Министерство образования и науки Российской Федерации
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ННГАСУ)

Кафедра теоретической механики

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 6. Элементы теории удара и теории колебаний

Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике

Нижний Новгород
ННГАСУ
2013

УДК 531.1

Интернет-тестирование по теоретической механике. Выпуск 6. Элементы теории удара и теории колебаний. Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике, Нижний Новгород, ННГАСУ, 2013 г..

Настоящие методические указания предназначены для студентов ННГАСУ, обучающихся по направлениям «Строительство» и «Теплоэнергетика». Методические указания содержат основные теоретические положения и примеры решения типовых задач по рассматриваемым темам, предлагавшихся для решения в процессе интернет - тестирования.

Составители: Г.А. Маковкин, А.С. Аистов, А.С. Баранова, Т.Е. Круглова, И.С. Куликов, Е.А. Никитина, О.И. Орехова, С.Г. Юдников, Г.А. Лупанова.

Элементарная теория удара

Удар – явление, при котором **за ничтожно малый промежуток времени скорости точек изменяются на конечную величину.**

Ударная сила – сила взаимодействия при соударении тел (удар молота, столкновения различных материальных объектов).

Время удара – очень малый промежуток времени, в течение которого происходит удар (контакт соударяющихся материальных объектов). В силу этого ударные силы могут достигать очень больших значений, при которых возможно изменение скоростей точек на конечную величину. Соотношение между конечным изменением скорости и величиной ударной силы определяется **теоремой об изменении количества движения:**

$$\boldsymbol{m(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) = \bar{S}}$$ **- основное уравнение удара,**

здесь $\boldsymbol{\bar{S} = \int \bar{F} dt}$ **- импульс ударной силы.**

Импульс силы является конечной величиной несмотря на то, что интегрирование должно выполнятся практически на бесконечно малом интервале времени (времени удара). Точный закон изменения ударной силы в течение времени удара, как впрочем, и само время удара, как правило, остаются неизвестными и интеграл заменяется произведением некоторого среднего значения силы на время удара:

$$\boldsymbol{\bar{S} = \int_0^r \bar{F} dt \approx \bar{F}_{\text{ср}} \tau}.$$

В силу того, что ударные силы много больше по величине других сил (неударных), последними пренебрегают. В силу малости времени удара, возникающие перемещение точек ($v_{cp} \cdot \tau$) во времени удара также мало.

При рассмотрении механической системы во время удара из всех теорем динамики используется лишь теорема об изменении количества движения системы и для вращающейся системы ее аналог – теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента) системы:

$$\boldsymbol{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}^e} \text{ и } \boldsymbol{\bar{K}_{O1} - \bar{K}_{O0} = \sum \bar{M}_0(\bar{S}^e)}.$$

В проекции, например, на ось x:

$$\boldsymbol{\bar{Q}_{1X} - \bar{Q}_{0X} = \sum S_x^e}$$

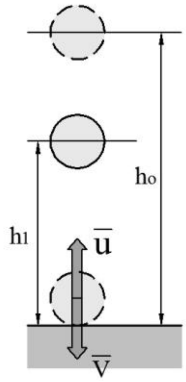
и соответственно в проекции, например, на ось z (относительно оси z):

$$\boldsymbol{\overline{K}_{1Z} - \bar{K}_{0Z} = \sum m_Z(\bar{S}^e)}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии использоваться практически не может, поскольку перемещение во время удара пренебрегается, и работа ударных сил не может быть вычислена.

Удар шара о неподвижную поверхность

Рассматривается поступательное движение шара массой $\boldsymbol{m}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$ перпендикулярно неподвижной массивной поверхности (преграде) – **прямой удар.** Например, шар падает с высоты h_0 и ударяется о горизонтальную поверхность со скоростью ***v.*** Различают две стадии (фазы) удара:



1.Переход кинетической энергии движения в потенциальную энергию деформации. При этом скорость падает до нуля, часть энергии расходуется на нагрев тела.

2. Переход потенциальной энергии в кинетическую при восстановлении первоначальной формы тела за счет упругих сил. Из-за наличия остаточных (пластических) деформаций и нагрева тела кинетическая энергия полностью не восстанавливается и скорость $\boldsymbol{u}$ - скорость шара от поверхности будет меньше, чем скорость до удара **(*u*<*v*).**

Отношение модуля скорости шара в конце удара к модулю его скорости в начале удара – **коэффициент восстановления при ударе:**

$$\boldsymbol{k = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|}}.$$

Коэффициент восстановления можно получить опытным путем:

$$\boldsymbol{k = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_0}} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0}}}.$$

Коэффициент восстановления может изменяться от 0 до 1:

при *k=0* – абсолютно неупругий (шар не отскакивает от преграды),

при *k=1* – абсолютно упругий удар (нет потери энергии при деформации, нет нагрева).

Реальные материалы всегда имеют различные потери энергии и коэффициент восстановления даже для достаточно упругих материалов лишь приближается в той или иной степени к единице. Кроме того коэффициент восстановления зависит от скорости, при которой происходит удар(*k=k(v)*).

Поэтому сравнение значений коэффициентов восстановления должно выполняться при одной и той же скорости. Например, при скорости *v=3м/с:*
k=0,94 – стекло, *k=0,89* – кость, *k=0,56* – сталь, *k=0,50* – дерево.

Можно показать, что коэффициент восстановления определяет так же соотношение между импульсами ударной силы в двух фазах:

$$\boldsymbol{0 - mv = \int_{\tau 1} N_1 dt = S_1}$$ **- основное уравнение удара для первой фазы,**

$$\boldsymbol{mu - 0 = \int_{\tau 2} N_2 dt = S_2}$$ **– для второй.**

Отсюда, импульс второй фазы и суммарный импульс ударной силы в двух фазах зависит от коэффициента восстановления:

$$\boldsymbol{k} = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{S_2 = kS_1} \text{ , следовательно}$$

$$\boldsymbol{S = S_1 + S_2 = S_1 + kS_1 = (1+k)S_1 = (1+k)mv.}$$

Косой удар.

Рассмотрим теперь поступательное движение шара массой $\boldsymbol{m}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$, составляющей некоторый угол (угол падения) к нормали неподвижной массивной поверхности (преграде) – **косой удар**.

