $d\mathbf{v}_c/dt = 0$, откуда

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{c0} = \mathbf{const},$$

то есть центр масс движется равномерно и прямолинейно. В частности, если $\mathbf{v}_{c0} = \mathbf{0}$, то $d\mathbf{r}_c/dt = 0$, откуда

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_{c0} = \mathbf{const},$$

то есть центр масс находится в состоянии покоя.

Таким образом, *если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя;*

- 3) если $R_x^{(e)} = 0$, то $v_{cx} = \dot{x}_c = \dot{x}_{c0} = \mathbf{const}$, то есть вдоль соответствующей оси центр масс системы движется прямолинейно и равномерно. В частности, если $\dot{x}_{c0} = 0$, то $dx_c/dt = 0$, откуда

$$x_c = x_{c0} = \mathbf{const},$$

то есть координаты центра масс системы вдоль соответствующей оси остаются неизменными.

Итак, *если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то вдоль этой оси центр масс системы движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.*

Пусть, например, ракета находится в состоянии относительного покоя за пределами Солнечной системы. После запуска двигателя корпус ракеты улетает в одну, а сгоревшее топливо – в противоположную сторону на миллионы километров от точки старта, но центр масс системы остается в первоначальном положении в состоянии покоя.

Пример 5.1. По горизонтальной платформе, движущейся со скоростью v_0 , перемещается тележка с относительной скоростью u_0 . Найти скорость платформы при торможении тележки, если их массы равны M и m соответственно.

Решение. На систему, состоящую из платформы весом $P = Mg$ и тележки весом $p = mg$, помимо этих двух сил действует реакция дорожного полотна N , приложенная к основанию платформы (рис. 5.1).

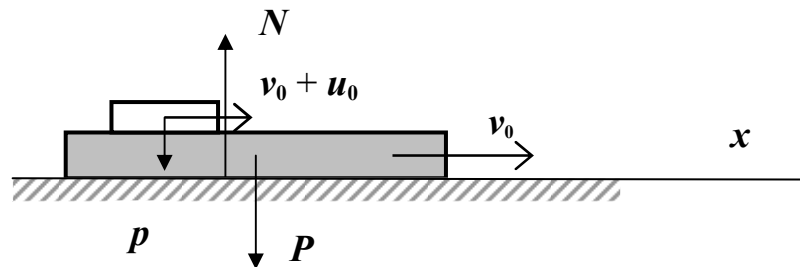


Рис. 5.1

Главный вектор внешних сил системы: $R = P + p + N$ перпендикулярен оси Ox , поэтому $R_x^{(e)} = 0$ и справедливо следствие из теоремы об изменении количества движения системы (5.7):

$$dQ_x/dt = R_x^{(e)}, \quad (5.7')$$

в соответствии с которым

$$Q_{x0} = Q_{xt}. \quad (a)$$

В начальный момент времени абсолютная скорость тележки складывается из переносной, равной скорости платформы, и относительной – u_0 , поэтому при $t = 0$ количество движения системы равно:

$$Q_{x0} = Mv_0 + m(v_0 + u_0). \quad (б)$$

В момент времени t , соответствующий окончанию торможения тележки, количество движения системы равно:

$$Q_{xt} = (M + m)v, \quad (в)$$

где v – искомая скорость платформы.

Приравнивая (б) и (в), получим:

$$v = [Mv_0 + m(v_0 + u_0)]/(M + m) = v_0 + mu_0/(M + m).$$

Ответ: $v = v_0 + mu_0/(M + m)$.

Примечания:

1. То обстоятельство, что внутренние силы не влияют на движение центра масс, не означает, что они не могут вызвать появление внешних сил. Примером служит работа двигателя внутреннего сгорания автомобиля, который вызывает появление внешних движущих сил, – ими являются силы трения с дорожным покрытием, приложенные к его ведущим колесам.

2. В физике импульсом точки называется произведение массы точки на ее скорость, то есть то, что в ТМ называется количеством движения, а интегральная форма этой теоремы, носит название *теоремы импульсов*.

3. Теорема об изменении количества движения системы основана на применении первой подстановки $a = dv/dt$.

4. Теорема об изменении количества движения системы позволяет:

- найти первый интеграл, то есть зависимость $v = v(t)$,
- описать движение центра масс системы.

5. Для описания движения системы вокруг центра масс необходимо рассмотрение видоизмененной формы этой теоремы.

5.5. Применение теоремы импульсов в теории удара

5.5.1. Основные понятия. Коэффициент восстановления

Под *ударом* понимают явление, при котором скорости точек тела изменяются на конечную величину в течение бесконечно малого промежутка времени.

Как следует из этого определения, удар сопровождается появлением бесконечно больших сил, которые называются *ударными*. Природа этих сил, связанных с процессом деформирования соударяющихся тел вблизи зоны контакта и распространением в них ударных волн, не является предметом рассмотрения теоретической механики, которая изучает лишь последствия удара.

Закон изменения ударной силы трудно зарегистрировать даже с помощью специальной аппаратуры: как из-за большого значения ее амплитуды, так и вследствие ее малой продолжительности.

Например, по приведенным в [3] данным, продолжительность соударения двух латунных шариков диаметром 26 мм при относительной скорости их сближения 74 мм/с составляет $2 \cdot 10^{-4}$ с.

Гораздо проще зафиксировать не силу, а импульс силы, являющийся интегральной характеристикой взаимодействия, который и входит в теорему об изменении количества движения точки, или теорему импульсов:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt = S(F). \quad (5.5')$$

Выясним, в чем состоит особенность применения этой теоремы к исследованию явления удара.

Пусть материальная точка в момент времени t_1 испытывает удар, сталкиваясь с неподвижной поверхностью либо с другой материальной точкой, и его продолжительность составляет τ .

Напомним, что в последней формуле под силой F мы понимали равнодействующую всех сил, приложенных к материальной точке. И при ударе на точку помимо бесконечно большой ударной силы, импульс которой конечен, действуют обычные силы, например, сила тяжести, трения и другие силы с бесконечно малыми импульсами, которыми во время удара можно пренебречь.

Таким образом, формула (5.5') примет вид:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_1+\tau} F dt = S(F), \quad (5.11)$$

где $S(F)$ – импульс ударной силы.

Аналогичный вид примет формула (5.8):

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_1+\tau} R^{(e)} dt = S^{(e)}, \quad (5.12)$$

где $S^{(e)}$ – главный импульс внешних ударных сил.

Таким образом, теорема об изменении количества движения системы при ударе примет следующий вид.

Изменение количества движения системы за время удара равно главному импульсу ударных сил.

Отметим, также, что поскольку скорости точек системы остаются конечными, а время удара бесконечно мало, то справедливо следующее утверждение.

Перемещения точек системы за время удара равны нулю.

Перейдем к рассмотрению удара материальной точки о неподвижную поверхность.

Пусть в момент времени t_1 точка массы m , имея скорость v_1 , направленную под углом α к нормали n , ударяется о поверхность, а спустя бесконечно малый промежуток времени τ отскакивает от нее со скоростью v_2 , направленной под углом β (рис. 5.2).

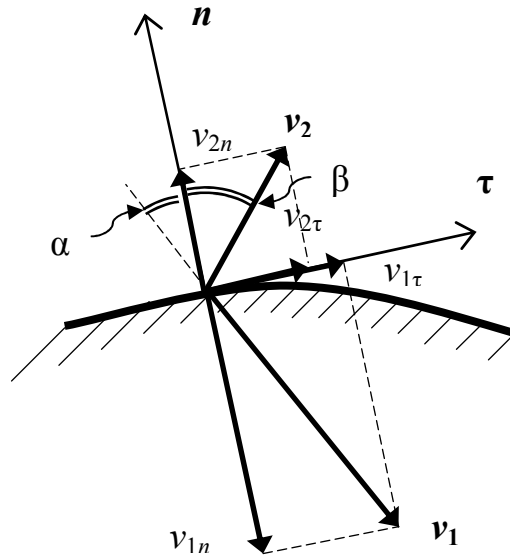


Рис. 5.2

Записывая соотношение (5.11) в проекциях на направление касательной τ и нормали n к этой поверхности, получим:

$$mv_{2\tau} - mv_{1\tau} = S_{\tau} = 0, \quad (5.13)$$

$$mv_{2n} - mv_{1n} = S_n. \quad (5.14)$$

Два последних уравнения содержат три неизвестных: $v_{2\tau}$, v_{2n} и S_n , поэтому чтобы задача стала статически определимой, к ним необходимо добавить еще одно соотношение, отражающее ту или иную гипотезу удара.

Простейшей из них является предпосылка, высказанная И. Ньютоном.

Отношение модулей нормальных проекций относительных скоростей тел после и до удара является постоянной величиной, зависящей только от материала соударяющихся тел.

Это отношение называется коэффициентом восстановления. В нашем случае он равен:

$$k = v_{2n} / |v_{1n}| \quad \text{или} \quad v_{2n} = -k v_{1n}. \quad (5.15)$$

Этот коэффициент характеризует упругие свойства системы и ее способность к восстановлению после удара.

При $k = 1$ удар называется *абсолютно упругим*, а при $k = 0$ – *абсолютно неупругим*. Для реальных физических тел

$$0 < k < 1.$$

Если вспомнить, что скорость падения материальной точки с высоты h без учета сопротивления воздуха находится по формуле:

$$v = \sqrt{2gh},$$

то нетрудно понять, что этот коэффициент можно определить экспериментально, воспользовавшись соотношением:

$$k = v_{2n}/v_{1n} = \sqrt{h_2/h_1},$$

где h_1 – высота, с которой шарик без начальной скорости падает на плиту, а h_2 – высота, на которую он поднимется, отскочив от плиты после удара.

С учетом (5.14) и (5.15) нормальная составляющая ударного импульса равна:

$$S_n = -mv_{1n} + mv_{2n} = -mv_{1n}(1 - v_{2n}/v_{1n}) = -mv_{1n}(1 + k), \quad (5.16)$$

где $v_{1n} < 0$, $S_n > 0$.

Из соотношения (5.13) следует, что

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}, \quad (5.17)$$

а поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha = -v_{1\tau}/v_{1n},$$

$$\operatorname{tg} \beta = v_{2\tau}/v_{2n},$$

то с учетом (5.17):

$$\operatorname{tg} \beta = -v_{1\tau}/kv_{1n} = \operatorname{tg} \alpha / k.$$

5.5.2. Прямой центральный удар двух тел

Прямой и центральным называется такой удар двух тел, при котором точка контакта этих тел лежит на одной прямой, соединяющей их центры масс, а скорости последних также направлены вдоль этой прямой.

Обозначим скорость центра масс – C_1 и массу первого тела через u и m , а второго тела – соответственно v и M (рис. 5.3).

Направив ось Ox по направлению скорости первого тела, можно записать условие, при котором удар произойдет, в виде:

$$u_{1x} > v_{1x}.$$

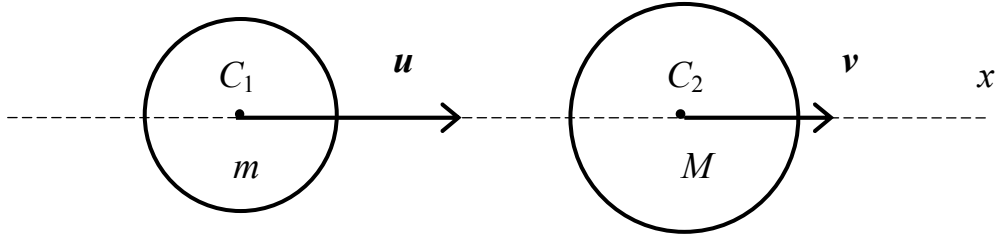


Рис. 5.3

Для определения скоростей тел после удара воспользуемся теоремой импульсов (5.12), которая с учетом отсутствия ударных импульсов внешних сил в проекции на ось Ox примет вид:

$$mu_{1x} + Mv_{1x} = mu_{2x} + Mv_{2x}. \quad (5.18)$$

Дополняя последнее уравнение значением коэффициента восстановления, равным отношению относительных скоростей тел после и до удара:

$$k = (v_{2x} - u_{2x}) / (u_{1x} - v_{1x}), \quad (5.19)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m - kM)u_{1x} + M(1 + k)v_{1x}}{M + m}, \\ v_{2x} &= \frac{m(1 + k)u_{1x} + (M - km)v_{1x}}{M + m}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Для определения ударного импульса применяем теорему импульсов к первому телу:

$$S_x = m(u_{2x} - u_{1x}),$$

откуда с учетом (5.20) получим:

$$S_x = -(1 + k) \frac{mM}{M + m} (u_{1x} - v_{1x}). \quad (5.21)$$

Рассмотрим частные случаи:

1. *Абсолютно упругий удар* ($k = 1$). Формулы (5.20) и (5.21) примут вид:

$$\begin{aligned}u_{2x} &= \frac{(m - M)u_{1x} + 2Mv_{1x}}{M + m}, \\v_{2x} &= \frac{2mu_{1x} + (M - m)v_{1x}}{M + m}, \\S_x &= -2\frac{mM}{M + m}(u_{1x} - v_{1x}).\end{aligned}\tag{5.22}$$

При этом в случае, если массы тел равны, то из (5.22) следует:

$$u_{2x} = v_{1x}, v_{2x} = u_{1x},$$

то есть тела при ударе обмениваются скоростями и количествами движения.

2. *Абсолютно неупругий удар* ($k = 0$). Уравнения (5.20) принимают вид:

$$u_{2x} = v_{2x} = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{m + M},\tag{5.23}$$

то есть после удара тела двигаются совместно с одной скоростью. Ударный импульс (5.21) равен:

$$S_x = -\frac{mM}{M + m}(u_{1x} - v_{1x}),$$

то есть будет вдвое меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

ГЛАВА 6. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ

6.1. Кинетический момент точки и системы

Рассмотрим отрезок траектории точки M с радиус-вектором \mathbf{r} и массой m , которая движется со скоростью \mathbf{v} (рис. 6.1).

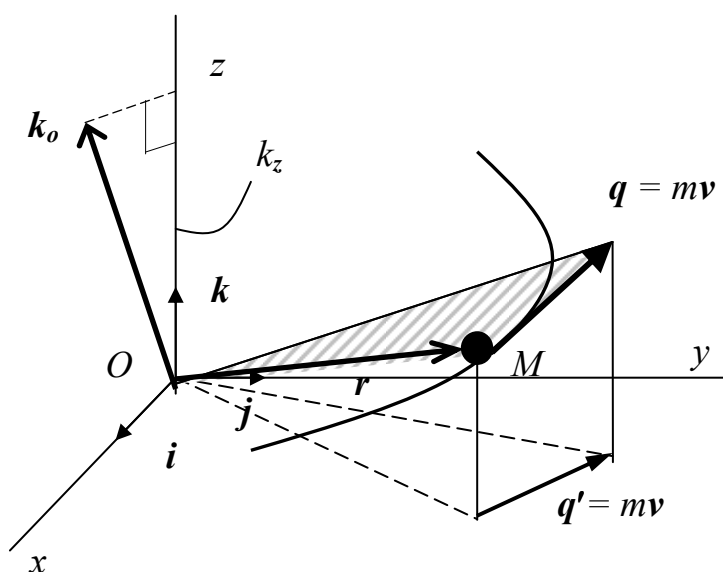


Рис. 6.1

Определение. Вектор-моментом количества движения точки относительно центра O , или кинетическим моментом, называется вектор \mathbf{k}_o , который приложен в этом центре и равен векторному произведению радиус-вектора \mathbf{r} и вектора количества движения точки $m\mathbf{v}$:

$$\mathbf{k}_o = m \mathop{\text{rot}}_O(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Как видим, это определение аналогично определению вектор-момента вектора силы.

Определение. Чтобы найти кинетический момент k_z точки относительно оси, нужно спроектировать вектор количества движения $m\mathbf{v}$ на плоскость, перпендикулярную этой оси, а затем вычислить момент этой проекции $m\mathbf{v}'$ относительно точки пересечения плоскости с осью.

Правило знаков: $k_z > 0$, если выполняется правило правого винта, то есть, смотря навстречу оси, мы видим вращение вектором $m\mathbf{v}'$ плоскости своего действия против хода часовой стрелки.

Напомним, что проекция кинетического момента \mathbf{k}_o относительно центра O на ось Oz равна кинетическому моменту точки относительно этой оси:

$$k_z = \text{пр}_z \mathbf{k}_o = \text{mom}_z(m\mathbf{v}) = \text{mom}_o(m\mathbf{v}^\wedge) = \pm m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{h},$$

где h – плечо проекции вектора количества движения точки на плоскость Oxy .

Определение. Кинетический момент системы относительно центра O равен геометрической сумме кинетических моментов всех точек этой системы относительно этого центра:

$$\mathbf{K}_o = \sum \text{mom}_o(m_i \mathbf{v}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i). \quad (6.1)$$

Определение. Кинетический момент системы относительно оси Oz равен алгебраической сумме кинетических моментов всех точек этой системы относительно этой оси:

$$K_z = \sum \text{mom}_z(m_i \mathbf{v}_i) = \sum (\pm m_i \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{h}_i). \quad (6.2)$$

При этом

$$\mathbf{K}_o = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} + K_z \mathbf{k}.$$

6.2. Теорема для точки

Теорема. Производная от кинетического момента точки относительно центра (оси) равна сумме моментов всех сил, действующих на точку, относительно этого центра (оси):

$$(d/dt) (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \sum \mathbf{M}_o(\mathbf{F}_i), \quad (6.3)$$

$$(dk_x/dt) = \sum M_x(F_i), (dk_y/dt) = \sum M_y(F_i), (dk_z/dt) = \sum M_z(F_i). \quad (6.4)$$

Доказательство. Основное уравнение динамики (1.1):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1.1')$$

умножим слева на радиус-вектор \mathbf{r} и воспользуемся подстановкой $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$:

$$\mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (6.5)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (d/dt) (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) &= (d\mathbf{r}/dt) \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{r} \times (d/dt)(m\mathbf{v}), \end{aligned}$$

поскольку $(\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) = 0$, а $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{F})$, перепишем соотношение (6.5) в виде:

$$(d/dt) (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{F}),$$

откуда и следует соотношение (6.3). Проектируя его на оси координат, мы и получим (6.4).

6.3. Теорема для системы

Запишем соотношение (6.3) для i -й точки системы:

$$(d/dt) (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}).$$

Просуммировав по всем точкам системы, получим:

$$(d/dt) \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}),$$

откуда следует искомое соотношение:

$$d\mathbf{K}_o/dt = \mathbf{M}_o^{(e)}, \tag{6.6}$$

где $\mathbf{M}_o^{(e)} = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)})$ – главный вектор внешних сил.

Проектируя на оси координат, получим:

$$dK_x/dt = M_x^{(e)}, dK_y/dt = M_y^{(e)}, dK_z/dt = M_z^{(e)}. \tag{6.7}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. Производная от кинетического момента системы относительно центра (оси) равна главному моменту внешних сил относительно этого центра (оси).

Следствие. Из формул (6.6) и (6.7) следует:

- 1) если $\mathbf{M}_o^{(e)} = 0$, то $\mathbf{K}_o = \text{const}$;
- 2) если $M_x^{(e)} = 0$, то $K_x = \text{const}$.

Таким образом, если главный момент внешних сил относительно некоторого центра (оси) равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра (оси) остается постоянным.

6.4. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела

Кинетический момент твердого тела. Пусть твердое тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω против хода часовой стрелки.

При этом вектор ω направлен вверх, а его проекция на ось Oz положительна: $\omega_z = \text{пр}_z \omega > 0$.

Точка M_i этого тела, удаленная на расстояние R_i от оси вращения будет иметь линейную скорость $v_i = \omega R_i$, а проекция вектора скорости на направление касательной к траектории будет положительной: $v_{i\tau} = \text{пр}_\tau v_i > 0$.

Вычислим кинетический момент вращающегося тела, воспользовавшись формулами (6.2) и (4.6):

$$K_z = \sum m \omega_z (m_i v_i) = \sum (m_i v_{i\tau} R_i) = \sum (m_i \omega_z R_i^2) = \sum (m_i R_i^2) \omega_z = J_z \omega_z .$$

Итак, кинетический момент тела, вращающегося вокруг оси Oz , равен произведению момента инерции относительно оси вращения на проекцию вектора угловой скорости на эту ось:

$$K_z = J_z \omega_z . \tag{6.8}$$

Дифференциальное уравнение вращения ТТ. Подставляя формулу (6.8) в последнее из соотношений (6.7):

$$dK_z/dt = M_z^{(e)} , \tag{6.7'}$$

получим искомое ДУ вращения ТТ вокруг этой оси:

$$J_z(d\omega_z/dt) = J_z \varepsilon_z = M_z^{(e)} . \tag{6.9}$$

Примечания:

1. Мы рассмотрели две первые теоремы из общих теорем динамики. Приведем для сравнения основные зависимости из этих теорем:

Теорема об изменении количества движения системы	Теорема об изменении кинетического момента системы
$Q_x = M(dx_c/dt) \quad (1)$	$K_z = J_z(d\varphi/dt) \quad (4)$
$(dQ_x/dt) = R_x^{(e)} \quad (2)$	$(dK_z/dt) = M_z^{(e)} \quad (5)$
$Ma_{cx} = R_x^{(e)} \quad (3)$	$J_z \varepsilon_z = M_z^{(e)} \quad (6)$

2. Математически соотношения (1)–(3) и (4)–(6) для ТТ эквивалентны, то есть движение центра масс системы вдоль оси Ox под действием $R_x^{(e)}$ аналогично вращению ТТ вокруг оси Oz под действием $M_z^{(e)}$.

3. Если тело, вращающееся вокруг оси Oz , не является абсолютно твердым и может изменять свою конфигурацию и момент инерции относительно этой оси, системы не будут эквивалентными.

В самом деле, при $R_x^{(e)} = 0$ из (2) и (3) следует, что $\dot{x}_{c0} = \dot{x}_{ct}$, а из (5) и (6) при $M_z^{(e)} = 0$ следует только то, что $K_{z0} = K_{zt}$, откуда:

$$J_{z0}\omega_{z0} = J_{zt}\omega_{zt}. \quad (6.10)$$

Последнее соотношение объясняет поведение танцоров и спортсменов при выполнении пируэта, прыжка в воду или сальто-мортале: группируясь, они уменьшают свой момент инерции, что вызывает увеличение угловой скорости вращения и позволяет сделать максимальное число оборотов. Разгруппировавшись на заключительном этапе и уменьшив тем самым угловую скорость вращения, они создают благоприятные условия для приземления или вхождения в воду.

4. Теорема об изменении кинетического момента системы дает ответы на такие вопросы, как: почему у вертолета Ми-8 помимо основного несущего винта, расположенного над кабиной, на хвосте находится еще один винт, вращающийся в вертикальной плоскости, и почему такого винта нет у вертолета Ка-32? Или почему при падении на землю кошка, как правило, опускается на лапы, а не на спину?

5. Отметим, что в общем случае в 6.4 K_x и K_y отличны от нуля и непостоянны даже при равномерном вращении тела. Последствия этого мы рассмотрим в главе 9.

Общий случай вычисления кинетического момента тела относительно произвольной неподвижной оси приведен в следующем параграфе.

Пример 6.1. Определить ускорение груза A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рис. 6.2, а).

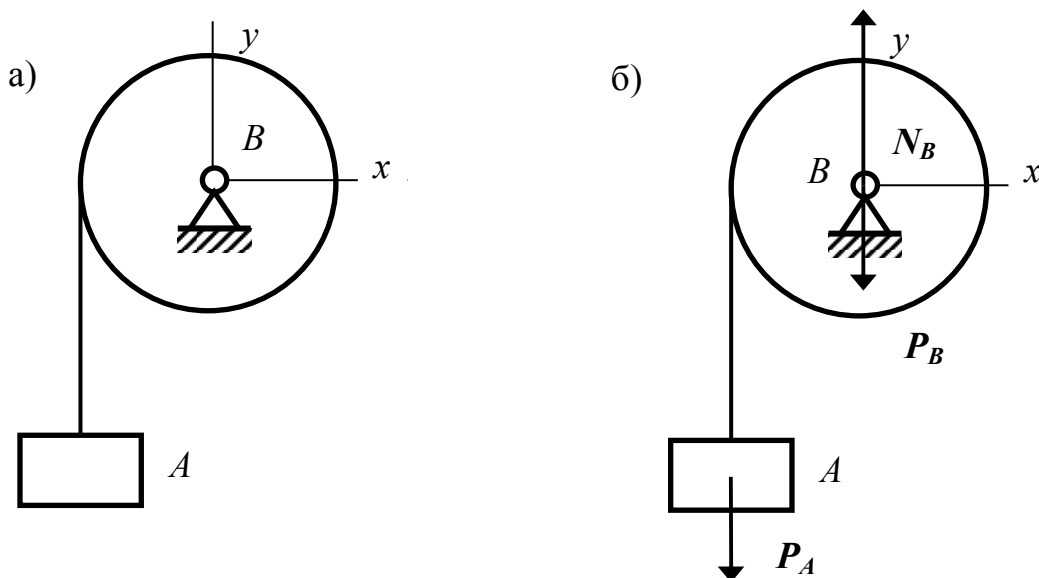


Рис. 6.2

Решение. Данная система состоит из двух тел: поступательно движущегося груза A и вращающегося барабана B .

Кинетический момент системы относительно оси Oz , перпендикулярной плоскости чертежа и совпадающей с осью вращения барабана будет складываться из кинетических моментов этих двух тел:

$$K_z = K_z^A + K_z^B = m_A v_A R + J_z \omega_z, \quad (\text{а})$$

где R – радиус барабана, v_A – скорость тела A , J_z – момент инерции барабана, ω_z – его угловая скорость.

Подставляя в (а) $J_z = (m_B R^2/2)$, $\omega_z = v_A/R$ и полагая $m_A = m_B = m$, получим:

$$K_z = m_A v_A R + (m_B R^2/2)(v_A/R) = (3/2) m v_A R. \quad (\text{б})$$

Внешними силами, действующими на систему, будут P_A – вес тела A , P_B – вес тела B и N_B – реакция подшипника барабана B , при этом момент двух последних относительно оси Oz равен нулю (рис. 6.2, б), поэтому

$$M_z^{(e)} = P_A R = mgR. \quad (\text{в})$$

Подставляя (б) и (в) в теорему об изменении кинетического момента системы

$$(dK_z/dt) = M_z^{(e)}, \quad (6.7')$$

получим: $a_A = (2/3) g$.

Ответ: $a_A = (2/3) g$.

Примечание.

В дальнейшем мы неоднократно будем возвращаться к рассмотренному примеру, решая для сравнения эту задачу другими методами.

6.5. Кинетический момент тела относительно произвольной оси

Рассмотрим точку M_i твердого тела, которое вращается с угловой скоростью ω относительно произвольной неподвижной оси (рис. 6.3.).

Представим вектор ω и радиус-вектор r_i точки M_i в виде:

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k,$$

$$r_i = x_i i + y_i j + z_i k.$$

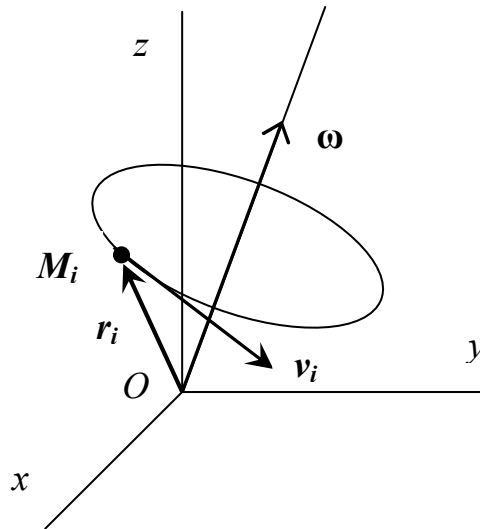


Рис.6.3.

Тогда вектор линейной скорости точки M_i , равный векторному произведению векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_i , можно представить в виде:

$$\mathbf{v}_i = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} (\omega_y z_i - y_i \omega_z) + \mathbf{j} (\omega_z x_i - z_i \omega_x) + \mathbf{k} (\omega_x y_i - x_i \omega_y).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах в правой и левой частях последнего выражения, получим:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \omega_y z_i - \omega_z y_i, \\ v_y &= \dot{y} = \omega_z x_i - \omega_x z_i, \\ v_z &= \dot{z} = \omega_x y_i - \omega_y x_i. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Кинетический момент тела относительно центра O согласно (6.1) равен:

$$\mathbf{K}_o = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} + K_z \mathbf{k} = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \sum m_i$$

$$= \sum m_i (y_i v_z - v_y z_i) \mathbf{i} + \sum m_i (z_i v_x - v_z x_i) \mathbf{j} + \sum m_i (x_i v_y - v_x y_i) \mathbf{k}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах в правой и левой частях последнего выражения и подставляя в полученные соотношения (6.11), получим:

$$\begin{aligned}
 K_x &= \sum m_i (y_i v_z - v_y z_i) = \sum m_i [y_i (\omega_x y_i - x_i \omega_y) - z_i (\omega_z x_i - z_i \omega_x)] = \\
 &= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i (x_i y_i) - \omega_z \sum m_i (x_i z_i) = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\
 K_y &= -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\
 K_z &= -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Или короче:

$$\{\mathbf{K}\} = [\mathbf{J}]\{\boldsymbol{\omega}\},$$

где $\{\mathbf{K}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}\}$ – вектор-столбцы кинетических моментов и угловых скоростей относительно координатных осей, а $[\mathbf{J}]$ – матричная форма *тензора инерции* тела.

Примечания:

1. Формулы (6.12) верны как для неподвижных осей x, y, z – тогда $J_x, J_{xy}, J_{xz}, \dots, J_z \neq \text{const}$, так и для подвижных осей, связанных с вращающимся телом, – тогда все моменты инерции остаются постоянными.

2. Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz :

$$K_x = -J_{xz} \omega_z, K_y = -J_{yz} \omega_z, K_z = J_z \omega_z,$$

и если ось Oz – главная, то центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} равны нулю: $J_{xz} = J_{yz} = 0$, поэтому

$$K_x = K_y = 0, K_z = J_z \omega_z.$$

ГЛАВА 7. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Эта теорема является, пожалуй, самой удобной и важной из общих теорем динамики, позволяя решить большую часть задач, предлагаемых на экзамене.

При этом кинетическая энергия, в отличие от других мер механического движения, является скалярной величиной.

7.1. Кинетическая энергия системы

Определение. Кинетическая энергия точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = (1/2)mv^2.$$

Определение. Кинетическая энергия системы равна арифметической сумме кинетических энергий всех точек этой системы:

$$T = (1/2)\sum m_i v_i^2. \quad (7.1)$$

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия системы равна кинетической энергии поступательно движущегося центра масс плюс кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс:

$$T = (1/2)Mv_c^2 + T_c^{(r)}, \quad (7.2)$$

где M – масса системы, v_c – скорость центра масс, а $T_c^{(r)}$ – кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс.

Доказательство. Рассмотрим механическую систему в системе координат $Oxyz$. Введем еще одну подвижную систему отсчета с началом в центре масс нашей системы, оси которой при движении остаются параллельными осям $Oxyz$.

Положение любой i -й точки системы можно определить радиус-вектором как в первой, так и во второй системе отсчета. При этом между ними будет зависимость:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \overline{\mathbf{r}}_i, \quad (7.3)$$

где \mathbf{r}_i и $\overline{\mathbf{r}}_i$ – радиус-векторы точки M_i в системах $Oxyz$ и \overline{Oxyz} , а \mathbf{r}_c – радиус-вектор центра масс.

Дифференцируя (7.3), приходим к соотношению:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \bar{\mathbf{v}}_i^{(r)}, \quad (7.4)$$

где \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_c – абсолютные скорости точек M_i и C в системе $Oxyz$, а $\bar{\mathbf{v}}_i^{(r)}$ – скорость точки M_i относительно подвижной системы отсчета.

