Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Кафедра сопротивления материалов и теории упругости

С.Ю.Лихачева, Д.А.Кожанов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методические указания к выполнению
контрольных работ по АЗМДТТ

Нижний Новгород
ННГАСУ
2013

УДК 539.3

Решение задач механики методом конечных элементов: метод. указ. к выполнению контр. работ по АЗМДТТ/Нижегор. гос. архитектур.- строит. ун-т; сост. С.Ю. Лихачева, Д.А. Кожанов – Н. Новгород: ННГАСУ, 2013. – 17 с.

Методические указания предназначены для студентов различных направлений и специальностей, изучающих основы метода конечных элементов. Разобраны задачи на операции с матрицами, интерполирование с использованием функций формы и численное интегрирование функций. Даны задания для самостоятельной работы.

Составители: С.Ю. Лихачева

Д.А. Кожанов

Содержание

Задача 1.1.

Записать в матричном виде систему из 4-х уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 31x_1 + 4x_4 - 8 = 38 \\ 13 + x_2 + 15x_3 - x_2 + 15x_3 + 32x_1 = 0 \\ 6x_4 - 15x_3 - 2x_2 - 4x_4 - 8 = 3 \\ 2x_2 + 14x_4 = 6x_4 - 3 \end{cases}$$

Общий вид записи уравнений в матричном виде:

$$[A]\{x\} = b \text{, где } [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ldots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix},\ x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \ldots \end{Bmatrix},\ b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \ldots \end{Bmatrix}$$

a_{ij} - коэффициенты при j-ой переменной в i-ой строке.

b_i - правая часть i-ой строки.

x_i - неизвестные переменные.

Запишем в каноническом виде данную систему уравнений:

$$\begin{cases} -31x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 46 \\ 32x_1 + 0x_2 + 30x_3 + 0x_4 = -13 \\ 0x_1 - 2x_2 - 15x_3 + 2x_4 = 11 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 8x_4 = -3 \end{cases}$$

В данном случае $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$.

Тогда $[A]$ имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} -31 & 0 & 5 & 4 \\ 32 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & -2 & -15 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Вектор столбец переменных x_i и вектор столбец правой части имеют вид:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},\ \{b\} = \begin{Bmatrix} 46 \\ -13 \\ 11 \\ -3 \end{Bmatrix}.$$

Задача 1.2.

Необходимо вычислить $\{A\}\{B\}^T$ и $\{A\}^T\{B\}$, если исходные матрицы имеют вид:

$$\{A\}=\begin{Bmatrix} x+y \\ 2x \\ -6 \\ x-4y \end{Bmatrix} \qquad \{B\}=\begin{Bmatrix} x \\ 2y-x \\ x-6y \\ y^2 \end{Bmatrix}$$

Для того чтобы умножить вектор-строку на вектор-столбец необходимо применить алгоритм матричного умножения.

Алгоритм умножения вектора-столбца на вектор-строку и обратно:

$$\{A\}=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \dots \end{Bmatrix} \qquad \{B\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Транспонированный вид векторов $\{A\}$ и $\{B\}$:

$$\{A\}^T=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\dots \end{bmatrix}$$

$$\{B\}^T=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4\dots \end{bmatrix}$$

Тогда произведение $\{A\}\{B\}^T$ находится следующим образом:

$$\{A\}\{B\}^T=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \dots \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4\dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

В итоге получаем матрицу размерностью $n\times m$, где n - размерность вектора $\{A\}$, m - размерность матрицы $\{B\}^T$.

Произведение $\{A\}^T\{B\}$ находится следующим образом:

$$\{A\}^T\{B\}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\dots \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \end{Bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+\dots$$

В нашем случае $\{A\}=\begin{Bmatrix} x+y \\ 2x \\ -6 \\ x-4y \end{Bmatrix} \qquad \{B\}=\begin{Bmatrix} x \\ 2y-x \\ x-6y \\ y^2 \end{Bmatrix}$.