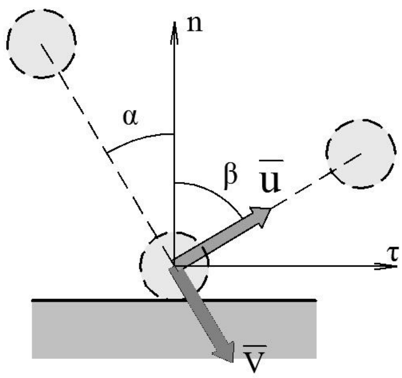
Запишем основное уравнение удара:

$$\boldsymbol{m(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{S}.}$$

Спроецируем векторное равенство на нормаль и касательную к поверхности:

$$\boldsymbol{m(u_n - v_n) = m(u\cos\beta + v\cos\alpha) = S}$$

$$\boldsymbol{m(u_\tau - v_\tau) = m(u\sin\beta - v\sin\alpha) = 0} \; .$$



Тогда $$\boldsymbol{u = \frac{v\sin\alpha}{\sin\beta}} \quad (*)$$

А коэффициент восстановления:

$$\boldsymbol{k = \frac{|\bar{u}_n|}{|\bar{v}_n|} = \frac{u\cos\beta}{v\cos\alpha} = \frac{v\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\beta\cdot v\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}}$$

Поскольку коэффициент восстановления $k<1$, то **угол отражения больше угла падения.** Угол отражения равен углу падения только в случае упругого удара ($k=1$).

Модуль скорости после удара:

$$\boldsymbol{u = \sqrt{u_\tau^2 + u_n^2} = \sqrt{v_\tau^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v\sin\alpha)^2 + k^2(v\cos\alpha)^2} = v\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}.}$$

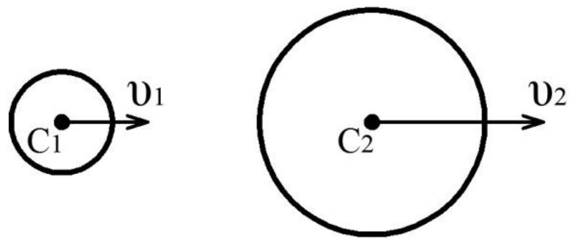
При очень больших углах падения, близких к прямому углу, скорость после удара приближается к скорости до удара ($u \to v$).

Импульс ударной силы:

$$\boldsymbol{S = mu\cos\beta + mv\cos\alpha = mv(\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}\cdot\cos\beta + \cos\alpha).}$$

При очень больших углах падения, близких к прямому углу, импульс ударной силы приближается к нулю ($S \to 0$). На этих свойствах, связанных с большими углами падения, основывается эффект запуска “блинчиков” - метанием плоских камней (голышей) под острым углом к водной поверхности.

Прямой центральный удар двух тел



Рассмотрим соударение двух движущихся тел со скоростями $\boldsymbol{v_1}$ и $\boldsymbol{v_2}$ ($v_1 > v_2$) массами $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$.

В первой фазе удара ударная сила взаимодействия возрастает от нуля до максимального значения (деформация нарастает до момента выравнивания скоростей). Проекция на горизонтальную ось теоремы об изменении количества движения для всей системы дает:

$$(\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_2}=\mathbf{0} \quad (1),$$

$$\text{тогда } \boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}} \quad (2)$$

Для определения величины механического взаимодействия (импульса) составим такое же

уравнение для одного тела, например с $\mathbf{M_1}$:

$$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_1})=\boldsymbol{S}_1^I \qquad (3)$$

С учетом (3): $\boldsymbol{S}_1^I=\boldsymbol{M_1}\left(\frac{\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}}-\boldsymbol{v_1}\right) = \boldsymbol{M_1}\left(\frac{\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_2}-\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}}\right)$

или $$\boldsymbol{S}_1^I=\boldsymbol{M}_1\left(\frac{\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_2}-\boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}}\right)=\frac{\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{M_2}}{\boldsymbol{M_1}+\boldsymbol{M_2}}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1) \quad (4)$$

Заметим, что разность скоростей представляет собой *относительную* скорость (скорость сближения) и поскольку $v_1>v_2$, то ударный импульс, приложенный к телу 1, будет направлен в сторону, противоположную движению этих тел. Аналогично можно определить импульс, приложенный к телу 2, но быстрее и проще воспользоваться законом действия и противодействия:

$$\overline{\boldsymbol{S}}_1^I=-\overline{\boldsymbol{S}}_2^I$$

Во второй фазе удара ударная сила взаимодействия уменьшается от максимального значения до нуля (упругие деформации восстанавливают полностью и частично форму тел и потенциальная энергия деформации переходит в кинетическую до отделения тел друг от друга). Проекция на горизонтальную ось теоремы об изменении количества движения для одного из тел, например, 2, дает:

$$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{S}_1^{II} \quad (5)$$

С использованием коэффициента восстановления можно записать:

$$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{S}_1^{I} \quad (6)$$

Поделив это уравнение на уравнение (3) , получим:

$$\frac{\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v_1}} = \boldsymbol{k} \quad (7) \quad \textbf{и}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v_1}) + \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{k})\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v_1} \quad (8)$$

Подставив выражение для скорости $\boldsymbol{u}$**:**

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{M_2}\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2}}(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v_1} \quad (9) \qquad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{M_1 v_2 + M_2 v_2 + k M_1 v_1 + k M_2 v_2 - M_1 k v_1 - M_2 k v_1}}{\boldsymbol{M_1 + M_2}} \rightarrow \qquad \boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{M_1 v_1 + M_2 v_2 + k M_2 (v_2 - v_1)}}{\boldsymbol{M_1 + M_2}} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{M_1 v_1 + M_2 v_2 + k M_2 (v_2 - v_1) + M_2 v_1 - M_2 v_1}}{\boldsymbol{M_1 + M_2}} \text{ окончательно :}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_1} + \frac{\boldsymbol{(k+1) M_2 (v_2 - v_1)}}{\boldsymbol{M_1 + M_2}} \quad (10)$$

Заметим, что разность скоростей ($v_1 > v_2$) опять представляет собой *относительную* скорость (скорость сближения) и поскольку $v_1 > v_2$, то скорость тела уменьшается и это уменьшение пропорционально массе тела 2 и относительной скорости. Аналогично можно определить скорость тела 2:

$$\boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{v_2} - \frac{\boldsymbol{(k+1) M_1 (v_2 - v_1)}}{\boldsymbol{M_1 + M_2}} \quad (11)\,,$$

здесь скорость тела 2 увеличивается и это увеличение пропорционально массе тела 1.

Замечания:

1. В частном случае равенства масс ($M_1 = M_2$) и абсолютно упругого удара ($k = 1$) скорость тела 1 после удара будет равна скорости тела 2 до удара и наоборот, т.е. если тело 2, например, как при игре в бильярд, покоилось, то после удара телом 1 тело 2 получит скорость тела 1, а тело 1 остановится.

2. Проверить полученные соотношения можно подставив их в закон сохранения количества движения: $\boldsymbol{M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 u_1 + M_2 u_2}$.