Подставляя (7.4) в (7.1), получим:

$$\begin{aligned} T &= (1/2)\sum m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i^{(r)})^2 = (1/2)\sum m_i v_c^2 + (1/2)\sum m_i (v_i^{(r)})^2 + \mathbf{v}_c \sum m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = \\ &= (1/2)Mv_c^2 + T_c^{(r)}, \end{aligned}$$

где $T_c^{(r)} = (1/2)\sum m_i (v_i^{(r)})^2$ – кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс, а с учетом (4.3):

$$\mathbf{v}_c \sum m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = \mathbf{v}_c (d/dt) (\sum m_i \bar{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{v}_c (d/dt)(M\bar{\mathbf{r}}_c) = 0,$$

поскольку $\bar{\mathbf{r}}_c = 0$. Теорема доказана.

7.2. Кинетическая энергия твердого тела

Определим кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

Поступательное движение. При поступательном движении все точки ТТ имеют геометрически равные скорости, равные скорости центра масс. Поэтому непосредственно по формуле (7.1) получим:

$$T = (1/2)\sum m_i v_i^2 = (1/2)Mv_c^2. \quad (7.5)$$

Вращательное движение. При вращении тела вокруг оси Oz точки M_i , удаленные от нее на расстояние R_i , имеют скорость $v_i = \omega R_i$, поэтому по формуле (7.1) с учетом (4.6):

$$T = (1/2)\sum m_i v_i^2 = (1/2)\sum (m_i R_i^2) \omega^2 = (1/2)J_z \omega^2, \quad (7.6)$$

где J_z – момент инерции относительно оси вращения.

Плоское движение тела. Такое движение представляют суммой двух – поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращения вокруг этого полюса.

Если в качестве последнего выбрать центр масс, можно воспользоваться формулой (7.2), по которой с учетом (7.5) и (7.6) получим:

$$T = (1/2)Mv_c^2 + (1/2)J_c \omega^2, \quad (7.7)$$

где J_c – момент инерции относительно центра масс.

Пример 7.1. Определить кинетическую энергию колеса с массой M , которое движется без проскальзывания со скоростью v_c , принимая его за однородный диск (рис. 7.1).

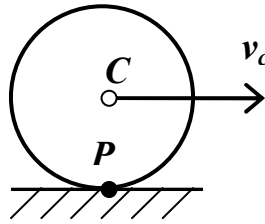


Рис.7.1

Решение. По условию задачи колесо участвует в плоском движении, поэтому, подставляя в формулу (7.7) $\omega = (v_c / R)$ и с учетом (4.18): $J_c = (MR^2/2)$, получим:

$$T = (1/2)Mv_c^2 + (1/2)(MR^2/2)(v_c/R)^2 = (3/4)Mv_c^2. \quad (7.8)$$

В дальнейшем для однородного диска будем пользоваться готовой формулой (7.8), не выводя каждый раз ее заново.

Приведем другой вывод этой формулы.

Как известно, используя понятие мгновенного центра скоростей (МЦС), можно в каждый момент времени свести плоское движение к вращательному.

В нашем примере МЦС колеса будет точка P , где оно контактирует с неподвижной поверхностью.

Момент инерции диска относительно этой точки найдем с помощью формулы (4.10):

$$J_p = J_c + M R^2 = MR^2/2 + MR^2 = (3/2) MR^2.$$

Воспользовавшись формулой (7.6) для кинетической энергии вращающегося тела, получим тот же результат:

$$T = (1/2)J_p\omega^2 = (3/4)Mv_c^2.$$

Ответ: $T = (3/4)Mv_c^2$.

Примечания:

1. Следует обратить внимание, что решение задачи не зависит от радиуса колеса.
2. Кинетическая энергия колеса за счет поступательного движения вдвое больше кинетической энергии, вызванной его вращением.
3. Формула (7.8) справедлива для диска, движущегося без проскальзывания по криволинейной поверхности, а также для диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр P и перпендикулярной к плоскости чертежа.

7.3. Работа силы

7.3.1. Элементарная работа силы и ее мощность

Рассмотрим отрезок траектории точки M , в которой приложена сила F .

Определение 1. Элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы F и вектора элементарного перемещения точки ее приложения $d\mathbf{r}$:

$$\delta A = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}). \quad (7.9)$$

Представив F и $d\mathbf{r}$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \end{aligned}$$

получим *аналитическое* выражение элементарной работы силы, соответствующее не векторному, а *координатному* способу задания движения точки приложения силы:

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (7.9')$$

Наконец, если известен *естественный* способ задания движения точки M и дан закон изменения ее дуговой координаты $s = f(t)$, то формулу (7.9) можно записать в виде:

$$\delta A = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = F_\tau \cdot ds, \quad (7.9'')$$

где F_τ – проекция силы F на направление орта касательной τ .

Формулу (7.9) можно представить в следующем виде:

$$\delta A = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})(dt/dt) = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt)dt = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \cdot dt = N \cdot dt,$$

где

$$N = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = (\delta A/dt) \quad (7.10)$$

– *мощность силы*.

Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 2. Мощность силы равна скалярному произведению вектора силы и вектора скорости точки ее приложения.

Примечания:

1. В определении 1 речь идет не о материальной, а о геометрической точке M и не утверждается, что точка M движется под действием этой силы.
2. Из формулы (7.10) следует, что мощность силы равна работе, совершаемой этой силой в единицу времени.
3. Как видно из (7.9) и (7.10), работа силы измеряется в джоулях, а мощность – в ваттах:

$$[A] = [F] [s] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$$[N] = [F] [v] = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Дж/с} = \text{Вт}.$$

4. Наглядным примером, поясняющим формулу $N = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$, будет следующий: автомобиль «Лада» и трактор «Беларусь» имеют приблизительно одинаковую мощность, но совершенно разный внешний вид, потому что выполняют различные функции. В первом случае – у автомобиля в этой формуле больше второй сомножитель – скорость, а во втором – первый – сила.
5. Причину, по которой элементарную работу силы обозначают не dA , а δA , мы объясним в следующей главе.

7.3.2. Работа силы на конечном перемещении

Пусть точка приложения силы \mathbf{F} перемещается по кривой из первого положения – (1), которое определяется точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, во второе – (2) с точкой $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

***Определение.** Работа силы на конечном перемещении вычисляется как криволинейный интеграл второго рода от элементарной работы:*

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} \delta A = \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}). \quad (7.11)$$

При координатном и естественном способах задания движения формула (7.11) примет соответственно вид:

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{x_1}^{x_2} Xdx + \int_{y_1}^{y_2} Ydy + \int_{z_1}^{z_2} Zdz. \quad (7.11')$$

$$A_{12}(\mathbf{F}) = \int_{(1)}^{(2)} |\mathbf{F}| \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) ds = \int_{(1)}^{(2)} F_{\boldsymbol{\tau}} ds. \quad (7.11'')$$

Примечание.

При вычислении работы силы в соответствии со свойствами криволинейного интеграла второго рода:

$$\int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = - \int_{(2)}^{(1)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r});$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \sum(F_i) \cdot dr = \sum \int_{(1)}^{(2)} (F_i) \cdot dr;$$

$$\int_{(1)}^{(3)} (F \cdot dr) = \int_{(1)}^{(2)} (F \cdot dr) + \int_{(2)}^{(3)} (F \cdot dr).$$

7.3.3. Примеры вычисления работы сил

1. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении. Пусть точка приложения силы F перемещается по прямой M_1M_2 на расстояние S и при этом сила остается постоянной по модулю и направлению (рис. 7.2):

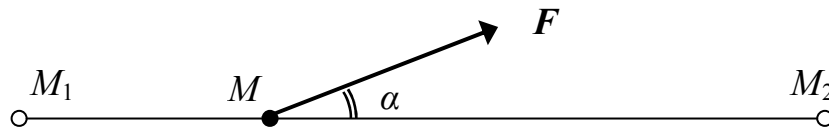


Рис. 7.2.

По формуле (7.11'')

$$A_{12}(F) = \int_{(1)}^{(2)} |F| \cos(F, \tau) ds = \int_{(1)}^{(2)} F_{\tau} \cdot ds = \int_0^S F \cos \alpha ds = F \cos \alpha \cdot S. \quad (7.12)$$

Таким образом, *работа постоянной силы на прямолинейном перемещении равна произведению модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между направлением силы и перемещением.* При этом:

$$A(F) > 0, \text{ если } 0 < \alpha < \pi/2,$$

$$A(F) = 0, \text{ если } \alpha = \pi/2,$$

$$A(F) < 0, \text{ если } \pi/2 < \alpha < \pi.$$

2. Работа силы тяжести. Пусть точка приложения силы тяжести перемещается по кривой из положения M_1 в положение M_2 (рис. 7.3).

В выбранной системе отсчета

$$P = Xi + Yj + Zk,$$

где $X = Y = 0$, а $Z = -mg$.

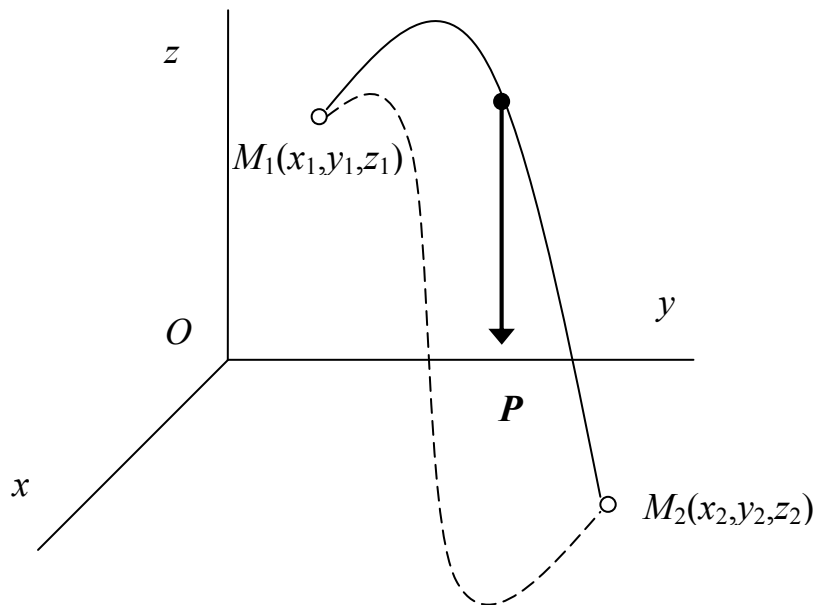


Рис.7.3

Подставляя в (7.11'), получим:

$$A_{12}(\mathbf{P}) = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = mg(z_1 - z_2). \quad (7.13)$$

Таким образом, *работа силы тяжести равна произведению веса тела на разность высот начального и конечного положения груза.*

При этом работа силы тяжести не зависит от вида траектории точки ее приложения.

То есть работа силы на траектории, показанной сплошной линией, равна работе той же силы на траектории, показанной пунктиром.

3. Работа упругой силы. Упругой называют силу, которая пропорциональна по модулю и обратна по направлению радиус-вектору, определяющему точку ее приложения (рис. 7.4):

$$\mathbf{F} = - cr .$$

Такой силой является, например, упругая сила растянутой пружины, рассмотренная в примере 2.4. и в этом случае коэффициент c – это жесткость пружины.

В общем случае такая сила может иметь другую природу и называться *квазиупругой*, или *восстанавливающей*.

Определим работу упругой силы при перемещении точки ее приложения M по кривой M_1M_2 .

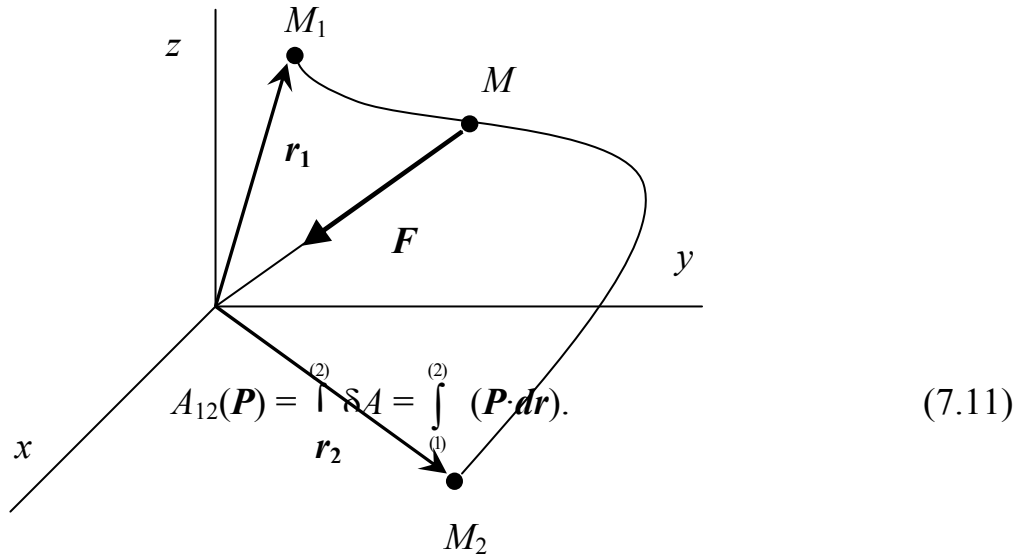


Рис.7.4.

По формуле (7.11):

$$\begin{aligned}
 A_{12}(\mathbf{F}) &= \int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = \int_{M_1}^{M_2} (-cr) dr = (-c) \int_{M_1}^{M_2} r dr = (-c/2) \int_{r_1}^{r_2} d(r^2) = \\
 &= -\frac{cr^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{c}{2} (r_1^2 - r_2^2).
 \end{aligned}$$

Итак, *работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного радиус-вектора*. При этом работа упругой силы также не зависит от вида траектории.

Вернемся к рассмотрению упругой силы растянутой пружины из примера 2.4., выбрав, как и прежде, начало отсчета на конце недеформированной пружины.

Работа упругой силы пружины при ее растяжении из недеформированного состояния будет равна:

$$A_{12}(F) = \int_0^x (-cx) dx = -(cx^2)/2 = -(F \cdot x)/2. \quad (7.14)$$

Последнее выражение означает, что *работа упругой силы равна половине произведения максимального значения силы на величину соответствующего ей удлинения пружины*.

7.4. Работа сил, приложенных к твердому телу

7.4.1. Работа внутренних сил

Теорема. Работа внутренних сил на любых перемещениях твердого тела равна нулю.

Доказательство приведем для плоского движения тела. Пусть к фиксированным точкам A и B плоской фигуры, движущимся со скоростями \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B соответственно приложены внутренние силы $\mathbf{F}_1^{(i)}$ и $\mathbf{F}_2^{(i)}$, которые в силу третьего закона Ньютона равны по модулю и противоположно направлены (рис. 7.5):

$$\mathbf{F}_1^{(i)} = -\mathbf{F}_2^{(i)}. \quad (a)$$

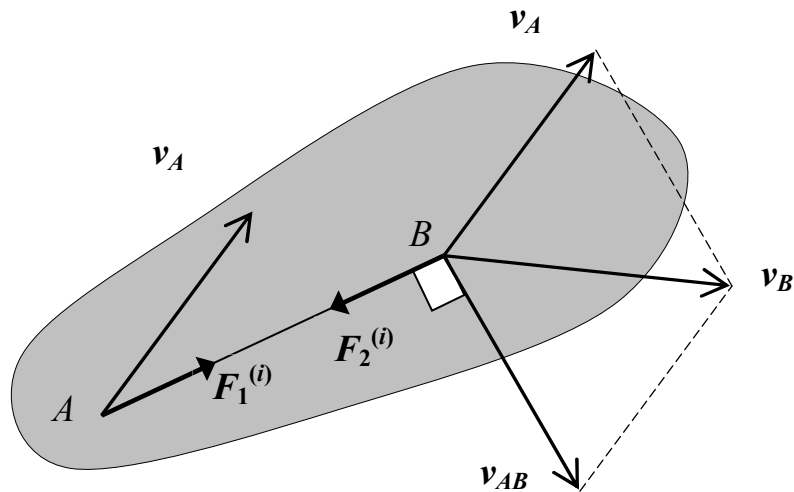


Рис. 7.5

Выбрав в качестве полюса точку A , получим:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}, \quad (б)$$

где \mathbf{v}_{AB} – скорость точки B в ее вращении относительно полюса A , направленная перпендикулярно отрезку AB .

Вычислим элементарную работу сил $\mathbf{F}_1^{(i)}$ и $\mathbf{F}_2^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \delta A(\mathbf{F}_1^{(i)}, \mathbf{F}_2^{(i)}) &= \mathbf{F}_1^{(i)} d\mathbf{r}_A + \mathbf{F}_2^{(i)} d\mathbf{r}_B = (\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_2^{(i)} \mathbf{v}_B) dt \stackrel{(a)}{=} (\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A - \mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_B) dt \stackrel{(б)}{=} \\ &= (\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A - \mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_A - \mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_{AB}) dt = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{F}_1^{(i)} \mathbf{v}_{AB} = 0$ в силу ортогональности векторов $\mathbf{F}_1^{(i)}$ и \mathbf{v}_{AB} .

Теорема доказана.

7.4.2. Работа внешних сил

Рассмотрим, как определяется работа внешних сил, приложенных к твердому телу, при различных случаях его движения.

1. Поступательное движение тела. Элементарная работа сил, приложенных к поступательно движущемуся телу, равна элементарной работе главного вектора внешних сил:

$$\delta A^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} dr_c . \quad (7.15)$$

В самом деле, при поступательном движении твердого тела все его точки имеют геометрически равные скорости, равные скорости центра масс, $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_c$ и поэтому:

$$\delta A^{(e)} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i = (\sum \mathbf{F}_i^{(e)}) d\mathbf{r}_c = \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c .$$

Работа сил на конечном перемещении будет равна интегралу от этого выражения:

$$A_{12}^{(e)} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c .$$

2. Вращательное движение тела. Элементарная работа сил, приложенных к телу, вращающемуся вокруг оси Oz , равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела:

$$\delta A^{(e)} = M_o^{(e)} d\varphi . \quad (7.16)$$

Действительно, при повороте тела вокруг оси Oz на угол $d\varphi$, точки M_i этого тела с приложенными в них силами \mathbf{F}_i получают перемещения $d\mathbf{r}_i$, равные по модулю: $dr_i = R_i d\varphi$, где R_i – расстояние от точки M_i до оси вращения, поэтому с учетом (7.9''):

$$\begin{aligned} \delta A^{(e)} &= \sum \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i = \sum |F_i^{(e)}| \cos(\mathbf{F}_i^{(e)}, d\mathbf{r}_i) |dr_i| = \sum |F_i^{(e)}| \cos(\mathbf{F}_i^{(e)}, d\mathbf{r}_i) R_i d\varphi = \\ &= \sum M_o(\mathbf{F}_i^{(e)}) d\varphi = M_o^{(e)} d\varphi . \end{aligned}$$

Работа сил на конечном перемещении будет равна интегралу от этого выражения:

$$A_{12}^{(e)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_o^{(e)} d\varphi .$$

3. Плоское движение тела. Элементарная работа сил, приложенных к телу, совершающему плоское движение, определяется выражением:

$$\delta A^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} d\mathbf{r}_c + M_c^{(e)} d\varphi, \quad (7.17)$$

где $\mathbf{R}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, приложенных к телу, а $M_c^{(e)}$ – главный момент внешних сил, приложенных к телу относительно центра C .

В самом деле, произвольную плоскую систему сил, приложенных к телу, можно привести к центру, то есть заменить главным вектором $\mathbf{R}^{(e)}$ и главным моментом $M_c^{(e)}$. При этом в качестве центра приведения можно выбрать центр масс.

Плоское движение, как известно, можно представить совокупностью двух движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Работа главного момента на линейных перемещениях поступательного движения равна нулю и отлична от нуля только на угловых перемещениях, откуда и следует эта формула.

7.5. Теорема для точки

Теорема. Изменение кинетической энергии точки при ее перемещении из первого положения во второе равно сумме работ всех сил, действующих на нее, на этом перемещении:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A(\mathbf{F}). \quad (7.18)$$

Доказательство. Запишем основное уравнение динамики для материальной точки M с массой m , движущейся под действием силы \mathbf{F} :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Применив вторую подстановку $\mathbf{a} = (v d\mathbf{v}/d\mathbf{r})$ и умножив обе части на $d\mathbf{r}$, получим:

$$m(v d\mathbf{v}) = \mathbf{F} d\mathbf{r},$$

откуда, внося v под знак дифференциала, получим теорему в форме дифференциалов:

$$d(mv^2/2) = \delta A(\mathbf{F}). \quad (7.19)$$

Поделив последнее соотношение на dt , получим *дифференциальную форму теоремы*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{\delta A(F)}{dt} = N(F), \quad (7.20)$$

а проинтегрировав (7.19), придем к интегральной форме теоремы в виде соотношения (7.18).

7.6. Теорема для системы

Теорема. *Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из первого положения во второе равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек их приложения:*

$$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)} + A_{12}^{(i)}. \quad (7.21)$$

Доказательство. Записывая формулы (7.19) и (7.20) для i -й точки системы и суммируя, получим соотношения:

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}, \quad (7.22)$$

$$dT/dt = N^{(e)} + N^{(i)}, \quad (7.23)$$

а интегрируя (7.22), придем к (7.21). Теорема доказана.

Пример 7.2. Однородный стержень AB длиной l опускается под действием собственного веса, скользя концами по идеально гладким поверхностям. Найти скорость, которую будет иметь точка A стержня при его падении, если в данный момент времени она равняется v_A (рис. 7.6).

Решение. Рассмотрим два состояния системы: первое – (1), где стержень находится под углом 30° к вертикали, и второе – (2), которое горизонтально расположенный стержень занимает в момент падения.

Воспользуемся формулой (7.21), которая с учетом теоремы из 7.4.1. примет вид:

$$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)}. \quad (a)$$

Кинетическую энергию системы в первом положении системы находим по формуле (7.7):

$$T = (1/2)Mv_c^2 + (1/2)J_c\omega^2. \quad (б)$$

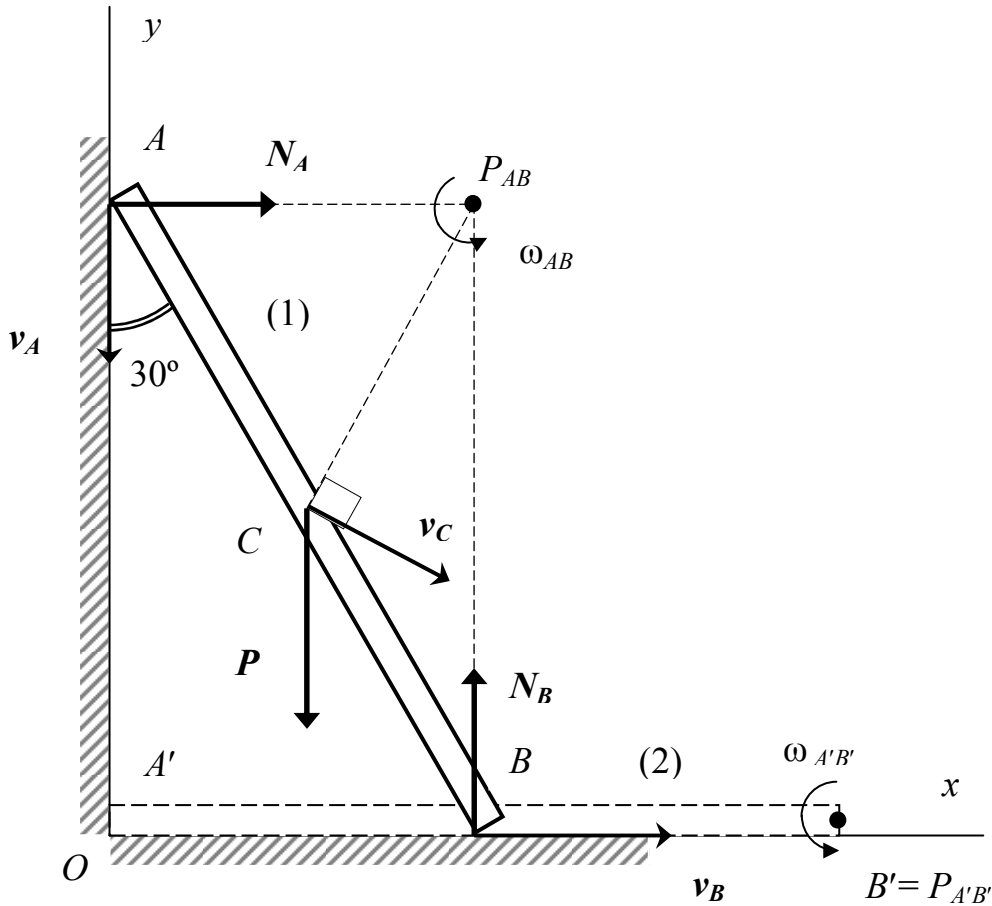


Рис.7.6

Из треугольника ACP_{AB} находим: $CP_{AB} = AP_{AB}$, поэтому $v_C = v_A$. Подставляя в (б) $\omega_{AB} = v_A/AP_{AB} = 2v_A/l$ и $J_C = Ml^2/12$, получим:

$$T_1 = (1/2)Mv_A^2 + (1/2)(Ml^2/12)(2v_A/l)^2 = (2/3)Mv_A^2.$$

Во втором положении системы стержень участвует во вращательном движении относительно точки B' , совпадающей с МЦС, поэтому его кинетическую энергию можно найти по формуле (7.6), которая с учетом (4.14) и $\omega_{A'B'} = v_{A'}/l$ примет вид:

$$T_2 = (1/2)J_z\omega_{A'B'}^2 = (1/2)(Ml^2/3)(v_{A'}/l)^2 = (1/6)Mv_{A'}^2. \quad (в)$$

При перемещении стержня из первого положения во второе реакции N_A и N_B остаются перпендикулярными к перемещениям точек A и B соответственно, поэтому работу совершит только вес стержня:

$$A_{12}^{(e)} = A_{12}^{(e)}(\mathbf{P}) = P(l/2)\cos 30^\circ = Mgl(\sqrt{3}/4).$$

Подставляя в (а), получим:

$$(1/6)M v_{A'}^2 - (2/3)Mv_A^2 = Mgl(\sqrt{3}/4),$$

$$v_{A'}^2 = 4v_A^2 + (3\sqrt{3}/2) gl,$$

откуда:

$$v_{A'} = \sqrt{4v_A^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} gl}.$$

$$\text{Ответ: } v_{A'} = \sqrt{4v_A^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} gl}.$$

Примечания:

1. Теорема об изменении кинетической энергии системы основана на применении второй подстановки при интегрировании ДУ движения: $\mathbf{a} = \mathbf{v}d\mathbf{v}/d\mathbf{r}$.

2. Теорема позволяет найти скорости точек системы, если известны их перемещения и задана нагрузка.

3. Теорема позволяет определить потерю механической энергии системы, если известны скорости точек в двух состояниях системы.

4. Если на систему действует постоянная нагрузка, теорема позволяет определить зависимость $v_A = v_A(s_A)$, а также ускорение груза A .

Пример 7.3. Определить работу сил трения при торможении тележки в примере 5.1 (с.38).

Решение. Рассмотрим два состояния системы: первое – до начала торможения тележки, второе – после его окончания:

$$T_1 = T_1^{(пл)} + T_1^{(тел)} = (1/2) Mv_0^2 + (1/2) m(v_0 + u_0)^2,$$

$$T_2 = T_2^{(пл)} + T_2^{(тел)} = (1/2) (M + m) v^2,$$

где

$$v = v_0 + mu_0/(M + m) \tag{а}$$

– скорость платформы после торможения тележки, найденная в примере 5.1 с помощью теоремы об изменении количества движения системы.

Работа внешних сил, приложенных к системе, равна нулю, поэтому из (7.21) следует, что работа сил трения равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{12}^{(i)} = T_2 - T_1 = (1/2)(M + m)v^2 - (1/2)Mv_0^2 - (1/2)m(v_0 + u_0)^2,$$

откуда, подставляя (а), получим:

$$A_{12}^{(i)} = (1/2)(M + m)[v_0 + mu_0/(M + m)]^2 - (1/2)Mv_0^2 - (1/2)mv_0^2 - (1/2)mu_0^2 - mv_0u_0 =$$

$$= - (mM)u_0^2/2(M + m).$$

Ответ: $A_{12}^{(i)} = - (mM)u_0^2/2(M + m).$

Пример 7.4. Найти ускорение тела A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рис. 7.7, а).

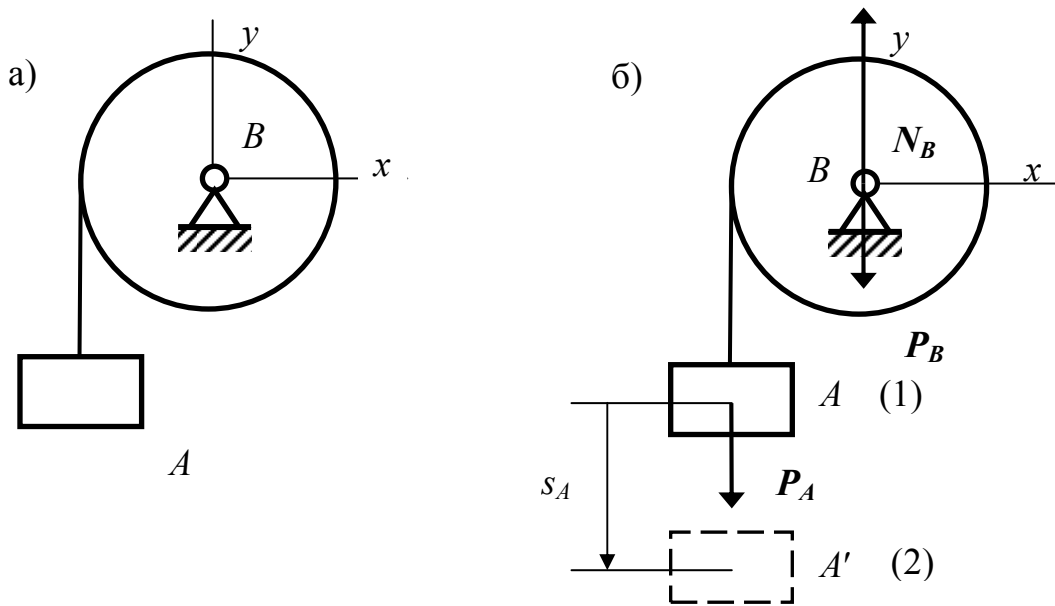


Рис. 7.7

Решение. Груз A движется под действием постоянной силы P_A с постоянным ускорением, которое не зависит от начальной скорости и которую можно считать равной нулю.

Рассмотрим два состояния системы: первое – в состоянии покоя, для которого $T_1 = 0$, и второе – текущее, соответствующее смещению груза A на величину s_A от первоначального положения (рис. 7.7, б), для которого

$$T_2 = T = T^A + T^B = (1/2)m_A v_A^2 + (1/2)(m_B R^2/2)(v_A/R)^2 = (3/4)m v_A^2 .$$

Подставляя T_2 в (7.21) вместе с работой силы P_A , получим соотношение:

$$(3/4)m v_A^2 = m g s_A ,$$

продифференцировав которое, получим:

$$(3/2)v_A a_A = v_A g,$$

откуда $a_A = (2/3)g$.

Ответ: $a_A = (2/3)g$.

Пример 7.5. Система, состоящая из трех тел A , B и C одинаковой массы приходит в движение из состояния покоя. Принимая B и C за однородные цилиндры, определить:

- какую скорость приобретет груз A , пройдя расстояние S_A ,
- ускорение тела A (рис. 7.8).