Транспонируем заданные вектора $\{A\}$ и $\{B\}$:

$$\{A\}^T = \begin{bmatrix} x+y & 2x & -6 & x-4y \end{bmatrix}$$
$$\{B\}^T = \begin{bmatrix} x & 2y-x & x-6y & y^2 \end{bmatrix}$$

Найдем произведение $\{A\}\{B\}^T$:

$$\{A\}\{B\}^T = \begin{Bmatrix} x+y \\ 2x \\ -6 \\ x-4y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2y-x & x-6y & y^2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} (x+y)x & (x+y)(2y-x) & (x+y)(x-6y) & (x+y)y^2 \\ 2x^2 & 2x(2y-x) & 2x(x-6y) & 2xy^2 \\ -6x & -6(2y-x) & -6(x-6y) & -6y^2 \\ (x-4y)x & (x-4y)(2y-x) & (x-4y)(x-6y) & (x-4y)y^2 \end{bmatrix}.$$

Найдем произведение $\{A\}^T\{B\}$:

$$\{A\}^T\{B\} = \begin{bmatrix} x+y & 2x & -6 & x-4y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ 2y-x \\ x-6y \\ y^2 \end{Bmatrix} =$$
$$= (x+y)x + 2x(2y-x) - 6(x-6y) + (x-4y)y^2.$$

Задача 1.3.

Найти произведение $[A][B]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 1 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 y & 0 \\ 2 & x+y & y^2 \end{bmatrix}$$

Для того, чтобы умножить матрицу $[A]$, размерностью $m \times n$ на матрицу $[B]$, размерностью $n \times k$ необходимо применить алгоритм матричного умножения, описанный выше. В результате получится матрица, размерностью $m \times k$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ldots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\ldots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\ldots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\ldots \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}.$$

$$[A][B]=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k3} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k4} & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k3} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k4} & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k3} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k4} & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{4k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{4k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{4k}b_{k3} & \sum_{k=1}^{n} a_{4k}b_{k4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Для заданных матриц $[A]$ и $[B]$:

$$[A][B]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2 & x^2 y & 0 \\ 2 & x+y & y^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1\cdot x^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2) & 1\cdot x^2 y+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x+y) & 1\cdot 0+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2) \\ 1\cdot x^2+\frac{\partial}{\partial x}(2) & 1\cdot x^2 y+\frac{\partial}{\partial x}(x+y) & 1\cdot 0+\frac{\partial}{\partial x}(y^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x^2)+0\cdot 2 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x^2 y)+0\cdot(x+y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0)+0\cdot y^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^2 & x^2 y & 2 \\ x^2 & x^2 y+1 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \end{bmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

1.1. Записать в матричной форме систему 4-х уравнений:

$x_1+5x_3-32x_1+4x_4-8=38$

$2x_2+14x_4=156$

$x_2+15x_3+32x_1=0$

$6x_4-15x_3-2x_2-4x_4-8=3$

1.2. Вычислить произведение $\{A\}\{B\}^T$ и $\{A\}^T\{B\}$

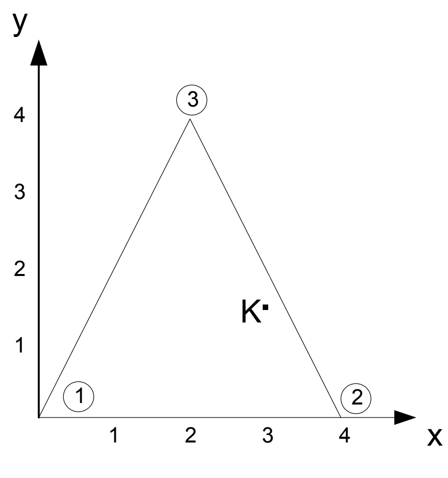
$$\begin{Bmatrix} x^2 \\ 2x - 3 \\ -6y \\ x + 4y \end{Bmatrix} = \{A\}, \begin{Bmatrix} -2 \\ 7x^2 \\ 2y^3 \\ 5 \end{Bmatrix} = \{B\}$$

1.3. Найти произведение [A][B]

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 1 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \end{bmatrix} [B]=\begin{bmatrix} x^2 & x^2 y & 0 \\ 2 & x+y & y^2 \end{bmatrix}$$

Задача 2.