3. Отношения модулей относительных скоростей до и после удара определяют

коэффициент восстановления (или наоборот). Для этого, подставим и вычтем выражение для скорости u_1 из аналогичного выражения для скорости u_2:

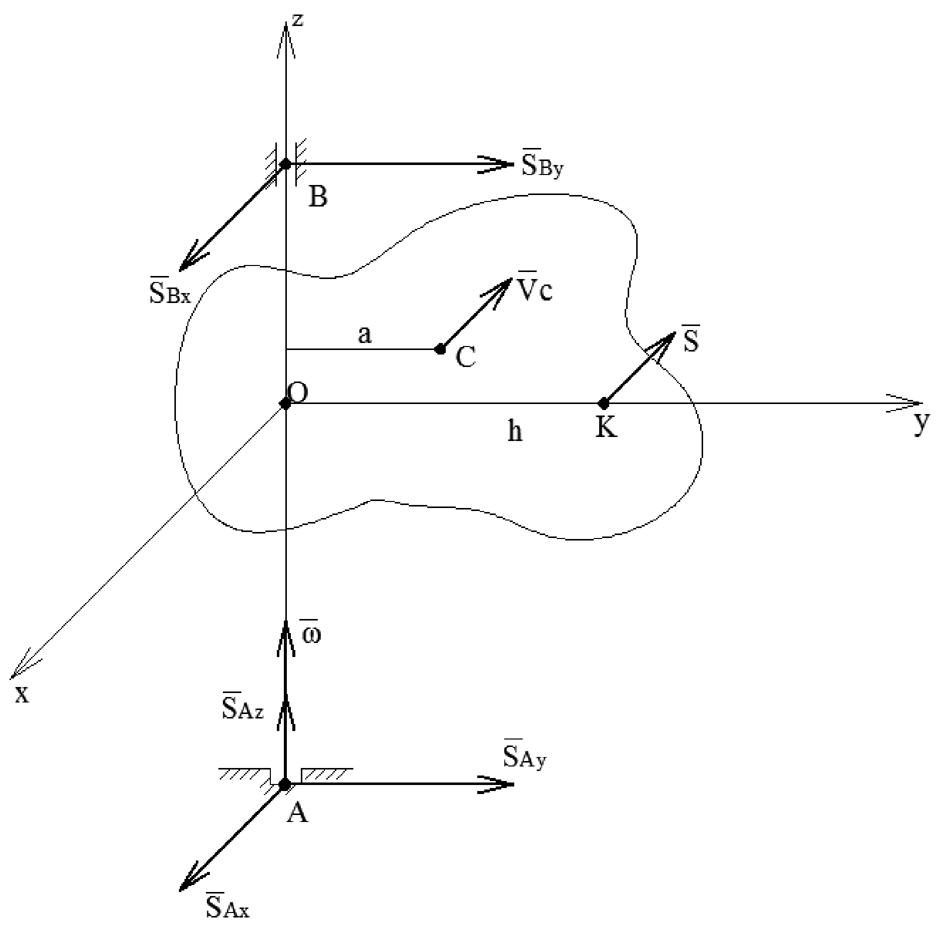
$$\boldsymbol{u_2 - u_1 = u(1+k) - kv_2 - (u(1+k) - kv_1) = k(v_1 - v_2)} \ .$$

Тогда получим : $$\frac{\boldsymbol{u_2-u_1}}{\boldsymbol{v_1-v_2}} = \boldsymbol{k} \quad (12)$$

Центр удара

Твердое тело массой **m** вращается на оси, закрепленной на подшипниках А и В. Подшипник А имеет подпятник, создающий реакцию, направленную вдоль оси. Определим, чему равны импульсивные реакции А и В при ударе. Выберем оси координат так, что центр масс С тела находился в плоскости YZ. При ударе возникнет пять импульсивных реакций: три в опоре А и две в опоре В .

Обозначим: a – расстояние центра масс от оси, АВ =b – расстояние между подшипниками, ω – *угловая скорость тела до удара,* Ω – *угловая скорость после удара.*



Так как проекции кинетического момента при вращении твердого тела имеют вид :

$$K_x = -J_{xz}\,\omega, \quad K_y = -J_{yz}\,\omega, \quad K_z = J_z\,\omega, \ (13)$$

то согласно теореме об изменении кинетического момента получим

$$-ma(\Omega-\omega) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x \quad (14)$$

$$0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y \quad (15)$$

$$0 = S_{Az} + S_z \quad (16)$$

$$-J_{xz}(\Omega-\omega) = -S_{By}\, b + m_x(\vec{S}) \quad (17)$$

$$-J_{yz}(\Omega-\omega) = -S_{Bx}\, b + m_y(\vec{S}) \quad (18)$$

$$J_z(\Omega-\omega) = m_z(\vec{S}) \quad (19)$$

Составление правых частей (14 – 19) аналогично составлению уравнений равновесия пространственной статики, только вместо сил здесь берутся их импульсы. В системе (14 – 19) шесть неизвестных : S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx} , S_{By} и разность угловых скоростей $(\Omega-\omega)$.

Найдем условия, при которых не возникают импульсные (ударные) реакции шарниров. Известно, что в механических устройствах ударные реакции способствуют износу и могут привести к разрушению.

Положим в (14– 19): $\vec{S}_A = 0$, $\vec{S}_B = 0$. Из (14) и (15) сразу же получим, что вектор внешнего ударного импульса $\vec{S}$ должен лежать в плоскости, параллельной xAy: $S_y = 0$, $S_z = 0$. Заметим, что при $\vec{S}_A = 0$, $\vec{S}_B = 0$ вид системы (14 – 19) не зависит от выбора начала координат. Перенесем начало координат по оси z так, чтобы импульс $\vec{S}$ лежал в плоскости xOy .

Так как $m_x(\vec{S}) = 0$, $m_y(\vec{S}) = 0$, то из (17) и (18) следует, что центробежные моменты инерции тела относительно новых осей равны нулю: $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$. Это возможно для тел, обладающих плоскостью симметрии xOy. Из (14) при $S_x = -S$ следует

$$ma(\Omega-\omega) = S \quad (20)$$

А из (19) имеем:

$$J_z(\Omega-\omega) = Sh, \quad (21)$$

где обозначено h = ОК. Из последних двух уравнений сразу же получим

$$h = \frac{J_z}{ma} \quad (22)$$

На таком расстоянии от оси вращения должен быть приложен ударный импульс, не вызывающий ударных реакций.

Примеры решения задач при интернет-тестировании

Задача № 1.

При прямом ударе материальной точки по неподвижной преграде на нее подействовал ударный импульс величиной S= 7,5 Н·с. Скорость точки до удара ν=10м/с, скорость точки после удара u=5 м/с. Масса точки равна … кг.

○ $\frac{2}{3}$

○ $\frac{1}{3}$

○ 2

○ 1.5

Решение: На основании теоремы об изменении количества движения материальной точки $m\bar{u} - m\bar{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{S}}$, записанной в проекции на направление движения, имеет
$m = \frac{S}{\mathrm{v-u}} = 1.5$кг.