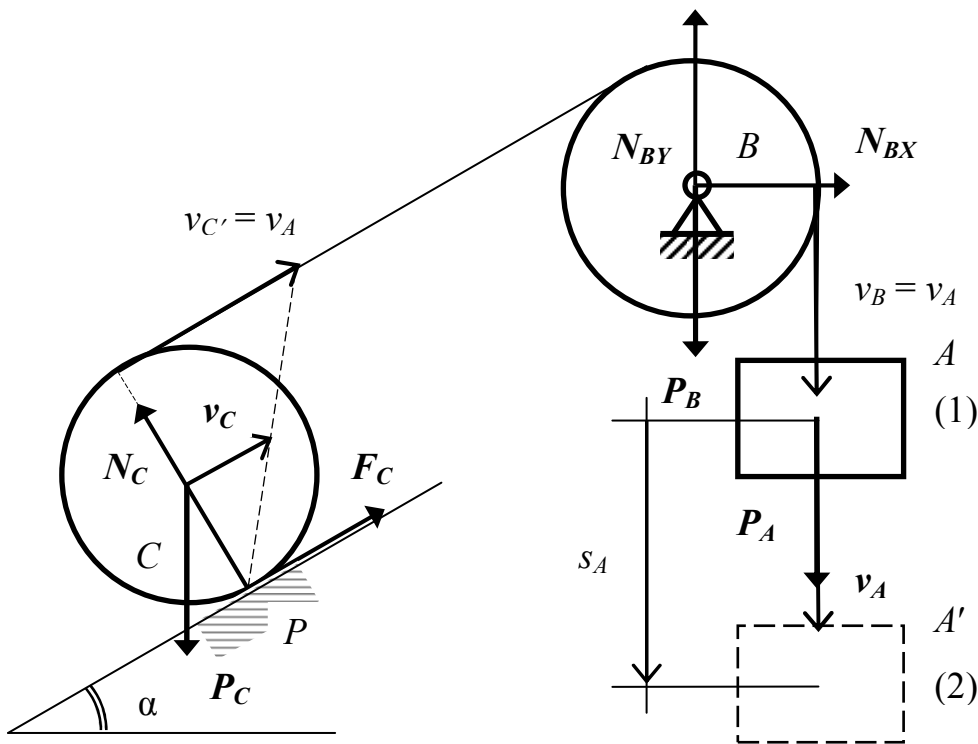


Рис. 7.8

Решение. Прикладываем к системе внешние активные силы (P_A, P_B, P_C) и реакции отброшенных связей (N_{BX}, N_{BY}, N_C, F_C), где F_C – сила трения, приложенная к катушке C .

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы (7.21):

$$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)} + A_{12}^{(i)}, \tag{a}$$

выбрав в качестве первого состояния – состояние покоя, а в качестве второго – текущее состояние, соответствующее смещению груза A на расстояние S_A .

По условию задачи $T_1 = 0$, а

$$T_2 = T_A + T_B + T_C = (1/2)m_A v_A^2 + (1/2)J_B \omega_B^2 + (3/4)m_C v_C^2.$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \omega_B &= (v_B / R_B) = (v_A / R_B), \\ J_B &= (m_B R_B^2) / 2 \text{ и} \\ v_C &= v_C' / 2 = v_A / 2 \end{aligned} \quad (\text{б})$$

и обозначая $m_A = m_B = m_C = m$, получим:

$$T_2 = (15/16) m v_A^2. \quad (\text{в})$$

Переходя к вычислению работы сил, отметим, что

$$A_{12}^{(e)}(N_C, F_C) = 0. \quad (\text{г})$$

В самом деле, точка P , в которой приложены силы N_C и F_C , является мгновенным центром скоростей диска C , то есть

$$\delta A_{12}^{(e)}(N_C, F_C) = N_C \delta r_P + F_C \delta r_P = (N_C + F_C) v_P dt = 0,$$

откуда и следует (г). Итак, справедливо следующее утверждение.

Работа сил, приложенных в точке, являющейся мгновенным центром скоростей, равна нулю.

Работа сил P_B , N_{BY} и N_{BX} равна нулю, поскольку перемещения точек их приложения равны нулю, и таким образом, работу будут совершать только силы P_A и P_C :

$$A_{12}^{(e)} = A_{12}^{(e)}(P_A, P_C) = P_A s_A - P_C s_C \sin \alpha. \quad (\text{д})$$

Чтобы выразить s_C через s_A , воспользуемся соотношением (б), проинтегрировав которое, получим:

$$s_C = s_C' / 2 = s_A / 2,$$

откуда (д) примет вид:

$$A_{12}^{(e)} = A_{12}^{(e)}(P_A, P_C) = P_A s_A - P_C s_C \sin \alpha = m g s_A (1 - 0,5 \sin \alpha). \quad (\text{е})$$

Подставляя (в) и (е) в (а), получим:

$$(15/16) v_A^2 = g s_A (1 - 0,5 \sin \alpha), \quad (\text{ж})$$

откуда придем к искомой зависимости:

$$v_A = \sqrt{(16/15) g s_A (1 - 0,5 \sin \alpha)},$$

и чтобы найти ответ, остается положить в последнем выражении $s_A = S_A$.

Дифференцируя (ж), получим:

$$(15/8) v_A a_A = g v_A (1 - 0,5 \sin \alpha),$$

$$a_A = (8/15)(1 - 0,5 \sin \alpha)g.$$

Ответ: $v_A = \sqrt{(16/15) g S_A (1 - 0,5 \sin \alpha)}$, $a_A = (8/15)(1 - 0,5 \sin \alpha)g$.

Примечание.

При выполнении студентами самостоятельной проектировочной работы на эту тему следует обратить внимание, что величина найденного ими ускорения тела A не должна по определению превышать величину ускорения свободного падения.

ГЛАВА 8. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ СИЛ

8.1. Основные понятия

В этой главе мы дадим ответы на два вопроса, поставленных в предыдущей главе:

- почему элементарная работа силы обозначается через δA , а не через dA ?
- в каком случае работа силы не зависит от вида траектории точки ее приложения?

Рассмотрим область Ω , принадлежащую трехмерному евклидову пространству.

Определение 1. В области Ω задано скалярное поле, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области поставлено в соответствие число $U(x, y, z)$.

Примерами скалярного поля являются поле температур или поле освещенности.

Определение 2. В области Ω задано векторное поле, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области поставлен в соответствие вектор $\mathbf{F}(x, y, z)$, зависящий от координат этой точки.

Если эта зависимость не меняется со временем, поле называется *стационарным*. Примером такого поля будет поле скоростей стационарного потока жидкости.

Важным примером векторных полей являются *силовые поля*. Например, гравитационное или электростатическое.

Определение 3. Стационарное силовое поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ называется *потенциальным*, если работа сил этого поля не зависит от вида траектории и определяется начальным и конечным положением точек их приложения.

Силы такого поля называются *потенциальными* или *консервативными*.

8.2. Потенциальная энергия системы

Рассмотрим систему материальных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в потенциальном силовом поле $\mathbf{F}(x, y, z)$, где на каждую точку действует сила $\mathbf{F}_i(x_i, y_i, z_i)$.

Примем некоторое положение нашей системы за *начальное*, или *нулевое*: $M_i^{(0)}(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)})$.

Определение. Потенциальной энергией системы $\Pi(x, y, z) = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$ называется сумма работ сил потенциального поля, действующих на точки системы при ее перемещении из данного положения в нулевое.

Теорема. Силовое поле $F(x, y, z)$ будет потенциальным, если его можно представить в виде градиента скалярного поля:

$$F(x, y, z) = - \text{grad } \Pi = - [(d\Pi/dx)\mathbf{i} + [(d\Pi/dy)\mathbf{j} + [(d\Pi/dz)\mathbf{k}], \quad (8.1)$$

где $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия системы.

Доказательство. Элементарная работа сил поля, действующих на точки системы, с учетом (8.1) будет равна:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^n [(\partial\Pi/\partial x_i)dx_i + (\partial\Pi/\partial y_i)dy_i + (\partial\Pi/\partial z_i)dz_i] = - d\Pi.$$

Тогда на конечном перемещении

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \delta A = - \int_{(1)}^{(2)} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (8.2)$$

а это согласно определению 3 означает, что поле $F(x, y, z)$ потенциально. Теорема доказана.

Следствия:

- 1) потенциальная энергия системы определяется с точностью до константы;
- 2) силы потенциального поля направлены по нормали к эквипотенциальным поверхностям $\Pi(x, y, z) = \text{const}$ в сторону уменьшения значения потенциальной энергии;
- 3) работа сил потенциального поля на замкнутых траекториях равна нулю;
- 4) для потенциального поля сил:

$$\delta A = d A = - d\Pi.$$

Примечание.

Можно доказать, что условия рассмотренной выше теоремы будут не только достаточными, но и необходимыми.

8.3. Примеры потенциальных силовых полей

Вернемся к примерам вычисления работы сил, приведенным в 7.3.3, и выясним, какие из рассмотренных там полей будут потенциальными.

В соответствии с теоремой и следствиями из 8.2 для этого достаточно убедиться в том, что выполняются соотношения (8.1) или (8.2), либо в том, что $dA = - d\Pi$.

1. Поле силы тяжести. Элементарная работа силы этого поля будет равна:

$$\delta A = (-mg)dz = -d(mgz) = -d\Pi,$$

то есть поле потенциально. Его потенциальная энергия описывается с точностью до константы функцией:

$$\Pi = mgz + \text{const},$$

а эквипотенциальными поверхностями будут плоскости: $z = \text{const}$ (рис. 8.1).

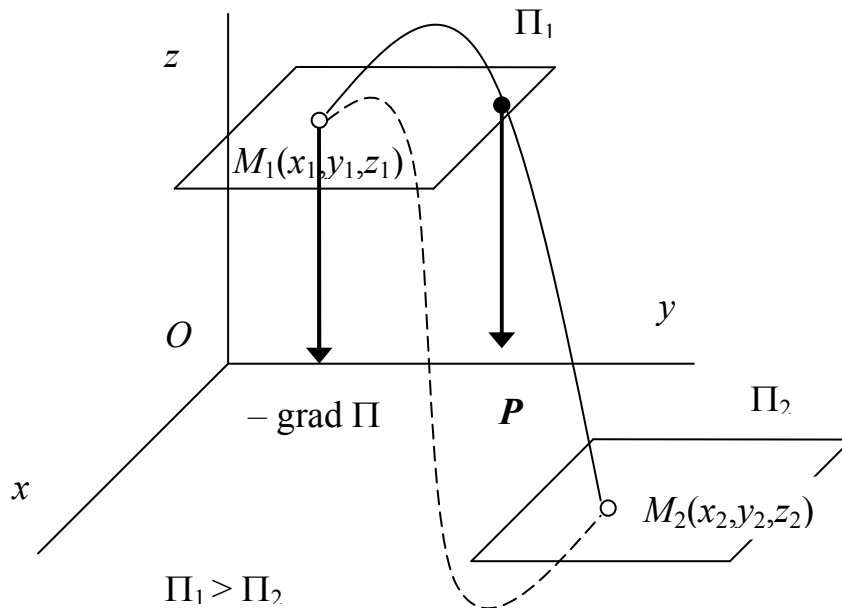


Рис. 8.1

При этом

$$\mathbf{P} = -\text{grad } \Pi = -(\partial\Pi/\partial z)\mathbf{k},$$

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

2. Поле упругой силы. Элементарная работа силы этого поля будет равна:

$$\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} = -c\mathbf{r}d\mathbf{r} = -d(cr^2/2) = -d\Pi,$$

то есть поле потенциально, его потенциальная энергия имеет вид:

$$\Pi = cr^2/2 + \text{const} = (c/2)(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const},$$

а эквипотенциальными поверхностями будут сферы: $r = \text{const}$ (рис. 8.2).

При этом

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{r} = -\text{grad}(cr^2/2),$$

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

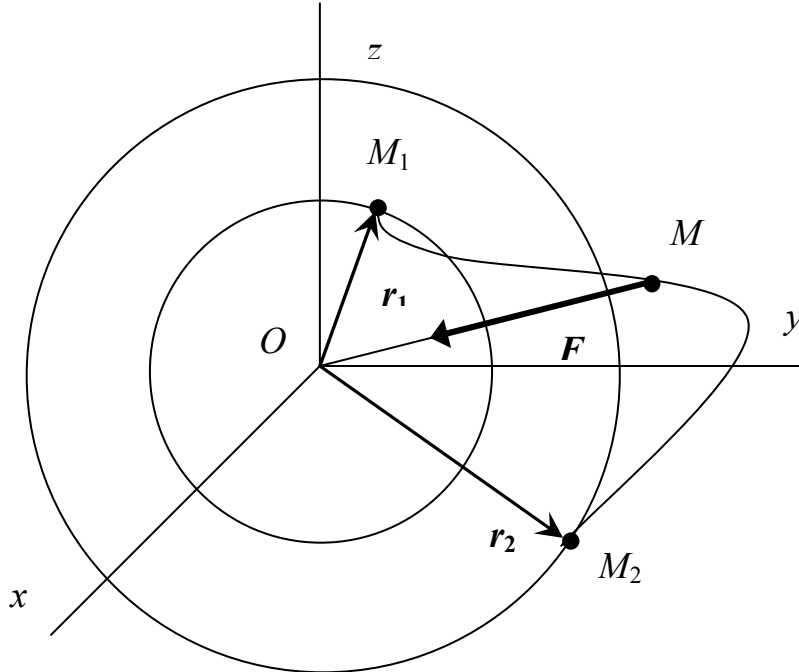


Рис. 8.2.

8.4. Закон сохранения механической энергии

Теорема. При движении системы в потенциальном поле сил ее полная механическая энергия остается постоянной:

$$T + \Pi = \text{const.} \quad (8.3)$$

Доказательство. Теорема об изменении кинетической энергии системы:

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

для потенциального поля сил примет вид:

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2,$$

или

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2$$

откуда и следует (8.3).

ГЛАВА 9. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

В этой главе мы ответим на вопросы, что такое центробежная сила и существуют ли так называемые силы инерции?

Принцип Даламбера, к рассмотрению которого мы приступаем, существенно отличается от общих теорем динамики.

Если последние позволяют получить первый интеграл и продвинуться на один шаг в решении задачи Коши для дифференциального уравнения движения, то принцип Даламбера в математическом аспекте ничем не отличается от основного уравнения динамики.

Однако этот принцип имеет важное методологическое значение, позволяя свести по форме решение первой задачи динамики к задаче статики, более привычной для студентов строительных специальностей.

Кроме того, этот принцип находит эффективное применение совместно с принципом возможных перемещений, рассмотренным в следующей главе.

9.1. Принцип Даламбера для точки

Рассмотрим точку M с массой m , движущуюся под действием силы F . Основное уравнение динамики для этой точки:

$$ma = F \quad (9.1)$$

можно записать в виде:

$$F + \Phi = 0, \quad (9.2)$$

где Φ – сила *инерции*, или *даламберова* сила. Таким образом, справедливо утверждение.

В каждый момент времени сумма всех сил, действующих на точку, и силы инерции равна нулю.

Уравнение (9.2) по форме совпадает с уравнением статики, и его применение нередко оказывается более удобным, чем использование уравнения (9.1).

9.2. Принцип Даламбера для системы

Рассмотрим систему n материальных точек M_i с массами m_i . Записывая уравнение (9.2) для каждой i -й точки:

$$F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + \Phi_i = 0, \quad (9.3)$$

а затем, суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{\Phi}_o = \mathbf{0}, \quad (9.4)$$

где $\mathbf{R}^{(e)} = \Sigma \mathbf{F}_i^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, а $\mathbf{\Phi}_o = \Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – главный вектор сил инерции системы.

Умножив (9.3) векторно слева на радиус-вектор \mathbf{r}_i , а затем просуммировав по всем точкам системы, получим:

$$\mathbf{M}_o^{(e)} + \mathbf{M}_o^{\text{ин}} = \mathbf{0}, \quad (9.5)$$

где $\mathbf{M}_o^{(e)} = \Sigma (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)})$ – главный момент внешних сил, а $\mathbf{M}_o^{\text{ин}} = \Sigma (\mathbf{r}_i \times \mathbf{\Phi}_i)$ – главный момент сил инерции системы относительно центра приведения O . Таким образом, принцип Даламбера для системы можно сформулировать в следующем виде.

В каждый момент времени сумма главного вектора внешних сил и главного вектора сил инерции, а также сумма главного момента внешних сил и главного момента сил инерции равны нулю.

Главный вектор и главный момент сил инерции можно выразить через кинематические параметры системы, если сначала с помощью (9.4) и (9.5) выразить их через приложенную к системе нагрузку, а затем воспользоваться теоремой об изменении количества движения системы (5.6):

$$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{(e)}$$

и теоремой об изменении кинетического момента системы (6.6):

$$d\mathbf{K}_o/dt = \mathbf{M}_o^{(e)}.$$

Соответствующие формулы с учетом (5.9) примут вид:

$$\mathbf{\Phi}_o = -d\mathbf{Q}/dt = -M\mathbf{a}_c, \quad (9.6)$$

$$\mathbf{M}_o^{\text{ин}} = -d\mathbf{K}_o/dt, \quad (9.7)$$

где в (9.6) M – масса системы, \mathbf{a}_c – ускорение центра масс.

Примечания:

1. Главный вектор $\mathbf{\Phi}_o$ не зависит, а главный момент $\mathbf{M}_o^{\text{ин}}$ зависит от выбора центра приведения.

2. Два векторных уравнения (9.4) и (9.5) эквивалентны трем скалярным на плоскости и шести скалярным в пространстве.

9.3. Приведение сил инерции твердого тела

В общем случае силы инерции, приложенные к каждой точке твердого тела, можно заменить главным вектором Φ_o и главным моментом M_o^{inh} , которые определяются выражениями (9.6) и (9.7).

Рассмотрим приведения сил инерции твердого тела в зависимости от вида его движения.

1. Поступательное движение тела

Теорема. При поступательном движении ТТ силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс и равной:

$$\Phi = -Ma_c, \quad (9.8)$$

где M – масса тела, a_c – ускорение центра масс.

Доказательство. Выбирая в качестве центра приведения центр масс и учитывая, что при поступательном движении ускорения всех точек тела равны: $a_i = a_c$, получим:

$$\Phi_c = -Ma_c,$$

$$M_c^{inh} = \Sigma(\bar{r}_i \times \Phi_i) = -\Sigma(\bar{r}_i \times m_i a_i) = -\Sigma(m_i \bar{r}_i) \times a_c = -M \bar{r}_c \times a_c = 0,$$

поскольку $\bar{r}_c = 0$. Таким образом, $\Phi_c \neq 0$, $M_c^{inh} = 0$, откуда следует, что главный вектор эквивалентен равнодействующей сил инерции: $\Phi_c \sim \Phi$.

Теорема доказана.

2. Вращение тела вокруг неподвижной главной центральной оси

Теорема. При вращении тела вокруг неподвижной главной центральной оси силы инерции приводятся к паре сил с моментом, равным произведению момента инерции относительно оси вращения на угловое ускорение:

$$M_c^{inh} = -J_z \varepsilon. \quad (9.9)$$

Доказательство. Пусть тело вращается вокруг главной центральной оси Oz с угловым ускорением $\varepsilon(0, 0, \varepsilon_z)$.

Выбирая в качестве центра приведения центр масс, лежащий на этой оси, согласно формулам (9.6) и (9.7) получим:

$$\Phi_c = -Ma_c = 0,$$

$$M_c^{inh} = -dK_c/dt,$$

где

$$\mathbf{K}_c = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} + K_z \mathbf{k},$$

а с учетом формул (6.12):

$$\mathbf{M}_c^{\text{HH}} = J_{xz} \varepsilon_z \mathbf{i} + J_{yz} \varepsilon_z \mathbf{j} - J_z \varepsilon_z \mathbf{k} = -J_z \varepsilon_z \mathbf{k} = -J_z \boldsymbol{\varepsilon},$$

поскольку для главной оси инерции Oz :

$$J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Итак, $\Phi_c = 0$, $\mathbf{M}_c^{\text{HH}} \neq 0$, откуда следует, что система эквивалентна паре сил. Теорема доказана.

Примечание.

Если ось, вокруг которой вращается тело, не является центральной, то главный вектор сил инерции $\Phi_c \neq 0$, при этом

$$\Phi_c = \Phi_c^{\omega} + \Phi_c^{\varepsilon},$$

где $\Phi_c^{\omega} = -Ma_c^{\omega}$ и $\Phi_c^{\varepsilon} = -Ma_c^{\varepsilon}$ соответственно являются *центробежной* и *вращательной* силами инерции, приложенными в центре масс этого тела.

3. Плоское движение тела с плоскостью симметрии

Теорема. При плоском движении тела с плоскостью симметрии силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту:

$$\Phi_c = -Ma_c, \tag{9.10}$$

$$\mathbf{M}_c^{\text{HH}} = -J_z \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Доказательство. Поскольку тело имеет плоскость симметрии, его центр масс лежит в этой плоскости, а ось, проходящая через него и перпендикулярная этой плоскости, будет главной центральной осью инерции тела.

Выбирая в качестве центра приведения центр масс, лежащий на этой оси, согласно формулам (9.6) и (9.7) получим (9.10).

Теорема доказана.

Пример 9.1. Определить ускорение груза A – \mathbf{a}_A и реакцию подшипника N_B , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рис. 9.1, а).

Решение. Система состоит из двух тел: поступательно движущегося груза A и вращающегося барабана B .

В соответствии с принципом Даламбера прикладываем к системе активные силы \mathbf{P}_A и \mathbf{P}_B и реакцию подшипника N_B (рис. 9.1, б).

Силы инерции поступательно движущегося тела A заменяем согласно (9.8) равнодействующей:

$$|\Phi_A| = \Phi_A = m_A a_A,$$

а силы инерции барабана B – согласно (9.9) моментом:

$$M_B^{\text{ин}} = J_B \varepsilon_B = (m_B R^2 / 2) (a_A / R) = (m_B R / 2) a_A.$$

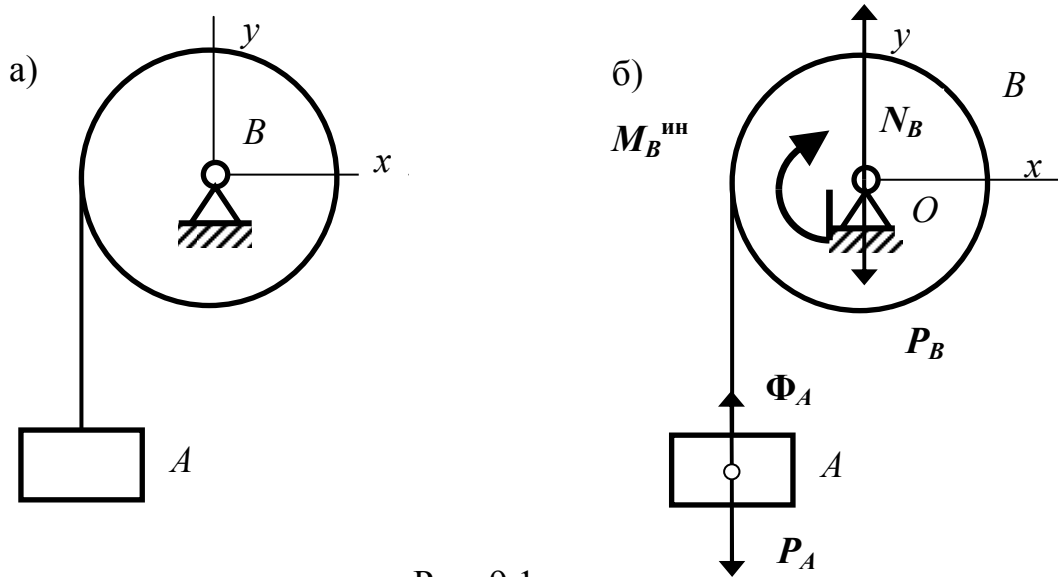


Рис. 9.1

Определение неизвестных a_A и N_B по форме не отличается от определения опорных реакций балок.

Чтобы найти a_A , составим уравнение, которое не содержит N_B :

$$\Sigma M_O = 0; \quad (P_A - \Phi_A) R - M_B^{\text{ин}} = 0;$$

$$(m_A g - m_A a_A) R - (m_B R / 2) a_A = 0,$$

откуда $a_A = (2/3) g$.

Реакцию N_B найдем из условия:

$$\Sigma Y = 0; \quad -P_A + \Phi_A + N_B - P_B = 0,$$

откуда

$$N_B = P_A - \Phi_A + P_B = mg - ma_A + mg = mg - (2/3)mg + mg = (4/3)mg.$$

Для проверки решения можно воспользоваться уравнением:

$$\Sigma M_A = -M_B^{\text{ин}} + N_B R - P_B R = -(mR/2)(2/3)g + (4/3)mgR - mgR = 0.$$

Ответ: $a_A = (2/3) g$, $N_B = (4/3)mg$.

Пример 9.2. В примере 7.5 (с. 68) определить силу натяжения нитей T_{AB} и T_{BC} , принимая B и C за однородные цилиндры и полагая угол $\alpha = 30^\circ$, а массы всех тел одинаковыми и равными m (рис. 9.2).

Решение. Будем считать найденное ранее ускорение тела A – a_A известным и для указанных данных равным:

$$a_A = (8/15)(1 - 0,5\sin\alpha)g = (8/15)(3/4)g = (2/5)g.$$

Тогда для определения T_{AB} и T_{BC} достаточно рассмотреть динамическое равновесие тела A и барабана B .

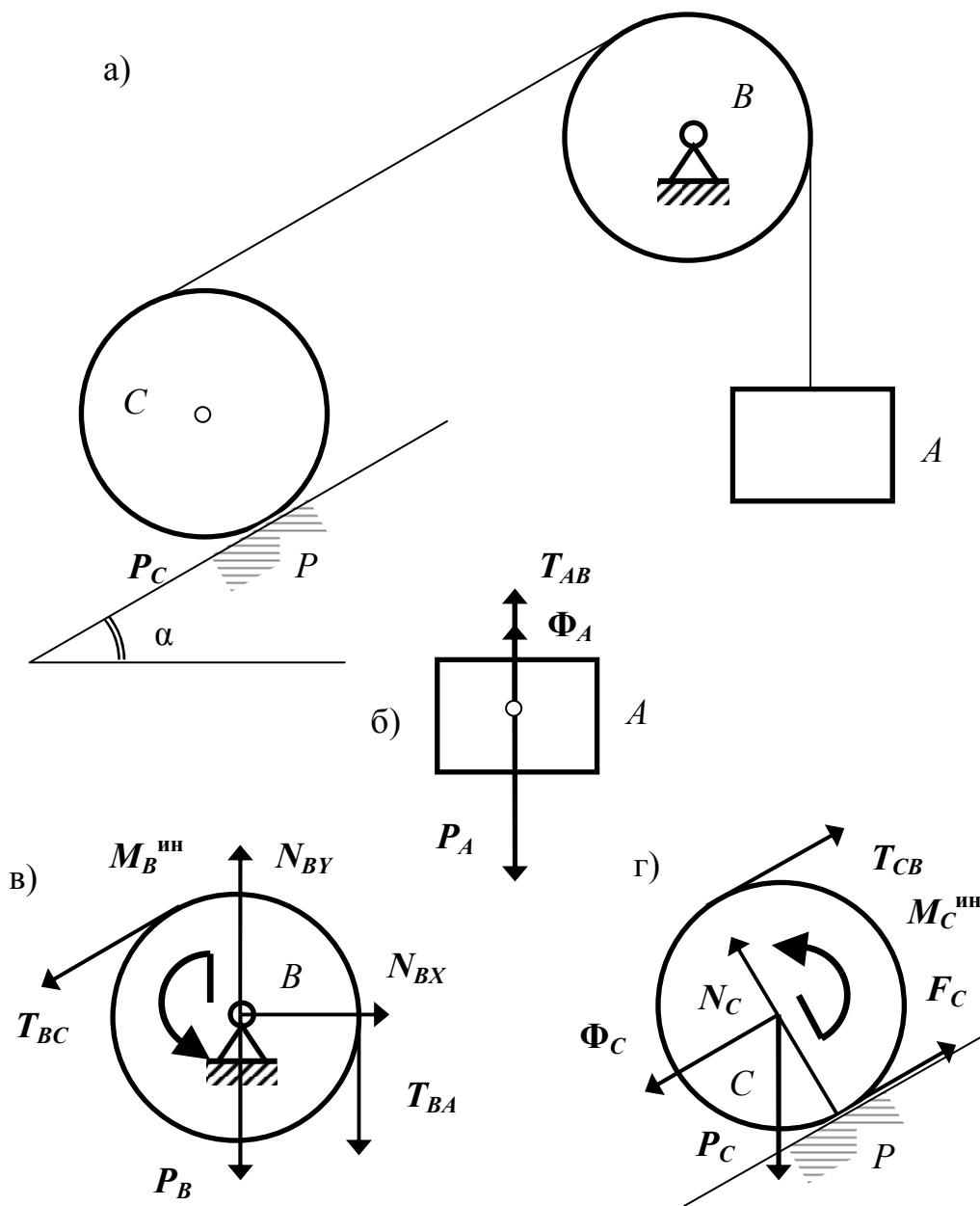


Рис. 9.2

В первом случае прикладываем к поступательно движущемуся телу A активную силу P_A , силу натяжения нити T_{AB} и силу инерции Φ_A (рис. 9.2, б).

Проектируя векторное равенство:

$$P_A + T_{AB} + \Phi_A = 0$$

на направление вектора P_A , получим:

$$P_A - T_{AB} - \Phi_A = 0,$$

откуда:

$$T_{AB} = P_A - \Phi_A = m(g - a_A) = (3/5) mg.$$

Для нахождения T_{BC} рассмотрим динамическое равновесие барабана B , приложив к нему активную силу – вес P_B , реакции связей N_{BX} , N_{BY} , T_{BA} , T_{BC} и главный момент сил инерции $M_B^{ин}$ (рис. 9.2, в).

Условие равенств нулю суммы моментов всех сил относительно оси его вращения – $\Sigma M_B = 0$ примет вид:

$$(T_{BC} - T_{BA})R + M_B^{ин} = 0,$$

откуда:

$$\begin{aligned} T_{BC} &= -M_B^{ин}/R + T_{BA} = -(mR^2/2)(a_A/R^2) + (3/5) mg = \\ &= -(m/2)(2/5) g + (3/5) mg = (2/5) mg. \end{aligned}$$

Проверим правильность найденного решения с помощью уравнения: $\Sigma M_P^{(C)} = 0$, где P – мгновенный центр скоростей диска C (рис. 9.2, з), рассматривая его динамическое равновесие под действием силы веса P_C , реакций связей: N_C , F_C , T_{CB} , а также главного вектора Φ_C и главного момента $M_C^{ин}$ сил инерции:

$$\begin{aligned} (\Phi_C + P_C \sin \alpha)R + M_C^{ин} - T_{CB} 2R &= (m_C a_C + m_C g \sin 30^\circ) R + (m_C R^2/2)\epsilon_C - T_{CB} 2R = \\ &= [m_C (a_A/2) + m_C g/2] R + (m_C R^2/2)(a_A/2R) - (4/5) mgR = \\ &= mR [(1/5) g + (1/2)g + (1/10)g - (4/5)g] = (mgR/20)(4 + 10 + 2 - 16) = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $T_{AB} = T_{BA} = (3/5) mg$, $T_{BC} = T_{CB} = (2/5) mg$.

Примечания:

1. Отметим, что в последнем примере было бы нерационально одновременно определять ускорение a_A и натяжение нитей T_{BA} и T_{BC} с помощью принципа Даламбера, поскольку, во-первых, пришлось бы решать систему трех уравнений с тремя неизвестными, а, во-вторых, мы не смогли бы эффективно проверить правильность найденного решения.

2. Рассматривая динамическое равновесие диска C , можно найти динамическую силу трения F_C .

Пример 9.3. Однородный стержень OA весом P и длиной l опускается без начальной скорости из положения неустойчивого равновесия ($\varphi = 0$). Найти реакции шарнира O при $\varphi = \pi/2$ (рис. 9.3).

Решение. Рассмотрим динамическое равновесие стержня в тот момент времени, когда он занимает горизонтальное положение, прикладывая к нему активную силу веса P , составляющие реакции шарнира N_x , N_y и силы инерции.