В системе координат x, y задан трех - узловой конечный элемент. Известно значение температуры в узлах КЭ. Необходимо определить значение температуры T_K во внутренней точке КЭ, если узел 1 имеет координаты $(0,0)$ и $T_1 = 50^\circ C$, узел 2 - $(5,0)$ и $T_2 = 20^\circ C$, узел 3 - $(2,4)$ и $T_2 = 35^\circ C$. Внутренняя точка K имеет координаты $(3,1.5)$.



Найдем значение температуры в точке K, используя обычный интерполяционный полином с тремя неизвестными коэффициентами:

$$a_1 + a_2 x + a_3 y = T$$
$$a_1, a_2, a_3 = ?$$

Найдем коэффициенты a_1, a_2, a_3 из условия, что значение температуры в узловых точках известно:

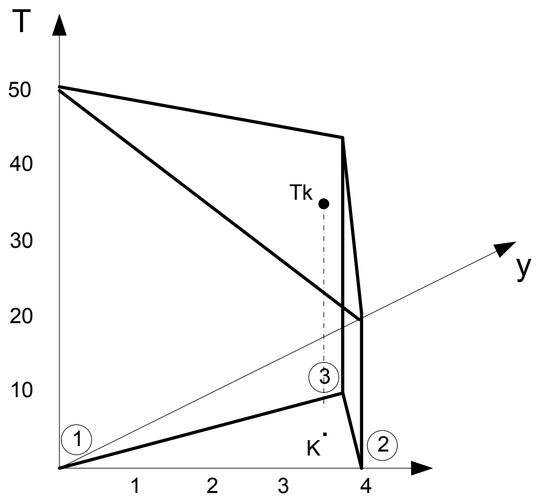
$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 50 \\ a_1 + a_2 \cdot 5 + a_3 \cdot 0 = 20 \\ a_1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 4 = 35 \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, получаем значения a_1, a_2, a_3:

$$a_1 = 50$$
$$a_2 = -6$$
$$a_3 = -0,75$$

Тогда $T_K = 50 - 6 \cdot 3 - 0,75 \cdot 1,5 = 30,875^0 C$.

Дадим геометрическую интерпретацию полученного решения. То есть изобразим температурное поле T .



Проинтерполируем функцию температуры с использованием функций формы.

$$T_K = N_1^K T_1 + N_2^K T_2 + N_3^K T_3$$
$$N_1 = b_1 + b_2 x + b_3 y$$
$$N_2 = c_1 + c_2 x + c_3 y$$
$$N_1 = d_1 + d_2 x + d_3 y$$

Необходимо найти коэффициенты $b_i, c_i, d_i, i = \overline{1,3}$. Используем для их нахождения одно из свойств функций формы []: «Функция формы принимает единичное значение в своем узле и нулевое во всех остальных». Тогда для N_1 получим систему вида:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = 1 \\ b_1 + b_2 \cdot 5 + b_3 \cdot 0 = 0 \\ b_1 + b_2 \cdot 2 + b_3 \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$b_1 = 1$$
$$b_2 = -0,2$$
$$b_3 = -0,15$$

Для коэффициентов c_i:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0 \\ c_1 + c_2 \cdot 5 + c_3 \cdot 0 = 1 \\ c_1 + c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 0,2$$
$$c_3 = -0,1$$