Правильный ответ: 1,5

Задача № 2.

На материальную точку массой m=0.5кг, движущуюся со скоростью $\bar{\mathrm{v}} = -3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$, подействовал ударный импульс$\bar{\mathrm{S}} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$. Модуль скорости после удара u равен …

○ 7

○ 0

○ 2.5

○ 5

○ 12

Решение: На основании теоремы об изменении количества движения материальной точки $m\bar{u} - m\bar{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{S}}$, имеем $\bar{u} = \bar{\mathrm{v}} + \frac{\bar{\mathrm{S}}}{\mathrm{m}} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$, откуда $u = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Правильный ответ: 5

Задача № 3.

Материальная точка массой m=10кг ударяется о неподвижную, горизонтальную негладкую поверхность и отскакивает. Скорость до удара ν=4м/с, угол падения α=30°. Скорость после удара u=2м/с, угол отражения β=60°. Проекция ударного импульса на горизонтальную ось приближенно равна … Н·с

○ -2.7

○ -2.5

○ -1.73

○ -1.14

Решение: На основании теоремы об изменении количества движения материальной точки $m\bar{u} - m\bar{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{S}}$, записанной в проекции на горизонтальную ось: $mu_\tau - m\mathrm{v}_\tau = S_\tau$, имеем
$S_\tau = m(u \sin 60^o - \mathrm{v} \sin 30^o) = -2.7\text{Н} \cdot \text{с}$

Правильный ответ: -2.7

Задача № 4.

Тело L, двигаясь со скоростью v_1=10м/с, ударяет по телу 2, которое двигается со скоростью v_2=8м/с в том же направлении. В случае, когда массы тел m_1= m_2= m, скорость совместного движения тел после абсолютно неупругого удара равна … м/с.

○ 7.5

○ 9

○ 18

○ 12

Решение: При соударении тел отсутствуют внешние ударные импульсы, поэтому должно сохраняться количество движения системы $\bar{Q} = \overline{Q_0}$. В проекции на направление движения имеем $Q_0 = m(v_1 - v_2)$ и $Q = 2mu$, где u-общая скорость движения тел после абсолютно неупругого удара.
Итак, $2mu = m(v_1 - v_2)$, откуда u=9м/с

Правильный ответ: 9

Задача № 5.

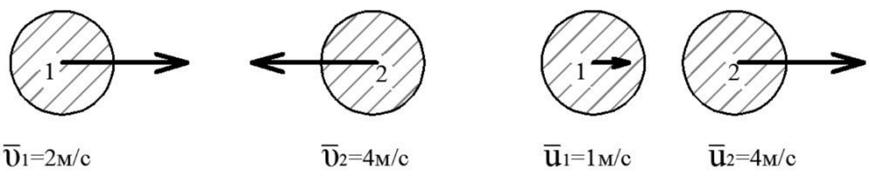
На рисунке показаны скорости тел одинаковой массы, m, v_1 и v_2 до соударения, u_1 и u_2 после него. Массы тел равны m_1= m_2= m. Коэффициент восстановления при ударе этих тел равен …

○ $\frac{5}{6}$

○ $\frac{1}{2}$

○ $\frac{2}{5}$

○ Невозможно



Решение: При соударении тел отсутствуют внешние ударные импульсы, поэтому должно сохраняться количество движения системы: $\bar{Q} = \overline{Q_0}$.
Однако в данной постановке задания имеем в проекции на направление движения тела 1:
$Q_0 = m(v_1 - v_2) = -2m$ и $Q = m(u_1 - u_2)$=5m. Таким образом, постановка задания неверна.

Правильный ответ: невозможно вычислить, используя предложенные данные

Задача № 6.

На тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω_o=150рад/с, подействовал ударный импульс с моментом относительно оси $M_z(\bar{S}) = 10\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Угловая скорость после удара ω=154рад/с. Момент инерции тела J_z равен …кг $\cdot\text{м}^2$

○ 10

○ 4

○ 2,5

○ 0,4

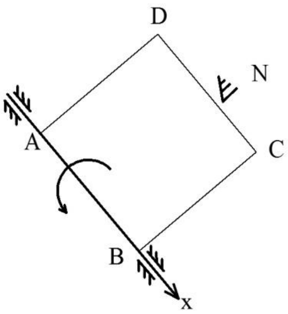
Решение: На основании теоремы об изменении кинетического момента при ударе $K_z - (K_z)_o = \sum M_z\left(\overline{S_k^e}\right)$, с учетом того, что кинетический момент вращающегося вокруг оси z тела $K_z = J_z\omega$, получаем $J_z(\omega - \omega_o) = M_z(\bar{S})$, откуда $J_z = \frac{M_z(\bar{S})}{(\omega - \omega_o)} = 2{,}5\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Правильный ответ: 2,5

Задача № 7.

Вращаясь вокруг оси Ax с угловой скоростью 6 рад/с, квадратная пластина ABCD наталкивается на неподвижное препятствие в точке N и после удара останавливается. Момент инерции пластины относительно оси вращения Ax равен 20кг· $м^2$, длина стороны AB=BC=0.6м.

Импульс ударной реакции в точке N равен …



○ 6000

○ 43.2

○ 120

○ 200

Решение: На основании теоремы об изменении кинетического момента при ударе получим:

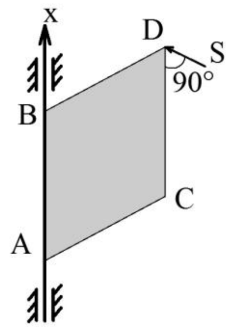
$$S_{уд} = \frac{J \cdot \omega}{h} = \frac{20 \cdot 6}{0.6} = 200Н \cdot с$$

Правильный ответ: 200 Н · с

Задача № 8.

Момент инерции пластины относительно оси Ax равен 10кг· $м^2$; размеры AB=BD=0.5м

После приложения в точке D ударного импульса S=40 Н · с квадратная пластина ABCD начинает вращаться вокруг оси Ax с угловой скоростью …



○ 8

○ 2

○ 4

○ 1

Решение: На основании теоремы об изменении кинетического момента при ударе получим:

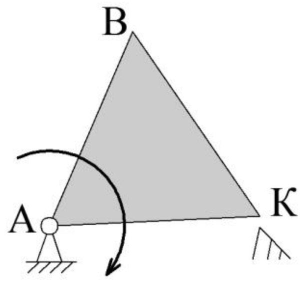
$$\omega = \frac{S_{уд} \cdot h}{J} = \frac{40 \cdot 0.5}{10} = 2с^{-1}$$

Правильный ответ: 2 $с^{-1}$

Задача № 9.