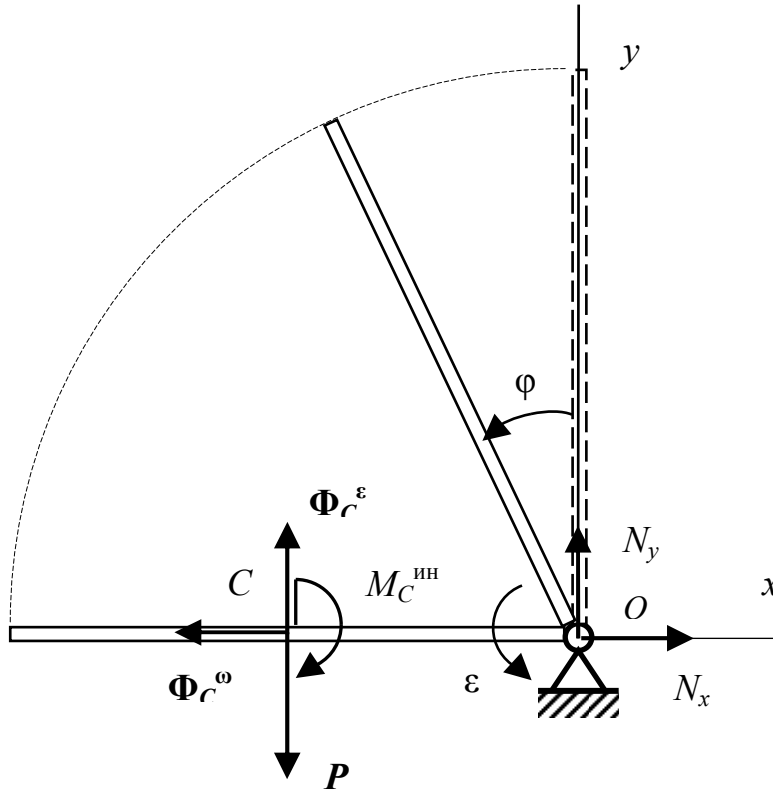


Рис. 9.3

Последние, поскольку стержень вращается вокруг оси, не являющейся центральной, приводятся к главному вектору и главному моменту – как в общем случае плоского движения тела:

$$\Phi_C = ma_C;$$

$$M_C^{\text{ин}} = J_C \epsilon = (ml^2/12)\epsilon, \quad (\text{а})$$

где $m = (P/g)$ – масса стержня.

Центр масс стержня движется по окружности радиуса $l/2$, поэтому его ускорение имеет центростремительную и вращательную составляющие:

$$a_C = a_C^\omega + a_C^\epsilon,$$

которым соответствуют центробежная и вращательная силы инерции, равные по модулю:

$$\Phi_C^\omega = ma_C^\omega = (1/2)(m\omega^2 l); \quad (\text{б})$$

$$\Phi_C^\epsilon = ma_C^\epsilon = (1/2)(m\epsilon l). \quad (\text{в})$$

Неизвестными в данной задаче будут: N_x , N_y , ε и ω , а поскольку число неизвестных превышает число уравнений принципа Даламбера, найдем предварительно угловую скорость стержня с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы:

$$T_2 - T_1 = A_{12}, \quad (\text{г})$$

где $T_2 = (1/2)J_O\omega^2 = (1/2)(ml^2/3)\omega^2$, $T_1 = 0$ – по условию задачи, а работа силы тяжести стержня $A_{12} = mg(l/2)$.

Подставляя в (г), получим:

$$(1/2)(ml^2/3)\omega^2 = mg(l/2),$$

откуда найдем искомую скорость стержня в горизонтальном положении:

$$\omega = \sqrt{3g/l}.$$

Чтобы найти угловое ускорение ε , составим уравнение $\Sigma M_O = 0$, которое не содержит N_x и N_y :

$$(P - \Phi_C^\varepsilon)(l/2) - M_C^{\text{ин}} = 0.$$

Подставляя сюда (а) и (в), получим:

$$[mg - m(\varepsilon l/2)](l/2) - (ml^2/12)\varepsilon = 0,$$

откуда

$$6g = \varepsilon l(3 + 1)$$

или

$$\varepsilon = (3g/2l).$$

Теперь, зная ω и ε , легко найти искомые реакции N_x и N_y , воспользовавшись уравнениями $\Sigma X_i = 0$ и $\Sigma Y_i = 0$:

$$N_x = \Phi_C^\omega = (1/2)(m\omega^2 l) = (3/2) mg = (3/2) P;$$

$$N_y = P - \Phi_C^\varepsilon = P - (1/2)(m\varepsilon l) = P - (1/2)(P/g)(3g/2) = P/4.$$

Ответ: $N_x = (3/2) P$; $N_y = P/4$.

9.4. Определение динамических реакций

Известно, что ось, вокруг которой вращается тело и о которой идет речь в 9.3, должна быть центральной – с этой целью проводят балансировку колес, маховиков и других вращающихся деталей.

Однако это условие является недостаточным, и если ось вращения является центральной, но не *главной*, появляются *динамические опорные реакции*, которые отсутствовали в состоянии покоя.

Рассмотрим это явление на следующем примере. Пусть стержень DE массой M и длиной l закреплен в подшипниках A и B под углом α к вертикальной оси Oz и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω (рис. 9.3).

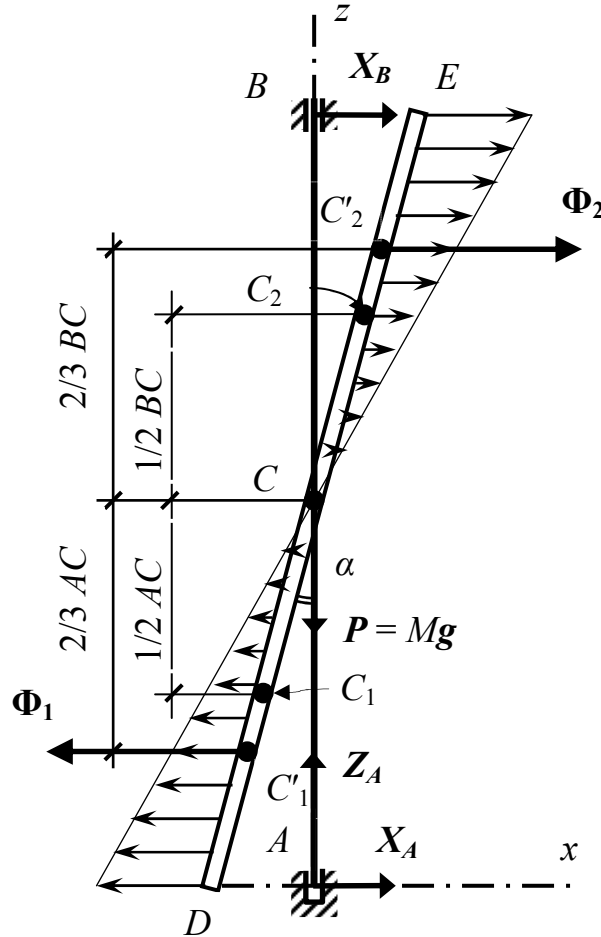


Рис. 9.3

Отметим, что в состоянии покоя горизонтальные опорные реакции в подшипниках A и B , расположенных на одной горизонтали с точками D и E , будут равны нулю, а реакция Z_A будет равна весу стержня $P = Mg$.

На каждую точку вращающегося стержня действует центростремительное ускорение $a^o = \omega^2 R$, где R – расстояние точки от оси вращения, а в соответствии с принципом Даламбера – *центробежная сила инерции*.

Будем анализировать движение стержня в системе координат xAz , связанной со стержнем и расположенной с ним в одной плоскости.

Рассмотрим динамическое равновесие вращающегося стержня, приложив к нему активную силу $P = Mg$, реакции связей X_A, Z_A, X_B и центробежные силы инерции, изменяющиеся по линейному закону.

Выбирая центр масс C в качестве центра приведения сил инерции, получим, что в соответствии с формулой (9.6) главный вектор сил инерции равен нулю:

$$\Phi_C = -Ma_c = \mathbf{0},$$

поскольку точка C остается неподвижной, а главный момент сил инерции $M_C^{\text{ин}}$ будет равен моменту пары сил (Φ_1, Φ_2) , где Φ_1 – равнодействующая сил инерции, приложенных к нижней, а Φ_2 – к верхней части стержня.

При этом по модулю силы Φ_1 и Φ_2 равны главным векторам сил инерции соответствующих частей стержня, которые по формуле (9.6) равны:

$$|\Phi_{C1}| = (M/2) a_{C1} = (M/2) \omega^2 |x_{C1}| = (M \omega^2 / 2)(l/4) \sin \alpha = (M \omega^2 l / 8) \sin \alpha,$$

$$|\Phi_{C2}| = (M/2) a_{C2} = (M \omega^2 l / 8) \sin \alpha$$

и отличаются от главных векторов только точками приложения – равнодействующие Φ_1 и Φ_2 будут приложены в точках C'_1 и C'_2 соответственно. Эти точки расположены против центров тяжести треугольников, представляющих распределенную нагрузку.

Итак, силы инерции всего стержня приводятся к паре сил (Φ_1, Φ_2) с моментом:

$$M_C^{\text{ин}} = \Phi_1 (2/3) AB = (M \omega^2 l / 8) \sin \alpha (2/3) l \cos \alpha = (M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Теперь, составив уравнение равновесия $\Sigma M_A = 0$, получим:

$$-X_B \cdot l \cos \alpha - M_C^{\text{ин}} = 0,$$

откуда найдем искомые динамические реакции:

$$X_B = -X_A = -M_C^{\text{ин}} / l \cos \alpha = -(M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha.$$

Ответ: $X_A = (M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha, X_B = -(M \omega^2 l^2 / 12) \sin \alpha.$

9.5. Динамика относительного движения точки

Принцип Даламбера удобен при рассмотрении сложного движения точки, когда последняя перемещается относительно тела, с которым связана локальная система отсчета, и одновременно передвигается вместе с этим телом, участвуя в переносном движении.

Уже отмечалось, что если система отсчета не является инерциальной, в ней не выполняется основное уравнение динамики, а законы движения точки в локальной и глобальной системах будут различными.

Напомним, что в соответствии с теоремой об ускорениях точки в сложном движении ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и кориолисова:

$$\mathbf{a}^a = \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^k,$$

поэтому соотношения (9.1) и (9.2) примут вид:

$$ma^r = F + \Phi^e + \Phi^k, \quad (9.11)$$

$$F + \Phi^r + \Phi^e + \Phi^k, \quad (9.12)$$

где F – равнодействующая всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке, а $\Phi^r = -ma^r$, $\Phi^e = -ma^e$ и $\Phi^k = -ma^k$ – соответственно: *относительная*, *переносная* и *кориолисова* силы инерции.

При этом зависимость (9.11) – представляет собой дифференциальное уравнение относительного движения точки в локальной системе координат, связанной с движущимся телом:

$$m(d^2r)/(dt^2) = F + \Phi^e - 2m[\omega^e \times (dr)/(dt)],$$

где r – радиус-вектор точки в локальной системе отсчета, а ω^e – угловая скорость вращения связанного с ней тела.

Таким образом, относительное движение точки под действием силы F в неинерциальной системе отсчета не отличается от движения той же точки в инерциальной системе отсчета, на которую помимо силы F действуют дополнительно силы Φ^e и Φ^k . Аналогичное замечание можно сделать и в отношении формулы (9.12).

При решении большинства технических проблем систему координат, связанную с Землей, считают инерциальной, пренебрегая тем самым двумя последними слагаемыми в выражении (9.11). Однако в некоторых случаях, например при больших значениях относительной скорости $v^r = (dr)/(dt)$, их учет становится необходимым, поскольку вместе с v^r возрастает ускорение Кориолиса $a^k = 2[\omega^e \times v^r]$, а значит и Φ^k .

Пример 9.4. Определить величину ускорения Кориолиса для спутника, выведенного на круговую полярную орбиту на высоте $H = 100$ км.

Решение. На спутник с массой m действует сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния от центра Земли:

$$F = (mgR^2)/(x^2),$$

где R – радиус Земли – см. пример 2.5 на странице 17.

Определим вначале, следуя условиям задачи, скорость движения спутника, рассматривая его движение как абсолютное. Проектируя основное уравнение динамики на направление нормали к заданной траектории, получим:

$$m(v^r)^2/(R + H) = (mgR^2)/(R + H)^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(gR^2)/(R + H)} = R \sqrt{g/(R + H)} = 6370 \cdot 10^3 \sqrt{(9,81)/(6470 \cdot 10^3)} = \\ &= 6370 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{(9,81)/(6,470 \cdot 10^6)} = 6370 \cdot \sqrt{(9,81)/(6,470)} = 7840 \text{ (м/с)}. \end{aligned}$$

Искомое ускорение Кориолиса будет достигать максимального значения на полюсе, где абсолютная скорость спутника совпадает с относительной v^r :

$$a^k = 2|\omega^e| \cdot |v^r| = 2 \cdot 0,726 \cdot 10^{-4} \cdot 0,784 \cdot 10^4 = 1,13(\text{м/с}^2),$$

где

$$\omega^e = (2\pi)/(24 \cdot 60 \cdot 60) = [(6,28)/(2,4 \cdot 3,6)] \cdot 10^{-4} = 0,726 \cdot 10^{-4}(\text{с}^{-1})$$

– угловая скорость вращения Земли.

Соответствующая этому ускорению кориолисова сила инерции Φ^k в северном полушарии направлена вправо и вызывает уход спутника с полярной орбиты.

Ответ: $a^k = 1,13(\text{м/с}^2)$.

Ускорение Кориолиса оказывает влияние на возникновение и особенности протекания многих природных процессов, включая морские и воздушные течения. Им, в частности, объясняется то обстоятельство, что у рек, текущих в северном полушарии высоким бывает правый, а в южном – левый берег.

Примечания:

1. Можно привести еще один пример, когда система отсчета, связанная с Землей, не может считаться инерционной и необходимо учитывать ускорение Кориолиса.

Во время конфликта между Аргентиной и Великобританией по поводу Фолклендских островов эскадра ВМС последней перебазировалась из северного полушария в южное и приступила к боевым операциям. Для пристрелянных по месту постоянной дислокации корабельных орудий при дальности стрельбы в 10 километров и начальной скорости снаряда, равной 500 м/с, его отклонение от цели из-за изменения направления ускорения Кориолиса по данным, приведенным в [3], составляло 25 метров.

2. Чтобы непосредственно на себе почувствовать действие ускорения Кориолиса, достаточно, воспользовавшись трамваем второго маршрута, проехать от остановки «Улица Нижегородская» до остановки «Улица Добролюбова».

Когда трамвай будет поворачивать вправо на улицу Добролюбова, нужно пройти по вагону к кабине водителя. При скорости трамвая, равной 18 км/ч, относительной скорости пассажира 3,6 км/ч и среднем радиусе кривизны рельсов в 10 метров переносное центробежное и кориолисово ускорения по модулю соответственно будут равны:

$$a^e = (\omega^e)^2 \cdot \rho = (v^e)^2 / \rho = 5^2 / 10 = 2,5(\text{м/с}^2),$$

$$a^k = 2\omega^e v^r = 2(v^e v^r) / \rho = 2 \cdot 5 \cdot 1 / 10 = 1(\text{м/с}^2).$$

При этом $a^k \uparrow \uparrow a^e$ и силы инерции Φ^e и Φ^k направлены влево по ходу движения пассажира и трамвая. Если пассажир движется по вагону в обратном направлении, то $a^k \uparrow \downarrow a^e$ и $\Phi^k \uparrow \downarrow \Phi^e$. Отметим, что сила Φ^k появляется, в отличие от Φ^e , только при $v^r \neq 0$.

3. Груз, подвешенный на нити и находящийся в состоянии относительного покоя, демонстрирует разницу между силой притяжения Земли F и весом тела P , равным силе натяжения нити:

$$P = |P| = |F + \Phi^e|.$$

ГЛАВА 10. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

10.1. Возможные перемещения системы. Идеальные связи.

Принцип возможных перемещений (ПВП) является основополагающим в механике. Он успешно используется при решении статических и динамических задач теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости и строительной механики.

Основной вклад в обоснование и внедрение в практику ПВП был внесен Ж. Лагранжем.

Определение. Возможными перемещениями точки называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в каждый момент времени наложенными на нее связями.

Под *возможными перемещениями системы* мы будем понимать множество возможных перемещений всех ее точек.

Рассмотрим систему двух материальных точек A и B , помещенных на концах рычага, закрепленного в центре O , и удаленных от этого центра на расстояния l_A и l_B соответственно (рис. 10.1).

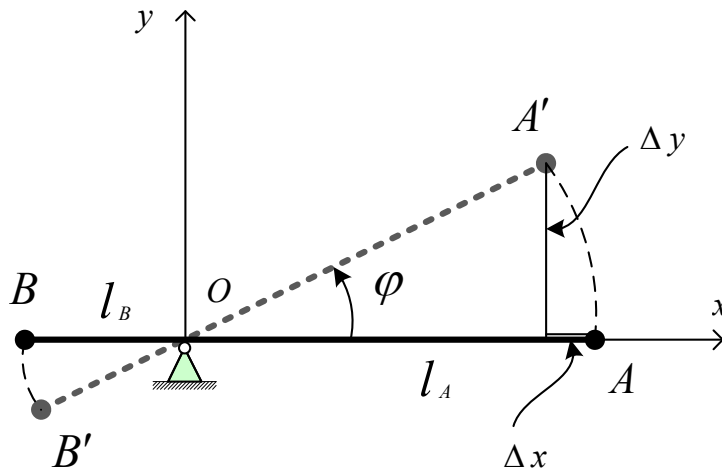


Рис. 10.1

Такая система имеет, очевидно, одну степень свободы, и ее положение однозначно определяется заданием угла поворота стержня φ .

Конечное перемещение точки A изображается вектором $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{AA}'$, проекции которого на оси координат равны *приращениям* координат точки A :

$$\Delta x = x_{A'} - x_A = -l_A(1 - \cos\varphi);$$

$$\Delta y = y_{A'} - y_A = l_A \sin\varphi.$$

Элементарное перемещение точки A определяется вектором $d\mathbf{r}$, проекции которого на оси координат равны дифференциалам координат точки A :

$$\begin{aligned} dx &= [\partial(\Delta x)/\partial\varphi]_{\varphi=0} d\varphi = -l_A \sin\varphi|_{\varphi=0} d\varphi = 0; \\ dy &= [\partial(\Delta y)/\partial\varphi]_{\varphi=0} d\varphi = l_A \cos\varphi|_{\varphi=0} d\varphi = l_A d\varphi. \end{aligned}$$

Возможным перемещением точки A будет вектор $\delta\mathbf{r}(\delta x, \delta y)$, который отличается от вектора $d\mathbf{r}(dx, dy)$ только тем, что является не действительным, а воображаемым и его проекции на оси координат называются не дифференциалами, а вариациями координат.

$$\begin{aligned} \delta x &= [\partial(\Delta x)/\partial\varphi]_{\varphi=0} \delta\varphi = 0; \\ \delta y &= [\partial(\Delta y)/\partial\varphi]_{\varphi=0} \delta\varphi = l_A \delta\varphi. \end{aligned}$$

Переход от конечных к элементарным или возможным перемещениям точки A имеет наглядную геометрическую интерпретацию и в данном случае означает, что перемещение по дуге окружности радиуса l_A заменяется перемещением по касательной к этой окружности.

Отметим, что в рассматриваемом примере система подчинена геометрическим, стационарным и двусторонним связям.

Выясним, какие условия в общем случае налагают связи на возможные перемещения точек системы.

Теорема 1. В каждый момент времени возможные перемещения точки лежат в плоскости, касательной к поверхности связи.

В самом деле, возможное перемещение точки:

$$\delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{i} + \delta y\mathbf{j} + \delta z\mathbf{k},$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ – вариации ее координат, должно удовлетворять уравнению связи:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

то есть

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0.$$

Раскладывая последнее выражение в ряд, получим с точностью до бесконечно малых первого порядка:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = f(x, y, z, t) + (\partial f/\partial x)\delta x + (\partial f/\partial y)\delta y + (\partial f/\partial z)\delta z = 0,$$

откуда следует, что

$$(\partial f/\partial x)\delta x + (\partial f/\partial y)\delta y + (\partial f/\partial z)\delta z = (\text{grad } f \cdot \delta\mathbf{r}) = 0,$$

где вектор $\text{grad } f = (\partial f/\partial x)\mathbf{i} + (\partial f/\partial y)\mathbf{j} + (\partial f/\partial z)\mathbf{k}$ направлен по нормали к поверхности связи. Теорема доказана.

Теорема 2. Для стационарных связей элементарные действительные перемещения точки принадлежат к числу возможных: $d\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}$, для нестационарных связей $d\mathbf{r} \neq \delta\mathbf{r}$.

Действительно, траектория точки, подчиненной стационарной связи, принадлежит поверхности этой связи $f(x,y,z) = 0$, поэтому из множества возможных перемещений, лежащих в плоскости, касающейся поверхности связи, всегда найдется $\delta\mathbf{r}$, которое совпадает с элементарным действительным перемещением $d\mathbf{r}$, направленным по касательной к траектории.

Точка, на которую наложена нестационарная связь $f(x,y,z,t) = 0$, участвует в сложном движении. В каждый момент времени $t = t_1$ она перемещается в относительном движении по поверхности связи $f(x,y,z,t_1) = 0$ и одновременно в переносном движении перемещается вместе со связью $f(x,y,z,t) = 0$.

При этом абсолютная траектория точки в общем случае не принадлежит поверхности $f(x,y,z,t_1) = 0$, а значит $d\mathbf{r} \neq \delta\mathbf{r}$. Теорема доказана.

Элементарная работа сил, приложенных к точкам системы, на ее возможных перемещениях равна $\delta A = \sum \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i$ и зависит от выбора $\delta \mathbf{r}_i$.

Обозначим через N_i реакции связей, приложенных к точкам системы.

Определение. Связи, приложенные к точкам системы, называются *идеальными*, если для любого возможного перемещения системы выполняется соотношение:

$$\sum N_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (10.1)$$

Примером системы, подчиненной идеальным связям, является цилиндр с намотанной на него нитью, который поднимается без проскальзывания по наклонной плоскости (рис. 9.2, г, с. 80).

Реакциями такой связи, приложенными к телу, будут: N_1 – сила нормального давления поверхности и N_2 – сила трения.

Поскольку эти силы приложены в точке контакта, являющейся мгновенным центром скоростей, то для них выполняется соотношение (10.1).

10.2. Принципы возможных перемещений и возможных скоростей

Принцип возможных перемещений (ПВП) эквивалентен уравнениям равновесия элементарной статики. Он формулируется следующим образом.

Для равновесия системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, необходимо и достаточно равенства нулю суммы работ всех активных сил на любых возможных перемещениях системы:

$$\sum \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (10.2)$$

Принцип можно применять также для систем с неидеальными и односторонними связями. При этом надо включить реакции таких связей в число активных сил и убедиться, что на возможных перемещениях системы они сохраняют свой знак.

Учитывая, что $v_i = dr_i/dt$, а для стационарных связей действительные перемещения принадлежат к числу возможных, уравнению (10.2) можно придать форму *принципа возможных скоростей*:

$$\Sigma(F_i v_i) = 0. \quad (10.3)$$

Он означает, что *для равновесия системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, необходимо и достаточно равенства нулю суммы мощностей всех активных сил на любых возможных перемещениях системы.*

С помощью этого принципа можно определять соотношение между силами и моментами, приложенными к подвижной механической системе – механизму, а также находить опорные реакции неподвижных систем.

Чтобы найти зависимость между силами и моментами, приложенными к подвижной механической системе, надо непосредственно применить соотношения (10.2) или (10.3), при этом в первом случае решение сводится к формальным математическим операциям, а во втором – опирается на положения кинематики твердого тела.

Для того чтобы определить опорные реакции неподвижной системы, предварительно надо воспользоваться принципом освобождения от связей.

Пример 10.1. В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг шарнира O ползун A , перемещаясь вдоль OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в направляющих K . Найти зависимость между Q и P , если $OC = R$, $OK = l$ (рис. 10.2).

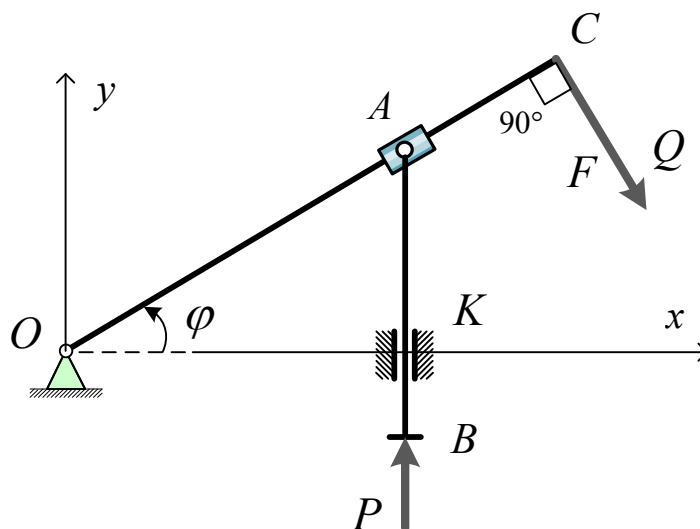


Рис. 10.2

Решение. Для нашей системы соотношение (10.2) примет вид:

$$P \delta r_A + Q \delta r_C = 0,$$

или в координатной форме:

$$P_x \delta x_A + P_y \delta y_A + Q_x \delta x_C + Q_y \delta y_C = 0, \quad (a)$$

где

$$P_x = 0, P_y = P, Q_x = Q \sin \varphi, Q_y = -Q \cos \varphi. \quad (б)$$

Учитывая, что $y_A = l \cdot \operatorname{tg} \varphi$, $x_C = R \cdot \cos \varphi$, а $y_C = R \cdot \sin \varphi$, с помощью обычных правил дифференцирования найдем вариации координат для этих точек системы:

$$\delta y_A = (\partial y_A / \partial \varphi) \delta \varphi = (l / \cos^2 \varphi) \delta \varphi; \delta x_C = -R \cdot \sin \varphi \delta \varphi; \delta y_C = R \cdot \cos \varphi \delta \varphi. \quad (в)$$

Подставляя (б) и (в) в (а), приходим к соотношению:

$$[(Pl) / (\cos^2 \varphi) - QR(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] \delta \varphi = 0,$$

откуда получим искомую зависимость:

$$Q = (Pl) / (R \cos^2 \varphi).$$

Пример 10.2. Определить соотношение между силой F и моментом M , при котором механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии, если $OA = r$ (рис. 10.3, а).

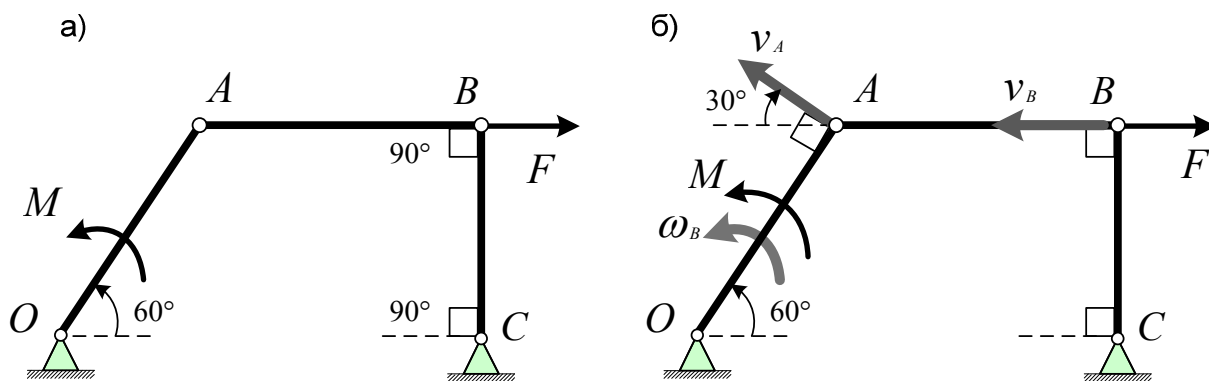


Рис. 10.3

Решение. Воспользуемся для решения задачи соотношением (10.3). С этой целью сообщим звену OA возможную угловую скорость ω_0 . Поскольку данный механизм имеет одну степень свободы, точки A и B также получат возможные линейные скорости v_A и v_B (рис. 10.3, б).

При этом $v_A \perp OA$ и $v_A = \omega_0 \cdot r$, а скорость v_B точки B , принадлежащей звену AB , перпендикулярна CB , и ее можно найти с помощью мгновенного центра скоростей или по теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры, согласно которой $\operatorname{pr}_{AB} v_A = \operatorname{pr}_{AB} v_B$, откуда $v_B = v_A \cos 30^\circ = \omega_0 \cdot r \cdot (\sqrt{3} / 2)$.

Для нашей задачи нагрузка представлена только парой сил с моментом M , приложенной к звену OA и силой F , приложенной в точке B , поэтому соотношение (10.3) примет вид:

$$M \omega_0 + (F \cdot v_B) = 0$$

или

$$M \omega_0 - F \omega_0 r (\sqrt{3}/2) = 0,$$

откуда $M = Fr (\sqrt{3}/2)$.

Ответ: $M = Fr (\sqrt{3}/2)$.

Примечания:

1. Решение задачи, рассмотренной в примере (10.1) и взятой из сборника задач под редакцией И.В. Мещерского, обычными методами статики приводит к затруднениям, в чем неоднократно убеждались преподаватели кафедры теоретической механики, когда предлагали эту задачу первокурсникам на студенческой олимпиаде.

2. Требование малости перемещений в определении возможных перемещений и в формулировке ПВП для механики твердого тела не является принципиальным.

10.3. Эквивалентность ПВП и условий равновесия системы

Как уже отмечалось, принцип возможных перемещений эквивалентен уравнениям равновесия элементарной статики. Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием равновесия системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, является равенство нулю суммы работ всех активных сил на любых возможных перемещениях системы:*

$$\Sigma F_i \delta r_i = 0. \quad (10.4)$$

1. Доказательство необходимости. Пусть система материальных точек находится в состоянии равновесия. Тогда для каждой точки системы выполняется соотношение:

$$F_i + N_i = 0.$$

Умножив на δr_i и просуммировав по всем точкам системы, получим:

$$\Sigma (F_i + N_i) \delta r_i = \Sigma F_i \delta r_i + \Sigma N_i \delta r_i = 0,$$

откуда, с учетом (10.1) и следует (10.4).

2. Доказательство достаточности. Пусть к системе, находившейся в состоянии покоя, приложили силы, удовлетворяющие (10.4). Покажем, что система останется в состоянии равновесия.

Предположим противное: пусть хотя бы одна j -я точка системы вышла из состояния равновесия. Тогда $F_j + N_j = R_j \neq 0$, и под действием силы R_j точка M_j получит перемещение dr_j , которое в силу начальных условий будет коллинеарным R_j : $dr_j \uparrow \uparrow R_j$.

Поскольку связи стационарны, существует возможное перемещение δr_j , равное элементарному действительному перемещению dr_j , поэтому с учетом (10.1) мы получим:

$$R_j dr_j = R_j \delta r_j = F_j \delta r_j + N_j \delta r_j = F_j \delta r_j > 0.$$

Но тогда

$$\sum F_i \delta r_i = F_j \delta r_j > 0,$$

что противоречит (10.4), поэтому наше предположение неверно и система будет оставаться в положении равновесия.

С помощью рассмотренной теоремы и соотношения (10.4) можно находить зависимости между силами, приложенными к точкам системы так же, как с помощью обычных уравнений равновесия.

С помощью этого принципа можно определять соотношение между силами и моментами, приложенными к подвижной механической системе – механизму, а также находить опорные реакции неподвижных систем.

Для того чтобы определить опорные реакции неподвижной системы, предварительно надо воспользоваться принципом освобожденности от связей.

Примечания:

1. Как следует из теоремы, с помощью ПВП, как и с использованием обычных уравнений равновесия, можно рассматривать только статически определимые системы.

2. Преимущество ПВП перед уравнениями элементарной статики становится особенно заметным при расчете сложных составных систем с большим числом неизвестных. При решении таких задач важно получить хорошую структуру системы алгебраических уравнений для определения опорных реакций.

Поясним, что это означает. В общем случае матрица системы таких уравнений является сплошь заполненной и имеет вид (а):

$$\begin{array}{ccc}
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times \\
 \times & \times & \times
 \end{array}
 \quad (a) \quad
 \begin{array}{ccc}
 \times & 0 & 0 \\
 \times & \times & 0 \\
 \times & \times & \times
 \end{array}
 \quad (б) \quad
 \begin{array}{ccc}
 \times & 0 & 0 \\
 0 & \times & 0 \\
 0 & 0 & \times
 \end{array}
 \quad (в) \quad (10.5)$$

где знаком « \times » обозначены коэффициенты, отличные от нуля. Решение такой системы уравнений представляет наибольшие трудности.