Для коэффициентов d_i:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 \cdot 0 + d_3 \cdot 0 = 0 \\ d_1 + d_2 \cdot 5 + d_3 \cdot 0 = 0 \\ d_1 + d_2 \cdot 2 + d_3 \cdot 4 = 1 \end{cases}$$

$$d_1 = 0$$
$$d_2 = 0$$
$$d_3 = 0,25$$

Таким образом, подставляя найденные коэффициенты в функции формы, получаем:

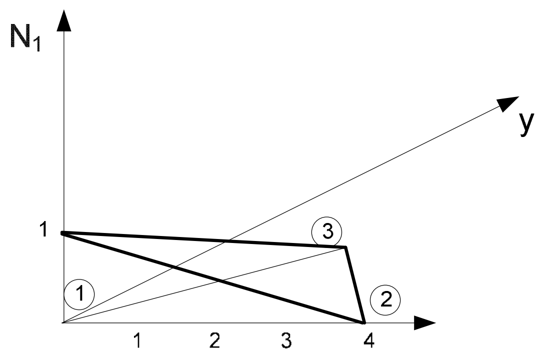
$$N_1 = 1 - 0,2 \cdot x - 0,15 \cdot y$$
$$N_2 = 0,2 \cdot x - 0,1 \cdot y$$
$$N_3 = 0,25 \cdot y$$

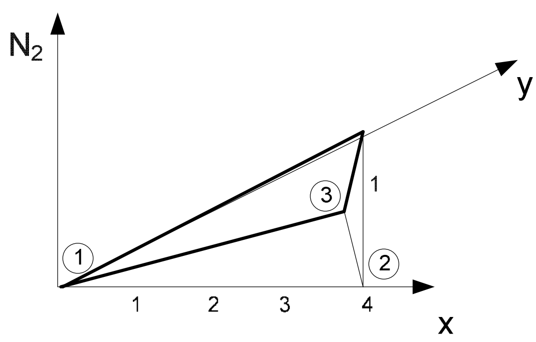
Во внутренней точке K:

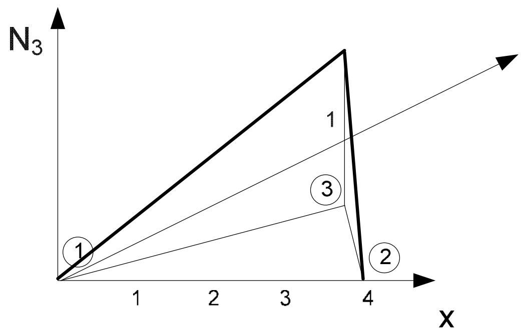
$$N_1^K \left(x_K , y_K \right) = 0,175$$
$$N_2^K \left(x_K , y_K \right) = 0,45$$
$$N_3^K \left(x_K , y_K \right) = 0,375$$

$$T_K = 0,175 \cdot 50 + 0,45 \cdot 20 + 0,375 \cdot 35 = 30,875^0 C .$$

Изобразим графики функции формы:







Задание для самостоятельной работы:

Задан треугольный КЭ на плоскости. Известны координаты узлов и значения напряжений в них:

т.1 (0,0) Ф(1)=240 МПа

т.2 (6,0) Ф(2)=130 Мпа

т.3 (3,3) Ф(3)=170 Мпа.

а) Найти значение напряжения двумя способами в т-ке К(5,1).
б) Изобразить график распределения функций формы.

Задача 3.

Для четырехугольного плоского изопарараметрического КЭ известны значения функции напряжений в его узлах. Заданы координаты узлов двумерного конечного элемента В глобальной системе координат:

$K_1 = (0,0)$,

$K_2 = (6,2)$,

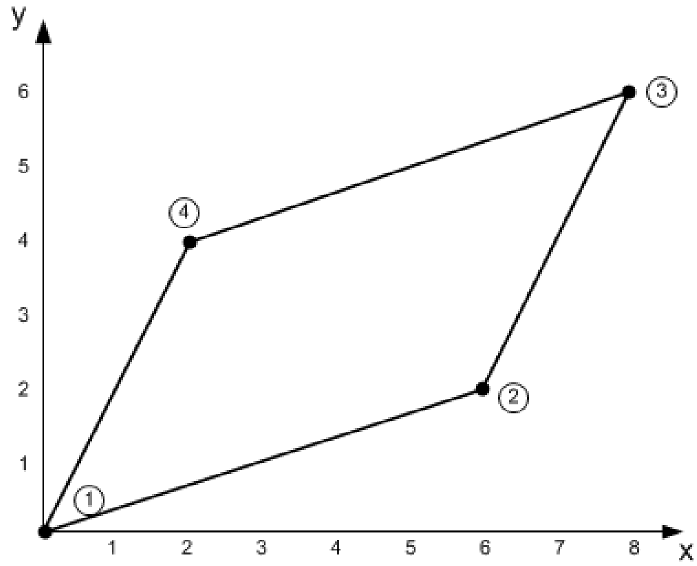
$K_3 = (8,6)$,

$K_4 = (2,4)$.

Напряжения в узлах конечного элемента:

$\Phi_1 = 20 МПа$
$\Phi_2 = 40 МПа$
$\Phi_3 = 60 МПа$
$\Phi_4 = 80 МПа$

Проинтегрировать функцию в объеме конечного элемента.



Координатные функции имеют вид:

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4$$

Так как используется изопараметрический конечный элемент [], то вид координатных функций и функций формы один и тот же.

Для локального конечного элемента [] функции формы имеют вид:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Подставляя функции формы в выражение для координатных функций, получаем:

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\cdot 0 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\cdot 6 +$$
$$+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\cdot 8 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\cdot 2$$

$$y(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\cdot 0 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\cdot 2 +$$
$$+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\cdot 6 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\cdot 4$$

Находим производные от координатных функций:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\cdot 0 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\cdot 6 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi}\cdot 8 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi}\cdot 2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta}\cdot 0 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta}\cdot 6 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta}\cdot 8 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta}\cdot 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\cdot 0 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\cdot 2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi}\cdot 6 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi}\cdot 4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta}\cdot 0 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta}\cdot 2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta}\cdot 6 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta}\cdot 4$$

Проинтегрируем, используя метод Гаусса []. Для этого сначала необходимо найти определитель матрицы Якоби.

Для заданного конечного элемента матрица Якоби имеет вид:

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Найдем ее определитель[]:

$$\det[J] = 3\cdot 2 - 1\cdot 1 = 5$$

Тогда

$$\int_V \Phi dV = \det[J]$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Phi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \det[J]\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j\Phi(\xi_i,\eta_j)$$

$\Phi(\xi,\eta)$ - функция напряжений, зависящая от локальных координат.

Весовые коэффициенты для данного случая равны 1 [], то есть: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Известно, что точки Гаусса имеют координаты []:

1) $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Функция напряжений, выраженная через локальные координаты, будет иметь вид:

$$\Phi = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\cdot 20 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\cdot 40 +$$
$$+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\cdot 60 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\cdot 80$$

Тогда интеграл от заданной функции напряжений в заданном конечном элементе находятся как:

$$\int_V \Phi dV = 5\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 20 + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 40 +\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 60+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 80+$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 20+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 40+$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 60+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 80+\ldots=$$

$$\frac{5}{4}\Bigg[20\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+40\cdot 4+60\cdot 4+80\cdot 4\ldots=1000$$

Задание для самостоятельной работы:

Температура задана в узлах произвольного четырехугольного КЭ с координатами (0,2),(6,8),

(8,6),(0,9):

$T_1=20^0C, T_2=50^0C, T_3=80^0C,\ T_4=10^0C$.

Найти значения интеграла функции в объеме КЭ.

Лихачева Светлана Юрьевна
Кожанов Дмитрий Александрович

Подписано к печати . Формат 60х90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная
Уч. изд. л . Усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.

Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.