Пластина ABK вращается с угловой скоростью 4рад/с вокруг оси,проходящей через точку A перпендикулярно плоскости пластины. Момент инерции пластины относительно оси вращения 16кг· $м^2$;AK=BK=AB=0.2м

После удара в точке K о неподвижный выступ пластина останавливается. Импульс ударной реакции в точке K равен…



○ 20

○ 320

○ 12.8

○ 64

Решение: На основании теоремы об изменении кинетического момента при ударе получим:

$$S_{уд} = \frac{J \cdot \omega}{h} = \frac{16 \cdot 4}{0.2} = 320\text{Н} \cdot \text{с}$$

Правильный ответ: 320 Н · с

Задача № 10.

Материальная точка ударяется о неподвижное основание и отскакивает. Скорость точки до удара равна 8м/с и образует с вертикалью угол γ =30°. Коэффициент k восстановления при ударе равен $\frac{1}{3}$. Определить скорость точки после удара.

- ○ $\frac{8}{\sqrt{3}}$
- ○ $8 \cdot \sqrt{3}$
- ○ 4
- ○ $\frac{4}{\sqrt{3}}$
- ○ $4 \cdot \sqrt{3}$

Решение: На основании выражения $k = \frac{|\overline{u_n}|}{|\overline{v_n}|} = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ получим $\tan\beta = \frac{\tan\gamma}{k} = \frac{0.577}{0.333} = 1.73$ т.е. β=60°, тогда окончательно: $u = \frac{V \cdot \sin 30^o}{\sin 60^o} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

Правильный ответ: $\frac{8}{\sqrt{3}}$

Задача № 11.

При прямом ударе материальной точки массой m=1кг по неподвижной преграде на точку подействовал ударный импульс величиной S=15 Н · с. Скорость точки до удара v=10м/с. Скорость точки u после удара равна …

- ○ 4
- ○ 5
- ○ 2
- ○ 1.071

Решение: На основании теоремы об изменении количества движения системы получим

$$u = -v + \frac{S}{m} = -10 + \frac{15}{1} = 5\text{м/с}$$

Правильный ответ: 5м/с

Задача № 12.

При прямом ударе материальной точки по неподвижной преграде скорость до удара v_1=20м/с. Если коэффициент восстановления при ударе равен k=0.8, то скорость точки после удара равна …

- ○ 16
- ○ 20
- ○ 13,5
- ○ 2

Решение: На основании определения коэффициента восстановления при ударе получим:

$$v_2 = v_1 \cdot k = 20 \cdot 0.8 = 16\text{м/с}$$

Правильный ответ: 16м/с

Задача № 13.

При прямом ударе материальной точки по неподвижной преграде на точку подействовал ударный импульс величиной S=10 Н · с. Скорость точки до удара v=10м/с, скорость точки после удара u=5 м/с. Масса точки равна …

○ 2

○ 0.333

○ 1.5

○ 0.667

Решение: На основании теоремы получим:

$$m = \frac{S}{U+V} = \frac{10}{10+5} = 0.667\text{кг}$$

Правильный ответ: 0.667кг

Задача № 14.

На рисунке показаны скорости тел одинаковой массы, m, v_1 и v_2 до соударения, u_1 и u_2 после него. Массы тел не равны $m_1 \neq m_2$. Коэффициент восстановления при ударе

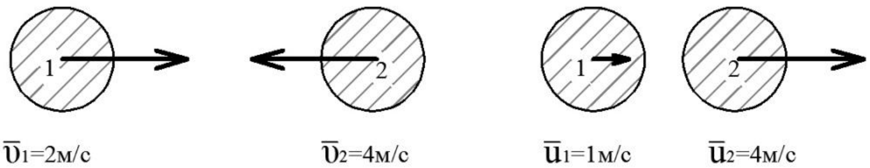
этих тел равен …

○ $\frac{5}{6}$

○ $\frac{1}{2}$

○ $\frac{2}{5}$

○ Невозможно



Решение.Вариант№1: При соударении тел отсутствуют внешние ударные импульсы, поэтому должно сохраняться количество движения системы: $\bar{Q} = \overline{Q_0}$.

Обозначая массы тел m_1 и m_2, в проекции на направление движения тела l имеем :
$Q_0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 = 2m_1 - 4m_2$ и $Q = m_1 u_1 - m_2 u_2 = m_1 - 4m_2$. Приравнивая эти выражения, находим, что $m_1 = 8m_2$. Тогда $Q_0 = 12m_2$.

После первой фазы соударения количества движения системы будет равно: $Q_1 = (m_1 + m_2)u =$ $= 9m_2 u$, где u- общая скорость движения тел.

Приравнивая последние выражения для Q_1 и Q_0 находим, что u= $\frac{4}{3}$ м/с.

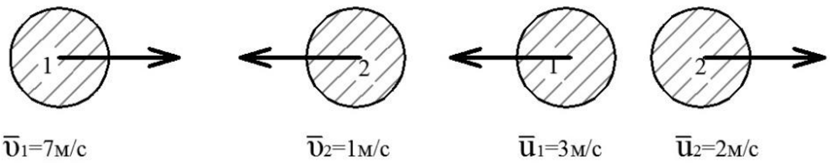
На основании теоремы об изменении количества движения материальной точки (или поступательно движущегося тела) $m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}$, записанной для тела l в проекции на направление его движения, имеем, для модуля ударного импульса первой фазы соударения: $S_1 = m_1|u - v_1| = \frac{2}{3}m_1$, и второй фазы соударения: $S_2 = m_1|u - u_1| = \frac{1}{3}m_1$. Итак, получаем $k = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$.

Вариант№2: При соударении двух тел с различными массами коэффициент восстановления согласно формуле(12): $k = \frac{u_2-u_1}{v_2-v_1} = \frac{4-1}{2-(-4)} = \frac{1}{2}$

Правильный ответ: $\frac{1}{2}$

<u>Задача № 15.</u>

На рисунке показаны скорости тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.



Коэффициент восстановления при ударе этих тел …

- ○ $\frac{5}{8}$
- ○ $\frac{1}{6}$
- ○ $\frac{5}{6}$
- ○ Невозможно

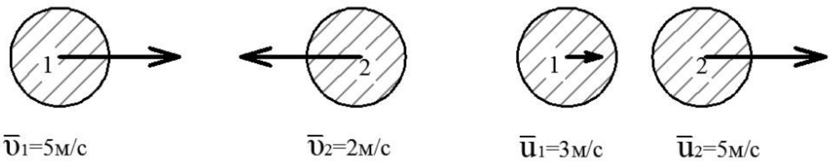
Решение: При соударении двух тел с различными массами коэффициент восстановления будет:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = \frac{2-(-3)}{7-1} = \frac{5}{6}$$

Правильный ответ: $\frac{5}{6}$

<u>Задача № 16.</u>

На рисунке показаны скорости тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.