Гораздо привлекательнее матрица треугольного вида, структура которой представлена на схеме (б). Она позволяет найти из первого уравнения первое неизвестное, а после подстановки его во второе уравнение найти второе неизвестное и так далее.

Идеальной является представленная на схеме (в) *диагональная матрица*, при которой система распадается на отдельные уравнения и неизвестные определяются независимо одно от другого.

Ниже будет показано, что ПВП, в отличие от уравнений элементарной статики, всегда позволяет получить систему уравнений именно с такой диагональной матрицей. Таким образом, мы всегда сможем найти интересующую нас опорную реакцию независимо от других опорных реакций.

10.4. Применение ПВП для определения опорных реакций балок

Рассмотрим процедуру определения опорных реакций *многопролетной шарнирно-консольной балки*, которая с точки зрения статики представляет собой составную, или сочлененную, статически определимую систему.

Будем придерживаться следующего *плана решения задачи*:

- 1) в соответствии с принципом освобождаемости от связей отбрасываем связь, которая соответствует искомому усилию, и заменяем ее реакцией R_i ;
- 2) сообщаем точке приложения R_i в полученной *системе с одной степенью свободы* возможное перемещение δs_i ;
- 3) записываем условие равенства нулю суммы работ всех активных сил, добавляя к этим силам неизвестную реакцию R_i ;

$$\Sigma F_i \delta r_i = 0; \quad (10.4')$$

- 4) выражаем возможные перемещения всех точек системы через вариацию одной обобщенной координаты;
- 5) определяем искомую реакцию R_i ;
- 6) проверяем по возможности правильность решения задачи.

Примечания:

1. В общем случае под R_i надо понимать *обобщенную силу*, а под δs_i – *обобщенное перемещение*, которые представляют собой обычную силу и линейное перемещение для *линейных* и, соответственно, момент и угловое перемещение – для *моментных* связей.
2. Чтобы правильно построить ломаную форму – *моду* балки, соответствующую возможному перемещению точки i , в которой приложена реакция R_i , нужно:
 - проанализировать заданную составную балку и уточнить, из каких элементарных балок она образована;
 - выяснить, какая точка рассматриваемой элементарной балки останется неподвижной, когда точка i вследствие заданного возможного смещения займет в пространстве положение i' , либо какой параметр этой балки останется неизменным в силу краевых условий;
 - провести прямую линию через точку i' и найденную неподвижную точку либо прямую, соответствующую заданным краевым условиям, и определить, какое положение в пространстве займут граничные точки элементарной балки;
 - выполнить такую же процедуру для смежных балок.
3. В курсе строительной механики будет показано, что при $\delta s_i = 1$ построенная мода балки представляет собой *линию влияния*, то есть график функции, ординаты которого равны величине реакции рассматриваемой опоры R_i в зависимости от положения единичного подвижного груза, перемещающегося по этой балке. Такие линии влияния применяют для расчета балок и других строительных конструкций на подвижную нагрузку.

Пример 10.3. Определить реакцию опоры B составной балки (рис.10.4, а).

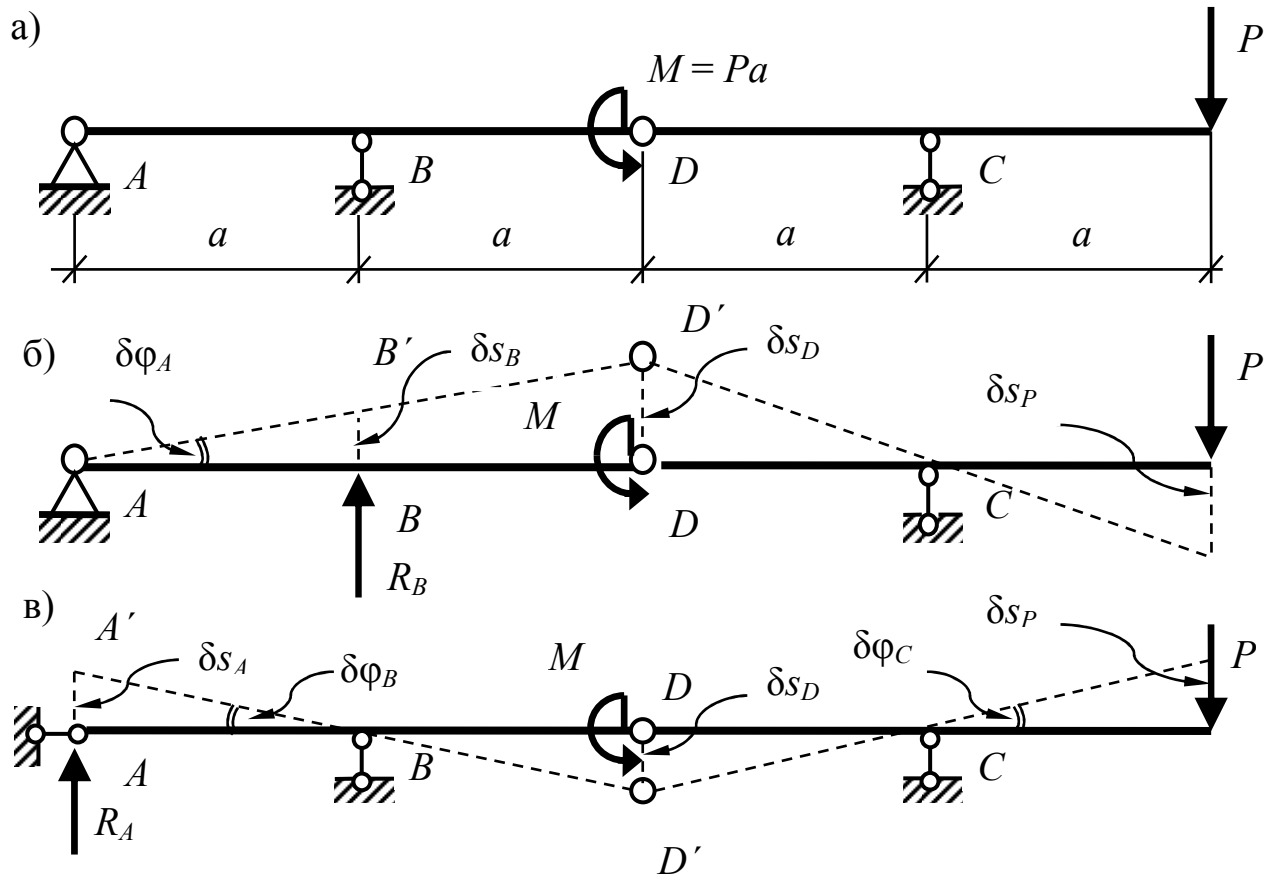


Рис. 10.4

Решение. Рассматриваемая составная балка образована из двух элементарных балок, соединенных шарниром D . В соответствии с приведенным выше планом отбрасываем опору B , заменяя ее неизвестной реакцией R_B .

Сообщаем точке B возможное перемещение $\delta s_B = BB'$, в результате чего все незакрепленные точки балки получают возможные перемещения.

Для построения моды балки проводим прямую линию через точку B' и неподвижную точку A левой элементарной балки – AD и определяем таким образом положение ее граничной точки D' . После этого переходим к рассмотрению правой элементарной балки и определяем положение ее крайней правой точки, проводя прямую через точку D' и неподвижную точку C (рис. 10.4, б).

Уравнение (10.4) для нашей задачи примет вид:

$$R_B \delta s_B + M \delta \varphi_A + P \delta s_P = 0.$$

Выражая возможные перемещения δs_B и δs_P через $\delta \varphi_A$, получим:

$$R_B a \delta \varphi_A + M \delta \varphi_A + P \cdot 2a \delta \varphi_A = 0,$$

откуда, поделив на $\delta\varphi_A \neq 0$, найдем искомую реакцию:

$$R_B = -(M/a + 2P) = -3P.$$

Отметим, что в этом примере не удастся проверить правильность найденного результата, если дополнительно не определить реакцию R_A . Поэтому определим также и эту реакцию.

Неподвижная опора A эквивалентна двум линейным связям. Горизонтальной связи соответствует составляющая X_A , вертикальной – Y_A .

Рассматриваемая составная балка загружена системой параллельных сил, поэтому реакция этой опоры направлена вертикально: $X_A = 0$, $Y_A = R_A$.

В соответствии с приведенным выше планом отбрасываем вертикальную связь в точке A , заменяя ее неизвестной реакцией R_A .

Сообщаем точке A возможное перемещение $\delta s_A = AA'$, в результате чего все незакрепленные точки балки получают возможные перемещения.

Для построения моды балки проводим прямую линию через точку A' и неподвижную точку B элементарной балки ABD и определяем таким образом положение ее граничной точки D' . После этого переходим к рассмотрению правой элементарной балки и определяем положение точки приложения силы P , проводя прямую через точку D' и неподвижную точку C (рис. 10.4, в).

Уравнение (10.4) для нашей задачи примет вид:

$$R_A \delta s_A - M \delta\varphi_B - P \delta s_P = 0.$$

Выражая возможные перемещения δs_A и δs_P через $\delta\varphi_B$, получим:

$$R_A a \delta\varphi_B - M \delta\varphi_B - P a \delta\varphi_B = 0,$$

откуда, поделив на $\delta\varphi_B \neq 0$, найдем искомую реакцию:

$$R_A = (M/a + P) = 2P.$$

Чтобы убедиться в правильности найденного решения, составим уравнение

$$\sum M_D^{(\text{лев})} = 0:$$

$$-R_A \cdot 2a - R_B \cdot a + M = -2P \cdot 2a - (-3P) \cdot a + M = -4Pa + 3Pa + Pa = 0.$$

Ответ: $R_A = 2P$, $R_B = -3P$.

Пример 10.4. Определить реакции в жесткой заделке A указанной балки (рис. 10.5, а).

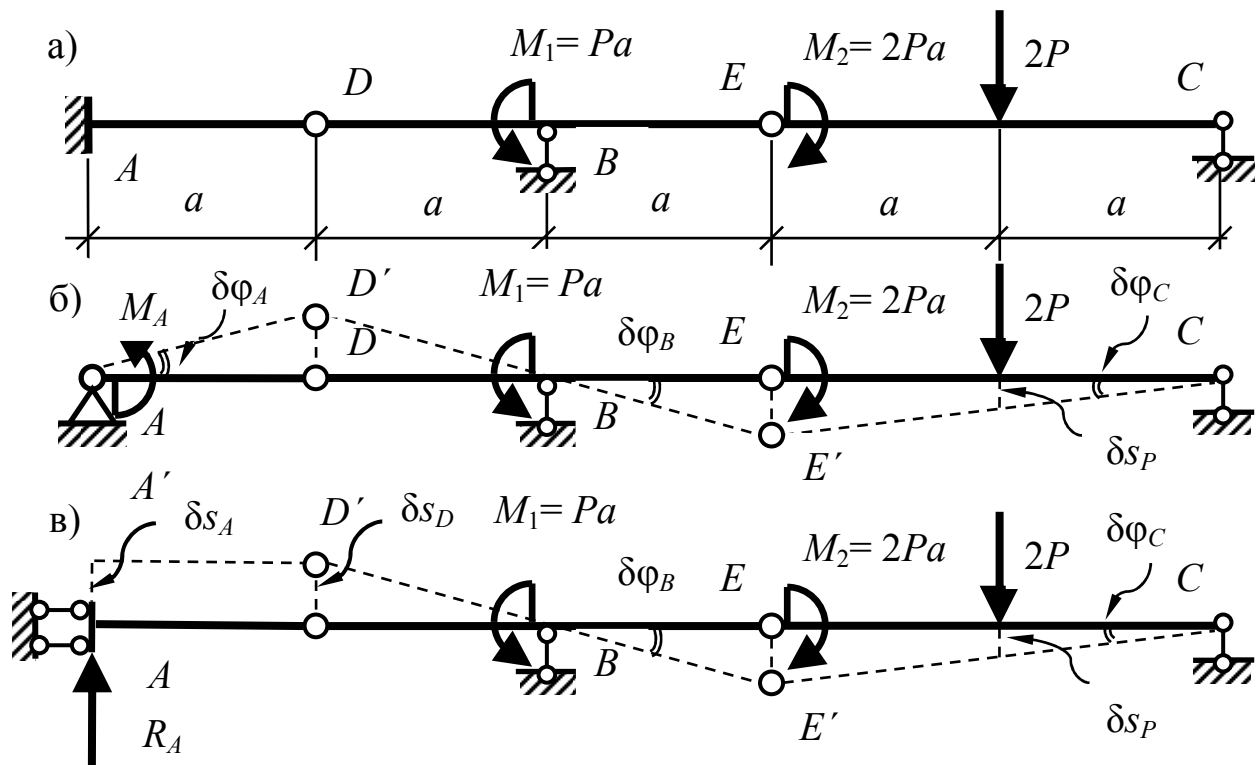


Рис. 10.5

Решение. Жесткая заделка A эквивалентна трем простым связям: двум линейным и одной моментной, реакции которых равны X_A , Y_A и M_A соответственно.

Чтобы найти M_A , отбросим моментную связь и заменим ее неизвестным моментом – при этом две оставшиеся линейные связи будут эквивалентны неподвижной опоре, – затем сообщим балке AD возможное перемещение, повернув ее на угол $\delta\varphi_A$, и построим моду составной балки в целом (рис. 10.5, б).

Уравнение (10.4) для нашей задачи примет вид:

$$M_A \delta\varphi_A - M_1 \delta\varphi_B - M_2 \delta\varphi_C + 2P \delta s_P = 0, \quad (a)$$

при этом работа момента M_2 , приложенного к балке EC , отрицательна, поскольку направление этого момента – по часовой стрелке – не совпадает с направлением поворота балки – против хода часовой стрелки.

Выразим вариации обобщенных координат, входящие в (а), через одну из них, например, через $\delta\varphi_A$.

Из равенства треугольников ADD' и BDD' следует, что $\delta\varphi_B = \delta\varphi_A$, а поскольку $\delta s_E = EE' = a\delta\varphi_B = 2a\delta\varphi_C$, то $\delta\varphi_C = (1/2)\delta\varphi_B = (1/2)\delta\varphi_A$, и $\delta s_P = (1/2)\delta s_E = (1/2)a\delta\varphi_B$. Подставляя в (а), получим:

$$M_A \delta\varphi_A - M_1 \delta\varphi_A - M_2 (1/2)\delta\varphi_A + 2P(1/2)a\delta\varphi_A = 0,$$

откуда

$$M_A = M_1 + (1/2)M_2 - Pa = Pa + (1/2)2Pa - Pa = Pa.$$

Как и в предыдущем примере 6.1 балка загружена системой параллельных сил, поэтому $X_A = 0$, $Y_A = R_A$, и чтобы найти R_A , нужно отбросить вертикальную линейную связь в точке A , заменив ее неизвестной реакцией R_A . При этом моментная связь сохраняется, что фактически означает введение скользящей заделки вместо жесткой.

Сообщим точке A возможное перемещение $\delta s_A = AA'$, при этом с учетом заданных краевых условий вся балка AD переместится вверх, оставаясь горизонтальной (рис. 10.5, в).

Уравнение (10.4) для определения R_A примет вид:

$$R_A \delta s_A - M_1 \delta \varphi_B - M_2 \delta \varphi_C + 2P \delta s_P = 0. \quad (б)$$

Выражая вариации обобщенных координат, входящие в (б), через одну из них, например, δs_A :

$$\delta \varphi_B = \delta s_D / a = \delta s_A / a; \quad \delta \varphi_C = (1/2) \delta \varphi_B = \delta s_A / 2a; \quad \delta s_P = (1/2) \delta s_E = (1/2) \delta s_A,$$

получим:

$$[R_A - (Pa) / a - (2Pa) / (2a) + (2P) / 2] \delta s_A = 0,$$

откуда $R_A = P + P - P = P$.

Чтобы убедиться в правильности полученного решения, составим уравнение $\sum M_D^{(\text{лев})} = 0$:

$$- R_A \cdot a + M_A = - Pa + Pa = 0.$$

Ответ: $R_A = P$, $M_A = Pa$.

В тех случаях, когда нужно определить не одну, а реакции всех опор балки – как в СПР, которую выполняют студенты второго курса ОТФ, план решения задачи можно изменить.

При этом надо учесть, что процедура построения системы уравнений с треугольной матрицей (10.5, б) может оказаться проще, чем для системы с диагональной матрицей (10.5, в).

В следующем примере будут показаны стандартный и нестандартный подходы к решению такой задачи.

Пример 10.5. Определить реакции опор балки на рис. 10.6, а.

Стандартное решение. Заданная составная балка образована из четырех элементарных балок, соединенных шарнирами F , G и H , и загружена системой параллельных сил.

Распределенную нагрузку, приложенную к каждой из элементарных балок, заменяем равнодействующими Q_1 и Q_2 соответственно.

Стандартный метод позволяет находить опорные реакции независимо друг от друга и в любой последовательности, начиная, например, с опоры A .

1. Для определения вертикальной составляющей в неподвижной опоре A отбросим вертикальную линейную связь, заменив ее искомой реакцией $Y_A = R_A$, сообщим точке A возможное перемещение $\delta s_A = AA'$ и построим соответствующую моду балки (рис. 10.6, б).

Уравнение (10.4) для определения R_A примет вид:

$$R_A \delta s_A + Q_2 \delta s_{Q2} - P_1 \delta s_G - M_1 \delta \varphi_D - M_2 \delta \varphi_E + P_2 \delta s_{P2} = 0. \quad (a)$$

Выразим все возможные – линейные и угловые перемещения точек системы, входящие в (а), через $\delta \varphi_E$:

$$\begin{aligned} \delta s_{P2} &= a \delta \varphi_E; \\ \delta \varphi_D &= 2 \delta \varphi_E, \text{ поскольку } \delta s_H = a \delta \varphi_D = 2a \delta \varphi_E; \\ \delta s_G &= \delta s_H = 2a \delta \varphi_E; \\ \delta s_{Q2} &= \delta s_G = 2a \delta \varphi_E; \\ \delta s_A &= \delta s_F = 2 \delta s_{Q2} = 4a \delta \varphi_E. \end{aligned}$$

Подставляя в (а), получим:

$$(4R_A + 2Q_2 - 2P_1 - 2M_1/a - M_2/a + P_2) a \delta \varphi_E = 0,$$

откуда

$$R_A = (1/4)(-2Q_2 + 2P_1 + 2M_1/a + M_2/a - P_2) = (1/4)(-2P + 2P + 2P + P - P) = P/2.$$

2. Для определения R_B отбрасываем подвижную опору в точке B , заменяя ее неизвестной реакцией, сообщаем этой точке возможное перемещение $\delta s_B = BB'$ и строим соответствующую моду балки (рис. 10.6, в).

Уравнение ПВП для определения R_B примет вид:

$$(R_B - Q_1) \delta s_B - Q_2 \delta s_{Q2} + P_1 \delta s_G + M_1 \delta \varphi_D + M_2 \delta \varphi_E - P_2 \delta s_P = 0. \quad (б)$$

Выразим все возможные – линейные и угловые перемещения точек системы, входящие в (б), через $\delta \varphi_E$:

$$\begin{aligned} \delta s_{P2} &= a \delta \varphi_E; \\ \delta \varphi_D &= 2 \delta \varphi_E, \text{ поскольку } \delta s_H = a \delta \varphi_D = 2a \delta \varphi_E; \\ \delta s_G &= \delta s_H = 2a \delta \varphi_E; \\ \delta s_{Q2} &= \delta s_G = 2a \delta \varphi_E; \\ \delta s_B &= (1/2) \delta s_F = \delta s_{Q2} = 2a \delta \varphi_E. \end{aligned}$$

Подставляя в (б), получим:

$$(2R_B - 2Q_1 - 2Q_2 + 2P_1 + 2M_1/a + M_2/a - P_2) a \delta\varphi_E = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_B &= (1/2)(2Q_1 + 2Q_2 - 2P_1 - 2M_1/a - M_2/a + P_2) = \\ &= (1/2)(2P + 2P - 2P - 2P - P + P) = 0. \end{aligned}$$

3. Чтобы найти R_C , отбрасываем подвижную опору C , заменяя ее неизвестной реакцией, сообщаем этой точке возможное перемещение $\delta s_C = CC'$ и строим соответствующую моду балки.

Для этого нужно определить, какая ближайшая к опоре C точка составной балки будет оставаться неподвижной при ее смещении. Нетрудно убедиться, что такой неподвижной точкой будет шарнир F , соединяющий подвижную балку FCG с неподвижной балкой ABF , прикрепленной к земле тремя связями.

Таким образом, для построения моды нужно провести прямую через точку F и сместившуюся точку C' соседней балки и найти положение ее граничной точки – шарнира G' . Дальнейшее построение моды трудностей не вызывает (рис. 10.6, з).

Соответствующее уравнение ПВП примет вид:

$$-Q_2 \delta s_{Q_2} + R_C \delta s_C - P_1 \delta s_G - M_1 \delta\varphi_D - M_2 \delta\varphi_E + P_2 \delta s_P = 0. \quad (\text{в})$$

Выразим все возможные – линейные и угловые перемещения точек системы, входящие в (в), через $\delta\varphi_F$:

$$\begin{aligned} \delta s_{Q_2} &= a \delta\varphi_F; \\ \delta s_C &= 2a \delta\varphi_F; \\ \delta s_G &= 3a \delta\varphi_F; \\ \delta\varphi_D &= 3 \delta\varphi_F, \text{ поскольку } \delta s_G = a \delta\varphi_D = 3a \delta\varphi_F; \\ \delta\varphi_E &= (1/2)\delta\varphi_D = (3/2) \delta\varphi_F, \text{ поскольку } \delta s_H = a \delta\varphi_D = 2a \delta\varphi_E; \\ \delta s_P &= a \delta\varphi_E = (3/2)a\delta\varphi_F. \end{aligned}$$

Подставляя в (в), получим:

$$[-Q_2 + 2R_C - 3P_1 - (3/a)M_1 - (3/2a)M_2 + (3/2)P_2] a \delta\varphi_F = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_C &= (1/2)(Q_2 + 3P_1 + (3/a)M_1 + (3/2a)M_2 - (3/2)P_2) = \\ &= (1/2)[P + 3P + 3P + (3/2)P - (3/2)P] = (7/2)P. \end{aligned}$$

4. Для определения R_D отбрасываем подвижную опору в точке D , заменяя ее неизвестной реакцией, сообщаем этой точке возможное перемещение $\delta s_D = DD'$ и строим соответствующую моду балки (рис. 10.6, д).

Уравнение ПВП для определения R_D примет вид:

$$R_D \delta s_D + M_1 \delta \varphi_G + M_2 \delta \varphi_E - P_2 \delta s_{P_2} = 0. \quad (\text{г})$$

Выражаем все возможные – линейные и угловые перемещения точек системы, входящие в (г), через $\delta \varphi_E$:

$$\begin{aligned} \delta s_D = \delta s_{P_2} &= a \delta \varphi_E; \\ \delta \varphi_G = \delta \varphi_E, \text{ поскольку } \delta s_H &= 2a \delta \varphi_D = 2a \delta \varphi_E. \end{aligned}$$

Подставляя в (г), получим:

$$(R_D + M_1/a + M_2/a - P_2) a \delta \varphi_E = 0,$$

откуда

$$R_D = -M_1/a - M_2/a + P_2 = -2P + P = -P.$$

5. Наконец, для определения R_E отбрасываем подвижную опору в точке E , заменяя ее неизвестной реакцией, сообщаем этой точке возможное перемещение $\delta s_E = EE'$ и строим соответствующую моду балки (рис. 10.6, е).

Уравнение ПВП для определения R_E имеет вид:

$$-P_2 \delta s_{P_2} - M_2 \delta \varphi_H + R_E \delta s_E = 0. \quad (\text{д})$$

Подставляя сюда $\delta s_{P_2} = a \delta \varphi_H$ и $\delta s_E = 2a \delta \varphi_H$, получим:

$$(-P_2 a - M_2 + 2R_E a) \delta \varphi_H = 0,$$

откуда

$$R_E = (1/2)(P + P) = P.$$

6. Проверяем правильность решения задачи, составляя уравнение:

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= R_A + R_B + R_C + R_D + R_E - Q_1 - Q_2 - P_1 - P_2 = \\ &= P/2 + 0 + (7/2)P - P + P - P - P - P - P = 0. \end{aligned} \quad (\text{е})$$

Ответ: $R_A = P/2$, $R_B = 0$, $R_C = (7/2)P$, $R_D = -P$, $R_E = P$.

Нестандартное решение. Для реализации этого способа определения опорных реакций надо выяснить, какие из элементарных балок составной системы являются *зависимыми*, или *основными*, а какие – *независимыми*, или *подвешенными*.

Опорные реакции первых обуславливаются как собственной нагрузкой, так и нагрузкой от других балок, опирающихся на них.

Опорные реакции независимых балок определяются только собственной нагрузкой, приложенной к ним.

Для нахождения независимых балок можно использовать следующее правило: если из заданной составной системы исключить независимую балку, оставшаяся часть системы останется работоспособной, а исключение зависимой балки приводит к разрушению всей системы.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом примере независимой будет крайняя правая балка – HE , а все остальные будут зависимыми.

Этот метод определения опорных реакций является рекуррентным, поэтому решение следует начинать с нахождения опорных реакций независимых балок.

1. Процедура определения R_E не отличается от уже рассмотренной в стандартном решении: мы отбрасываем подвижную опору в точке E , заменяя ее неизвестной реакцией, сообщаем этой точке возможное перемещение $\delta s_E = EE'$ и строим соответствующую моду балки (рис. 10.6, е и рис. 10.7, б).

Уравнение ПВП для определения R_E имеет вид:

$$-P_2 \delta s_{P_2} - M_2 \delta \varphi_H + R_E \delta s_E = 0.$$

Подставляя сюда $\delta s_{P_2} = a \delta \varphi_H$ и $\delta s_E = 2a \delta \varphi_H$, получим:

$$(-P_2 a - M_2 + 2R_E a) \delta \varphi_H = 0,$$

откуда

$$R_E = (1/2)(P + P) = P.$$

2. Для нахождения реакции R_D поступим следующим образом: одновременно отбросим опоры E и D , заменив их реакциями R_E и R_D . При этом мы получим систему не с одной, как раньше, а с двумя степенями свободы. Сообщим точкам E и H этой системы возможные перемещения $\delta s_E = \delta s_H = \delta s$, построив тем самым моду балки, приведенную на рис. 10.7, в.

Уравнение ПВП для этой моды примет вид:

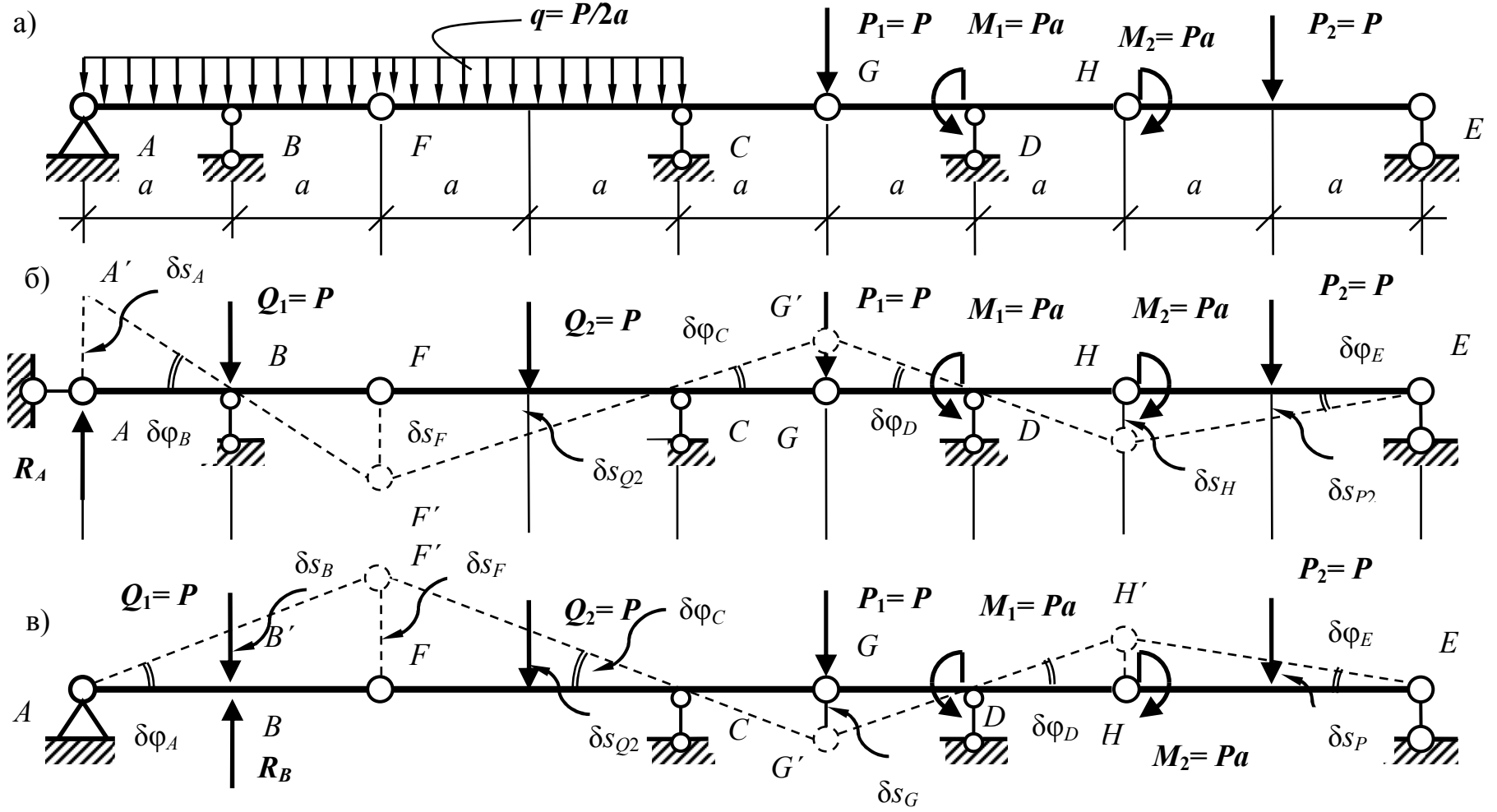
$$(R_E - P_2) \delta s + R_D \delta s_D + M_1 \delta \varphi_G = 0,$$

где $\delta s_D = \delta s/2$, $\delta \varphi_G = \delta s/2a$, или

$$(R_E - P_2) \delta s + R_D(\delta s/2) + M_1(\delta s/2a) = 0,$$

или

$$(2R_E - 2P + R_D + P) \delta s = 0,$$



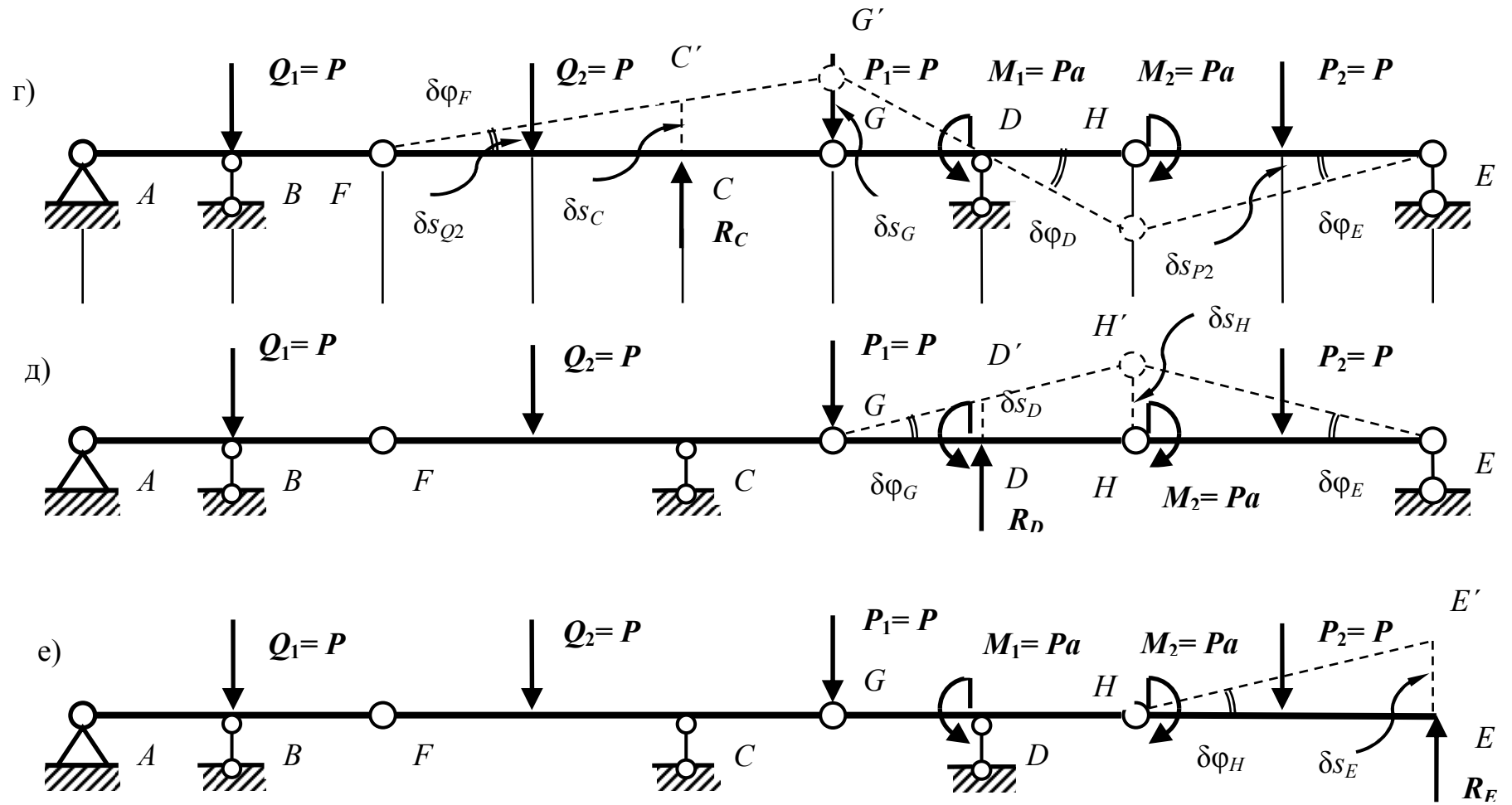
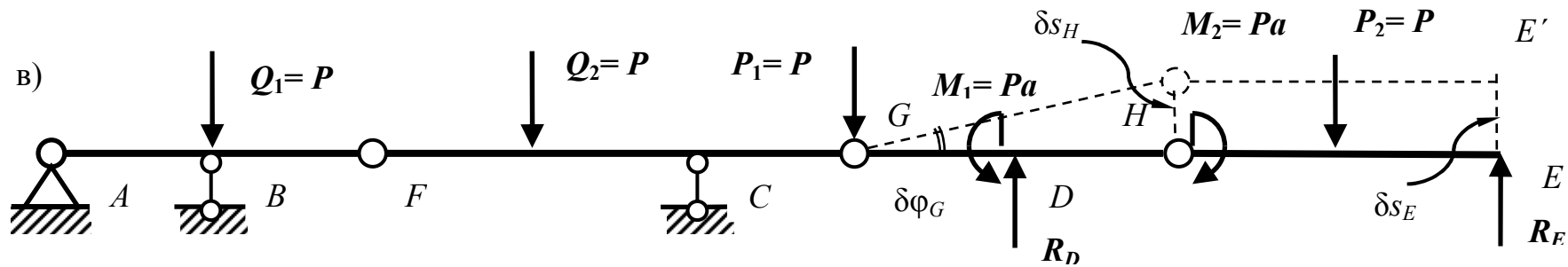
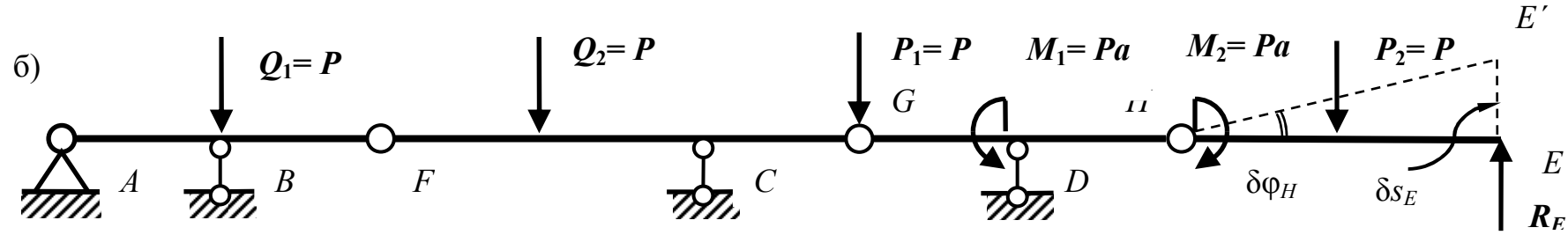
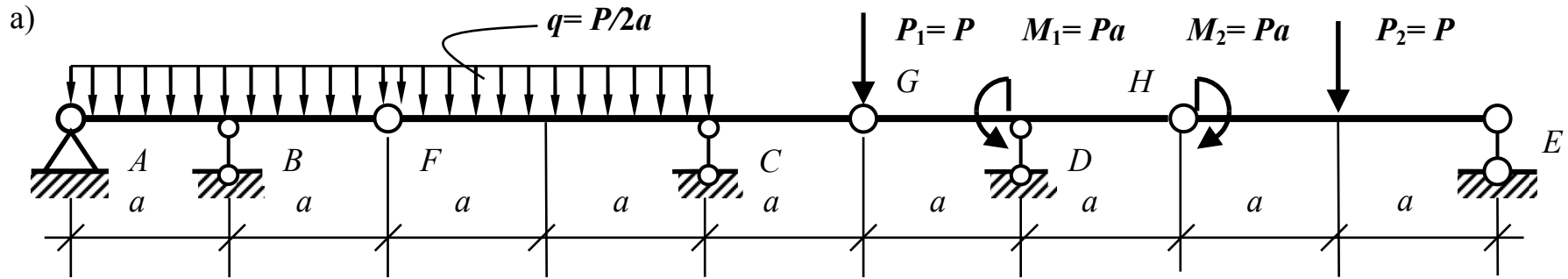


Рис. 10.6



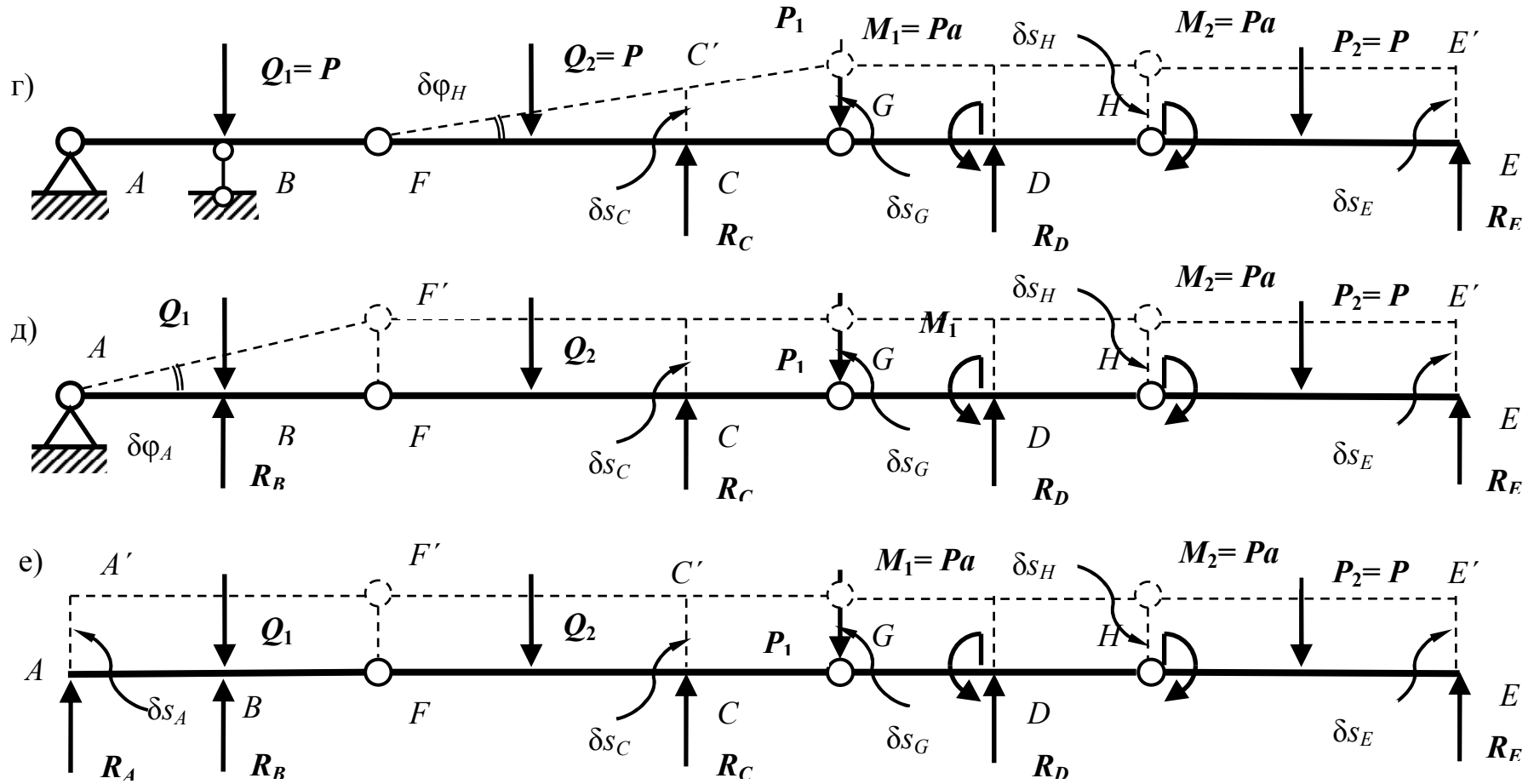


Рис. 10.7

откуда следует:

$$R_D = -2R_E + 2P - P = -P.$$

3. Аналогично построим моду (*рис. 10.7, з*) и получим уравнение ПВП для нахождения R_C :

$$(R_E - P_2 + R_D - P_1) \delta s + R_C \delta s_C - Q_2 \delta s_{Q_2} = 0,$$

где $\delta s_C = (2/3)\delta s$, $\delta s_{Q_2} = (1/3)\delta s$, или

$$[R_E - P_2 - P - P + (2/3)R_C - (1/3)Q_2] \delta s = 0,$$

откуда

$$3R_E - 3P_2 - 6P + 2R_C - Q_2 = 0,$$

$$R_C = (1/2)(-3R_E + 3P + 6P + Q_2) = (1/2)(-3P + 3P + 6P + P) = (7/2)P.$$

4. Далее построим моду (*рис. 10.7, д*) и составим уравнение ПВП для нахождения R_B :

$$(R_E - P_2 + R_D - P_1 + R_C - Q_2) \delta s + (R_B - Q_1) \delta s_B = 0,$$

где $\delta s_B = (1/2)\delta s$, или

$$[P - P - P - P + (7/2)P - P + (1/2)R_B - (1/2)P] \delta s = 0,$$

откуда

$$-4,5P + 4,5P + 2R_B = 0,$$

то есть $R_B = 0$.

5. Отбросив, наконец, вертикальную связь в точке A и заменив ее реакцией R_A , построим моду (*рис. 10.7, е*) и составим уравнение ПВП для ее нахождения:

$$(R_E - P_2 + R_D - P_1 + R_C - Q_2 + R_B - Q_1 + R_A) \delta s = 0, \quad (\text{ж})$$

откуда

$$\begin{aligned} R_A &= - (R_E - P_2 + R_D - P_1 + R_C - Q_2 + R_B - Q_1) = \\ &= - [P - P - P - P + (7/2)P - P - P] = - (4,5P - 5P) = P/2. \end{aligned}$$

6. Теперь, в отличие от стандартного решения, для проверки нельзя применить уравнение (е), поскольку оно линейно зависимо с (ж), но можно воспользоваться соотношением $\sum M_F^{(\text{лев})} = 0$:

$$-R_A \cdot 2a + Q_1 \cdot a = -Pa + Pa = 0.$$

Ответ: $R_A = P/2$, $R_B = 0$, $R_C = (7/2)P$, $R_D = -P$, $R_E = P$.

Примечания:

1. Если при решении задачи стандартным способом проверка (е) не выполняется, то, по-видимому, одна или несколько опорных реакций балки найдены неверно. В этом случае целесообразно постараться локализовать ошибку, составив дополнительно уравнения: $\sum M_i^{(\text{лев})} = 0$ и $\sum M_i^{(\text{прав})} = 0$, выбрав в качестве моментной точки один из соединительных шарниров, расположенных вблизи середины балки.

Так, если для балки, рассмотренной в примере 10.5., $\sum M_G^{(\text{лев})} = 0$, а $\sum M_G^{(\text{прав})} \neq 0$, то это свидетельствует, что, скорее всего, неверно найдена реакция R_D или R_E .

Если при этом $\sum M_H^{(\text{прав})} = 0$, то ошибка – в вычислении R_D .

2. Рассмотренный нестандартный способ определения опорных реакций приводит к более простым по сравнению со стандартным способом уравнениям, которые сравнимы по структуре с уравнениями элементарной статики.

Нетрудно заметить, что уравнения ПВП для мод, приведенных на рисунках 10.7, б – 10.7, д соответствуют уравнениям $\sum M_B^{(\text{прав})} = 0$, $\sum M_F^{(\text{прав})} = 0$, $\sum M_G^{(\text{прав})} = 0$ и $\sum M_H^{(\text{прав})} = 0$.

10.5. Применение ПВП для определения опорных реакций рам

При определении опорных реакций рам удобнее пользоваться этим методом в форме принципа возможных скоростей (10.3).

Будем придерживаться следующего *плана решения задачи*:

1) в соответствии с принципом освобождаемости от связей отбрасываем связь, которая соответствует искомому усилию, и заменяем ее реакцией R_i ;

2) сообщаем точке приложения R_i в полученной *системе с одной степенью свободы* возможную скорость v_i ;

3) записываем условие равенства нулю мощностей всех активных сил, добавляя к ним неизвестную реакцию R_i :

$$\sum (F_i v_i) = 0; \quad (10.3')$$

4) выражаем скорости всех точек системы через скорость какой-либо одной точки;

5) определяем искомую реакцию R_i ;

6) проверяем, если это возможно, правильность решения задачи.

Пример 7.1. Определить горизонтальную составляющую реакции опоры В трехшарнирной рамы (рис. 10.8, а).

Решение. Отбрасывая горизонтальную связь в шарнире В, получим ползун, к которому приложена неизвестная реакция X_B (рис. 10.8, б).

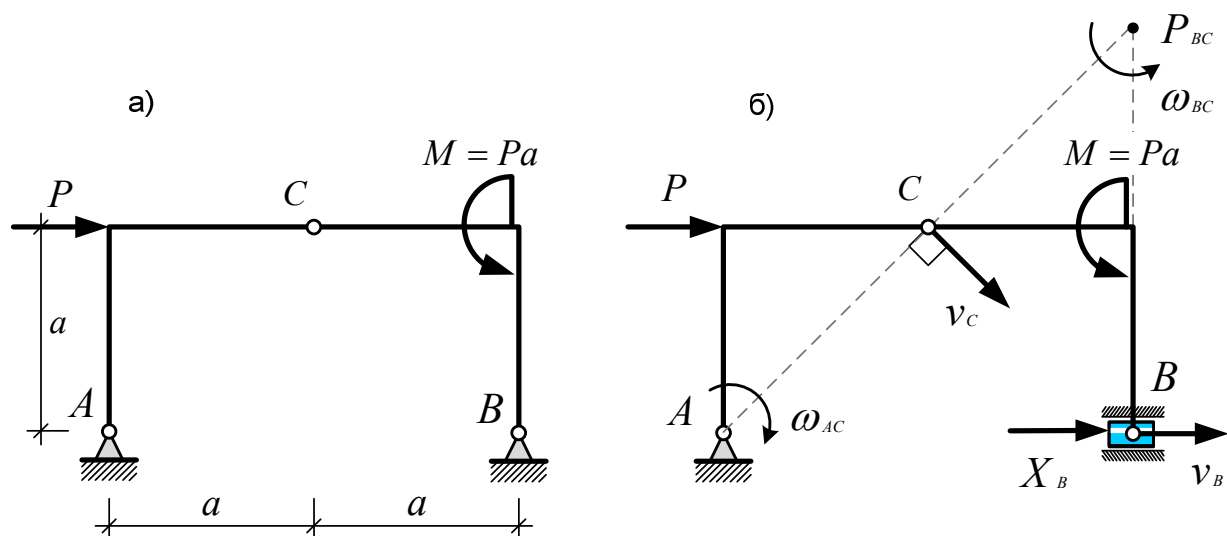


Рис. 10.8

Сообщим ему возможную скорость v_B . При этом все точки полученного механизма с одной степенью свободы также получают возможные скорости, а его звенья AC и BC – угловые скорости ω_{AC} и ω_{BC} соответственно.

Учитывая, что точка A является мгновенным центром скоростей звена AC , определим направление скорости точки C , что позволит построить мгновенный центр скоростей звена BC – точку P_{BC} .

Поскольку $v_C = \omega_{AC}AC = \omega_{BC}CP_{BC}$ и $AC = CP_{BC} = a\sqrt{2}$, то $\omega_{AC} = \omega_{BC}$, а так как скорость точки приложения силы – $v_P \uparrow P$, то уравнение (5.6) для нашей задачи примет вид:

$$Pv_P + M\omega_{BC} + X_B v_B = 0.$$

Учитывая, что $v_P = \omega_{AC}a = \omega_{BC}a$, а $v_B = \omega_{BC}2a$, получим:

$$(Pa + Pa + X_B 2a) \omega_{BC} = 0,$$

откуда $X_B = -P$.

Чтобы убедиться в правильности решения задачи, нужно дополнительно определить X_A или Y_B , а затем воспользоваться уравнениями $\sum X_i = 0$ или $\sum M_C^{(\text{прав})} = 0$ соответственно.

Ответ: $X_B = -P$.

ГЛАВА 11. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА – ЛАГРАНЖА

Этот принцип, как и следует из его названия, представляет собой сочетание двух уже известных нам принципов: принципа Даламбера и принципа возможных перемещений Лагранжа и формулируется следующим образом.

В каждый момент времени сумма работ всех активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях системы, подчиненной идеальным, стационарным и двухсторонним связям, равна нулю:

$$\sum(\mathbf{F}_i + \Phi_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (11.1)$$

Для доказательства запишем формулировку принципа Даламбера для системы материальных точек:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i + \Phi_i = \mathbf{0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11.2)$$

где \mathbf{F}_i – равнодействующая активных сил, приложенных к i -й точке системы, \mathbf{N}_i – равнодействующая реакций связей, приложенных к этой точке, а Φ_i – сила инерции.

Если система подчинена стационарным и двухсторонним связям, то в каждый момент времени будет справедлив принцип возможных перемещений, в соответствии с которым

$$\sum(\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i + \Phi_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0},$$

а поскольку связи системы идеальны, то с учетом (10.1) отсюда и будет следовать (11.1).

Пример 11.1. Определить ускорение груза A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рис. 11.1, а).

Решение. В соответствии с принципом Даламбера прикладываем к системе активные силы \mathbf{P}_A и \mathbf{P}_B и реакцию подшипника \mathbf{N}_B (рис. 11.1, б).

Силы инерции поступательно движущегося тела A заменяем равнодействующей

$$|\Phi_A| = \Phi_A = m_A a_A,$$

а силы инерции барабана B моментом

$$M_B^{\text{ин}} = J_B \varepsilon_B = (m_B R^2 / 2) \varepsilon_B.$$

Сообщим телу A нашей системы с одной степенью свободы возможное перемещение δs_A , коллинеарное вектору ускорения \mathbf{a}_A . При этом барабан B получит возможное угловое перемещение $\delta \varphi_B$.

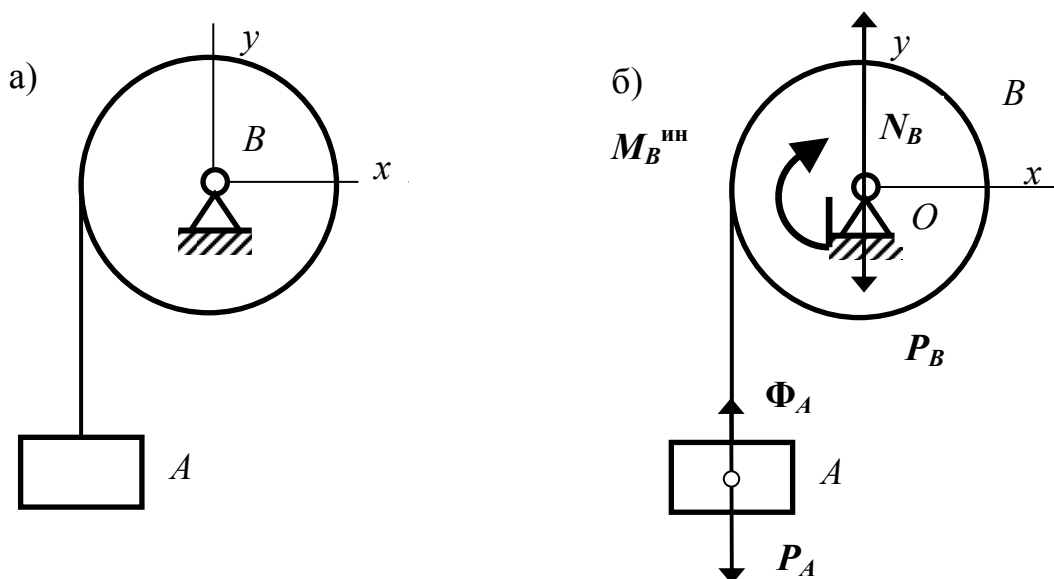


Рис. 11.1

Запишем уравнение ПВП (11.1), которое для нашей задачи примет вид:

$$(P_A - \Phi_A) \delta s_A - M_B^{nn} \delta \varphi_B = 0$$

или

$$(m_A g - m_A a_A) \delta s_A - J_B \varepsilon_B \delta \varphi_B = 0. \quad (a)$$

Выразим в последнем соотношении $\delta \varphi_B$ и ε_B соответственно через δs_A и a_A . С этой целью воспользуемся зависимостью:

$$\omega_B = v_A/R,$$

дифференцируя и интегрируя которую, получим:

$$\varepsilon_B = a_A/R, \quad \delta \varphi_B = \delta s_A/R. \quad (б)$$

Подставляя (б) в (а), приходим к выражению:

$$(m_A g - m_A a_A) \delta s_A - (m_B R^2/2) (a_A/R) (\delta s_A/R) = 0,$$

откуда, поделив на $\delta s_A \neq 0$, найдем искомое ускорение груза A :

$$a_A = 2/3 g.$$

Ответ: $a_A = 2/3 g$.

Примечания:

1. Применение принципа Даламбера – Лагранжа в отличие от непосредственного использования принципа Даламбера позволяет исключить из рассмотрения реакции идеальных связей и тем самым упростить решение. В частности, при определении ускорения в задаче из примера 9.2 на с. 80 – избежать решения системы уравнений и найти ускорение груза A независимо от натяжения нитей T_{BA} и T_{BC} .

2. При определении ускорения с помощью принципа Даламбера – Лагранжа рекомендуется придерживаться следующего порядка решения задачи:

1) приложить к телам системы активные силы, реакции связей, не являющихся идеальными, и силы инерции;

2) сообщить одному из тел системы возможное перемещение, совпадающее по направлению с ускорением этого тела;

3) составить уравнение принципа Даламбера – Лагранжа;

4) выразить ускорения и возможные перемещения каждой i -й точки системы через, соответственно, ускорение и возможное перемещение какой-либо одной j -й точки с учетом зависимостей:

$$a_i/a_j = v_i/v_j = s_i/s_j = \delta s_i/\delta s_j ;$$

5) определить искомое ускорение.

3. Уравнение принципа Даламбера – Лагранжа в учебной литературе носит также название *общего уравнения динамики*.

ГЛАВА 12. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

В этой главе мы получим дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы с идеальными голономными связями, которые имеют большое значение в механике.

12.1 Обобщенные координаты системы

Напомним, что свободная материальная точка в трехмерном пространстве имеет три степени свободы и ее положение можно однозначно определить заданием трех декартовых координат.

Система n таких точек имеет $3n$ степеней свободы и ее положение в пространстве определяется заданием $3n$ декартовых координат.

Если на эту систему наложить связи, то, как уже отмечалось в третьей главе, число степеней свободы системы уменьшится и для определения ее положения в пространстве удобнее применять не декартовы, а *обобщенные координаты*.

Определение. Независимые параметры, однозначно определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами этой системы.

Рассмотрим систему двух свободных материальных точек A и B , расположенных в плоскости xOy . Эта система имеет 4 степени свободы, а ее положение можно определить заданием четырех координат (x_A, y_A, x_B, y_B) .

Те же точки, помещенные на концах рычага, закрепленного в центре O , и удаленные от этого центра на расстояния l_A и l_B соответственно, образуют систему, которая имеет, очевидно, одну степень свободы, и ее положение однозначно определяется заданием угла поворота стержня φ (рис. 12.1).

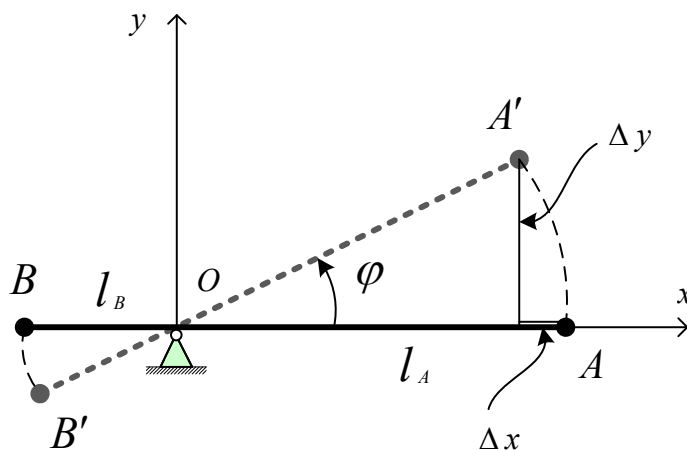


Рис. 12.1

Связи, наложенные на систему, описывается тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}x_A^2 + y_A^2 &= l_A^2 ; \\x_B^2 + y_B^2 &= l_B^2 ; \\(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= (l_A + l_B)^2 .\end{aligned}$$

Число обобщенных координат равно числу степеней свободы первоначальной системы минус число наложенных связей. В нашем примере:

$$s = 4 - 3 = 1.$$

В качестве обобщенной координаты нашей системы можно выбрать x_A , y_A , x_B , y_B , но, конечно, удобнее всего взять угол поворота рычага φ , через который легко выражаются координаты точек системы:

$$x_A = l_A \cos\varphi; \quad y_A = l_A \sin\varphi; \quad x_B = -l_B \cos\varphi; \quad y_B = -l_B \sin\varphi.$$

В дальнейшем обобщенные координаты системы с s степенями свободы будем обозначать через q_j , где $j = 1, 2, \dots, s$.

При этом декартовы координаты системы n материальных точек в общем случае будут функциями обобщенных координат и времени t :

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \\y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \\z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t);\end{aligned}$$

или кратко:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.1)$$

12.2 Обобщенные силы

Пусть система n материальных точек M_i нагружена силами \mathbf{P}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и имеет s степеней свободы, которым соответствуют обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_s .

Сообщим координате q_j возможное перемещение δq_j , тогда в силу (12.1) все точки системы получат перемещения

$$\delta \mathbf{r}_i = (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Работа сил \mathbf{P}_i на возможных перемещениях точек системы, соответствующих вариации δq_j , будет равна:

$$\delta A_{qj} = \sum_i \mathbf{P}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{P}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j = Q_j \delta q_j,$$

где

$$Q_j = \partial A_{qj} / \partial q_j = \sum_i \mathbf{P}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \quad (12.2)$$

– обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j . Последнее соотношение можно представить в виде:

$$Q_j = \sum_i [X_i (\partial x_i / \partial q_j) + Y_i (\partial y_i / \partial q_j) + Z_i (\partial z_i / \partial q_j)].$$

Если система находится в потенциальном поле сил, то с учетом (8.1):

$$X_i = - (\partial \Pi / \partial x_i), Y_i = - (\partial \Pi / \partial y_i), Z_i = - (\partial \Pi / \partial z_i),$$

откуда

$$Q_j = - \sum_i [(\partial \Pi / \partial x_i) (\partial x_i / \partial q_j) + (\partial \Pi / \partial y_i) (\partial y_i / \partial q_j) + (\partial \Pi / \partial z_i) (\partial z_i / \partial q_j)]$$

или

$$Q_j = - \partial \Pi / \partial q_j, (j = 1, 2, \dots, s). \quad (12.3)$$

12.3 Обобщенные скорости

Скорость i -й точки системы как производная от ее радиус-вектора с учетом зависимости (12.1) будет равна:

$$\mathbf{v}_i = (d\mathbf{r}_i / dt) = \sum_{j=1}^s [(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \dot{q}_j + (\partial \mathbf{r}_i / \partial t)], \quad (12.4)$$

где \dot{q}_j – обобщенная скорость. При этом из (12.4) следует, что:

$$(\partial \mathbf{v}_i / \partial \dot{q}_j) = (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \quad (12.5)$$

Покажем, что справедливо еще одно соотношение:

$$(\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j) = (d/dt) (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \quad (12.6)$$

В самом деле, из выражения (12.4), учитывая, что в нем индекс суммирования является свободным и может быть заменен индексом k , получим:

$$(\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j) = (\partial / \partial q_j) \sum_{k=1}^s [(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_k) \dot{q}_k + (\partial \mathbf{r}_i / \partial t)] = \sum_{k=1}^s [(\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial q_k \partial q_j) \dot{q}_k + (\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial t \partial q_j)].$$

Но, с другой стороны:

$$(d/dt) (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_{k=1}^s [(\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial q_j \partial q_k) \dot{q}_k + (\partial^2 \mathbf{r}_i / \partial q_j \partial t)],$$

откуда и следует (12.6).

12.4 Уравнения Лагранжа II рода

Кинетическая энергия системы:

$$T = \sum_i (m_i v_i^2 / 2) = (1/2) \sum_i (m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) \quad (12.7)$$

с учетом зависимости (12.4) является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени t :

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t).$$

Частные производные от нее по обобщенным координатам и обобщенным скоростям с учетом (12.7) и (12.5) будут равны:

$$\begin{aligned} (\partial T / \partial q_j) &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j); \\ (\partial T / \partial \dot{q}_j) &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{v}_i / \partial \dot{q}_j) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Найдем полную производную по времени от последнего выражения:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_j) = \sum_i m_i (d\mathbf{v}_i / dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) + \sum_i m_i \mathbf{v}_i (d/dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j). \quad (12.9)$$

Преобразуем первую сумму в правой части (12.9) с учетом основного уравнения динамики и выражения (12.2):

$$\sum_i m_i (d\mathbf{v}_i / dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_i m_i \mathbf{a}_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = Q_j^F + Q_j^N = Q_j,$$

где Q_j – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j . При этом для идеальных связей

$$Q_j^N = \sum_i (\mathbf{N}_i)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = [\sum_i (\mathbf{N}_i)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) \delta q_j] / \delta q_j = (\sum_i \mathbf{N}_i \delta \mathbf{r}_i) / \delta q_j = 0$$

в силу соотношения (10.1):

$$\sum \mathbf{N}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (10.1')$$

Вторая сумма в правой части (12.9) с учетом (12.6) и (12.8) будет равна:

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i (d/dt)(\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i (\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j) = (\partial T / \partial q_j).$$

Подставляя в (12.9), получим искомые уравнения Лагранжа II рода:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (12.10)$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка относительно переменных q_1, q_2, \dots, q_s .