Коэффициент восстановления при ударе этих тел …

- ○ $\frac{7}{8}$
- ○ $\frac{2}{3}$
- ○ $\frac{3}{8}$
- ○ Невозможно

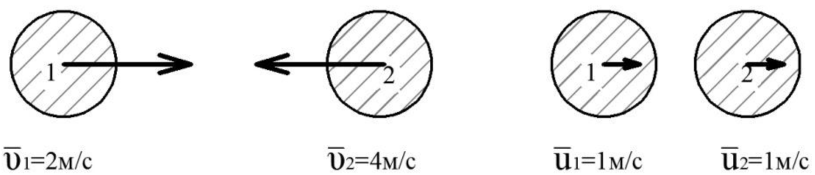
Решение: При соударении двух тел с различными массами коэффициент восстановления будет:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = \frac{5-3}{5-2} = \frac{2}{3}$$

Правильный ответ: $\frac{2}{3}$

<u>Задача № 17.</u>

На рисунке показаны скорости тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.



Массы тел: m_1=5кг ; m_2=1кг. Модуль импульса ударной силы, действующей на тело l за время удара равен …

- ○ 0
- ○ 5
- ○ 10
- ○ 6

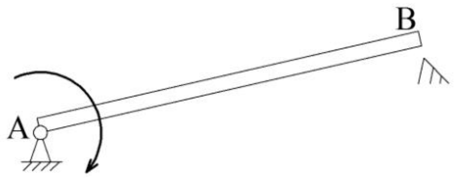
Решение: При соударении двух тел модуль импульса ударной силы будет:

$$S_{уд} = \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}(v_1 - v_2) = \frac{5 \cdot 1}{5+1}(2 - (-4)) = 5\text{Н} \cdot \text{с}$$

Правильный ответ: $5\text{Н} \cdot \text{с}$

Задача № 18.

Стержень АВ длинной 0.2 м вращается с угловой скоростью 2 рад/с вокруг оси шарнира А. Момент инерции стержня относительно оси вращения равен $8\text{кг} \cdot \text{м}^2$.
После удара концом В о неподвижное препятствие стержень останавливается.
Импульс ударной реакции равен …



○ 80

○ 3.2

○ 16

○ 5

Решение: На основании теоремы об изменении кинетического момента при ударе получим:

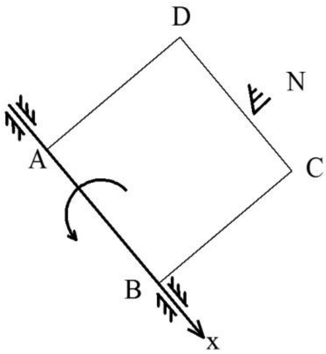
$$S_{уд} = \frac{J \cdot \omega}{h} = \frac{8 \cdot 2}{0.2} = 80\text{Н} \cdot \text{с}$$

Правильный ответ: $80\text{Н} \cdot \text{с}$

Задача № 19.

Вращаясь вокруг оси Ах с угловой скоростью 6 рад/с, квадратная пластина ABCD наталкивается на неподвижное препятствие в точке N и после удара останавливается. Момент инерции пластины относительно оси вращения Ах равен 20кг$\cdot$ м^2, длина стороны AB=BC=L=1.2м.

Модуль импульсной ударной реакции в точке N равен …



○ 400

○ 100

○ 120

○ 200

Решение: На основании теоремы об изменении кинетического момента при ударе $\text{К}_\text{x} - (\text{К}_\text{x})_0 = \sum \text{M}_\text{x}\left(\overline{S_k^e}\right)$, с учетом того, что кинетический момент вращающегося вокруг оси х тела $\text{К}_\text{x} = J_x \omega$, получаем $J_x(\omega - \omega_0) = M_x(\bar{S})$, откуда $|M_x(\bar{S})| = 20 \cdot 6 = 120$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с.
Поскольку плечо импульса $\bar{S}$ относительно оси х равно L, окончательно находим $S = \frac{|M_x(\bar{S})|}{L} = 100$ Н $\cdot$ с

Правильный ответ: 100 Н $\cdot$ с

<u>Колебания материальной точки</u>

Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той причине, что такие колебания очень часто имеют место в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и уяснения колебательных явлений в других областях.

<u>Свободные колебания</u>

<u>Свободными называются колебания материальной точки, которые происходят под действием только восстанавливающей силы</u> (к примеру силы **P** , рис. 1).

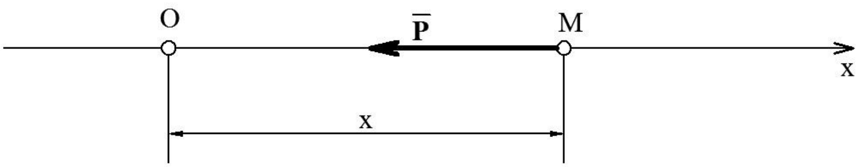


Рис.1

При движении материальной точки М массы **m** по горизонтальной оси **x** под действием силы **P** , равной по модулю P = c/x/ , имеет место дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

где $\hat{e}^2 = \tilde{n}/m$-это частота собственных колебаний.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение данного уравнения можно привести к виду

$$x = a\sin(kt - \alpha) \qquad (2)$$

т.е. материальная точка совершает гармоническое колебательное движение; здесь a - амплитуда колебаний, $\hat{e}t + \alpha$ - фаза колебаний, α - начальная фаза колебаний.

При этом период колебаний – $T = \frac{2\pi}{k}$

<u>Затухающие колебания</u>

При движении материальной точки в среде, препятствующей движению (воздух, жидкость) возникает сила сопротивления движению, к примеру, пропорциональная первой степени скорости точки **R =** βv **(рис.2)**

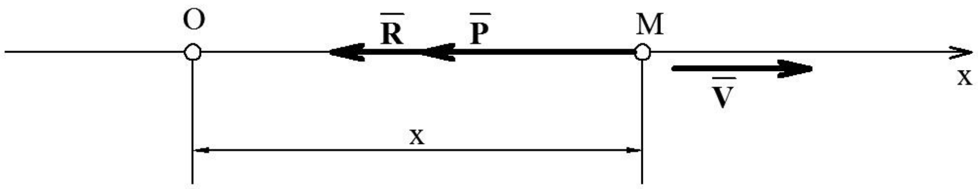


Рис. 2

Тогда дифференциальное уравнение движения материальной точки будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2nx + k^2 x = 0 \qquad (3)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{c}{m}\ ;\ 2n = \frac{\beta}{m} \quad (4)$$

Различаются три вида движения:

при $n<k$ - случай малого сопротивления;

при $n>k$ -случай большого сопротивления;

при $n=k$ – предельный случай.

Колебания, происходящие согласно уравнению (2), называются **<u>затухающими</u>**, так как с течением времени их амплитуда непрерывно уменьшается. Графиком затухающих колебаний <u>в случае малого сопротивления</u> является затухающая синусоида, заключенная между двумя экспонентами (рис.3).