Интегрируя (12.10) с учетом начальных условий: $q_j(0) = q_j^0$, $\dot{q}_j(0) = \dot{q}_j^0$, получим уравнения движения системы в обобщенных координатах:

$$q_j = q_j(t), (j = 1, 2, \dots, s).$$

12.5 Структура уравнений Лагранжа

Покажем, что кинетическая энергия системы является квадратичной функцией обобщенных скоростей.

Подставляя формулу скорости k -й точки (12.4):

$$\mathbf{v}_k = (d\mathbf{r}_k/dt) = \sum_{j=1}^s [(\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j)\dot{q}_j + (\partial\mathbf{r}_k/\partial t)] \quad (12.4')$$

в выражение кинетической энергии системы:

$$T = (1/2) \sum_k (m_k \mathbf{v}_k)^2,$$

получим:

$$T = (1/2) \sum_{k=1}^n m_k \left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \sum_{i=1}^s (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial t) \dot{q}_i + (\partial\mathbf{r}_k/\partial t)^2 \right] = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

– квадратичная функция обобщенных скоростей с коэффициентами:

$$A_{ij} = A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \sum_{k=1}^n m_k (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j);$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^s B_i \dot{q}_i$$

– линейная функция обобщенных скоростей с коэффициентами:

$$B_i = B_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \sum_{k=1}^n m_k (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i) (\partial\mathbf{r}_k/\partial t);$$

$$T_0 = T_0(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = (1/2) \sum_{k=1}^n m_k (\partial \mathbf{r}_k / \partial t)^2$$

– функция *нулевой степени* относительно обобщенных скоростей.

Для стационарных связей $\partial \mathbf{r}_k / \partial t = 0$, поэтому коэффициенты B_i и T_0 равны нулю, а кинетическая энергия системы будет *однородной квадратичной функцией* обобщенных скоростей, или *квадратичной формой*:

$$T_2 = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

при этом коэффициенты $A_{ij} = A_{ji}$ зависят только от обобщенных координат, но не от времени.

Именно с таким случаем встречаются студенты второго курса при выполнении своих самостоятельных проектировочных работ по теоретической механике.

Теперь нетрудно доказать, что уравнения Лагранжа являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

В самом деле, кинетическую энергию системы в общем случае можно представить в виде:

$$T = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^s B_i \dot{q}_i + T_0,$$

поэтому

$$\partial T / \partial \dot{q}_i = \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

– будет линейной функцией обобщенных скоростей, а

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_i) = \sum_{j=1}^s (A_{ij} \ddot{q}_j + \dot{A}_{ij} \dot{q}_j) + \dot{B}_i$$

– дифференциальным оператором второго порядка.

Пример 12.1. Определить ускорение груза A , принимая барабан B за однородный цилиндр и полагая $m_A = m_B$ (рис. 12.2, а).

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол поворота барабана B или величину линейного смещения груза A , как это сделано в нашем примере, (рис. 12.2, б).

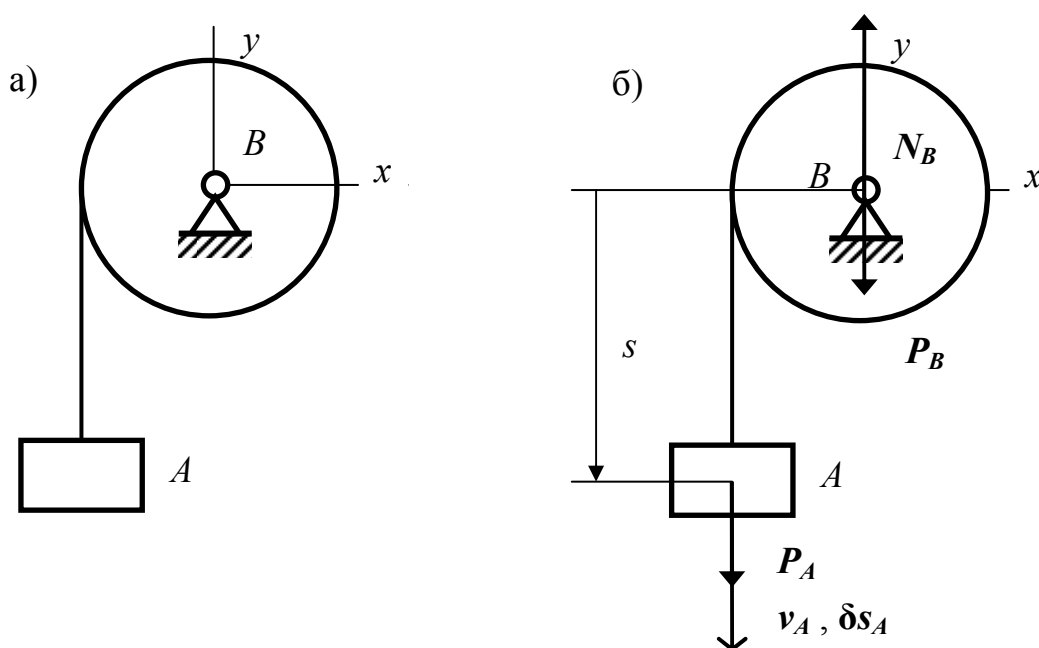


Рис. 12.2

Для $q_1 = s$ уравнение (12.10) примет вид:

$$(d/dt)(\partial T/\partial \dot{s}) - (\partial T/\partial s) = Q_s, \quad (a)$$

где

$$T = T^A + T^B = (1/2)m_A v_A^2 + (1/2)(m_B R^2/2)(v_A/R)^2 = (3/4)m v_A^2 = (3/4)m \dot{s}^2.$$

Вычисляем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и обобщенным скоростям:

$$\begin{aligned} \partial T/\partial s &= 0; \\ \partial T/\partial \dot{s} &= (3/2)m \dot{s}. \end{aligned} \quad (б)$$

Для вычисления Q_s сообщим системе возможное перемещение $\delta s = \delta s_A$ и подсчитаем работу внешних сил, приложенных к точкам системы на перемещениях точек их приложения:

$$\delta A_s = P_A \delta s_A = mg \delta s,$$

откуда

$$Q_s = \delta A_s / \delta s = mg. \quad (в)$$

Подставляя (б) и (в) в (а), получим:

$$(3/2)m\ddot{s} = mg,$$

откуда искомое ускорение груза A будет равно: $a_A = \ddot{s} = (2/3)g$.

Ответ: $a_A = (2/3)g$.

Пример 12.2. Система, состоящая из однородного диска A радиуса r с намотанной на него нитью и тела B , движется под действием собственного веса.

Определить обобщенные ускорения \ddot{s} и $\ddot{\varphi}$, полагая $m_A = m_B = m$ и пренебрегая трением и весом блока C (рис. 12.3, а).

Решение. Воспользуемся уравнениями (12.10), которые для заданной системы с двумя степени свободы примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \tag{а}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии диска A , участвующего в плоском движении, и кинетической энергии тела B , движущегося поступательно:

$$T = T_A + T_B = m_A v_A^2 / 2 + J_A \omega_A^2 / 2 + m_B v_B^2 / 2. \tag{б}$$

Скорость центра диска A можно найти по теореме о скоростях точек плоской фигуры: она складывается из скорости полюса A_P , в качестве которого удобно взять точку диска, касающуюся вертикального участка нити, и скорости этого центра в его вращении вокруг полюса A_P :

$$v_B = \dot{s}; v_A = (\dot{s} + r\dot{\varphi}).$$

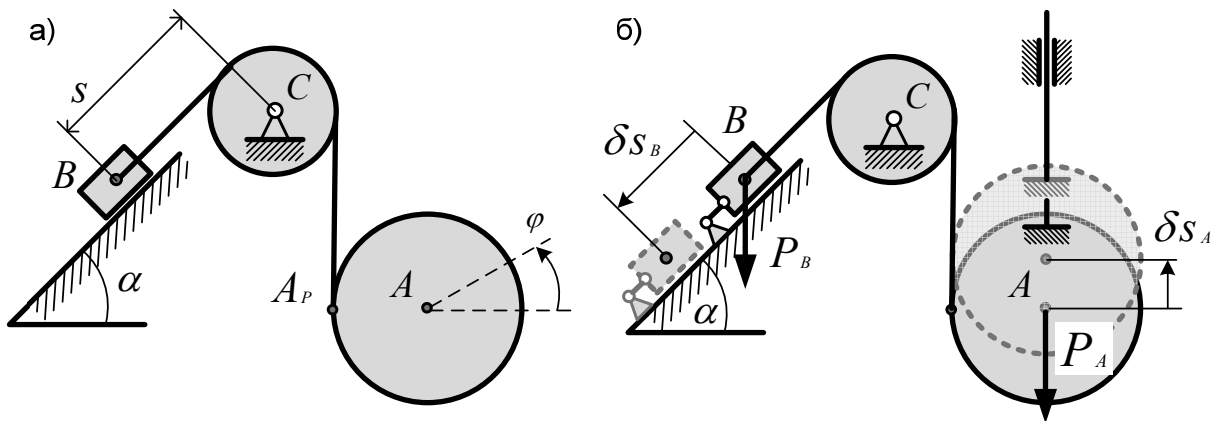


Рис. 12.3

Подставляя в (б) и учитывая, что $J_A = (m_A r^2)/2$, а $\omega_A = \dot{\varphi}$, получим:

$$T = m_A (\dot{s} + r\dot{\varphi})^2 / 2 + m_A r^2 \dot{\varphi}^2 / 4 + m_B \dot{s}^2 / 2.$$

Вычисляем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и обобщенным скоростям:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial s &= \partial T / \partial \varphi = 0; \\ \partial T / \partial \dot{s} &= m_A (\dot{s} + r\dot{\varphi}) + m_B \dot{s}; \\ \partial T / \partial \dot{\varphi} &= m_A (\dot{s} + r\dot{\varphi})r + m_A r^2 \dot{\varphi} / 2. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

Для определения обобщенных сил Q_s и Q_φ , соответствующих обобщенным координатам $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$, сообщим системе возможное перемещение $\delta s > 0$, $\delta \varphi = 0$.

Фактически это означает, что на систему наложены две дополнительные связи: моментная – на диск A , препятствующая его повороту, и линейная – на тело B , а затем последней связи сообщено возможное перемещение $\delta s_B = \delta s > 0$ (рис. 12.3, б).

Элементарная работа активных сил, приложенных к точкам системы, на этом перемещении будет равна:

$$\delta A_s = g(m_B \sin \alpha \delta s_B - m_A \delta s_A) = mg(\sin \alpha - 1)\delta s,$$

поскольку $\delta s_B = \delta s_A = \delta s$, а соответствующая обобщенная сила:

$$Q_s = \delta A_s / \delta s = mg(\sin \alpha - 1). \quad (\text{г})$$

Аналогично сообщая системе возможное перемещение $\delta s = 0$, $\delta \varphi > 0$ и вычисляя элементарную работу

$$\delta A_\varphi = -mg\delta s_A,$$

с учетом соотношения $\delta s_A = r\delta \varphi$ получим:

$$Q_\varphi = \delta A_\varphi / \delta \varphi = -mgr. \quad (\text{д})$$

Подставляя (в), (г) и (д) в (а), получим:

$$\begin{aligned} 2\ddot{s} + r\ddot{\varphi} &= g(\sin \alpha - 1); \\ r\ddot{s} + (3/2)r^2\ddot{\varphi} &= -gr. \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем искомые выражения обобщенных ускорений:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= (g/4)(3\sin\alpha - 1); \\ \ddot{\varphi} &= - (g/2r)(\sin\alpha + 1).\end{aligned}$$

Ответ: $\ddot{s} = (g/4)(3\sin\alpha - 1)$; $\ddot{\varphi} = - (g/2r)(\sin\alpha + 1)$.

Примечания:

1. Приведенные примеры наглядно демонстрируют достоинства полученных Лагранжем уравнений, которые не содержат реакций идеальных связей и позволяют найти ускорения точек системы с одной степенью свободы так же просто, как с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы.

2. Самое главное – эти уравнения позволяют рассматривать системы с любым конечным числом степеней свободы и находить законы их движения.

3. Отметим, что при выполнении контрольных и самостоятельных проектировочных работ на данную тему студенты, как правило, допускают ошибки, связанные не с динамикой, а с кинематическим анализом представленного механизма.

ГЛАВА 13. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

13.1 Уравнения Лагранжа для потенциального поля сил

Обобщенные силы системы с s степенями свободы, помещенной в потенциальное поле сил, определяются выражениями (12.3):

$$Q_j = - \partial \Pi / \partial q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (12.3')$$

поэтому уравнения Лагранжа II рода для такой системы (12.10):

$$(d/dt) (\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (12.10')$$

примут вид:

$$(d/dt) (\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = - \partial \Pi / \partial q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (13.1)$$

Введем в рассмотрение *функцию Лагранжа*:

$$L = T - \Pi.$$

Учитывая, что $T = L + \Pi$, а

$$\partial T / \partial \dot{q}_j = \partial L / \partial \dot{q}_j, \quad \partial T / \partial q_j = \partial L / \partial q_j + \partial \Pi / \partial q_j$$

и подставляя последние выражения в (13.1), получим *уравнения Лагранжа II рода для потенциального поля сил*:

$$(d/dt) (\partial L / \partial \dot{q}_j) - \partial L / \partial q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (13.2)$$

13.2. Условия равновесия системы

Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы, которая описывается уравнениями Лагранжа II рода (12.10):

$$(\partial / \partial t) (\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (12.10')$$

Если на протяжении конечного промежутка времени она находится в состоянии покоя, то ее кинетическая энергия остается равной нулю, а значит из (12.10') следует, что

$$Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (13.3)$$

С другой стороны, в силу первой аксиомы такое состояние системы будет возможно только в том случае, если каждая точка, а значит и система в целом находится в состоянии равновесия. Поэтому соотношения (13. 3) будут являться *условиями равновесия системы в обобщенных координатах*.

Для потенциального поля сил эти условия примут вид:

$$\partial\Pi/\partial q_j = 0, (j = 1, 2, \dots, s). \quad (13. 4)$$

Эти условия одновременно являются условиями равновесия системы и необходимыми условиями минимума ее потенциальной энергии.

Напомним, что равновесие системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным и условия (13. 4) выполняются в каждом случае.

Ответ на вопрос о характере равновесия системы дает *теорема Лагранжа-Дирихле*, которая утверждает, что *достаточным условием равновесия консервативной системы является абсолютный минимум ее потенциальной энергии*.

Пример 13.1. Определить при каком значении обобщенной координаты q механическая система с одной степенью свободы находится в положении равновесия, если ее потенциальная энергия имеет вид: $\Pi = q^2 - 6q + 11$.

Решение. Уравнение (13. 4) примет вид:

$$2q - 6 = 0,$$

откуда $q = 3$. Этому значению q соответствует *минимальное* значение потенциальной энергии системы, равное:

$$\Pi(3) = 9 - 18 + 11 = 2,$$

откуда следует, что это значение q соответствует положению *устойчивого* равновесия системы.

Ответ: система находится в положении равновесия при $q = 3$.

Пример 13.2. Определить характер равновесия системы, представляющей собой обратный маятник длиной l , несущий на конце точечную массу весом P , упруго закрепленную на пружине с жесткостью c (рис. 13.1, а).

Решение. Система содержит пружину и является простейшей моделью упругого тела, поэтому в механике такая задача часто встречается при переходе от абсолютно твердых тел к деформируемым системам.

Рассмотрим нашу систему с одной степенью свободы в отклоненном положении (рис.13.1, б) и примем первоначальное положение системы за нулевое.

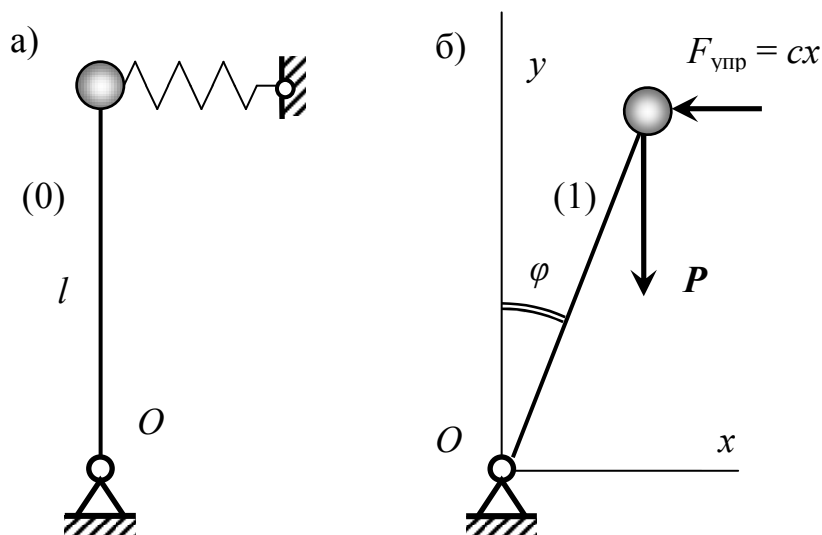


Рис. 13.1

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии груза, равных соответственно работе упругой силы пружины и работе силы тяжести при перемещении системы из первого положения в нулевое:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi(F_{\text{упр}}) + \Pi(P) = A_{10}(F_{\text{упр}}) + A_{10}(P) = \\ &= (c/2) x^2 - P (\Delta y) = (c/2) l^2 \sin^2 \varphi - Pl(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Условие (12.14) при этом примет вид:

$$\partial \Pi / \partial \varphi = cl^2 \sin \varphi \cos \varphi - Pl \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$\sin \varphi (cl \cos \varphi - P) = 0.$$

Полученное уравнение устойчивости имеет следующие решения:

1) $\varphi = 0$, $P < cl$. Для определения характера положения равновесия исследуем $\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2$:

$$\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2 = \partial / \partial \varphi [(cl^2/2) \sin 2\varphi - Pl \sin \varphi] = cl^2 \cos 2\varphi - Pl \cos \varphi;$$

$$\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2 |_{\varphi=0} = cl^2 - Pl = l(cl - P) > 0, \text{ если } P < cl.$$

То есть это положение устойчивого равновесия.

2) $\varphi = 0$, $P > cl$. Это, очевидно, положение неустойчивого равновесия.

3) $\varphi = \varphi_0 \neq 0$, $P = cl \cos \varphi_0$. Так же исследуем $\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2$:

$$\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2 = cl^2 \cos 2\varphi - Pl \cos \varphi = cl^2 (\cos 2\varphi - \cos \varphi_0 \cos \varphi);$$

$$\partial^2\Pi/\partial\varphi^2(\varphi = \varphi_0) = -cl^2 \sin^2\varphi_0 < 0.$$

То есть это также *положение неустойчивого равновесия*.

- Ответ:* 1) $\varphi = 0, P < cl$ – *положение устойчивого равновесия*;
2) $\varphi = 0, P > cl$ – *положение неустойчивого равновесия*;
3) $\varphi = \varphi_0 \neq 0, P = cl \cos\varphi_0$ – *положение неустойчивого равновесия*.

Примечание.

Отметим, что в последнем примере 13.2 при $P = cl$ происходит *бифуркация*, или разветвление, форм равновесия так же, как при рассмотрении устойчивости упругих тел.

ГЛАВА 14. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Если систему вывести из положения устойчивого равновесия, она при определенных условиях начнет совершать колебания. Теория колебаний – один из важнейших разделов теоретической механики.

14.1. Свободные колебания без учета сопротивления

14.1.1. Дифференциальное уравнение свободных малых колебаний

Рассмотрим систему n материальных точек с одной степенью свободы, положение которой описывается одной обобщенной координатой q , а движение – уравнением Лагранжа II рода:

$$(d/dt) (\partial T/\partial \dot{q}) - (\partial T/\partial q) = Q. \quad (14.1)$$

В общем случае уравнение (14.1) будет нелинейным, но если предположить, что \dot{q} и q малы, то его можно *линеаризовать*. Колебания, описываемые таким уравнением, называются *линейными*.

Пусть система подчинена стационарным связям, находится в потенциальном поле сил, а положению устойчивого равновесия системы соответствует значение $q = 0$.

Представим кинетическую энергию системы в виде:

$$T = (1/2) \sum_i m_i v_i^2 = (1/2) \sum_i m_i [(\partial r_i / \partial q) \dot{q}]^2 = (1/2) A(q) \dot{q}^2$$

и разложим функцию $A(q)$ в ряд:

$$A(q) = A(0) + (\partial A/\partial q)|_0 \cdot q + (1/2) (\partial^2 A/\partial q^2)|_0 \cdot q^2 + \dots$$

Ограничиваясь первым членом разложения, получим:

$$T = (1/2) a \dot{q}^2, \quad (14.2)$$

где $a = A(0) > 0$.

Представим аналогично потенциальную энергию системы:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + (\partial \Pi/\partial q)|_0 \cdot q + (1/2) (\partial^2 \Pi/\partial q^2)|_0 \cdot q^2 + \dots$$

Учитывая, что $(\partial \Pi/\partial q)|_0 = Q(0) = 0$ и полагая $\Pi(0) = 0$, получим:

$$\Pi(q) = (1/2) c q^2, \quad (14.3)$$

где $c = (\partial^2 \Pi/\partial q^2)|_0 > 0$, поскольку система находится в положении устойчивого равновесия, где ее потенциальная энергия достигает минимума.

Подставляя (14.2) и (14.3) в (14.1), получим:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (14.4)$$

Примечания:

1. Дифференциальное уравнение колебаний точки с массой m , упруго закрепленной на пружинке с жесткостью c , уже было рассмотрено ранее в примере 2.4 и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (14.4')$$

поэтому коэффициенты a и c в уравнении (14.4) называются соответственно *инерционным* и *упругим*, а сила Q в уравнении (14.1) – *квазиупругой*.

Отметим, что для решения (14.4') в указанном примере применялся метод разделения переменных.

2. Необходимость в линеаризации уравнения (14.1) отсутствует, если оно изначально является линейным.

14. 1. 2. Интегрирование ДУ свободных колебаний

Представим уравнение (14.4) в виде:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega^2 = c/a \quad (14.4'')$$

и применим для его решения общую теорию решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, то есть будем искать решение в виде:

$$q(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Подставив последнее выражение в (14.4''), получим *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

корни которого будут чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega,$$

при этом общее решение (14.4'') примет вид:

$$q(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (14.5)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t,$$

представим (14.5) в виде:

$$q(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t,$$

а переходя от комплексно сопряженных констант C_1 и C_2 к новым постоянным интегрирования B и C по формулам:

$$B = C_1 + C_2 ; C = i (C_1 - C_2),$$

получим искомое решение уравнения (14.4) в виде:

$$q(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t \quad (14.6)$$

или:

$$q(t) = A \sin (\omega t + \alpha), \quad (14.7)$$

(рис. 14.1), где постоянные B и C связаны с постоянными A и α соотношениями:

$$B = A \sin \alpha, C = A \cos \alpha.$$

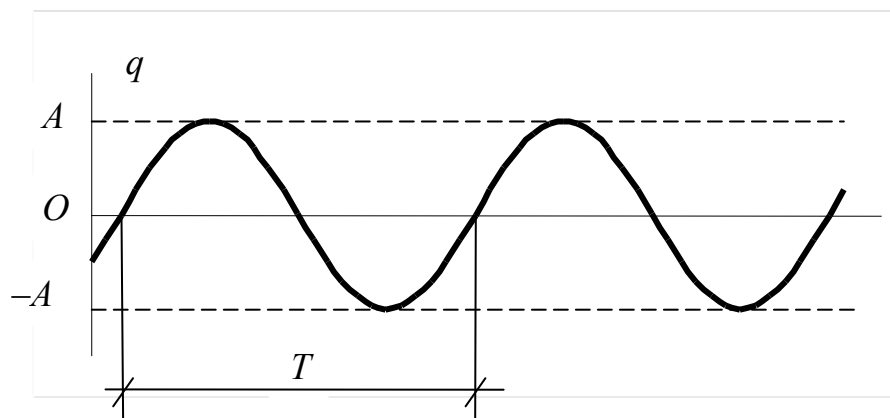


Рис. 14.1

Эти константы определяют из начальных условий:

$$q(0) = q_0 ; \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (14.8)$$

Подставляя (14.6) и (14.7) в (14.8), получим:

$$B = q_0 ; C = \dot{q}_0 / \omega ; A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2} ; \alpha = \text{arctg} (\omega q_0 / \dot{q}_0).$$

Уравнение (14.7) описывает *гармонические колебания*, где:

- A – амплитуда колебания,
- $\omega t + \alpha$ – фаза колебания;
- α – начальная фаза колебания;
- ω – круговая, или циклическая, частота.

Период колебаний $T = 2\pi/\omega$, который измеряется в секундах, связан с частотой f , измеряемой в герцах, зависимостью:

$$f = 1/T.$$

Примечания:

1. В математическом аспекте уравнение (14.4'), описывающее движение точки, ничем не отличается от уравнения, которое описывает изменение электрического заряда q на обкладках конденсатора с емкостью C в колебательном контуре, содержащем индуктивность L :

$$L\ddot{q} + (1/C)q = 0.$$

При этом увеличение вчетверо жесткости пружины c в уравнении (14.4) приводит к двукратному росту циклической частоты механических колебаний $\omega = (c/m)^{(1/2)}$, в то время как соответствующее увеличение вчетверо емкости конденсатора снижает вдвое циклическую частоту электрических колебаний $\omega = (LC)^{-(1/2)}$.

Отметим, что при параллельном соединении пружин, как и при параллельном соединении конденсаторов $C = C_1 + C_2$, при последовательном $(1/C) = (1/C_1) + (1/C_2)$.

2. Обозначение ω для *круговой частоты* не случайно: если твердое тело вращается вокруг оси Oz с *угловой скоростью* ω , то проекция точки M этого тела, находящейся на расстоянии A от оси вращения на ось Ox будет колебаться по закону (14.7).

14.2. Свободные колебания с учетом сопротивления

Пусть на систему помимо обобщенной упругой силы $Q_{\text{упр}} = -cq$ действует обобщенная сила сопротивления, пропорциональная скорости $Q_{\text{сопр}} = -b\dot{q}$.

Дифференциальное уравнение колебаний системы

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$$

представим в виде:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2q = 0, \quad (14.9)$$

где $2\varepsilon = b/a$, $\omega^2 = c/a$.

Подставляя в (14.9) $q(t) = Ce^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0,$$

корни которого:

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}. \quad (14.10)$$

В зависимости от соотношения между ε и ω здесь возможны три случая:

1. «Малое» сопротивление ($\omega > \varepsilon$):

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}.$$

Общее решение (14.10):

$$q(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}),$$

переходя от постоянных C_1 и C_2 к постоянным B и C или A и α , можно представить в виде, аналогичном (14.6) или (14.7) (рис. 14.2):

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} (B \cos \omega_1 t + C \sin \omega_1 t), \quad (14.11)$$

$$q(t) = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (14.12)$$

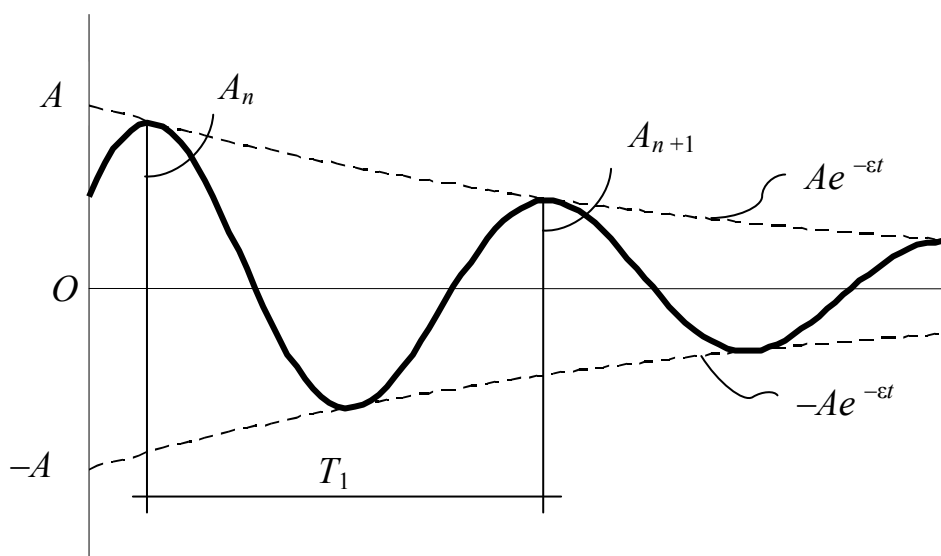


Рис. 14.2

Это затухающие колебания с условным периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$, степень затухания которых характеризует отношение двух последовательных максимальных отклонений одного знака:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A \exp(-\varepsilon t_n) \sin(\omega_1 t_n + \alpha)}{A \exp[-\varepsilon(t_n + T_1) \sin(\omega_1 t_n + \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_1} + \alpha)]} = \exp(\varepsilon T_1).$$

На практике рассматривают логарифм этой величины, называемый *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\delta = \ln[\exp(\varepsilon T_1)] = \varepsilon T_1 \approx \varepsilon T.$$

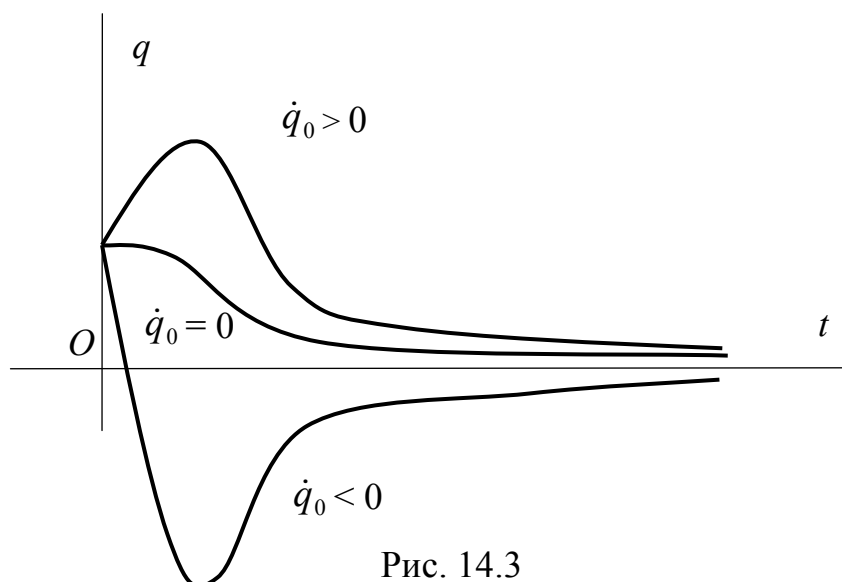
2. «Большое» сопротивление ($\omega < \varepsilon$):

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm n; \quad n = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}.$$

Общее решение (14.10)

$$q(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{+nt} + C_2 e^{-nt})$$

стремится с течением времени к нулю, поскольку $\varepsilon > n$, движение аperiodическое (рис. 14.3).



3. Промежуточный случай ($\omega = \varepsilon$):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\varepsilon;$$

и общее решение (14.10) имеет вид:

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t),$$

которое качественно не отличается от предыдущего.

14.3. Вынужденные колебания без учета сопротивления

Пусть на систему действуют две обобщенные силы: упругая $Q_{\text{упр}} = -cq$ и возмущающая гармоническая сила $Q_{\text{возм}} = P^* \sin \Omega t$.

Дифференциальное уравнение колебаний системы:

$$a \ddot{q} + cq = P^* \sin \Omega t$$

запишем в виде:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = P \sin \Omega t, \quad (14.13)$$

где $\omega^2 = c/a$, $P = P^*/a$.

Общее решение неоднородного уравнения (14.13) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (см. 14.1) и частного решения неоднородного уравнения:

$$q(t) = q_{\text{одн}}(t) + q_{\text{част}}(t). \quad (14.14)$$

Последнее, следуя общей теории решения ДУ, будем искать с учетом вида функции, входящей в правую часть уравнения (14.13).

1. Пусть $\Omega \neq \omega$. Ищем частное решение в виде:

$$q_{\text{част}}(t) = \tilde{A} \sin \Omega t. \quad (14.15)$$

Подставляя (14.15) в (14.13), получим:

$$(\omega^2 - \Omega^2) \tilde{A} \sin \Omega t = P \sin \Omega t,$$

откуда

$$\tilde{A} = P/(\omega^2 - \Omega^2)$$

и с учетом (14.7), (14.15) выражение (14.14) примет вид:

$$q(t) = q_{\text{собств}}(t) + q_{\text{вын}}(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + [P/(\omega^2 - \Omega^2)] \sin \Omega t. \quad (14.16)$$

Как видим, колебания в системе складываются из собственных и вынужденных. Последние происходят с частотой вынуждающей силы, причем в фазе с ней при $\Omega < \omega$ и в противофазе при $\Omega > \omega$.

2. Пусть $\Omega = \omega$. Ищем частное решение в виде:

$$q_{\text{част}}(t) = q_{\text{вын}}(t) = \tilde{A} t \cos \omega t. \quad (14.17)$$

Подставляя (14.17) в (14.13) с учетом зависимостей:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\text{вын}}(t) &= \tilde{A} \cos \omega t - \tilde{A} \omega t \sin \omega t; \\ \ddot{q}_{\text{вын}}(t) &= -\tilde{A} \omega \sin \omega t - \tilde{A} \omega \sin \omega t - \tilde{A} \omega^2 t \cos \omega t, \end{aligned}$$

получим:

$$\sin \omega t (-2 \tilde{A} \omega) + \cos \omega t (\tilde{A} \omega^2 t - \tilde{A} \omega^2 t) = P \sin \omega t$$

или:

$$\tilde{A} = -P/2\omega,$$

откуда:

$$q_{\text{вын}}(t) = -(Pt/2\omega) \cos \omega t = (Pt/2\omega) \sin(\omega t - \pi/2),$$

и общее решение (14.14) примет вид:

$$q(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + (Pt/2\omega) \sin(\omega t - \pi/2). \quad (14.18)$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний $Pt/2\omega$ линейно возрастает с течением времени. Это – резонанс.

При резонансе вынужденные колебания происходят с собственной частотой системы и отстают по фазе на $\pi/2$ от вынуждающей силы.

14.4. Вынужденные колебания с учетом сопротивления

14.4.1. Общее решение

Пусть на систему помимо $Q_{\text{упр}} = -cq$ и $Q_{\text{возм}} = P^*\sin\Omega t$ действует обобщенная сила сопротивления, пропорциональная скорости $Q_{\text{сопр}} = -b\dot{q}$.

Дифференциальное уравнение движения системы

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = P^*\sin\Omega t$$

запишем в виде:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2q = P\sin\Omega t, \quad (14.19)$$

где $2\varepsilon = b/a$, $\omega^2 = c/a$, $P = P^*/a$.

Как и раньше

$$q(t) = q_{\text{одн}}(t) + q_{\text{част}}(t) = q(t) = q_{\text{собств}}(t) + q_{\text{вын}}(t).$$

Ищем $q_{\text{част}}(t)$ в виде:

$$q_{\text{част}}(t) = \tilde{A} \sin(\Omega t - \beta) = \tilde{A} \sin \theta.$$

Подставляя в (14.19) последнее выражение вместе со своими производными:

$$\dot{q}_{\text{част}}(t) = \tilde{A} \Omega \cos \theta,$$

$$\ddot{q}_{\text{част}}(t) = -\tilde{A} \Omega^2 \sin \theta,$$

получим:

$$-\tilde{A} \Omega^2 \sin \theta + 2\varepsilon \tilde{A} \Omega \cos \theta + \omega^2 \tilde{A} \sin \theta = P \sin(\theta + \beta) = P(\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в обеих частях последнего уравнения, найдем:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\omega^2 - \Omega^2) &= P \cos \beta; \\ 2\varepsilon \tilde{A} \Omega &= P \sin \beta. \end{aligned}$$

Из этих соотношений получим искомые выражения для \tilde{A} и β :

$$\tilde{A} = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 + \Omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2\varepsilon \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Представив последние формулы в виде

$$\tilde{A} = \frac{P}{\omega^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{2\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

и введя обозначения: $\lambda = \Omega/\omega$ и $\gamma = (2\varepsilon)/\omega$, получим:

$$\tilde{A} = \frac{P}{\omega^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \lambda^2 \gamma^2}}; \quad (14.20)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \gamma \lambda / (1 - \lambda^2). \quad (14.21)$$

Второй из введенных коэффициентов носит название *коэффициента неупругого сопротивления* и связан с уже известным логарифмическим декрементом затухания зависимостью:

$$\gamma = \delta/\pi = (\varepsilon T)/\pi = (\varepsilon \cdot 2\pi)/(\pi \omega) = (2\varepsilon)/\omega.$$

Таким образом, общее решение уравнения (14.19) для $\omega > \varepsilon$ имеет вид:

$$q(t) = q_{\text{собств}}(t) + q_{\text{вын}}(t) = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \alpha) + \tilde{A} \sin(\Omega t - \beta).$$

Собственные колебания в системе с течением времени затухают, а вынужденные будут происходить с частотой вынуждающей силы, отставая от нее по фазе на угол β .

14. 4. 2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний

Преобразуем выражение (14.20), учитывая что

$$P/\omega^2 = P^*/(a\omega^2) = (P^*a)/(ac) = P^*/c = \Delta_{\text{ст}}(P^*)$$

– статический прогиб от амплитуды возмущающей силы P^* , к виду:

$$\tilde{A} = \mu \cdot \Delta_{\text{ст}}(P^*),$$

где

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \lambda^2 \gamma^2}}$$

– коэффициент динамичности, показывающий, во сколько раз динамическое действие силы $P(t) = P^* \sin \Omega t$ больше статического действия ее амплитуды P^* .

График $\mu = \mu(\lambda)$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* системы (рис. 14.4). Как видим, он имеет следующие особенности:

- $\mu \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow 0$ (статическое действие силы);
- $\mu \rightarrow 1/\gamma$ при $\lambda \rightarrow 1$ (резонанс);
- $\mu \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

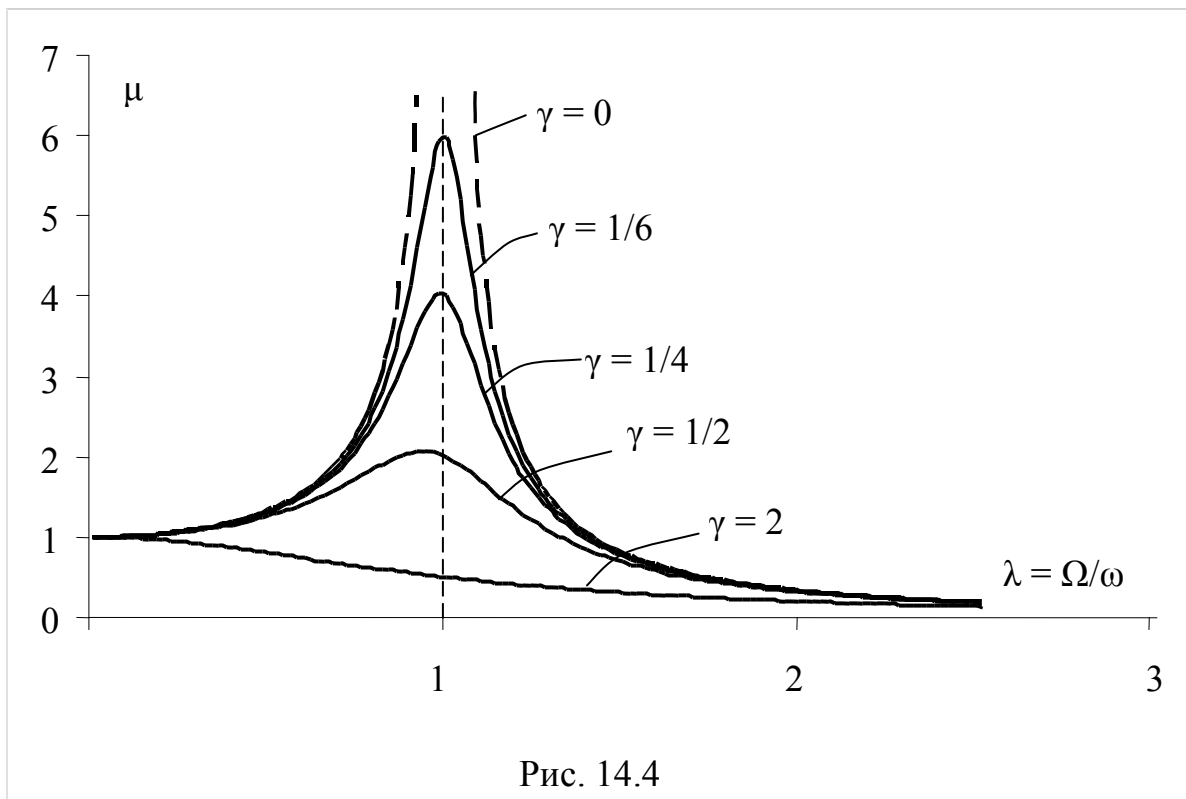


Рис. 14.4

Для нахождения максимального значения коэффициента динамичности достаточно определить минимальное значение функции

$$f(\lambda) = (1 - \lambda^2)^2 + \lambda^2 \gamma^2.$$

$$df/d\lambda = 2(1 - \lambda^2)(-2\lambda) + 2\lambda\gamma^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda^* = \sqrt{1 - (\gamma^2/2)},$$

то есть максимальное значение коэффициента динамичности, равное

$$\mu(\lambda^*) = \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - (\gamma/2)^2}} \approx \frac{1}{\gamma},$$

достигается при $\lambda < 1$. Отметим, что при $\gamma > \sqrt{2}$ график $\mu(\lambda)$ монотонно убывает.

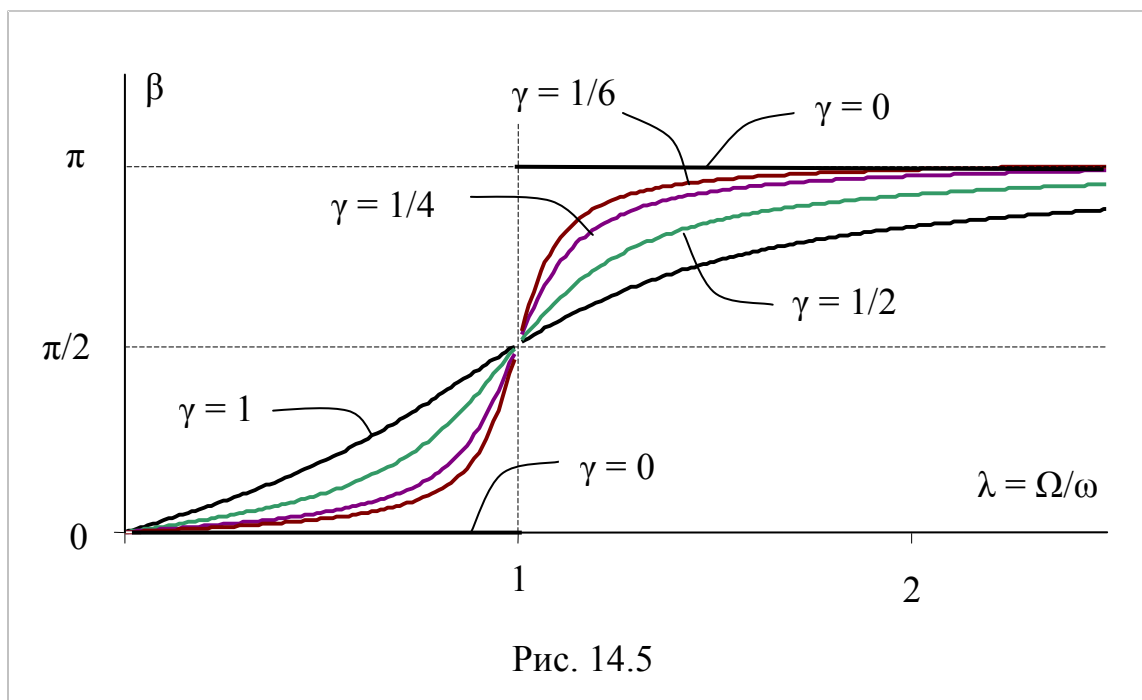
В строительной практике γ изменяется в пределах от 0,1 до 0,01. Соответственно коэффициент динамичности μ заключен в промежутке от 10 до 100, то есть динамическое действие гармонической силы может на два порядка превысить статическое действие ее амплитуды. При этом сопротивление необходимо учитывать только в резонансной полосе:

$$0,85 \leq \lambda \leq 1,15.$$

При других значениях Ω его можно не учитывать, полагая $\mu = 1/(1 - \lambda^2)$.

Переходя к исследованию зависимости $\beta = \beta(\lambda)$, которая называется *фазочастотной характеристикой* системы, отметим следующие характерные особенности соответствующего графика (рис. 14.5):

- $\beta \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ (дорезонансная зона);
- $\beta = \pi/2$ при $\lambda \rightarrow 1$ (резонанс);
- $\beta \rightarrow \pi$ при $\lambda \gg 1$ (послерезонансная зона).



Примечание.

С уменьшением параметра γ графики непрерывных функций $\beta(\lambda)$ как угодно близко приближаются к графику кусочно-постоянной функции с особенностью в точке $\lambda = 1$, которая соответствует случаю $\gamma = 0$ и которая фактически уже была рассмотрена в 14.3:

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < 1; \\ \pi/2 & \text{при } \lambda = 1; \\ \pi & \text{при } \lambda > 1. \end{cases}$$

ГЛАВА 15. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С S СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

15.1. Кинетическая и потенциальная энергия системы

Рассмотрим систему с s степенями свободы, подчиненную стационарным связям и помещенную в потенциальное поле сил.

В этом случае, как отмечалось в 12.5, ее кинетическая энергия имеет вид:

$$T = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где коэффициенты A_{ij} зависят только от обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_s . Разложим их в ряд в окрестности положения равновесия: $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$:

$$A_{ij} = A_{ij}|_0 + \sum_{i=1}^s (\partial A_{ij} / \partial q_i)|_0 \cdot q_i + (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\partial^2 A_{ij} / \partial q_i \partial q_j)|_0 \cdot q_i q_j + \dots$$

Ограничиваясь константами и обозначая

$$A_{ij}|_0 = a_{ij},$$

получим:

$$T = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (15.1)$$

где a_{ij} – инерционные коэффициенты.

Поступим аналогично с выражением потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \Pi|_0 + \sum_{i=1}^s (\partial \Pi / \partial q_i)|_0 \cdot q_i + (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\partial^2 \Pi / \partial q_i \partial q_j)|_0 \cdot q_i q_j + \dots$$

Полагая $\Pi|_0 = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$, учитывая, что $(\partial \Pi / \partial q_i)|_0 = 0$ и обозначая

$$(\partial^2 \Pi / \partial q_i \partial q_j)|_0 = c_{ij},$$

придем к выражению:

$$\Pi = (1/2) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j, \quad (15.2)$$

где c_{ij} – коэффициенты жесткости, или коэффициенты упругости.

Таким образом, как кинетическая (15.1), так и потенциальная (15.2) энергия при малых колебаниях системы являются квадратичными формами, которые можно представить в удобном для дальнейшего изучения виде, если ввести в рассмотрение следующие матричные операторы.

1. *Прямоугольная матрица* размерами $(m \times n)$, состоящая из m строк и n столбцов:

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2. *Матрица-строка* размерами $(1 \times n)$, состоящая из одной строки и n столбцов и являющаяся частным случаем предыдущей

$$[A] = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}].$$

3. *Матрица-столбец (вектор)* размерами $(m \times 1)$, состоящий из m строк и одного столбца, который будем обозначать фигурными скобками и который при помощи операции транспонирования можно записать в виде:

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1}]^T = \{a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1}\};$$

4. *Квадратная матрица* порядка t размерами $(t \times t)$.

5. *Диагональная матрица* порядка t , у которой отличны от нуля только элементы на главной диагонали, то есть $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

6. *Единичная матрица* порядка t :

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Напомним основные операции с матрицами.

1. *Сложение* – эта операция определена для прямоугольных матриц одного размера: $[A]$ $(m \times n)$ и $[B]$ $(m \times n)$: $[C] = [A] + [B]$, при этом

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

2. *Умножение* – эта операция определена для матриц соответствующего размера $[A]$ $(m \times n)$ и $[B]$ $(n \times l)$: $[C] = [A] \cdot [B]$, при этом

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}.$$

В частности, если вектор $\{A\}$ ($m \times 1$) умножить на матрицу-строку $[B]$ ($1 \times l$), то получим прямоугольную матрицу $[C]$ ($m \times l$). А если матрицу-строку $[A]$ ($1 \times n$) умножить на вектор $\{B\}$ ($n \times 1$), получим матрицу первого порядка, то есть скаляр. Напомним, что в общем случае $[A] \cdot [B] \neq [B] \cdot [A]$.

3. *Транспонирование* – эта операция для матрицы $[A]$ ($m \times n$) определена так: $[A]^T = [B]$ ($n \times m$), где $b_{ij} = a_{ji}$. При этом:

$$([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T .$$

4. *Нахождение обратной матрицы*. Для матрицы $[A]$ ($m \times m$), определитель которой не равен нулю, существует и единственна матрица $[A]^{-1}$, такая, что

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [E],$$

где $[E]$ – единичная матрица. Отметим, что

$$([A]^{-1})^T = ([A]^T)^{-1} = [A]^{-T} .$$

5. *Дифференцирование матриц* и нахождение частных производных от скаляра f по вектору $\{v\} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$:

$$\partial f / \partial \{v\} = \{ \partial f / \partial v_1, \partial f / \partial v_2, \dots, \partial f / \partial v_m \} . \quad (15.3)$$

В частности, для квадратичной формы $f = \{v\}^T [A] \{v\}$:

$$\partial f / \partial \{v\} = 2[A] \{v\} . \quad (15.4)$$

Таким образом, возвращаясь к нашей системе с s степенями свободы и вводя в рассмотрение вектор обобщенных координат:

$$\{q\} = [q_1, q_2, \dots, q_s]^T ,$$

а также две матрицы – *инерционную* $[A] = [a_{ij}]$ и *матрицу жесткости* $[C] = [c_{ij}]$ с элементами, равными коэффициентам квадратичных форм (15.1) и (15.2), можно представить кинетическую и потенциальную энергию системы в виде:

$$T = (1/2) \{\dot{q}\}^T [A] \{\dot{q}\} , \quad (15.5)$$

$$\Pi = (1/2) \{q\}^T [C] \{q\} . \quad (15.6)$$

15.2. Дифференциальное уравнение свободных колебаний системы

Систему уравнений Лагранжа, описывающих колебания системы:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \dot{q}_j) - (\partial T / \partial q_j) = - \partial \Pi / \partial q_j , \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (12.10')$$

принимая во внимание (15.3), можно представить в матричном виде:

$$(d/dt)(\partial T / \partial \{\dot{q}\}) - (\partial T / \partial \{q\}) = - \partial \Pi / \partial \{q\} . \quad (15.7)$$

Подставляя (15.5) и (15.6) в (15.7) с учетом (15.4), получим *дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с s степенями свободы*:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = 0. \quad (15.8)$$

Если матрица $[A]$ в последнем выражении имеет диагональный вид, то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением колебаний в прямой форме* (форме метода перемещений).

Умножив (15.8) слева на *матрицу податливости* $[D] = [C]^{-1}$, получим уравнение:

$$[D][A]\{\ddot{q}\} + \{q\} = 0, \quad (15.9)$$

которое называется *дифференциальным уравнением колебаний в обратной форме* (форме метода сил).

В общем случае матрицу $[A]$ в (15.8) можно привести к диагональному виду при помощи линейных преобразований координат. Такая процедура соответствует приведению к каноническому виду квадратичной формы кинетической энергии (15.5). Аналогичное замечание касается и матрицы $[C]$, приведение которой к диагональному виду соответствует приведению к каноническому виду квадратичной формы потенциальной энергии (15.6).

Для студентов строительного направления особый интерес представляют механические системы в виде совокупности материальных точек, содержащие в качестве наложенных связей упругие элементы конструкций и сооружений. Примером служит рассмотренная ниже простая двухопорная балка, несущая две точечные массы. С методами составления дифференциальных уравнений колебаний таких систем студенты знакомятся в курсе строительной механики, однако ничто не мешает составить такое уравнение уже сейчас.

Пример 15.1. Составить дифференциальное уравнение колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая весом балки и закрепленных на ней грузов, имеющих массы M_1 и M_2 (рис. 15.1, а).

Решение. Примем в качестве обобщенных координат вертикальные смещения точек, направив соответствующие оси Oy_1, Oy_2 вниз – по движению и выбрав начало отсчета в положении равновесия, и рассмотрим движущиеся точки в текущий момент времени.

На каждую из них действует обобщенная упругая сила деформированной балки Q_j , направленная, как и упругая сила пружины в примере 2.4 на с.16 в сторону, противоположную смещению, то есть в нашем примере – вверх (рис. 15.1, б).

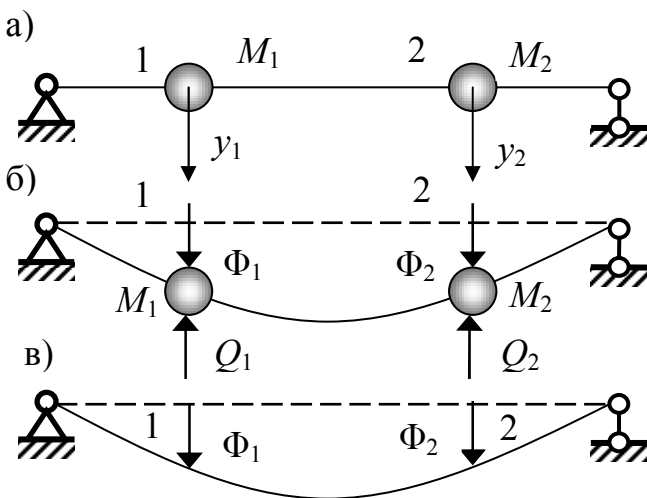


Рис. 15.1

противоположную смещению, то есть в нашем примере – вверх (рис. 15.1, б).

При этом мы предполагаем, что каждый груз связан с балкой только линейной связью.

В соответствии с принципом Даламбера для каждой точки и в каждый момент времени сумма силы Q_j и силы инерции $\Phi_j = -M_j a_j$ равна нулю:

$$Q_j + \Phi_j = 0$$

или, проектируя на ось Oy :

$$Q_j = \Phi_j = -M_j \ddot{y}_j.$$

Теперь для того чтобы получить дифференциальные уравнения колебаний системы, отбросим движущиеся массы, заменив их реакциями связей, равными силам инерции, приложенным к невесомой балке, и определим перемещение точки i упругой системы (рис. 15.1, в).

На основании хорошо известного в сопротивлении материалов *принципа суперпозиции*:

$$y_i = \sum_j \Phi_j \delta_{ij}, \quad (a)$$

где δ_{ij} – коэффициент податливости, равный перемещению точки i от единичной силы, приложенной в точке j . Тогда искомые уравнения в скалярной форме примут вид:

$$M_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + y_1 = 0,$$

$$M_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + y_2 = 0.$$

В матричной форме соотношение (a) запишется как:

$$\{q\} = -[D][A]\{\ddot{q}\},$$

где $\{q\} = \{y_1, y_2\}$,

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix},$$

то есть оно совпадает с уравнением (15.9).

Ответ: $M_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + y_1 = 0; M_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + M_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + y_2 = 0.$

15.3. Собственные частоты и собственных формы колебаний

Будем искать решение уравнения (15.9) при начальных условиях:

$$\{q(0)\} = \{q_0\}; \{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\} \quad (15.10)$$

в виде:

$$\{q(t)\} = \{A\} \sin(\omega t + \alpha), \quad (15.11)$$

где $\{A\} = [A_1, A_2, \dots, A_s]^T$ – вектор амплитуд.

Подставляя

$$\{\ddot{q}\} = -\{A\} \omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

в (15.9), получим:

$$([D][A] - \lambda[E]) \{A\} = 0, \quad (15.12)$$

где $\lambda = (1/\omega^2)$.

Последнее соотношение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд. Условие ненулевого решения:

$$\det ([D][A] - \lambda[E]) = 0 \quad (15.13)$$

в скалярном виде для примера 15.1 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}M_1 - \lambda & \delta_{12}M_2 \\ \delta_{21}M_1 & \delta_{22}M_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (15.13')$$

Раскрывая (15.13), получим алгебраическое уравнение:

$$\lambda^s + a_1\lambda^{s-1} + a_2\lambda^{s-2} + \dots + a_s = 0,$$

которое называется *характеристическим*, или *частотным*. Его корни:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_s$$

образуют *спектр собственных частот*.

Таким образом, система с s степенями свободы имеет s собственных частот.

Для каждой ω_k из уравнения (15.12) можно найти вектор

$$\{A^{(k)}\} = [A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_s^{(k)}]^T,$$

который называется *собственным вектором системы*.

В силу однородности (15.12) ее решением будет также $C_k\{A^{(k)}\}$, то есть фактически решение системы (15.12) можно найти только с точностью до отношения:

$$A_1^{(k)} : A_2^{(k)} : \dots : A_s^{(k)}.$$

Подставляя $\{A^{(k)}\}$ в (15.11), получим:

$$\{q^{(k)}(t)\} = \{A^{(k)}\} \sin(\omega_k t + \alpha_k).$$

Общим решением (15.9) будет:

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^s C_k \{A^{(k)}\} \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где C_k , α_k – константы, определяемые из начальных условий (15.10). Последние можно задать так, что в системе будут происходить колебания с какой-либо одной частотой ω_k . Такие колебания называются *собственными*, или *главными*.

Собственные формы колебаний, соответствующие частоте ω_1 и ω_2 в примере 15.1, показаны на *рис. 15.2, а* и *15.2, б* соответственно.

Для того чтобы в системе происходили главные колебания с частотой ω_k , нужно задать начальные условия: $\{q(0)\} = \{A^{(k)}\}$; $\{\dot{q}(0)\} = \{0\}$.

Примечания:

1. Если в матричном уравнении (15.8) одновременно привести к диагональному виду матрицу $[A]$ и матрицу $[C]$, соответствующая ему система дифференциальных уравнений распадется на отдельные уравнения, и мы получим дифференциальные уравнения колебаний в главных, или «нормальных» координатах. Это будет означать, что решение одной сложной задачи с s степенями свободы мы свели к рассмотрению s простых задач с одной степенью свободы каждая.

2. В примере 15.1 главные колебания с основной частотой системы ω_1 соответствуют движению масс M_1 и M_2 в фазе, – они одновременно проходят положение равновесия и одновременно удаляются от него на максимальное расстояние. В колебаниях, происходящих с частотой ω_2 , массы M_1 и M_2 движутся в противофазе.

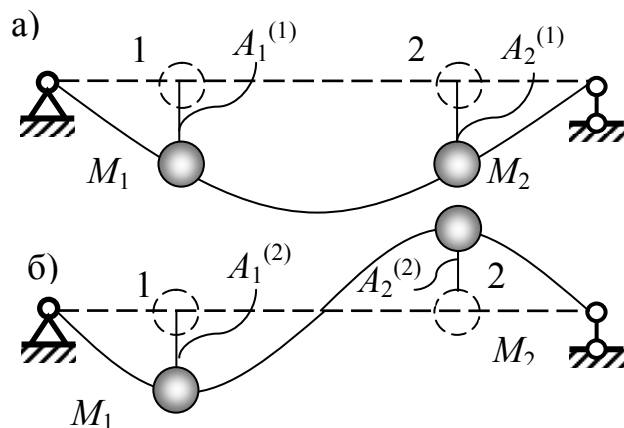


Рис. 15.2

удаляются от него на максимальное расстояние. В колебаниях, происходящих с частотой ω_2 , массы M_1 и M_2 движутся в противофазе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диевский, В.А. Теоретическая механика : учеб. пособие / В.А. Диевский. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2008. – 320 с.
2. Куликов, И.С. Сборник задач по теоретической механике : учеб. пособие / И.С. Куликов, Н.Ю. Трянина. – Н. Новгород : Изд-во ННГАСУ, 2002. – 84 с.
3. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. В 2 т.Т. 2. Динамика. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 595 с.
4. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике : учеб. пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие / под ред. А.А.Яблонского. – М. Высш. шк., 1985 – 367 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. Введение в динамику.....	4
1.1. Основные понятия динамики.....	4
1.2. Аксиомы динамики.....	5
1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.....	7
Глава 2. Динамика материальной точки.....	9
2.1. Две задачи динамики.....	9
2.2. Прямолинейное движение точки.....	13
Глава 3. Введение в динамику системы.....	20
3.1. Основные понятия.....	20
3.2. Степени свободы системы.....	21
3.3. Дифференциальные уравнения движения системы.....	24
Глава 4. Геометрия масс системы.....	26
4.1. Центр масс системы.....	26
4.2. Моменты инерции относительно центра и оси.....	27
4.3. Моменты инерции относительно параллельных осей.....	28
4.4. Моменты инерции простейших тел.....	29
Глава 5. Теорема об изменении количества движения системы.....	34
5.1. Количество движения системы.....	34
5.2. Теорема для точки.....	35
5.3. Теорема для системы.....	35
5.4. Теорема о движении центра масс.....	36
5.5. Применение теоремы импульсов в теории удара.....	39
Глава 6. Теорема об изменении кинетического момента системы.....	45
6.1. Кинетический момент точки и системы.....	45
6.2. Теорема для точки.....	46
6.3. Теорема для системы.....	47
6.4. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела.....	48
6.5. Кинетический момент тела относительно произвольной оси.....	50
Глава 7. Теорема об изменении кинетической энергии системы.....	53
7.1. Кинетическая энергия системы.....	53
7.2. Кинетическая энергия твердого тела.....	54
7.3. Работа силы.....	56
7.4. Работа сил, приложенных к твердому телу.....	61
7.5. Теорема для точки.....	63
7.6. Теорема для системы.....	64
Глава 8. Потенциальное поле сил.....	71
8.1. Основные понятия.....	71
8.2. Потенциальная энергия системы.....	71
8.3. Примеры потенциальных силовых полей.....	72
8.4. Закон сохранения механической энергии.....	74

Глава 9. Принцип Даламбера	75
9.1. Принцип Даламбера для точки	75
9.2. Принцип Даламбера для системы	75
9.3. Приведение сил инерции твердого тела	77
9.4. Определение динамических реакций	83
9.5. Динамика относительного движения точки	85
Глава 10. Принцип возможных перемещений	88
10.1. Возможные перемещения системы. Идеальные связи	88
10.2. Принципы возможных перемещений и возможных скоростей	90
10.3. Эквивалентность ПВП и условий равновесия системы	93
10.4. Применение ПВП для определения опорных реакций балок	95
10.5. Применение ПВП для определения опорных реакций рам	109
Глава 11. Принцип Даламбера – Лагранжа	111
Глава 12. Уравнения Лагранжа второго рода	114
12.1. Обобщенные координаты системы	114
12.2. Обобщенные силы	115
12.3. Обобщенные скорости	116
12.4. Уравнения Лагранжа II рода	117
12.5. Структура уравнений Лагранжа	118
Глава 13. Устойчивость систем	124
13.1. Уравнения Лагранжа для потенциального поля сил	124
13.2. Условия равновесия системы	124
Глава 14. Малые колебания систем с одной степенью свободы	128
14.1. Свободные колебания без учета сопротивления	128
14.2. Свободные колебания с учетом сопротивления	131
14.3. Вынужденные колебания без учета сопротивления	133
14.4. Вынужденные колебания с учетом сопротивления	135
Глава 15. Малые колебания систем с s степенями свободы	139
15.1. Кинетическая и потенциальная энергия системы	139
15.2. Дифференциальное уравнение свободных колебаний системы	141
15.3. Собственные частоты и собственные формы колебаний	143
Литература	145