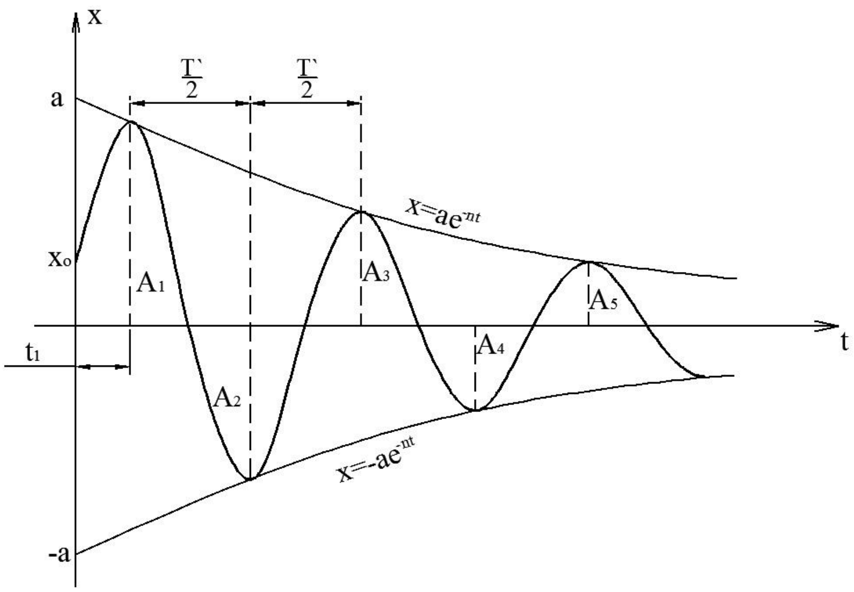


Рис. 3

В случае большого сопротивления, а также в предельном случае, материальная точка совершает затухающее апериодическое движение. Характер затухания зависит от начальных условий движения (рис.4).

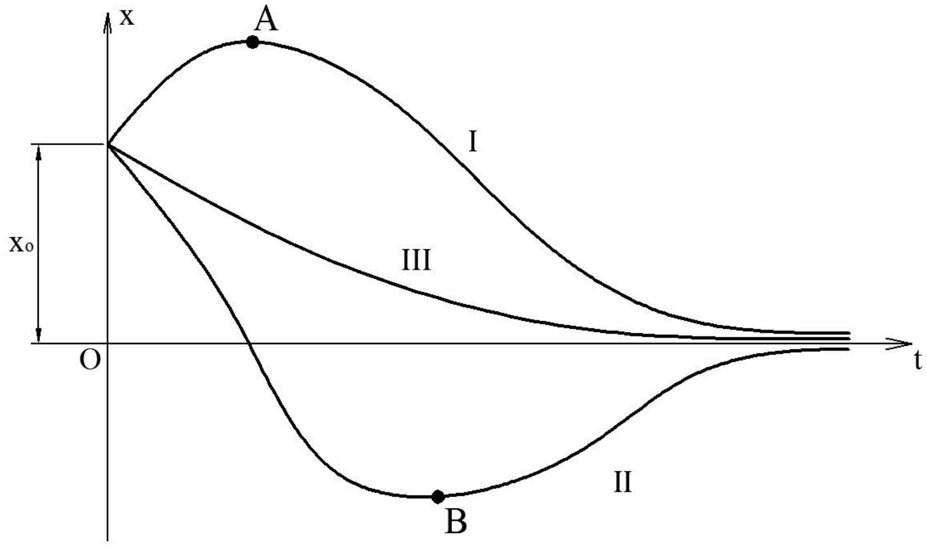


Рис. 4

При $x = x_0 \geq 0$ и $x = xo>0$ движение материальной точки соответствует кривой **I.**

При $x = x_0 \geq 0$ и $x = xo<0$ движение материальной точки соответствует кривой **II** или **III.**

Во всех трех случаях движение материальной точки быстро затухает.

Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь случай, когда на точку, кроме рассмотренных выше сил, действует еще и периодически изменяющаяся по модулю и направлению сила, называемая ***возмущающей силой.***

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда возмущающая сила изменяется *по гармоническому закону*, к примеру, Q = H Sin pt, где H- амплитуда возмущающей силы, а p- круговая частота изменения возмущающей силы (рис. 5).

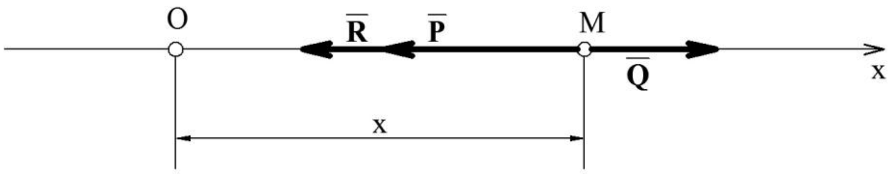


Рис. 5

Обозначив $k^2 = \frac{c}{m}$; $2n = \frac{\beta}{m}$ и $h = \frac{H}{m}$, получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\ddot{x} + 2nx + k^2x = h\sin pt \quad (5)$$

Общее решение такого уравнения есть сумма двух слагаемых: общего решения x_1, соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 данного неоднородного уравнения:

$$x = x_1 + x_2 \qquad (6)$$

Вынужденные колебания $\mathbf{x_2}$ имеют круговую частоту **p**, равную круговой частоте **p** изменения возмущающей силы. Случай, когда частота **p** возмущающей силы близка по своему значению к частоте **k** свободных колебаний точки, сопровождается *значительным увеличением амплитуды вынужденных колебаний* и называется ***резонансом*** (рис.6).

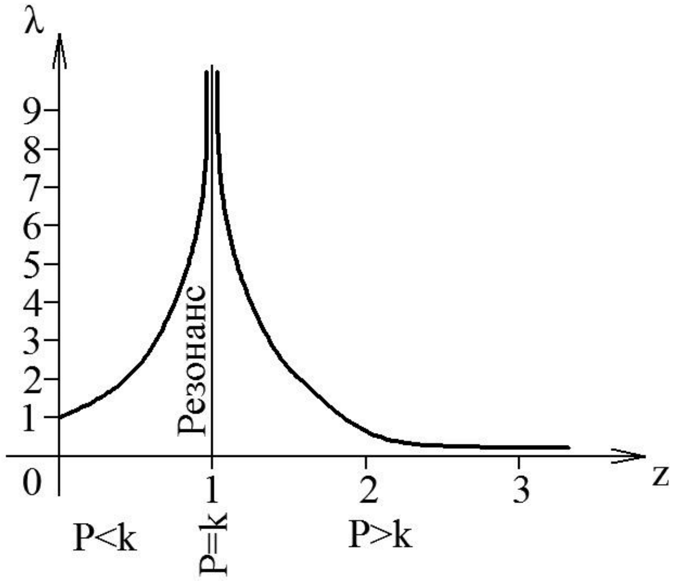


Рис. 6

Примеры решения задач при интернет-тестировании

Задача № 1.

Механическая система совершает колебания описываемые законом $q = 5\sin\left(8t + arctg\frac{4}{3}\right)$. Дифференциальное уравнение движения этой системы имеет вид…

○ $\ddot{q} + 64q = 0$

○ $\ddot{q} + 16q = 0$

○ $\ddot{q} + 25q = 0$

○ $\ddot{q} + 9q = 0$

Решение: В описываемом законе частота собственных колебаний k=8. Поэтому дифференциальное уравнение, соответствующее данному закону, является уравнение $\ddot{q} + 64q = 0$, т.к. $k^2=64$

Правильный ответ: $\ddot{q} + 64q = 0$ (№1)

Задача № 2.

Данное дифференциальное уравнение

$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ является уравнением…

○ свободных колебаний без учета сил сопротивления

○ свободных колебаний с учетом сил сопротивления

○ вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления

○ вынужденных колебаний без учетом сил сопротивления (случай резонанса)

○ вынужденных колебаний без учетом сил сопротивления

Решение: Данное дифференциальное уравнение является уравнением свободных колебаний без учета сил сопротивления

Правильный ответ: уравнение свободных колебаний без учета сил сопротивления (№1)

<u>Задача № 3.</u>

Данное дифференциальное уравнение

$\ddot{y} + k^2 y = 0$ является уравнением…

○ свободных колебаний без учета сил сопротивления

○ свободных колебаний с учетом сил сопротивления

○ вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления

○ вынужденных колебаний без учетом сил сопротивления (случай резонанса)

○ вынужденных колебаний без учетом сил сопротивления

Решение: Данное дифференциальное уравнение является уравнением свободных колебаний без учета сил сопротивления

Правильный ответ: уравнение свободных колебаний без учета сил сопротивления (№1)

<u>Задача № 4.</u>

Данное дифференциальное уравнение

$\ddot{y} + 2\mu \dot{y} + k^2 y = 0$
(где μ >0) является уравнением…

○ свободных колебаний без учета сил сопротивления

○ свободных колебаний с учетом сил сопротивления

○ вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления

○ вынужденных колебаний без учетом сил сопротивления (случай резонанса)

○ вынужденных колебаний без учетом сил сопротивления

Решение: Данное дифференциальное уравнение является уравнением свободных колебаний с учетом сил сопротивления

Правильный ответ: уравнение свободных колебаний с учетом сил сопротивления (№2).

<u>Задача № 5.</u>

Характер движения механической системы, если дифференциальное уравнение её движения имеет вид $\ddot{x} + k^2 x = 0$, это …

○ апериодическое движение

○ свободные колебания

○ вынужденные колебания

○ затухающие колебания

Решение: данное дифференциальное уравнение является
уравнением свободных колебаний.

Правильный ответ: уравнение свободных колебаний (№2).

Задача № 6.

Если с-жесткость пружины с=400 Н/м,l_0-длина ненапряженной пружины l_0= 40см l_1-начальная длина пружины l_1=50см, l_2-конечная длина пружины l_2=20см,то работа, совершаемая силой упругости пружины при изменении длины от значения l_1 до значения l_2, равна …

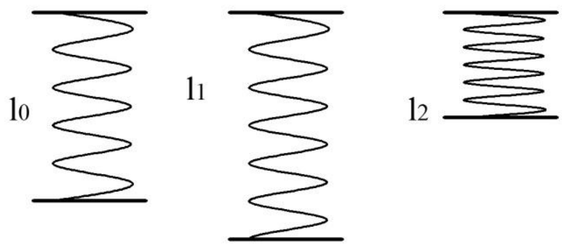
○ -250

○ 0

○ -6

○ 9

○ 32



Решение: $A = A_1 - A_2 = \frac{400}{2}((0.5-0.4)^2 - (0.4-0.2)^2) = -200(0.04-0.01) = -6$Дж

Правильный ответ: -6Дж (№3)

Задача № 7.

Если с-жесткость пружины с=200 Н/м,l_0-длина ненапряженной пружины l_0= 30см l_1-начальная длина пружины l_1=25см, l_2-конечная длина пружины l_2=40см,то работа, совершаемая силой упругости пружины при изменении длины от значения l_1 до значения l_2, равна …

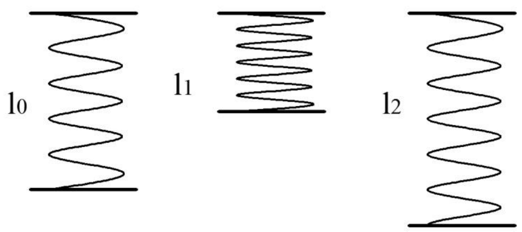
○ -0.75

○ 9

○ 2.25

○ 0

○ 16



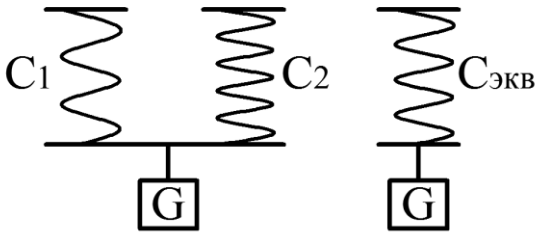
Решение: $A = A_1 - A_2 = \frac{200}{2}((0.3-0.25)^2 - (0.4-0.3)^2) = -100(0.01-0.0025) = -0.75$Дж

Правильный ответ: -0.75Дж (№1)

Задача № 8.

Груз G совершает колебания на системе двух пружин, жесткости которых c_1=6Н/см, c_2=3Н/см соответственно. Систему пружин можно заменить одной эквивалентной пружиной, жесткость которой $c_{экв}$= … Н/см

- ○ 3
- ○ 18
- ○ 2
- ○ 9



Решение: При параллельном соединении пружин $c_{экв} = c_1 + c_2 = 9\text{Н/см}$

Правильный ответ: 9Н/см (№4)

Маковкин Георгий Анатольевич
Аистов Анатолий Сергеевич
Куликов Игорь Сергеевич
Юдников Сергей Георгиевич
Баранова Алла Сергеевна
Никитина Елена Александровна
Круглова Татьяна Евгеньевна
Орехова Ольга Ивановна
Лупанова Галия Алексеевна

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 6. Элементы теории удара и теории колебаний

Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике

Подписано к печати . Формат 60х90 1\16 Бумага газетная. Печать трафаретная
Уч.изд.л.1,0. Усл.печ.л.1,2 Тираж 200 экз. Заказ №

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская,