

Министерство образования науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию

---

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Б.А. Гордеев, В.П. Горсков, Д.А. Ковригин, С.П. Никитенкова

Математические модели виброзащитных систем высотных зданий

Учебное пособие

Нижний Новгород  
ННГАСУ  
2012

ББК 38.637  
Г 68  
УДК 534.1

Гордеев Б.А., Горсков В.П., Ковригин Д.А., Никитенкова С.П. Математические модели виброзащитных систем высотных зданий [Текст]: лекции; /Б.А. Гордеев, В.П. Горсков, Д.А. Ковригин, Никитенкова С.П.; Нижегород. гос. архит. – строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ, 2012, 122с.  
ISBN

Создание эффективных средств защиты от вибраций и ударов является одной из важнейших проблем современной техники. Применение упругих амортизаторов является одним из наиболее распространенных способов виброзащиты. В настоящее время существует большое число конструктивных разновидностей виброзащитных устройств, предназначенных как для защиты приборов и оборудования, устанавливаемых на вибрирующих основаниях, так и для защиты оснований и фундаментов от динамических воздействий. Создание амортизирующих устройств, способных защитить объекты от вибраций и ударов и вместе с тем обладающих ограниченными размерами, является сложной технической проблемой. В связи с этим первостепенное значение приобретают вопросы теории и расчета виброзащитных систем.

Учебное пособие предназначается для студентов старших курсов общетехнических специальностей, магистрантов, аспирантов и научных работников, занимающихся исследованием и проектированием виброзащитных систем.

ББК 38.637

ISBN

© Гордеев Б.А., 2011  
© Горсков В.П., 2011  
© Ковригин Д.А., 2011  
© Никитенкова С.П., 2011  
© ННГАСУ, 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>РАЗДЕЛ 1</b>		4
ЛЕКЦИЯ 1	СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ...	4
ЛЕКЦИЯ 2	ВИБРОЗАЩИТНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	11
ЛЕКЦИЯ 3	АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ И ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ.....	17
ЛЕКЦИЯ 4	ГИСТЕРЕЗИСНОЕ (СТРУКТУРНОЕ) ДЕМПФИРОВАНИЕ	23
ЛЕКЦИЯ 5	ВИБРОЗАЩИТНЫЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.....	27
ЛЕКЦИЯ 6	КОНЦЕПЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....	30
ЛЕКЦИЯ 7	СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ.....	36
ЛЕКЦИЯ 8	ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	38
ЛЕКЦИЯ 9	ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ГИСТЕРЕЗИСНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ.....	41
<b>РАЗДЕЛ 2</b>		47
ЛЕКЦИЯ 10	ВОЛНОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	47
ЛЕКЦИЯ 11	УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫЕ ГАСИТЕЛИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ.....	50
ЛЕКЦИЯ 12	СНИЖЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДОВ.....	53
ЛЕКЦИЯ 13	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ И ДИССИПАЦИИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД - ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ВИБРОЗАЩИТЫ.....	55
ЛЕКЦИЯ 14	ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗИНО-МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ.....	63
ЛЕКЦИЯ 15	ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ВИБРООПОРАХ.....	67
ЛЕКЦИЯ 16	СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ.....	77
ЛЕКЦИЯ 17	АКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРООПОРАМИ.....	80
ПРИЛОЖЕНИЕ	ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТНОГО ЗДАНИЯ.....	85
ЛИТЕРАТУРА	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	110

## РАЗДЕЛ 1

### ЛЕКЦИЯ 1

#### СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ

Высотные здания во всем мире относят к объектам самого высокого уровня ответственности и класса надежности. Удельная стоимость их строительства значительно выше строительства обычных зданий. Это обусловлено не только технологическими, конструктивными и другими факторами, но в значительной степени и мерами комплексной безопасности, принимаемыми на всех стадиях – проектирования, строительства и эксплуатации. Возникновение и развитие аварийных ситуаций в высотных зданиях может иметь очень тяжелые последствия не только материального, экономического, экологического, но и социального характера.

В ряде стран, особенно в США, накоплен значительный опыт проектирования, строительства и эксплуатации высотных зданий. Одним из первых высотных зданий можно считать Вулворт билдинг (Woolworth Building) в Нью-Йорке высотой 241 м (57 этажей), возведенный в 1913 году. Долгое время самым высоким зданием в мире считался Эмпайр стейт билдинг (Empire State Building), имеющий 102 этажа и общую высоту 381 м (с антенной – 448 м). В дальнейшем его потеснили здания Международного торгового центра (World Trade Center) в Нью-Йорке (415, 417 м) и Сирс Тауэр (Sears Tower) в Чикаго (442 м). В последние годы строительство самых высоких зданий переместилось на Восток – в Малайзию, Тайвань и Китай.

В 1998 году в Куала-Лумпур построены две башни-близнецы Петронас-тауэрс (Petronas Towers) высотой 452 м, в 2004 году в Тайбее завершено строительство здания Международного финансового центра (Taipei 101, более известный как Taipei Financial Center) высотой 448 м (со шпилем – 508 м). Здание Шанхайского всемирного финансового центра (World Financial Center), строительство которого завершено в 2007 году, составляет 492 м. Существует

проект строительства в Сеуле 580-метрового здания (International Business Center).

В последние годы в Москве активно строятся высотные здания. Среди них высотные жилые комплексы «Алые паруса» и «Эдельвейс».

При проектировании конструкций наземной части высотные здания следует относить к I уровню ответственности и принимать коэффициенты надежности по ответственности при высоте здания от 75 до 100 м равными 1,1; в диапазоне высот от 101 до 125 м – 1,15, а свыше этого – 1,2. Под действием ветровой нагрузки перемещение верха высотного здания не должно превышать  $1/500$  его высоты, что обеспечивает целостность остекления и перегородок, а также нормальную работу лифтов. В соответствии с зарубежным опытом это условие соблюдается при отношении ширины к высоте здания, не превышающим  $1/7$ . Жесткость конструкций высотного здания должна обеспечивать значение ускорения колебаний верхних этажей под динамическим воздействием ветра не более  $0,08 \text{ м/с}^2$ . Следует сказать, что анализ первых проектов высотных зданий показывает: в ряде случаев архитекторы пренебрегают этими требованиями, что снижает надежность высотного здания, требует дополнительных конструктивных мероприятий и затрат.

Защита конструкций и всего высотного здания в целом от прогрессирующего обрушения обеспечивается такими мероприятиями, как неразрезность (статическая неопределимость) основных несущих частей, соответствующим проектированием узлов и соединений конструктивных элементов, гарантированным качеством применяемых материалов и другими мероприятиями.

Опыт проектирования высотного здания в Москве на Давыдовской улице, дом 3 выявил ряд недостаточно отработанных в отечественной нормативной и научно-технической документации вопросов, прояснение

которых позволит добиться большей надежности и экономичности таких зданий. Расчет на ветровые нагрузки высотного здания допускал величину прогиба, равную  $1/500$  от его высоты. При этом предполагалось, что при таком прогибе обеспечится целостность всех конструктивных элементов здания (перегородок, остекления, сопряжения деталей и т.п.), а также ускорения I-го тона собственных колебаний здания не создаст отрицательных воздействий на самочувствие находящихся в здании людей. Однако даже в США, где приняты аналогичные нормы, фактически при строительстве высотных зданий принимают значительно меньшие прогибы, равные  $1/1500-1/1000$ . В российском проекте также принят прогиб здания от суммарных горизонтальных нагрузок, равный  $1/1000$ . Понятно, что это достигается за счет технико-экономической эффективности конструктивного решения здания.

Недостаточно изучен вопрос влияния горизонтальных колебаний высотных зданий на самочувствие человека. По некоторым зарубежным данным, порог восприятия горизонтальных ускорений находится в диапазоне  $0,006-0,015 g$ , из чего следует, что расчетный период собственных колебаний зданий по основному тону должен составлять не менее 10 с. Для обеспечения этого предлагается вводить в конструкцию здания специальные упруговязкие амортизаторы, что, как правило, не делается. Плохо изучен вопрос обеспечения совместности (одинаковости) работы на вертикальные нагрузки таких конструктивных элементов, как колонны и стены. Обычно это обеспечивается за счет дополнительного армирования перекрытия, т.е. за счет ухудшения технико-экономических показателей. В безригельных железобетонных перекрытиях недостаточно проработан вопрос расчета опорных зон у колонн, особенно в случаях использования больших пролетов.

Сейсмометрические измерения на сооружениях в сейсмоактивных районах или при вибрационных испытаниях зданий нацелены на так называемые "сильные события", т.е. большую амплитуду вызванных колебаний. Для Москвы такие события крайне редки, поэтому целесообразно

ориентировать методику мониторинга на более слабые сигналы для того, чтобы с их помощью тестировать состояние здания.

Начало этим исследованиям в России было положено в 1950-х годах И.Л. Корчинским [1]. Объектами изучения были здание главного корпуса МГУ, высотные дома на Смоленской площади и Котельнической набережной. Был реализован очень тонкий для того времени эксперимент по определению характера работы конструкций. При разной силе и направлении ветра измерялись параметры колебаний, для чего был сконструирован специальный сейсмометр с системой записи сигналов. Сопоставление данных на разных отметках по высоте и теоретических расчетов (для достаточно простых моделей зданий) позволило сделать очень важное заключение: здание при ветровых воздействиях испытывает преимущественно деформирование **сдвига**, а не **изгиба**.

а)



б)

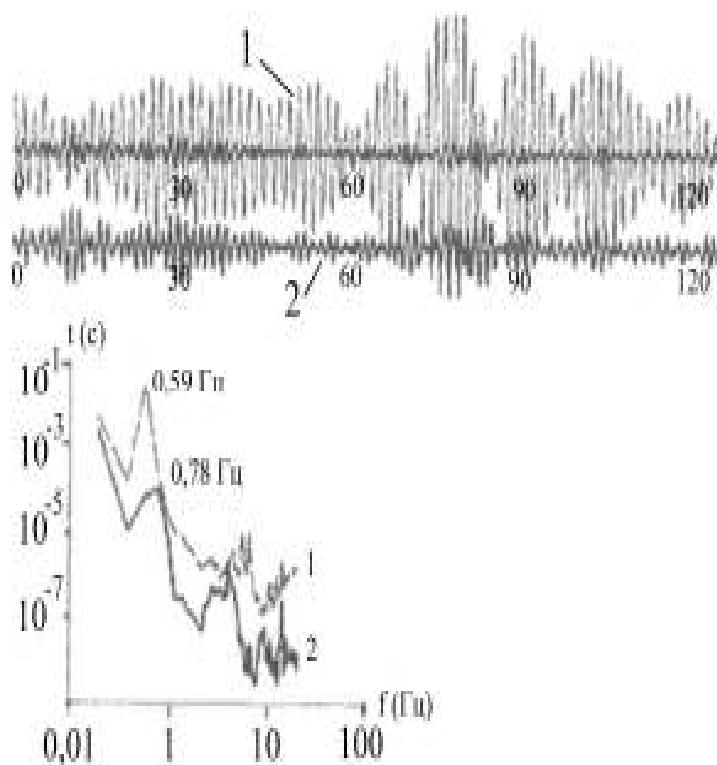


Рис.1. 44-этажное здание «Эделвейс»: а)общий вид; б) виброграмма колебаний здания и частота основного тона колебаний здания

Основу для анализа составляют собственные колебания системы [2]. Наиболее интенсивны колебания в горизонтальной плоскости, причем на верхних этажах эти сигналы выявляются даже без фильтрации. Оценку амплитуд дают спектры мощности сейсмометрической записи, на которых собственные колебания представлены повышенными значениями виброперемещений. Зная коэффициенты усиления и характеристики сейсмометров, получаемые при их калибровке, величины амплитуд приводят к абсолютным уровням смещений, скоростей или ускорений. Установка горизонтальных сейсмометров параллельно осям здания позволяет четко разделить колебания вдоль и поперек здания при прямоугольном плане. Для высотного дома "Эдельвейс" частоты основного тона в разных направлениях (по разным осям) составляют 0,59 и 0,78 Гц.

Регистрация ветровых пульсаций параллельно с сейсмометрической записью позволила увидеть наведённые колебания, приходящие на здания извне (рис. 1). Наиболее неприятными являются те, частоты которых близки или совпадают с собственными частотами здания — это приводит к резонансу или к ряду нелинейных явлений.

Специфические отличия высотных зданий от зданий малой и средней этажности обусловлены:

- низкой способностью высотных зданий (если они не оснащены особыми устройствами) к рассеянию энергии колебаний;
- опасностью хрупкого разрушения при землетрясении несущих конструкций нижних этажей, перегруженных вертикальными статическими нагрузками;
- меньшими, по сравнению со зданиями малой и средней этажности, резервами несущей способности [5].

Расчетные сейсмические нагрузки на высотные здания определяются в предположении упругой работы конструкций при проектных землетрясениях. Максимальное ускорение основания при проектном землетрясении



определяется как произведение максимального ускорения основания при редком сильном землетрясении, соответствующем сейсмичности площадки строительства на коэффициент редукиции. Значения коэффициента редукиции назначаются с учетом конструктивных решений здания и находятся в пределах 0,2...0,3.

При определении расчетных сейсмических нагрузок спектральным методом применяется повышающий коэффициент, имеющий значения до 1,8..2,0 и комплексно учитывающий влияние высоты здания на степень его ответственности и на диссипативные свойства. Расчетная модель сейсмических воздействий на здания принимается многокомпонентной и в обязательном порядке отображает горизонтальные и вертикальные поступательные колебания основания, а также его крутильные колебания. Предполагается, что несущие конструкции высотного здания должны перенести слабые и умеренные землетрясения без значимых повреждений. Разрыв между расчетными сейсмическими нагрузками и нагрузками, возможными при редких сильных землетрясениях, восполняется с помощью специальных конструктивных мероприятий и дополнительных расчетных проверок наиболее ответственных несущих элементов. Специальные конструктивные мероприятия направлены на создание в высотных конструктивных системах резервов прочности и способности к пластическому деформированию, а также на предотвращение чрезмерной деградации жесткости и прочности несущих элементов при пластическом деформировании. Максимальные перекосы этажей, для предотвращения серьезных повреждений ненесущих элементов высотных зданий при землетрясениях, ограничиваются величиной  $\frac{\Delta}{h} = \frac{1}{200}$ , где  $\Delta$  – горизонтальный перекося этажа;  $h$  – высота этажа. Высотное строительство часто осуществляется в сейсмически активных районах. Это порой приводит к противоречивым результатам влияния жесткости каркаса на поведение здания при ветровых и сейсмических нагрузках. Если для улучшения сопротивления ветровому напору и

уменьшения амплитуды и частоты колебаний верха здания прибегают к увеличению жесткости несущего остова, то при сейсмических нагрузках такие здания не способны поглотить энергию толчков земной коры, что вызывает значительные перемещения и ускорения на верхних этажах. С уменьшением поперечной жесткости несущей системы наблюдается обратная картина – при более гибком скелете заметно ухудшаются комфортные условия на верхних этажах, испытывающих значительные колебания. Для устранения указанных противоречий в особо высоких зданиях (до 300 м и более) на верхних этажах устраивают пассивные маятниковые демпферы. В частности, такой демпфер установлен в башне Taipei101. Он имеет вес около 800 т, подвешен с помощью тросов на 92м этаже и предназначен для гашения инерционных колебаний. В обычных условиях эксплуатации демпфер обеспечивает отклонение верха здания в пределах до 10 см, а при воздействиях катастрофического характера (тайфуны, землетрясения и т.п.) сам раскачивается с амплитудой до 150 см, гарантируя колебания здания в безопасных пределах.

## ЛЕКЦИЯ 2

### ВИБРОЗАЩИТНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Одна из главных проблем современного градостроительства связана с разработкой эффективных методов и средств уменьшения уровней вибраций и шума, а также динамических нагрузок в элементах строительных конструкций.

Исследования в этом направлении носят, главным образом, конструкторско-экспериментальный характер. Они не подкреплены более глубокими теоретическими представлениями о характере динамических процессов в строительных конструкциях.

С позиций физической природы динамических процессов любую строительную конструкцию можно рассматривать как сложную колебательную систему, состоящую из панелей, балок, стержней, оболочек, на которую действуют различные источники колебаний внешние и внутренние. От источников колебаний потоки вибраций растекаются по конструкции здания, отражаясь на стыках, неоднородностях, поглощаясь и излучаясь, создавая звуковые шумы, спектр которых расширяется при перекачке энергии на нелинейных элементах в область высоких частот. Наличие многократных переотражений создает условия для возникновения резонансов и концентрации энергии колебаний на отдельных участках конструкции.

Борьба с вредными проявлениями вибрации (виброзащита) ведется в трех направлениях:

- применительно к источнику вибровозбуждения;
- в отношении виброзащищаемого объекта - машины, сооружения;
- в отношении человека.

В последнем случае проблемы полностью или частично решаются всегда, когда тем или иным способом удастся снизить вибрацию в первых двух направлениях.

Виброзащита осуществляется разными путями. Если объект подвержен действию периодических сил, то стремятся прежде всего к снижению их действия в самом источнике. В частности, если в двигателе внутреннего

сгорания вращаются недостаточно сбалансированные детали, то уменьшения вибрационного возбуждения можно добиться проведением соответствующей балансировки. В двигателях внутреннего сгорания снижение вибрационного возбуждения можно достичь, изменяя порядок зажигания в цилиндрах. Также можно и значительно снизить возбуждение за счет применения в двигателях силовых агрегатов уравновешивающих механизмов (валов), вращающихся в противофазе.

Однако устранить вибрационное возбуждение полностью не удастся, в результате чего возникает необходимость виброзащиты самого объекта.

Задача борьбы с вибрациями и шумами включает в себя следующие составляющие:

- выявление основных источников вибраций и шума;
- знания о распространении вибропотоков по строительной конструкции;
- использование виброгасящих устройств в областях генерирования вибрации и шума;
- вооруженность методами и средствами измерения вибрации и шума.

Эти составляющие позволяют выработать рекомендации по проектированию строительных конструкций с минимальным уровнем вибраций и шумов.

### **Вязкое демпфирование**

Для облегчения аналитического описания динамического поведения сложную строительную конструкцию можно рассматривать как систему масс, соединенных с помощью пружин и демпфирующих элементов. Поскольку силы демпфирования для реальной конструкции промышленного здания нельзя оценить с такой же точностью, как упругие силы и силы инерции, то строгое математическое моделирование явлений демпфирования невозможно. Тем не менее, для объяснения диссипативных сил, присутствующих в любой конструкции, следует сделать предположение о виде демпфирования, что позволяет оценить демпфирующие силы на практике. Кроме того, вид демпфирования должен способствовать простым математическим операциям, специально применяемым к линейным уравнениям движения - это означает,

что при гармоническом возбуждении силы демпфирования также изменяются по гармоническому закону. Двумя такими подходящими формами демпфирования являются вязкое и гистерезисное демпфирование. Реакция системы с одной степенью свободы для вязкого демпфирования описывается в этом разделе, а для гистерезисного демпфирования - в следующем. Будут также проиллюстрированы различия в характеристиках.

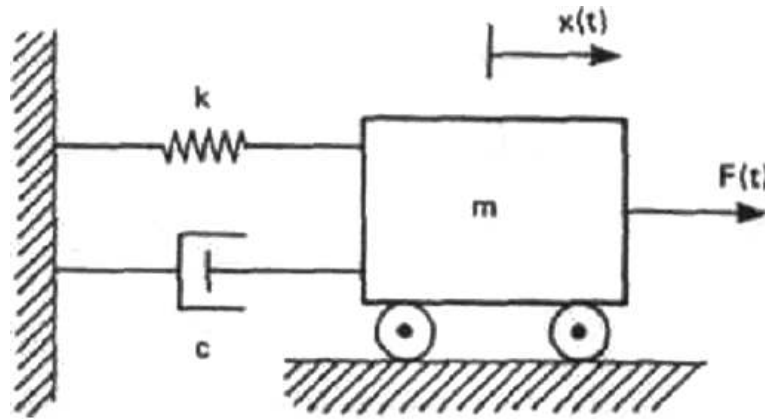


Рис.2. Система с одной степенью свободы

На рис.2 показана система с одной степенью свободы, в которой между массой  $m$  и фиксированной стенкой расположен безмассовый демпфер с коэффициентом демпфирования  $c$  и пружина жесткостью  $k$ . Демпфер создает силу демпфирования  $cx'$ , пропорциональную мгновенной скорости и положительную в положительном направлении. Уравнение движения для вынужденного гармонического возбуждения можно записать в виде:

$$mx'' + cx' + kx = Fe^{j\omega t}, \quad (1)$$

где  $x$  - смещение,  $x'$  - скорость,  $x''$  - ускорение,  $F$  - возбуждающая сила,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  - частота возбуждения.

Разделив уравнение (1) на  $m$  и умножив числитель и знаменатель в правой части на  $k$ , получим:

$$x'' + 2\xi\omega_0 x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left( \frac{F}{k} \right) e^{j\omega t}, \quad (2)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - собственная частота недемпфированных колебаний;

$\xi = \frac{c}{2m} \cdot \omega_0 = \frac{c}{c_c}$  – безразмерное относительное демпфирование;  $c_c$  – критическое демпфирование и  $\frac{F}{k}$  – растяжение в пружине, вызванное силой  $F$ .

Используя пробное решение в виде:

$$x = X e^{j\omega t}$$

для установившегося колебания, можно показать после дифференцирования и подстановки в уравнение (2), что

$$X = \frac{\omega_0 \frac{F}{k}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega\omega_0} = \frac{\frac{F}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (3)$$

Таким образом:

$$x = X e^{j\omega t} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_0}} \right] \cdot \frac{F e^{j\omega t}}{k}. \quad (4)$$

Видно, что смещение  $x$  пропорционально приложенной силе, а коэффициент пропорциональности равен:

$$H(\omega) = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_0}} \right] \cdot \frac{F e^{j\omega t}}{k} \quad (5)$$

и называется комплексной частотной характеристикой. Равенство (4) показывает, что смещение является комплексной величиной и может быть представлено в виде вещественной и мнимой частей умножением числителя и знаменателя в квадратных скобках на комплексно сопряженную величину к знаменателю. Таким образом:

$$x = \left[ \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{j2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] \cdot \frac{F e^{j\omega t}}{k}. \quad (6)$$

Это равенство показывает, что смещение имеет одну компоненту:

$$\operatorname{Re}(x) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}, \quad (7)$$

находящуюся в фазе с приложенной силой и вторую компоненту:

$$\operatorname{Im}(x) = \frac{-j2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}, \quad (8)$$

имеющую отставание по фазе на угол  $90^\circ$  от приложенной силы. Считается, что эта компонента находится в квадратуре с возбуждением.

На рис.3 векторы  $OA$  и  $OB$  показывают соответственно вещественную и мнимую компоненты смещения. Вектор  $OC$  является общим смещением с амплитудой, определяемой выражением  $\left\{\sqrt{\operatorname{Re}^2(x) + \operatorname{Im}^2(x)}\right\}$  и равной:

$$OC = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}. \quad (9)$$

Общее смещение отстает от вектора силы на угол  $\theta$ , определяемый выражением  $\left\{tg^{-1} \frac{\operatorname{Im}(x)}{\operatorname{Re}(x)}\right\}$  и равный:

$$\theta = tg^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (10)$$

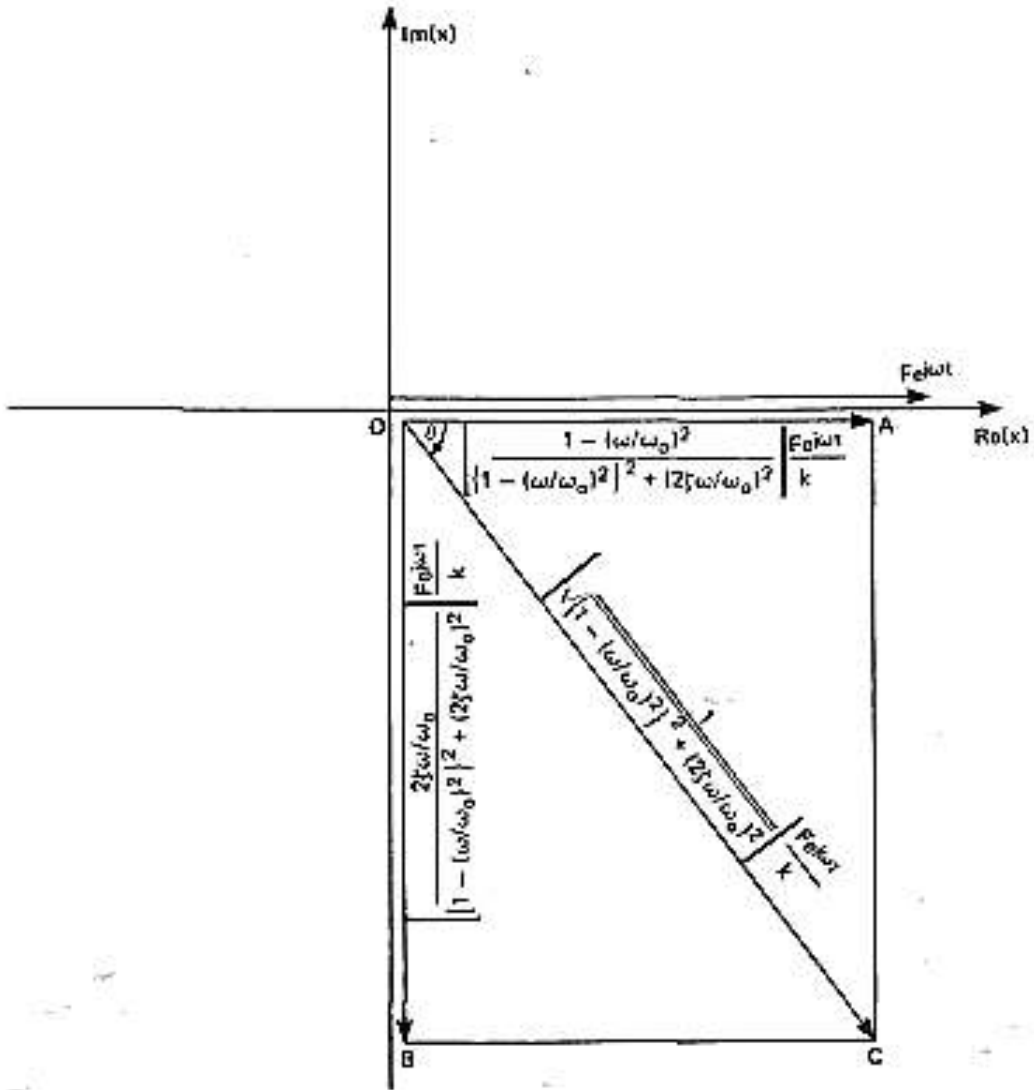


Рис.3. Вещественная и мнимая компоненты смещения по отношению к вектору силы

Поэтому для установившегося состояния решение уравнения (2) колебаний может быть записано в виде:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot \frac{F e^{j(\omega t - \theta)}}{k}. \quad (11)$$

Величина в квадратных скобках выражения (11) является модулем комплексной частотной характеристики  $|H(\omega)|$  (см. равенства 4 и 5). Она называется коэффициентом усиления и является безразмерным отношением между амплитудой смещения  $X$  и статическим смещением  $\frac{F}{k}$ .



### ЛЕКЦИЯ 3

#### АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ И ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ

На рис. 4,а) представлен модуль комплексной функции частотной характеристики в зависимости от безразмерного отношения частот  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений относительного демпфирования. Видно, что увеличение относительного демпфирования приводит к уменьшению амплитуд и смещению пиков влево от вертикальной линии, проходящей через  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ .

Пики соответствуют частотам, определенным из выражения:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (12)$$

а значение пика  $|H(\omega)|$  равно:  $|H(\omega)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ . (13)

Для слабого демпфирования ( $\xi < 0,05$ ) кривые почти симметричны относительно вертикальной линии, проходящей через точку  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ . Значение

пика  $|H(\omega)|$  находится в непосредственной близости от точки  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  и

равно:

$$|H(\omega)| \cong \frac{1}{2\xi} = Q, \quad (14)$$

где  $Q$  называется добротностью.

Для кривой с относительным демпфированием  $\xi = 0,1$ , например, точки  $P_1$  и  $P_2$ , для которых амплитуда  $|H(\omega)|$  уменьшается до значения  $\frac{Q}{\sqrt{2}}$  от пиковой величины, называются точками половинной мощности.

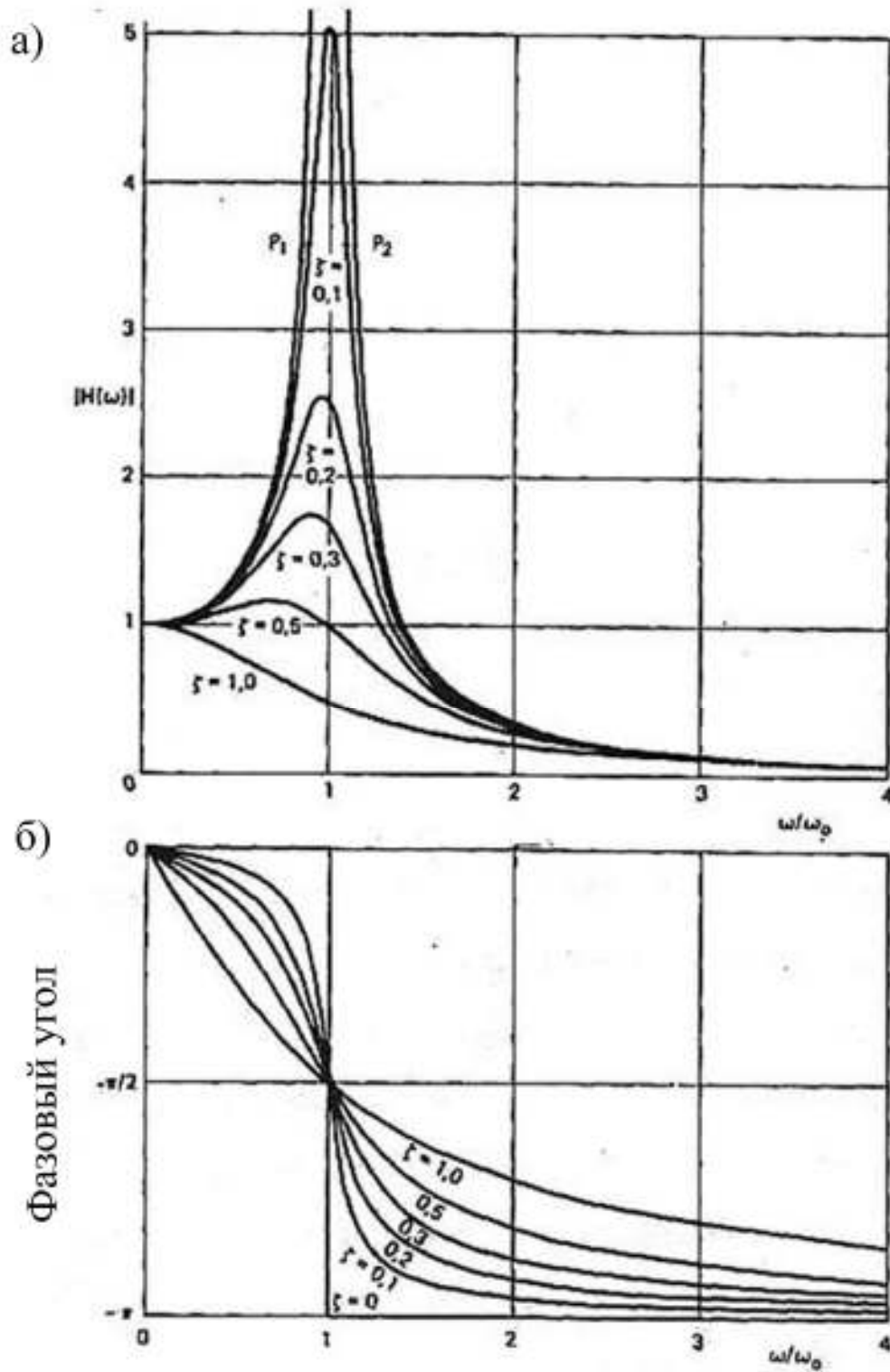


Рис.4. Модуль комплексной функции частотной характеристики:

а) коэффициент усиления  $|H(\omega)|$  в зависимости от безразмерного отношения частот  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений относительного демпфирования  $\xi$ ; б) отставание по фазе смещения по отношению к силе в зависимости от  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений  $\xi$

Если ордината отложена в логарифмическом масштабе, то  $P_1$  и  $P_2$  являются точками, амплитуды которых  $|H(\omega)|$  уменьшаются на 3 дБ и поэтому называются -3 дБ точками. Разница в частотах между точками  $P_1$  и  $P_2$  называется 3 дБ шириной полосы частот системы и для слабого демпфирования можно показать, что:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_0, \quad (15)$$

где  $\Delta\omega = 3$  дБ - ширина полосы частот,  $\omega_1$  - частота, соответствующая точке  $P_1$ ,  $\omega_2$  - частота, соответствующая точке  $P_2$ .

Из уравнений (14 и 15) получим:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = 2 \frac{c}{c_c} = \frac{1}{Q} = \eta, \quad (16)$$

где  $\eta$  - коэффициент потерь.

На рис.3,б представлены кривые фазового угла  $\theta$  в зависимости от отношения  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений  $\xi$ , построенных на основании выражения (10). Следует отметить, что все кривые проходят точку  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ , другими словами, независимо от величины демпфирования, фазовый угол между силой и смещением на собственной частоте колебаний без демпфирования  $\omega' = \omega_0$  равен  $90^\circ$ . Кроме того, фазовый угол стремится к нулю при  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$  и к  $180^\circ$  при  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ .

Для рассмотрения изменений синфазной компоненты  $\text{Re}(x)$  и компоненты в квадратуре  $\text{Im}(x)$  смещения уравнения (7 и 8) вычерчены на графике в зависимости от отношения  $\frac{\omega}{\omega_0}$  и представлены соответственно на рис.5,а) и рис.5,б).

Кривые вещественной компоненты смещения на рис.5а имеют нулевое

значение при  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  независимо от демпфирования и имеют пик и спад на частотах:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi} \\ \omega_2 &= \omega_0 \sqrt{1 + 2\xi} \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

соответственно.

С уменьшением демпфирования (значение  $\xi$  становится меньше) пик и спад возрастают по величине и приближаются друг к другу. В пределе, когда  $\xi=0$ , график имеет асимптоту при  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ . Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  часто используются

для определения демпфирования системы с помощью выражения:

$$\eta = 2\xi = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + 1}. \quad (18)$$

Кривые мнимой компоненты смещения имеют спад в непосредственной близости точки  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  и выглядят острее, чем кривые для  $|H(\omega)|$ , показанные на рис. 5,а) при соответствующих значениях  $\xi$ .

Если вещественную и мнимую компоненты, а также отношение частот вычертить на графике в системе трех взаимно перпендикулярных осей, получим трехмерную кривую, показанную на рис.6.

Штриховая линия представляет собой кривую при  $\xi=0$  и полностью лежит в плоскости  $\{\text{Re}(x), \omega\}$ . Кривые, показанные на рис. 5,а) и 5,б), в действительности являются проекциями кривых, подобных представленным на рис.6 в плоскости  $\{\text{Re}(x), \omega\}$  и  $\{\text{Im}(x), \omega\}$  соответственно. Третья проекция кривой на плоскость  $[\text{Re}(x), \text{Im}(x)]$  выглядит подобно кривым, показанным на рис.7.

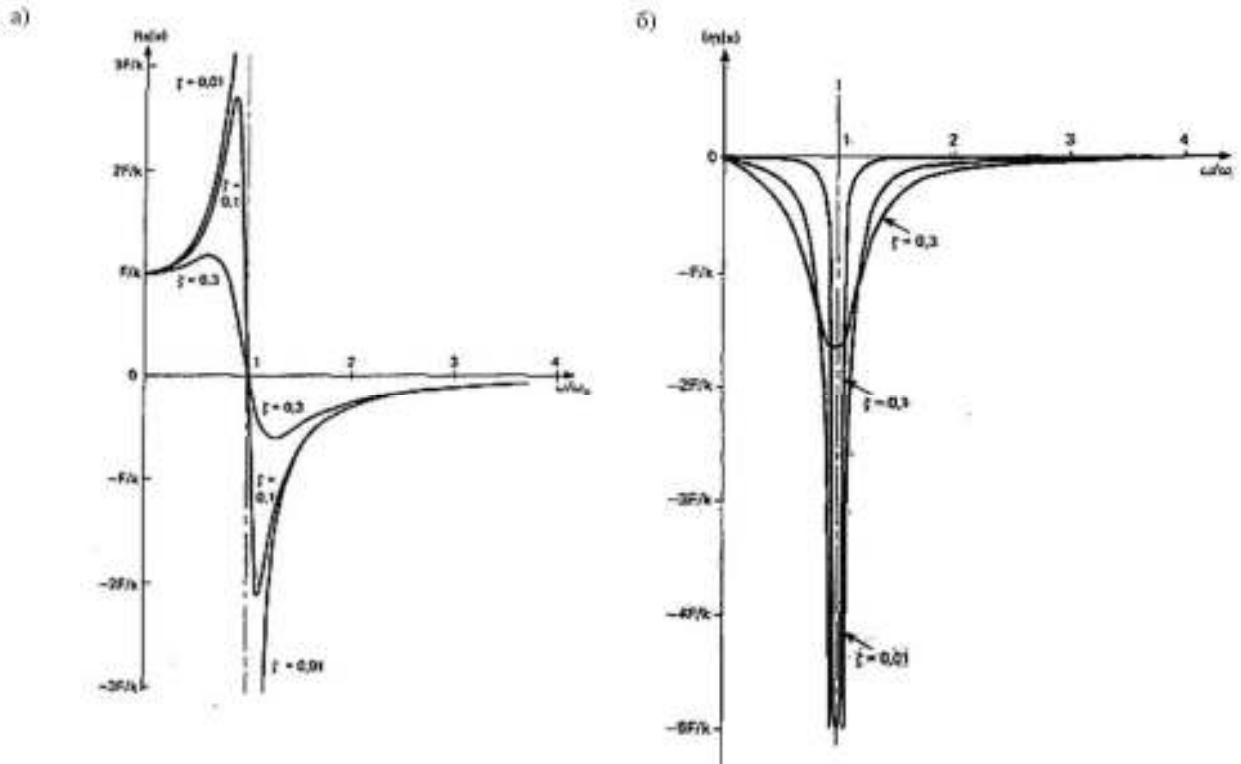


Рис.5. Кривые вещественной компоненты смещения: а) – вещественная компонента смещения в зависимости от безразмерного отношения частот  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений  $\xi$ ; б) – мнимая компонента смещения в зависимости от  $\frac{\omega}{\omega_0}$  от для различных значений  $\xi$

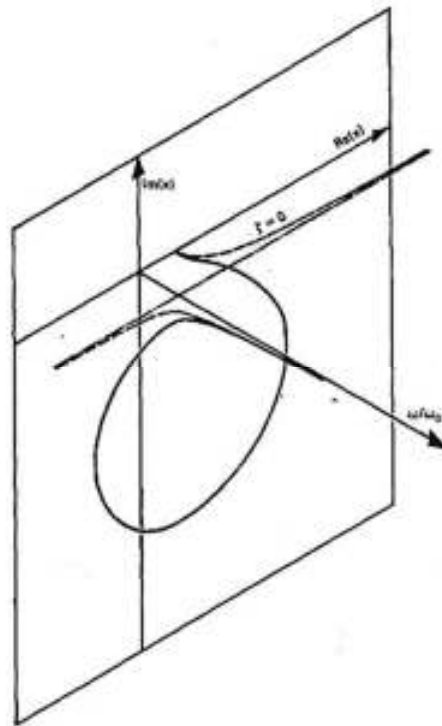


Рис.6. Трехмерный график вещественной и мнимой компонент смещения в зависимости от частоты

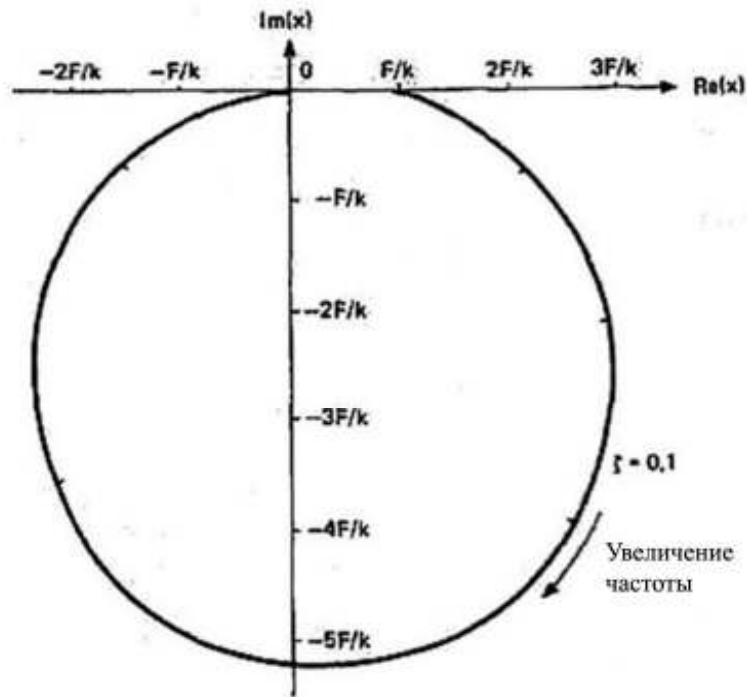


Рис.7. Амплитудная фазо-частотная характеристика

Правые части уравнений (7 и 8) вычерчены в осях X и Y на рис.6, соответственно, для различных значений отношения  $\frac{\omega}{\omega_0}$ . Представлены две кривые для  $\xi=0,1$  и  $\xi=0,3$ . Эти кривые также можно получить, вычерчивая общее смещение, определяемое выражением (9), от начала координат под углом  $\theta$  относительно  $\text{Re}(x)$ , определяемым выражением (10). Таким образом, кривая на рис.6 является годографом общего смещения для определенного значения  $\xi$  в зависимости от отношения частот  $\frac{\omega}{\omega_0}$ . Из рис.6 также видно, что, независимо от величины демпфирования на собственной частоте колебаний без демпфирования  $\frac{\omega}{\omega_0}=1$ , вещественная компонента равна нулю, иными словами, фазовый угол между силой и общим смещением составляет  $90^\circ$ .

## ЛЕКЦИЯ 4

### ГИСТЕРЕЗИСНОЕ (СТРУКТУРНОЕ) ДЕМПФИРОВАНИЕ

Демпфированием, позволяющим записать уравнение с линейным демпфированием и дающим достаточно хорошее приближение к процессам демпфирования на практике, является гистерезисное демпфирование (иногда называемое структурным). Большое количество материалов, находящихся под действием циклического нагружения (для деформаций ниже предела упругости), проявляют связь между напряжением и деформацией, характеризуемую петлей гистерезиса. Энергия, рассеиваемая за один цикл колебания вследствие внутреннего трения в материале, пропорциональна площади петли гистерезиса и поэтому процесс называется гистерезисным демпфированием. Установлено (20), что внутреннее трение не зависит от скорости деформирования (следовательно, и от частоты) и в достаточно большом диапазоне пропорционально смещению. Таким образом, демпфирующая сила пропорциональна упругой силе, но поскольку энергия рассеивается, то она должна быть в фазе со скоростью (в квадратуре со смещением).

Таким образом, для простого гармонического движения демпфирующая сила равна:

$$j\gamma kx = \gamma k \frac{\xi'}{\omega}, \quad (19)$$

где  $\gamma$  - называется коэффициентом структурного демпфирования. Уравнение движения системы с одной степенью свободы и гистерезисным демпфированием можно, следовательно, записать в виде:

$$mx'' + \frac{\gamma k}{\omega} x' + kx = Fe^{j\omega t} \quad (20)$$

или

$$mx'' + k(1 + j\gamma)x = Fe^{j\omega t}, \quad (21)$$

где  $k(1 + j\gamma)$  называется комплексной жесткостью.

Решение уравнения (21) для установившегося состояния представим в виде:

$$x = Xe^{j\omega t} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\gamma} \right] \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}, \quad (22)$$

соответствующем уравнению (4) для случая вязкого демпфирования. Умножая числитель и знаменатель в квадратных скобках на комплексное сопряженное знаменателю выражение, можно получить вещественную и мнимую компоненты смещения:

$$x = \left[ \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} - \frac{j\gamma}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}. \quad (23)$$

Следовательно:

$$\text{Re}(x) = \left[ \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}, \quad (24)$$

$$\text{Im}(x) = \left[ \frac{-j\gamma}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2} \right] \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}. \quad (25)$$

Общее смещение равно:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \gamma^2}} \right] \cdot \frac{Fe^{j\omega t}}{k}. \quad (26)$$



Смещение отстает от вектора силы на угол, равный:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\gamma}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]. \quad (27)$$

Выражение в квадратных скобках (26) (коэффициент усиления) и угол  $\theta$  вычерчены на графике в зависимости от отношения  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений  $\gamma$  на рис.8. Видно, что кривые на рис.8 подобны кривым на рис.4,а) и рис.4,б) для вязкого демпфирования, однако есть некоторые незначительные отличия. Для гистерезисного демпфирования, как видно из рис.8, максимальный отклик наблюдается точно для отношения  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ , независимо от демпфирования. Для очень низких значений  $\frac{\omega}{\omega_0}$  отклик для гистерезисного демпфирования зависит от величины  $\gamma$  и фазовый угол  $\theta$  (рис. 8) стремится к величине  $\operatorname{tg}^{-1} \gamma$ .

На рис.9 представлен комплексный график (векторный график, полярный график, квадратурный график, диаграмма Найквиста), полученный вычерчиванием правых частей выражений (24 и 25) в плоскости Арганда для значений  $\gamma=0,2$  и  $\gamma=0,6$ . Как видно, две кривые полностью симметричны относительно мнимой оси, исключая начало отсчета. Они являются аналогом диаграммы Найквиста, рассмотренной в лекции 3. При  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  вещественная компонента равна нулю, а мнимая компонента максимальна.

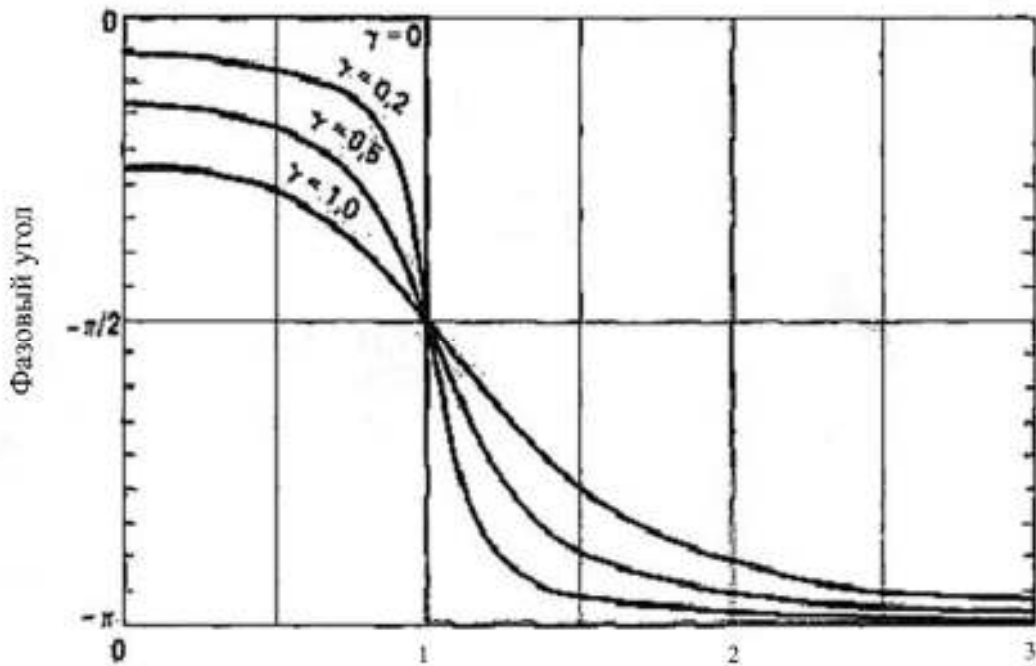


Рис.8. Коэффициент усиления в зависимости от  $\omega/\omega_0$  для различных значений коэффициента структурного демпфирования  $\xi$  с отставанием по фазе смещения от силы в зависимости от  $\omega/\omega_0$  для различных значений  $\gamma$

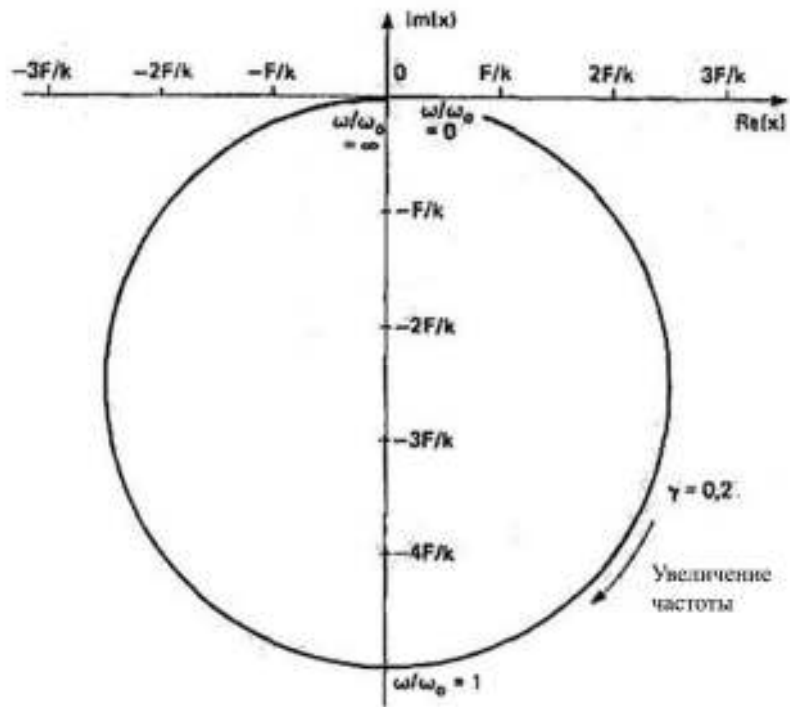


Рис. 9. Амплитудная фазо-частотная характеристика

## ЛЕКЦИЯ 5

### ВИБРОЗАЩИТНЫЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В предыдущих лекциях была рассмотрена виброзащитная система с одной степенью свободы, состоящая из одной массы, демпфера и упругого элемента. Реальные конструкции имеют много степеней свободы и их анализ осложняется большим числом решаемых уравнений. Для таких систем уравнений очень эффективным средством является матричный метод, при котором большие массивы уравнений записываются с помощью краткой системы обозначений. Для введения некоторых понятий, используемых в теории колебаний в матричной форме, воспользуемся системой с двумя степенями свободы, показанной на рис.10. Эти понятия составляют основу анализа и понимания динамического поведения больших систем.

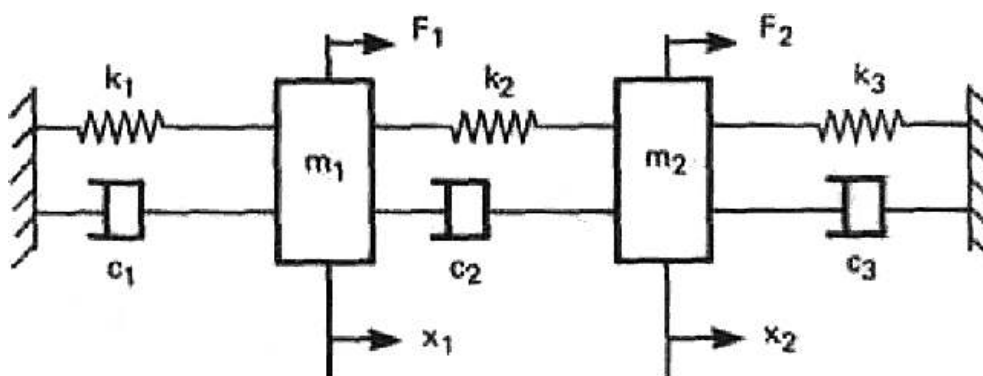


Рис.10. Система с двумя степенями свободы

Уравнения движения системы, показанной на рис.10, имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + (c_1 + c_2)x_1' - c_2 x_2' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F_1 \\ m_2 x_2'' - c_2 x_1' + (c_2 + c_3)x_2' - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (28)$$

которые можно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

Для определения собственных частот и собственных модальных форм колебаний системы вначале рассмотрим свободные колебания системы без демпфирования.

Уравнение, таким образом, преобразуется к виду:

$$[m]\{x''\} + [k]\{x\} = 0 \quad \text{где} \quad \begin{aligned} [m] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ [k] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Полагая для гармонического движения  $x_i'' = -\lambda_i x_i$ , где  $\lambda = \omega^2$ , уравнение (30) примет вид:

$$-\lambda[m]\{x\} + [k]\{x\} = 0 \quad \text{или} \quad [-\lambda[m] + [k]]\{u\} = 0, \quad \text{где} \quad \{u\} = \{x\}. \quad (31)$$

Умножая слева уравнение (31) на матрицу  $[m]^{-1}$  и производя перестановку, получим:

$$| [m]^{-1}[k] - \lambda[I] | \{u\} = 0, \quad (32)$$

где выражение  $[m]^{-1}[k]$  называется динамической матрицей, а  $[m]^{-1}[m] = [I]$  единичной матрицей.

Выражение (32) представляет собой систему однородных алгебраических уравнений по переменной  $u_i$ . Из теории управления известно, что для получения нетривиального решения  $\{u\} = 0$  определитель, составленный из коэффициентов уравнения (32), должен быть равен нулю.

Следовательно, получим уравнение:

$$| [m]^{-1}[k] - \lambda[I] | = 0, \quad (33)$$

которое называется характеристическим уравнением системы. Уравнение (33) после разложения определителя можно переписать в виде:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (34)$$

что является полиномом по  $\lambda$  для системы с  $n$ -степенями свободы. Корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения называются собственными значениями, а собственные частоты недемпфированных колебаний системы определяются из соотношения:

$$\lambda_i = \omega_i^2. \quad (35)$$

Подставляя  $\lambda_i$  в матричное уравнение (32), получим соответствующую собственную (или главную) форму мод колебаний  $\{u_i\}$ , которая также называется собственным вектором. Собственный вектор представляет собой схему деформации конструкции на соответствующей собственной частоте. Поскольку уравнение (32) однородное, то существует не единственное решение для собственного вектора, так как получить можно только их отношение. Таким образом, собственная модальная форма определяется отношением амплитуд движения в различных точках конструкции при возбуждении ее на собственных частотах. С другой стороны, действительная амплитуда зависит от начальных условий, а также положения и амплитуды возбуждающих сил.

## ЛЕКЦИЯ 6

### КОНЦЕПЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Оценку амплитуд дают спектры мощности сейсмометрической записи, на которых амплитуды колебаний на собственных частотах представлены отчетливыми максимумами. Зная коэффициенты усиления и характеристики сейсмометров, получаемые при их калибровке, величины амплитуд приводят к абсолютным уровням смещений, скоростей или ускорений. Установка горизонтальных сейсмометров параллельно осям здания позволяет четко разделить колебания вдоль и поперек здания при прямоугольном плане. Для высотного дома "Эдельвейс" (Москва) частоты основного тона в разных направлениях (по разным осям) составляют 0,59 и 0,78 Гц.

Регистрация ветровых пульсаций параллельно с сейсмометрической записью позволила увидеть наведённые колебания, приходящие на здания извне (рис. 2). Наиболее неприятными являются те, частоты которых близки или совпадают с собственными частотами здания — это приводит к резонансу или к ряду нелинейных явлений.

Специфические отличия высотных зданий от зданий малой и средней этажности обусловлены:

- низкой способностью высотных зданий (если они не оснащены особыми устройствами) к рассеянию энергии колебаний;
- опасностью хрупкого разрушения при землетрясении несущих конструкций нижних этажей, перегруженных вертикальными статическими нагрузками;
- меньшими, по сравнению со зданиями малой и средней этажности, резервами несущей способности.

Расчетные сейсмические нагрузки на высотные здания определяются в предположении упругой работы конструкций при проектных землетрясениях.

Максимальное ускорение основания при проектном землетрясении определяется как произведение максимального ускорения основания при редком сильном землетрясении, соответствующем сейсмичности площадки строительства, и коэффициента редукиции. Значения коэффициента редукиции назначаются с учетом конструктивных решений здания и находятся в пределах 0,2...0,3.

При определении расчетных сейсмических нагрузок спектральным методом применяется повышающий коэффициент КЗ, имеющий значения до 1,8..2,0 и комплексно учитывающий влияние высоты здания на степень его ответственности и на диссипативные свойства.

Расчетная модель сейсмических воздействий на здания принимается многокомпонентной и в обязательном порядке отображает горизонтальные и вертикальные поступательные колебания основания, а также его крутильные колебания. Предполагается, что несущие конструкции высотного здания должны перенести слабые и умеренные землетрясения без значимых повреждений. Разрыв между расчетными сейсмическими нагрузками и нагрузками, возможными при редких сильных землетрясениях, восполняется с помощью специальных конструктивных мероприятий и дополнительных расчетных проверок наиболее ответственных несущих элементов. Специальные конструктивные мероприятия направлены на создание в высотных конструктивных системах резервов прочности и способности к пластическому деформированию, а также на предотвращение чрезмерной деградации жесткости и прочности несущих элементов при пластическом деформировании. Максимальные перекосы этажей для предотвращения серьезных повреждений ненесущих элементов высотных зданий при землетрясениях ограничиваются величиной  $\Delta/h=1/200$  (где:  $\Delta$  – горизонтальный перекося этажа;  $h$  – высота этажа).

Высотное строительство часто осуществляется в сейсмически активных районах. Это порой приводит к противоречивым результатам влияния жесткости каркаса на поведение здания при ветровых и сейсмических нагрузках. Если для улучшения сопротивления ветровому напору и уменьшения амплитуды и частоты колебаний верха здания прибегают к увеличению жесткости несущего остова, то при сейсмических нагрузках такие здания не способны поглотить энергию толчков земной коры, что вызывает значительные перемещения и ускорения на верхних этажах. С уменьшением поперечной жесткости несущей системы наблюдается обратная картина – при более гибком скелете заметно ухудшаются комфортные условия на верхних этажах, испытывающих значительные колебания.

Для устранения указанных противоречий в особо высоких зданиях (до 300 м и более) на верхних этажах устраивают пассивные маятниковые демпферы. В частности, такой демпфер установлен в башне Taipei101. Он имеет вес около 800 т, подвешен с помощью тросов на 92м этаже и предназначен для гашения инерционных колебаний. В обычных условиях эксплуатации демпфер обеспечивает отклонение верха здания в пределах до 10 см, а при воздействиях катастрофического характера (тайфуны, землетрясения и т.п.) сам раскачивается с амплитудой до 150 см, гарантируя колебания здания в безопасных пределах.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На основе простейшей механической модели с двумя степенями свободы изучаются колебания высотного здания. Пусть фундамент здания подвержен ускорениям со стороны земли.

Вводятся следующие обозначения:

$\dot{X}(t)$  - вертикальное ускорение;

$\ddot{Y}(t)$  - горизонтальное ускорение (см. рис. 3);

$m$  - масса всего здания, сосредоточенная в центре тяжести;

$g$  - ускорение земного тяготения;



$l$  - вертикальная координата центра тяжести здания с учётом его осадки под собственным весом.

*Задача:* Построить математическую модель для определения резонансных режимов колебаний здания, представляющих опасность для целостности конструкции, а также здоровья людей.

### **Уравнения движения**

Решается вариационным методом Эйлера-Лагранжа.

Пусть:

$r$  - вертикальное отклонение конструкции;

$\varphi$  - угловое отклонение конструкции в горизонтальном направлении.

Соответственно:

$c_r$  - коэффициент упругости конструкции в вертикальном направлении;

$c_\varphi$  - моментный коэффициент упругости конструкции в горизонтальном направлении.

С учётом расчётной схемы (см. рис. 2.), выражение для потенциальной энергии таково:

$$П = \frac{1}{2} c_r (r - \Delta)^2 + \frac{1}{2} c_\varphi \varphi^2 + mg[(l + r)\cos\varphi - l],$$

где  $\Delta = mg/c_r$  - осадка здания под собственным весом, относительно центра масс здания  $l_0$  в отсутствие силы тяжести, т.е. условное положение центра тяжести здания есть величина  $l = l_0 - \Delta$ .

Кинетическая энергия такова:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (l + r)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вертикальные и горизонтальные отклонения считаются малыми. Эта малая мера характеризуется малым безразмерным параметром  $\mu$ . Далее вводятся новые отмасштабированные искомые переменные по формулам  $r = \mu \frac{r'}{l}$  и  $\varphi = \mu \varphi'$  (После подстановки этой замены в исходную систему уравнений, штрихи, обозначающие новые переменные опускаются).

При отбрасывании членов высшего порядка малости по  $\mu$ , уравнения движения примут вид, пригодный для изучения методом малого параметра [3]:

$$\dot{r} = \omega_1^{-2} r + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \varphi^2 + \mu \dot{\varphi}^2 + 2\mu \delta_1 \dot{r} + \ddot{\xi};$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_2^2 \varphi + \mu(\omega^2 + \omega_2^2) r \varphi - 2\mu \dot{\varphi} \dot{r} + 2\mu \delta_2 \dot{r} + \ddot{\eta}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\ddot{\xi} = \frac{1}{l} \ddot{X}(t)$  и  $\ddot{\eta} = \frac{1}{l} \ddot{Y}(t)$  -

отмасштабированные компоненты ускорения фундамента.  $\omega_1 = \sqrt{\frac{c_r}{m}}$  -

собственная частота вертикальных колебаний,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_\varphi}{ml^2}}$  - собственная частота

горизонтальных колебаний (в отсутствие опрокидывающего момента силы

тяжести, характеризуемого параметром  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ). Феноменологически в

уравнения (1) добавлены члены с постоянными положительными коэффициентами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , ответственные за конструкционную диссипацию энергии (согласно простейшей модели вязкого трения). Кроме того, эти уравнения уже записаны в нестационарной системе отсчёта  $\xi\eta$ , связанной с фундаментом конструкции, согласно выбранной расчетной схеме.

### ***Характерные частоты динамического процесса и необходимые условия возникновения явления резонанса***

Характерные собственные частоты процесса таковы:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_r}{m}}$  - собственная частота вертикальных колебаний здания

и

$\omega_2 = \sqrt{\frac{(c_\varphi - mgl)}{ml^2}}$  - собственная частота угловых колебаний здания в отсутствие трения.

Частоты вынужденных колебаний (ускорения  $\ddot{X}(t)$  и  $\ddot{Y}(t)$ ) представляются случайным набором Фурье-компонент на всевозможных частотах. Основная парадигма теории слабо нелинейных колебаний состоит в том, что резонанс возможен при необходимом выполнении условий фазового синхронизма, которые имеют вид:

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = \Delta(\mu),$$

где  $n_1$  и  $n_2$  - всевозможные целые числа, такие, что частотная расстройка  $\Delta$ , определённым образом зависящая от малого параметра задачи  $\mu$ , является достаточно малой величиной.

Дальнейшая часть работы отводится поиску резонансов и исследованию их режимов колебаний. Задача выполняется в два этапа. Вначале изучаются собственные нелинейные колебания системы, в отсутствие диссипации энергии и внешних воздействий. На втором этапе решается общая задача о вынужденных колебаниях, когда есть потери энергии на конструкционное трение и ускорения фундамента.

## ЛЕКЦИЯ 7

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Используется стандартный метод малого параметра для исследования резонансных колебаний системы (37). Решение уравнений (37) устанавливается в виде:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= A(\tau)\sin(\omega_1 t + \alpha(\tau)) + \mu r^{(1)}(t) + \mu^2 r^{(2)}(t) + \dots; \\
 v(t) &= \omega_1 A(\tau)\cos(\omega_1 t + \alpha(\tau)) + \mu \dot{r}^{(1)}(t) + \mu^2 \dot{r}^{(2)}(t) + \dots; \\
 \varphi(t) &= B(\tau)\sin(\omega_2 t + \beta(\tau)) + \mu \varphi^{(1)}(t) + \mu^2 \varphi^{(2)}(t) + \dots; \\
 \omega(t) &= \omega_2 B(\tau)\cos(\omega_2 t + \beta(\tau)) + \mu \dot{\varphi}^{(1)}(t) + \mu^2 \dot{\varphi}^{(2)}(t) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

где  $A$  и  $B$  – медленно меняющиеся амплитуды процесса (здесь  $\tau = \mu t$  – так называемое «медленное время»), а  $\alpha$  и  $\beta$  – соответствующие фазам колебаний медленные фазы. Коэффициенты степеней малого параметра  $\mu$  – суть нерезонансные члены разложения решения в ряд по малому параметру.

Форма подстановки (38) обусловлена тем, что для выявления резонансов систему (37) надо переписать в виде стандартной формы уравнений первого порядка [3]. При этом появляется дополнительная пара переменных, связанная между собой парой уравнений

$$\dot{r} = v \text{ и } \dot{\varphi} = \omega; \tag{38}$$

Затем порождающее решение, которое получается из представления (38), путем обнуления малого параметра, т.е.  $\mu = 0$ , подставляется в правую часть системы (37). Полученные уравнения усредняются по времени. Если временное среднее окажется не ноль либо испытывает скачки при сканировании значений собственных частот задачи, то в системе есть резонанс. Действительно, резонанс в системе (37) имеет место, и он ассоциируется с главным параметрическим резонансом. При этом условие фазового синхронизма таково:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2} + \mu\Delta. \tag{39}$$

В условие (39) введена малая частотная расстройка от резонанса.

После подстановки представления (38) в систему (37), с учётом соотношений (38) и (39), а затем проведения процедуры осреднения по быстровращающимся фазам получаются укороченные (эволюционные) уравнения движения для медленных амплитуд и фаз. Эти уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{16\omega} (\omega_1^2 - 2\omega^2) B^2 \cos \psi ; \\ \dot{B} &= -\frac{1}{8\omega_1} (3\omega_1^2 - 4\omega^2) A B \cos \psi ; \\ \dot{\psi} &= -2\Delta - \frac{1}{16\omega_1 A} [4(3\omega_1^2 - 4\omega^2) A^2 + (\omega_1^2 - 2\omega^2) B^2] \sin \psi , \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\psi = \alpha - 2\beta - 2\Delta\tau$  - обобщенная фаза процесса. Производные в левой части уравнений берутся по медленному времени  $\tau$ .

Уравнения (40) весьма просты по своей структуре. Более того – они допускают точное интегрирование в эллиптических функциях. Основные качественные выводы, предоставляемые решениями этих уравнений таковы.

- Высокочастотная мода колебаний, характеризуемая амплитудой горизонтальных колебаний  $A$ , неустойчива по отношению к малейшим возмущениям со стороны низкочастотной моды колебаний, характеризуемой амплитудой вертикальных колебаний  $B$ ;
- Низкочастотная мода колебаний, характеризуемая амплитудой вертикальных колебаний  $B$ , устойчива по отношению к возмущениям со стороны высокочастотной моды колебаний, характеризуемой амплитудой горизонтальных колебаний  $A$ .

## ЛЕКЦИЯ 8

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

#### Главные (нормальные) координаты

Уравнения движения системы с двумя степенями свободы, показанной на рис.10, без демпфирования можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F_1 \\ m_2 x_2'' - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (41)$$

или в матричной форме при помощи уравнения (29):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (42)$$

При решении предыдущих уравнений относительно реакции  $\{x\}$  для определенной системы возбуждающих сил, основным препятствием является связь между уравнениями, т.е. обе координаты  $x_1$  и  $x_2$  входят в каждое из уравнений (41). Если уравнение движения переписать в терминах удлинений каждой пружины, то матрица жесткости, а не матрица масс, станет диагональной. Такой вид связи называется инерционной или динамической (недиагональная матрица масс). Таким образом видно, что способ связи уравнений зависит от выбора координат. Если система уравнений может стать несвязанной и мы получаем диагональные матрицы масс и жесткости, то каждое уравнение будет подобно уравнению для системы с одной степенью свободы и может решаться независимо от другого. В действительности, процесс получения характеристики системы путем преобразования уравнений движения в независимую систему уравнений называется модальным анализом.

Таким образом, используя матрицу  $[\phi]$ , столбцами которой являются векторы модальных форм, получаем необходимое преобразование координат. Координаты  $x$  преобразуются в  $\eta$  с помощью выражения:

$$\{x\} = [\phi]\{\eta\}; \quad (43)$$

где

$$[\phi] = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\}_2 \\ \cdots \\ \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\}_n \end{array} \right]; \quad (44)$$

$[\phi]$  называется модальной матрицей, а вектор  $\{\eta\}$  - главными (нормальными) или модальными координатами.

Уравнение (42) можно записать в виде:

$$[m] \{x''\} + [k] \{x\} = \{F\}, \quad (45)$$

а подставляя выражение (43) в (44) получим,

$$[m] [\phi] \{\eta''\} + [k] [\phi] \{\eta\} = \{F\}; \quad (46)$$

Умножая слева уравнение (46) на транспоненту модальной матрицы  $[\phi]^T$ , получим:

$$[\phi]^T [m] [\phi] \{\eta''\} + [\phi]^T [k] [\phi] \{\eta\} = [\phi]^T \{F\}. \quad (47)$$

В выражении (48) матрица масс была умножена справа и слева на одну модальную форму и ее транспоненту, и получена в результате скалярная величина, тогда как в выражении (47) матрица масс умножается справа и слева на все модальные формы и их транспоненты. Таким образом, произведение представляет собой матрицу  $[\leftarrow M_{\rightarrow}]$ , у которой диагональные элементы являются некоторыми постоянными, а все внедиагональные элементы равны нулю, т.е.

$$[\phi]^T [m] [\phi] = [\leftarrow M_{\rightarrow}]; \quad (48)$$

$$[\phi]^T [k] [\phi] = [\leftarrow K_{\rightarrow}], \quad (49)$$

где  $[\leftarrow M_{\rightarrow}]$  и  $[\leftarrow K_{\rightarrow}]$  являются диагональными матрицами.

Отсюда уравнение (47) можно записать в виде:

$$[\leftarrow M_{\rightarrow}] \{\eta''\} + [\leftarrow K_{\rightarrow}] \{\eta\} = [\phi]^T \{F\}; \quad (50)$$

Уравнение (50) представляет собой  $n$  уравнений вида:

$$M_i \eta_i'' + K_i \eta_i = \{\phi_i\}^T \{F\} = F_i; \quad (51)$$

где  $\{\phi_i\}$   $i$ -ый столбец модальной матрицы, т.е.  $i$ -ая модальная форма.  $M_i$  и  $K_i$  являются  $i$ -ой модальной массой (обобщенной массой) и  $i$ -ой модальной жесткостью (обобщенной жесткостью), соответственно. Уравнение (51) является уравнением движения для системы с одной степенью свободы, показанной на рис.11.

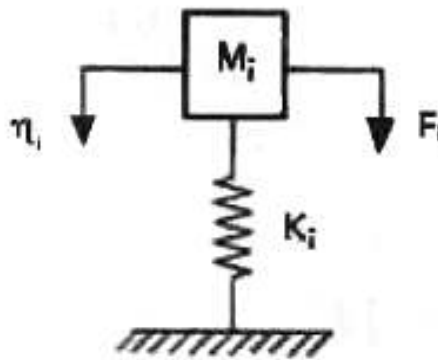


Рис.11. Система с одной степенью свободы

Из выражения  $K_i = \omega_i^2 M_i$ , уравнение (51) можно записать в виде:

$$\eta_i'' + \omega_i^2 \eta_i = \frac{F_i}{M_i} = \frac{\{\phi_i\}^T \{F\}}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\}}. \quad (52)$$

После того, как получено решение (временные характеристики) уравнения для всех значений  $\eta$ , решение для исходных координат  $x$  определяется обратным преобразованием, т.е. подстановкой выражения для  $\eta$  из уравнения  $\{x\} = [\phi]\{\eta\}$ . Однако следует заметить, что модальная матрица  $[\phi]$  может быть составлена из столбцов нормализованных модальных форм (для которых  $M_i = 1$ ). Такая матрица называется взвешенной модальной матрицей  $[\tilde{\phi}]$ . Если эта матрица используется вместо матрицы с собственными модальными формами, то уравнение (52) можно привести к виду:

$$\eta_i'' + \omega_i^2 \eta_i = F_i = \{\phi_i\}^T \{F\}. \quad (53)$$

Таким образом, модальная масса будет равна единице, а модальная жесткость – квадрату собственной частоты  $i$ -ой моды.



## ЛЕКЦИЯ 9

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Предположение об отсутствии затухания в немеханических системах является всего лишь гипотетическим, поскольку все конструкции имеют внутреннее демпфирование. Поскольку существует несколько видов демпфирования - вязкое, гистерезисное, кулоновское, аэродинамическое и пр., то в общем трудно установить вид демпфирования, характерный для данной конструкции. Практически конструкция может иметь характеристики демпфирования, получаемые в результате сочетания всех видов. Во многих случаях, однако, демпфирование мало и можно сделать определенные упрощающие предположения.

#### Вязкое демпфирование

Уравнения движения системы с двумя степенями свободы с демпфированием определяются выражением:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (54)$$

В краткой форме их можно записать в виде:

$$[m]\{x''\} + [c]\{x'\} + [k]\{x\} = \{F\}. \quad (55)$$

Прежде чем решать эти уравнения, сделаем два не требующих доказательства предположения. Во-первых, демпфирование является вязким и, во-вторых, распределение демпфирования - пропорциональное. Под пропорциональным демпфированием подразумевается то, что матрица демпфирования  $[c]$  пропорциональна или матрице жесткости, или матрице масс, или некоторой линейной комбинации этих двух матриц. Математически это означает, что:

$$\begin{aligned} [c] &= \alpha [m] \\ [c] &= \beta [k] \\ [c] &= \alpha [m] + \beta [k], \end{aligned} \quad (56)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные величины.

Вследствие предположения о пропорциональности демпфирования преобразование координат (использующее модальную матрицу для случая свободных колебаний без демпфирования), которое диагонализует матрицы масс и жесткости, будет также диагонализировать и матрицу демпфирования. Следовательно, связанные уравнения движения системы с пропорциональным демпфированием преобразуются в несколько уравнений, каждое из которых описывает колебания системы с одной степенью свободы, как показывается в дальнейшем.

Подставляя преобразование координат из выражения (43) в уравнение (55), получим:

$$[m] [\phi] \{\eta''\} + [c] [\phi] \{\eta'\} + [k] [\phi] \{\eta\} = [F]; \quad (57)$$

Умножая слева уравнение (57) на транспоненту модальной матрицы  $[\phi]^T$ , получим:

$$[\phi]^T [m] [\phi] \{\eta''\} + [\phi]^T [c] [\phi] \{\eta'\} + [\phi]^T [k] [\phi] \{\eta\} = [\phi]^T [F]. \quad (58)$$

Ранее было показано (см. равенства (48) и (49)), что вследствие свойств ортогональности модальных форм, матрицы масс и жесткости приводятся к диагональному виду, т.е.:

$$[\phi]^T [m] [\phi] = [{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}]$$

$$[\phi]^T [k] [\phi] = [{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}].$$

Вследствие пропорциональности демпфирования  $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$  имеем:

$$[\phi]^T [c] [\phi] = [\phi]^T [\alpha[m] + \beta[k]] [\phi] = \alpha [\phi]^T [m] [\phi] + \beta [\phi]^T [k] [\phi]$$

$$[\phi]^T [c] [\phi] = \alpha [{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}] + \beta [{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}] = [{}^{\leftarrow}C_{\rightarrow}],$$

где  $[{}^{\leftarrow}C_{\rightarrow}]$  - диагональная матрица.

Таким образом, подстановка в уравнение (58) дает:

$$[{}^{\leftarrow}M_{\rightarrow}] \{\eta''\} + [{}^{\leftarrow}C_{\rightarrow}] \{\eta'\} + [{}^{\leftarrow}K_{\rightarrow}] \{\eta\} = [\phi]^T [F]. \quad (59)$$

Выражение (59) представляет собой несвязанную систему уравнений для системы с одной степенью свободы с демпфированием,  $i$ -тое уравнение которой имеет вид:

$$M_i \eta_i'' + C_i \eta_i' + K_i \eta_i = \{\phi_i\}^T \{F\} = F_i \quad (60)$$

и представляет собой уравнения системы, показанной на рис.12.

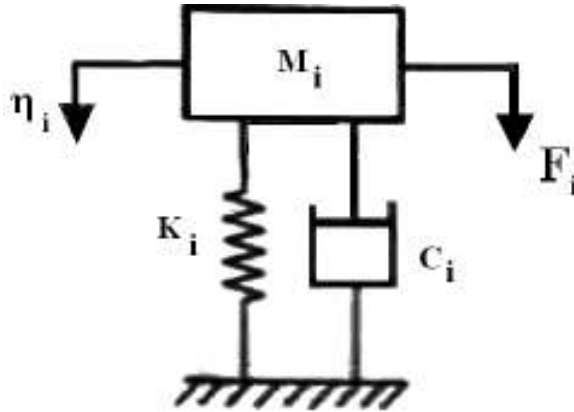


Рис.12. Система с одной степенью свободы, описываемая уравнением (60)

Поскольку  $K_i = \omega_i^2 M_i$ , то уравнение (60) можно записать в виде:

$$\eta_i'' + 2\xi_i \omega_i \eta_i' + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\{\phi_i\}^T \{F\}}{M_i} = \frac{F_i}{M_i}, \quad (61)$$

где

$$\xi_i = \frac{C_i}{2\sqrt{K_i M_i}}. \quad (62)$$

Решение для системы с одной степенью свободы с демпфированием, описываемой уравнением (61), ранее уже обсуждалось. После того, как получено решение для всех значений  $\eta$ , можно найти решения уравнения в исходной системе координат с помощью обратного преобразования, т.е. подстановкой выражения для  $\eta$  из равенства (43).

Следует отметить, что если матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости, т.е.  $[c] \propto [k]$ , то из уравнения видно, что:

$$\xi_i \propto \frac{K_i}{\sqrt{K_i M_i}} \propto \omega_i.$$

Это означает, что более высокочастотные моды колебаний будут иметь более высокое относительное демпфирование.

## Гистерезисное демпфирование

Гистерезисное или структурное демпфирование было рассмотрено для системы с одной степенью свободы. Показано, что демпфирующая сила в этом случае пропорциональна упругой силе, но поскольку энергия рассеивается, сила находится в фазе со скоростью. Для систем со многими степенями свободы уравнения движения при гистерезисном демпфировании можно записать в виде:

$$[m]\{x''\} + j\gamma[k]\{x\} + [k]\{x\} = \{F\}. \quad (63)$$

Переход к главным координатам, как показано в предыдущем разделе, приводит к выражению:

$$[\leftarrow M_{\rightarrow}]\{\eta''\} + (1 + j\gamma)[\leftarrow K_{\rightarrow}]\{\eta\} = [\phi]^T [F]. \quad (64)$$

Следовательно, каждое уравнение имеет вид:

$$M_i \eta_i'' + (1 + j\gamma)K\eta = [\phi_i]^T [F]$$

$$\eta_i'' + (1 + j\gamma)K\eta = \frac{[\phi_i]^T [F]}{M_i}. \quad (65)$$

Если  $\{F\} = \{\bar{F}\}e^{j\omega t}$ , то  $\{\eta\} = \{\bar{\eta}\}e^{j\omega t}$ .

Подставляя эти выражения в уравнение (65), получим уравнение:

$$-\omega_i^2 \bar{\eta}_i + (1 + j\gamma)\omega_i^2 \bar{\eta}_i = \frac{[\phi_i]^T [\bar{F}]}{M_i} = \frac{\bar{F}_i}{M_i}, \quad (66)$$

решение которого было рассмотрено ранее.

## Непропорциональное демпфирование.

### Метод состояния пространства

Если матрица демпфирования не пропорциональна матрице масс или матрице жесткости, то ни модальная матрица, ни взвешенная матрица не будут диагонализировать матрицу демпфирования. В этом общем случае демпфирования связанные уравнения движения следует решать одновременно, или их необходимо привести к несвязанному виду с помощью метода состояния пространства, который описывается здесь кратко.

По существу при помощи этого метода система из  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка преобразуется в эквивалентную систему, состоящую из  $2n$  уравнений первого порядка, введением новых переменных (называемых переменными состояния) для каждой из исходных переменных и их производных.

Для описания этого метода запишем уравнения движения системы с двумя степенями свободы в виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

или в виде расчлененной матрицы:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$$

Подставляя:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 & x_1' &= z_1' = z_3 & x_1'' &= z_3' \\ x_2 &= z_2 & x_2' &= z_2' = z_4 & x_2'' &= z_4' \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3' \\ z_4' \\ z_1' \\ z_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}; \quad (68)$$

или, в сокращенном виде:

$$[A]\{z'\} + [B]\{z\} = \{Q\}, \quad (69)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \quad Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}.$$

Видно, что, если порядок уравнений снизился со второго до первого, то число уравнений удвоилось и, следовательно, увеличились затраты, связанные с вычислениями. Решение предыдущих уравнений для свободных колебаний показывает, что существуют демпфированные собственные моды, однако они не тождественны недемпфированным собственным модам. Для недемпфированных собственных мод различные части конструкции движутся или в фазе, или в противофазе друг относительно друга. Что касается конструкций, имеющих непропорциональное демпфирование, то существуют разные фазовые углы для различных частей конструкции, что приводит к появлению комплексных модальных форм. Это различие проявляется в том, что для недемпфированных собственных мод все точки конструкции проходят через положения равновесия одновременно, чего не происходит в случае комплексных мод. Следовательно, недемпфированные собственные моды имеют хорошо определяемые узловые точки или линии и проявляются в виде стоячей волны, тогда как для комплексных мод угловые линии непостоянны.

## РАЗДЕЛ 2

### ЛЕКЦИЯ 10

#### ВОЛНОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Знание особенностей распространения потоков вибраций по элементам строительной конструкции позволяет предложить ряд новых методов и средств снижения вибрации и шумов. Суть этих методов заключается в том, чтобы потоки вибраций внутри конструкции нигде не отражались, а уходили в фундамент или поглощались в специальных демпфирующих устройствах.

Выполнение условий согласования позволит создать конструкцию, в которой не будет резонансов; достигается минимальный уровень вибраций в каждом узле, вследствие чего снижается уровень шумов; снижается износ и старение, увеличивается ресурс.

#### **Безотражательный гаситель изгибных колебаний балки**

В строительных конструкциях наиболее важным элементом является сопряжение балок с опорами. В тех случаях, когда на балке установлен какой-либо энергетический объект, например электродвигатель, возбуждающий при работе изгибные колебания балки, возникает задача демпфировать эти колебания на границе. Рассмотрим балку Бернулли, на конце которой установлен гаситель колебаний, включающий в себя диссипативные, а также упругие и инерционные элементы, учитывающие поперечное смещение и поворот концевого сечения.

Изгибные колебания балки описываются уравнением:

$$\rho F U_{tt} + E J U_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющим следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} -E J U_{xxx} + m U_{tt} + C_1 U + \alpha U_t \Big|_{x=0}, \\ E J U_{xx} + J_0 U_{xtt} + C_2 U_x + \beta U_{xt} \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $U(x,t)$  – прогиб балки,  $x,t$  – продольная координата и время,  $\rho, E$  – плотность материала балки и модуль Юнга,  $F, J$  – площадь и момент

инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний,  $m$  – масса гасителя,  $J_0$  – его момент инерции,  $C_1, C_2$  – коэффициенты жесткости упругих элементов на смещение и поворот, соответственно,  $\alpha, \beta$  – коэффициенты вязких потерь при поперечном смещении и повороте балки.

Будем считать что источник вибрации находится в окрестности центра тяжести балки и создает при работе периодический сигнал заданной частоты  $\omega$  в стационарном режиме.

Решение уравнения 1 может быть представлено в виде суперпозиции двух бегущих волн и двух экспоненциально спадающих осцилляций:

$$U(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t + kx)} + B_1 e^{i\omega t - kx} + B_2 e^{i\omega t + kx}, \quad (3)$$

где  $A_1, A_2$  – амплитуды падающей и отраженной от гасителя бегущих волн;  $B_1, B_2$  – амплитуды осцилляций,  $\omega, k$  – круговая частота и волновое число.

Входящие в решение 3 частота возмущения и волновое число удовлетворяют дисперсионному уравнению:

$$k = (\rho F / EJ)^{1/4} \omega^{1/2}. \quad (4)$$

Так как прогибы балки должны быть ограничены, в решении (3) необходимо положить  $B_1 = 0$ . Подставляя (3) в краевые условия (2), находим коэффициент отражения волны ( $A_2 / A_1$ ) и относительную амплитуду осцилляции ( $B_2 / A_1$ ) на границе балки при  $X = 0$ .

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2}, \quad \frac{B_2}{A_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 + \Phi_2},$$

где

$$\Phi = -2\gamma\alpha_0 + \alpha\beta - \gamma\delta + \alpha_0\beta_0 + i(\alpha\gamma + \delta\beta + 2\beta\alpha_0),$$

$$\Phi_2 = 2\alpha\beta_0 - 2\gamma - \delta\beta + i(\alpha\beta - \delta\gamma + 2\delta\beta_0 + \alpha_0\beta_0),$$

$$\Phi_3 = 2\alpha_0\beta_0 - 2\alpha\beta + 2\gamma\delta - 2i(\beta\delta + \alpha\gamma),$$

$$\gamma = J_0\omega - c_2 / \omega; \delta = m\omega - c_1 / \omega;$$

$$\alpha_0 = EJk^3 / \omega; \beta_0 = EJk / \omega.$$



Будем считать гаситель оптимальным при условии, что вся энергия падающей волны им поглощается. Следовательно, отраженная волна и осцилляции отсутствуют. Тогда:

$$\frac{A_2}{A_1} = 0, \frac{B_2}{A_1} = 0. \quad (5)$$

Условия оптимальности выполняются, если параметры гасителя удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma + \beta\delta &= 0, \alpha\beta - \gamma\delta = \alpha_0\beta_0, \\ \alpha + \gamma k^2 &= \alpha_0, \beta k^2 - \delta = \alpha_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (6) совместна при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = \rho F (EJ / \rho F)^{1/4} \omega^{1/2}; \quad \beta = \beta_0 = EJ (\rho F / EJ)^{1/4} \omega^{-1/2}, \\ m = c_1 &= 0, (\text{либо } \{m / c = \omega^2\}); \quad J_0 = C_2 = 0, (\text{либо } \{J_0 / c_2 = \omega^2\}). \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, отраженная волна и приграничная осцилляция отсутствуют либо в резонансном случае, либо в случае идеального демпфера, или безинерционного гасителя, не обладающего упругими свойствами.

## ЛЕКЦИЯ 11

### УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫЕ ГАСИТЕЛИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Гашение колебаний строительных конструкций с помощью одного только демпфирующего элемента невозможно реализовать на практике. Поэтому необходимо решить задачу отыскания гасителей, обладающих инерционными и упругими элементами, и в то же время осуществляющих гашение колебаний, близкое к оптимальному.

Экспоненциально спадающая осцилляция  $B_2 e^{i\omega t + kx}$ , входящая в решение (3), описывает динамический краевой эффект в пограничной зоне гасителя, ее вклад в решение незначителен по сравнению со смещением, создаваемым бегущими волнами вне этой области. Ширина области динамического краевого эффекта  $L$  определяется расстоянием, на котором амплитуда осцилляции уменьшается в  $e$  раз, и не превышает длины волны ( $L \leq k^{-1}$ ). Поэтому гаситель будет близок к оптимальному, если он обеспечивает отсутствие отраженной волны ( $A_2 / A_1 = 0$ ), хотя и не уничтожает спадающей осцилляции ( $B_2 / A_1 \neq 0$ ).

Коэффициент отражения волны  $A_2 / A_1$  обращается в нуль, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} -2\gamma\alpha_0 + \alpha\beta - \gamma\delta + \alpha_0\beta_0 - 2\alpha\beta_0 + \alpha\gamma + \delta\beta &= 0 \\ \alpha\gamma + \delta\beta + 2\beta\alpha_0 - \alpha_0\beta_0 - 2\delta\beta_0 - \alpha\beta + \gamma\delta &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, задача сводится к исследованию системы двух уравнений (8) для определения шести параметров гасителя  $m, J_0, c_1, c_2, \alpha, \beta$  при заданной частоте вибрации  $\omega$  и заданных параметрах балки.

В случае упруго-инерционного гасителя поперечных колебаний балки ( $\beta = c_2 = 0$ ), при условии выбора свободных параметров массы  $m$  и момента инерции гасителя  $J_0$ , коэффициент вязких потерь  $\alpha$  и жесткость  $c_1$  определяются соотношениями:  $\alpha = \alpha_0(I - \beta_0)^2 / Z$ ,  $c_1 = M + \alpha_0(I^2 - I\beta_0 + \beta_0^2) / Z$ ,

$Z = I^2 - 2I\beta_0 + 2\beta_0^2$ , где введены обозначения:  $I = J_0\omega$ ;  $M = m\omega$ ;  $c_1 = \frac{c_1}{\omega}$ ;  $c_2 = \frac{c_2}{\omega}$ .

В случае инерционного гасителя колебаний балки ( $c_1 = c_2 = 0$ ) значения коэффициентов вязких потерь  $\alpha, \beta$  определяются из решения квадратных уравнений:

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 + M^2 + \alpha_0(M + \alpha_0)(\beta_0 - 2I)/(\beta_0 - I) = 0,$$

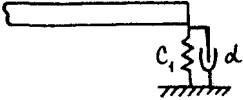
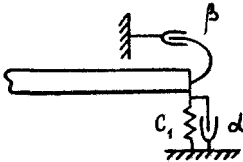
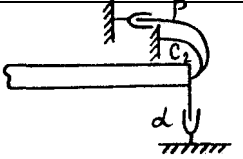
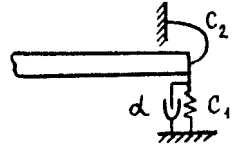
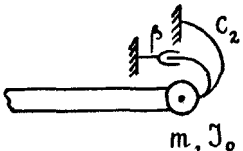
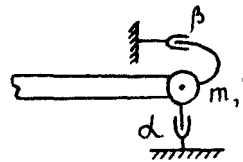
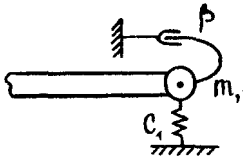
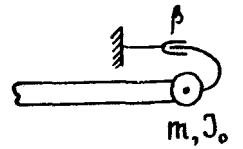
$$\beta^2 - 2\beta\beta_0 + I^2 - \beta_0(I - \beta_0)(2M + \alpha_0)/(M + \alpha_0) = 0.$$

Величина момента инерции гасителя соответствует неравенству

$$I \geq M\beta_0/(M + \alpha_0), \text{ при } I \neq \beta_0.$$

Параметры других возможных разновидностей гасителей представлены в таблице.

### Параметры квазиоптимальных гасителей изгибных колебаний балки

Схема закрепления	Параметры гасителя
	$\alpha = C_1 = \alpha_0/2$
	$\alpha = \alpha_0(\beta^2 - \beta_0\beta + \beta_0^2) / X$ $C_1 = (\beta - \beta_0)^2 / X$
	$C_2 = 0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0$
	$C_1 = \alpha_0(C_2^2 + \beta_0 C_2 + \beta_0^2) / Y$ $\alpha = \alpha_0(C_2 + \beta_0)^2 / Y$
	$\beta = \beta_0(M + \alpha_0)^2 / N$ $C_2 = I - (M\beta + \alpha_0\beta_0) / (M + 2\alpha_0)$
	$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + M^2 + \alpha_0(M + \alpha_0)(\beta_0 - 2I) / (\beta_0 - I) = 0$ $\beta^2 - 2\beta_0\beta + I^2 - \beta_0(I - \beta_0)(2M + \alpha_0) / (\alpha_0 + M) = 0$ $I \geq M\beta_0 / (M + \alpha_0), \quad I \neq \beta_0$
	$\beta^2 - \beta_0\beta + (I - \beta_0)^2 = 0$ $C_1 = M - \alpha_0(2I - \beta_0) / (\beta_0 - I)$ $\beta_0/2 \leq I \leq 3\beta_0/2, \quad I \neq \beta_0$
	$\beta = \beta_0(M + \alpha_0)^2 / N$ $I = \beta_0[(M + \alpha_0)^3 - \alpha_0^3] / N$

Примечание. В таблице приняты обозначения:

$$I = J_0 w, \quad M = m w, \quad C_1 = c_1 / w, \quad C_2 = c_2 / w,$$

$$X = \beta^2 - 2\beta_0\beta + 2\beta_0^2, \quad Y = C_2^2 + 2\beta_0 C_2 + 2\beta_0^2,$$

$$Z = I^2 - 2I\beta_0 + 2\beta_0^2, \quad N = M^2 + 2\alpha_0 M + 2\alpha_0^2$$

## ЛЕКЦИЯ 12

### СНИЖЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДОВ

При рассмотрении процессов, вызывающих колебания трубопроводов следует обратить внимание на неоднородность самого тракта, по которому транспортируется продукт. Источник вибрации – чаще всего компрессор, создающий рабочее давление – генерирует, кроме изгибных волн, распространяющихся от источника по трубопроводу, которые легко обнаруживаются, дополнительные продольные волны, трансформирующиеся позднее в изгибные. Трансформатором обычно является какая-либо структурная неоднородность – изгиб, изменение сечения, поворот, напряженное состояние, обусловленное внешними условиями и т.д. Подобно тому, как это делается в радиотехнике для согласования потоков волновой энергии, в трубопроводах можно предусмотреть подстроечные элементы, с помощью которых можно в наибольшей степени снизить вредное воздействие отраженных от неоднородностей изгибных и продольных волн. Назначение этих элементов – настройка системы на безотражательное прохождение по ней потоков вибраций – достижение минимальных уровней виброактивности. Для трубопроводов на поверхности земли или на эстакадах этого можно достигнуть путем установки подстроечных элементов в виде дополнительных масс, свободно перемещающихся по объекту. Изменяя положение масс, можно производить подстройку параметров динамической системы в зависимости от частоты возмущений и согласовывать потоки вибраций.

Систему источник-трубопровод-нагрузка можно представить в виде полубесконечного стержня, соединенного на конце с массой, пружиной и демпфером, характеризующими упруго-инерционные и диссипативные свойства нагрузки (см. рис.4.). На стержне размещены две сосредоточенные массы, которые можно перемещать вдоль него и фиксировать в любом положении.

Продольные колебания отрезка трубопровода можно описать уравнением

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющим краевому условию при  $X = 0$ :

$$EFU_x - mU_{tt} - \alpha U_t - \chi U|_{x=0} = 0 \quad (10)$$

и условиям сопряжения смещений и продольных напряжений в местах закрепления дополнительных масс:

$$EFU_x|_{x=l^+} - EFU_x|_{x=l^-} = m_1(U_l^0)_{tt} \quad (11)$$

$$EFU_x|_{x=(l+L)^+} - EFU_x|_{x=(l+L)^-} = m_2(U^{0(l+L)})_{tt} \quad (12)$$

$$U|_{x=l^+} = U|_{x=l^-} = U_l^0 \quad (13)$$

$$U|_{x=(l+L)^+} = U|_{x=(l+L)^-} = U_{l+L}^0. \quad (14)$$

Здесь  $U(x, t)$  – продольное смещение отрезка трубопровода,  $x, t$  – координата и время,  $c$  – скорость распространения продольных волн в заполненном трубопроводе,  $E$  – модуль Юнга,  $F$  – площадь поперечного сечения трубопровода,  $m, \chi, \alpha$  – масса, жесткость и коэффициент вязких потерь присоединенного к трубопроводу объекта,  $m_{1,2}$  – массы подстроечных элементов,  $U_l^0, U_{l+L}^0$  – смещение фрагмента трубопровода в сечениях  $x = l$  и  $x = l + L$  в местах установки подстроечных элементов.

На каждом участке трубопровода ( $0 \leq x \leq l, l \leq x \leq l + L, x \geq l + L$ ) решение уравнения (9) может быть представлено в виде суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу волн.

## ЛЕКЦИЯ 13

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ И ДИССИПАЦИИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД – ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ВИБРОЗАЩИТЫ

#### **Необходимость борьбы с вибрацией транспорта и сооружений**

Уровень шума и вибрации современного автомобиля стал одним из главных показателей его качества и степени совершенства конструкции. Причинами возникновения вибрации и шума является инерционные и газовые силы в двигателе. Поскольку от этих сил в полной мере избавиться не удастся, даже используя дополнительные валы с дисбалансами, гасящими первоначальные силы, то виброизоляция силового агрегата от корпуса автомобиля приобретает первостепенное значение. Она заключается в установке между виброактивным и виброизолируемым объектами упругоинерционных элементов, настроенных на определенные частоты. С конструктивно-компоновочной точки зрения эту проблему удалось решить в гидроопорах. Основные конструкции гидроопор обычно содержат не менее двух камер, рабочую и компенсационные, заполненные рабочей жидкостью. Упругие свойства гидроопоры формируются в основном, за счет эластичной обечайки, к которой добавляется гидравлическая система. При этом жидкость выступает в качестве масс-инерционной и диссипативной компоненты гидроопоры. Впервые гидроопоры начали успешно применяться в автомобилестроении в Германии в начале 80-х годов. Затем они нашли широкое применение в автомобильной и авиационной промышленности США и Японии. Общее количество патентов на гидроопоры лишь в США с 1985 по 1995 годы, превышает 1000.

Создание скоростных транспортных средств неизбежно сопровождается увеличением интенсивности вибрации и расширением ее частотного спектра, сопровождаемых шумовым загрязнением окружающей среды, вредным воздействием шума и вибрации на здоровье людей, выходом из строя элементов конструкций из-за усталостных повреждений, снижением надежности работы, отказами техники и аппаратуры.

При высоком уровне технического развития вибрация и шум являются одним из основных показателей, характеризующих качество, комфортабельность, надежность и конкурентоспособность транспортных средств, в связи с чем снижение вибрации и шума относится к важнейшим научно-техническим проблемам машиностроения, которые сводятся к устранению или максимальному снижению уровней вибраций и шума посредством применения эффективных виброизоляторов.

Решение проблемы снижения структурного шума усложняется тем, что в мобильной технике широкое распространение имеют двигатели внутреннего сгорания с неполностью уравновешенными силами инерции движущихся масс кривошипно-шатунного механизма и с повышенной неравномерностью крутящего момента.

### **Пассивные системы виброизоляции с использованием инерционных элементов и устройств с преобразованием движения**

Если подойти к проблеме пассивной виброизоляции с общих позиций теории цепей и сравнить ее с теорией электрических фильтров, можно обнаружить ряд различий и отсутствие полной аналогии в построении виброизолирующих устройств и систем электрических фильтров. Особенно это касается проблем узкополосной виброизоляции для созданий «фильтров – пробок», широко используемых в электрических цепях.

С одной стороны механические системы являются динамически более богатыми из-за свойств, присущих механическим системам в трехмерном пространстве, в отличии от электрических цепей, которые одномерны по своей физической природе. Но существуют свойства, которые проявляются в электрических цепях, и неочевидны возможности реализации подобных структур в механических цепях.

Если следовать второй аналогии: «напряжение – скорость» и «ток – сила», топология соответствующих по структуре механической и электрической цепи одинакова. Масса соответствует емкости, пружина (жесткость) – величине обратной индуктивности, а демпфирование – величине проводимости, обратной электрическому сопротивлению.



Основной закон классической механики – второй закон Ньютона:

$F = m \cdot \ddot{x}$  - сила равна массе, умноженной на ускорение.

Ускорение измеряется в инерциальной системе координат, относительно земли, так как мы определяем абсолютное ускорение относительно базы. Таким образом, если в соответствии с методом механического импеданса, мы изобразим обычную одномерную механическую систему (неявно используя электрическую аналогию), то все массы будут находиться в параллельных ветвях и замыкаться одним условным контактом (называемым недоступным) на нулевую шину – землю, в то время, как пружины и демпферы, образуют свои силы, как на абсолютных, так и на относительных перемещениях и скоростях, т.е. могут перемещаться как в последовательной, так и параллельной ветвях цепи. Поэтому создание «фильтра-пробки» в последовательной ветви электрической цепи с помощью параллельных индуктивности и емкости в механической цепи казалось бы невозможно за счет того, что нельзя в последовательной ветви механической цепи разместить параллельные пружину и массу, так как масса не может создать силу на относительном ускорении. Однако это становится возможным, исходя из механики Лагранжа, где описывается динамика связанных механических систем и возможно дополнительное действие присоединенных инерционных элементов, используя которые мы создадим инерционные силы на относительном ускорении в направлении виброизоляции с помощью преобразования движения этих элементов.

Обобщенная базовая схема линейно однонаправленной системы с одной степенью свободы представлена на рис. 13.

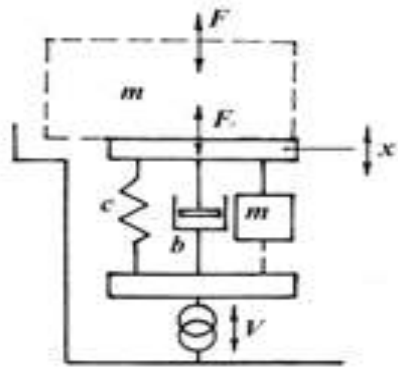


Рис. 13. Базовая схема линейно однонаправленной системы с одной степенью свободы

Виброизолятор, установленный на основании (сплошные линии), содержит, наряду с обычно применяемыми пружиной и демпфером, дополнительный элемент – инерционный трансформатор с приведенной массой  $m_{um}$ , который создает силу:  $F_1 = m_{um}(\ddot{x} - \dot{V})$ .

Динамическая жесткость такого виброизолятора:

$$D(j\omega) = \frac{F_1}{x - V}(j\omega) = -\omega^2 m_{um} + j\omega b + c, \quad (15)$$

в отличие от обычного виброизолятора, у которого  $m_{um} = 0$ . Здесь  $\omega$  – круговая частота,  $j$  – мнимая единица.

Величина модуля динамической жесткости представлена на рис. 14. В точке  $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m_{um}}}$  имеет место резонанс этой системы.

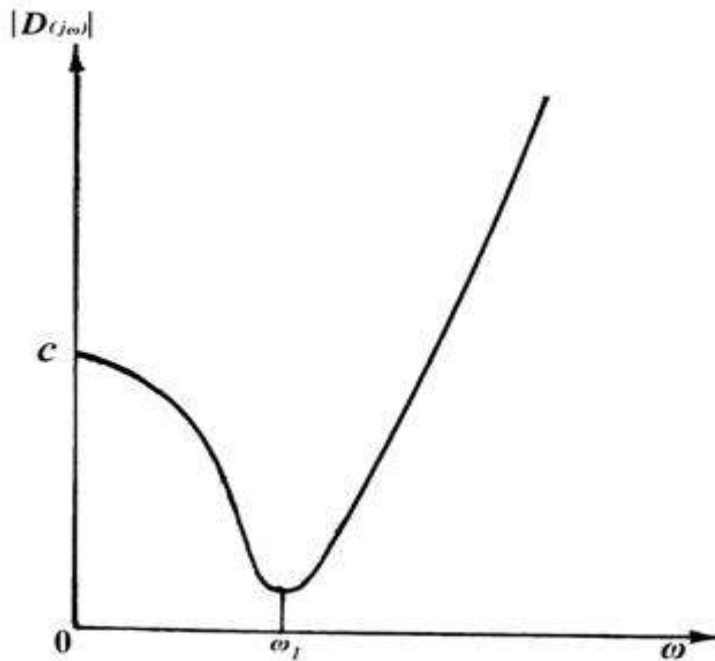


Рис. 14. Величина модуля динамической жесткости

Если на виброизолятор устанавливается масса  $m$ , то суммарная динамическая жесткость при действии на массу силы  $F$ :

$$D_c = -m\omega^2 + D(j\omega) = -(m + m_{um})\omega^2 + j\omega b + c, \quad (16)$$

а передаточная функция по силе будет равна:

$$T(j\omega) = \frac{F_1}{F}(j\omega) = \frac{-m^2 m_{um} + j\omega b + c}{-w^2(m + m_{um}) + j\omega b + c}. \quad (17)$$

Если  $V \neq 0$ , а сила  $F=0$ , то передаточная функция от кинетического воздействия определяется из условия равенства сил

$$-m\omega^2 x = (m_{um}\omega^2 + bj\omega + c)(x - V). \quad (18)$$

В итоге получим

$$T(j\omega) = \frac{x}{V}(j\omega) = \frac{-\omega^2 m_{um} + bj\omega + c}{-\omega^2(m + m_{um}) + bj\omega + c}. \quad (19)$$

Таким образом, передаточная функция по силе и кинематическая передаточная функция оказываются равны. Более общий результат для этого равенства будет получен ниже из анализа этих систем как четырехполюсников.

Сравним теперь кривые коэффициентов передач для системы виброизоляции с инерционным трансформатором и обычную систему виброизоляции при  $m_{um} = 0$  (рис. 15).

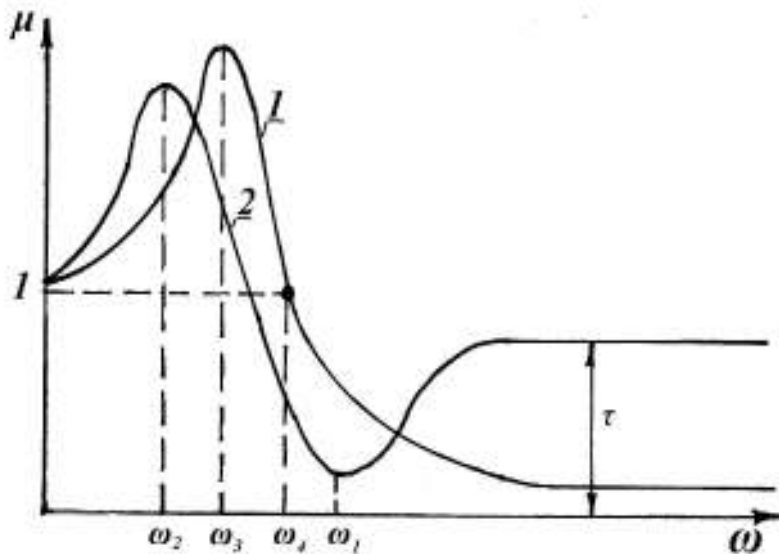


Рис.15. Сравнение коэффициентов передач для системы виброизоляции

На рис.15 показаны: 1 – кривая коэффициента передач обычной системы виброизоляции, а 2 – кривая коэффициента передач системы с включением инерционного трансформатора, соответственно:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m_{um}}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m + m_{um}}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega_4 = \sqrt{2\frac{c}{m}}.$$

Из анализа кривых видно, что резонансная частота системы с инерционным трансформатором ( $\omega_2$ ) будет находиться на частоте более низкой, чем у обычной системы виброизоляции ( $\omega_3$ ). Кроме того, частота резонанса динамической жесткости виброизолятора с инерционным трансформатором совпадает с частотой нуля коэффициента передачи (общая частота  $\omega_1$ ). Отсюда следует, что частота нуля коэффициента передачи, находящаяся у обычной системы виброизоляции на частоте, равной бесконечности, перемещается у системы с инерционным трансформатором на конечную частоту.

Рассматриваемая система (рис. 13) имеет одну степень свободы. Ноль коэффициента передачи не является точкой антирезонанса системы. Структура подобной системы связана с преобразованием движения инерционного элемента.

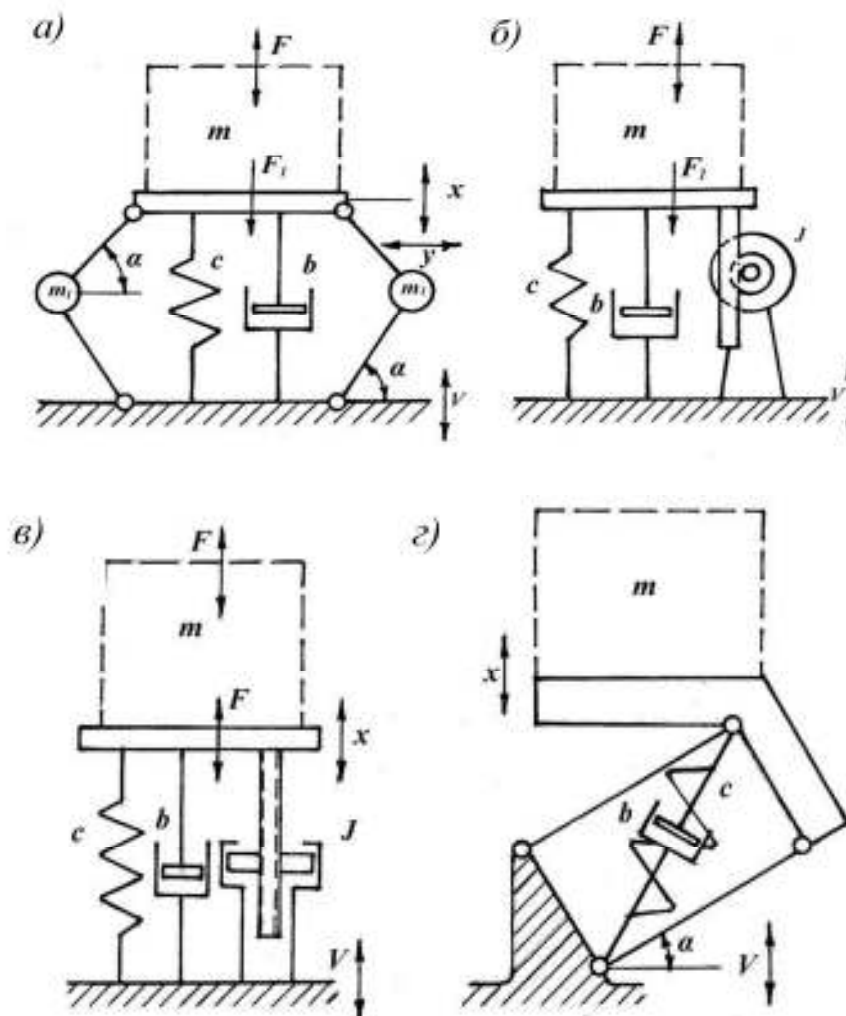


Рис. 16. Примеры систем виброизоляции

Рассмотрим примеры подобных систем виброизоляции, приведенные на рис. 16. При наличии в схеме рычажных механизмов система линеаризуется около статического положения равновесия.

Для схемы, приведенной на рис. 16,а), связь между движениями  $x - V$  и  $y$  выражается как  $y = (x - V)tg\alpha$ , и поэтому  $m_{um} = 2m_1tg^2\alpha$ .

В схеме, представленной на рис. 16,б), взаимодействуют рейка и зубчатое колесо на одной оси с маховиком. Для этой системы  $m_{um} = \frac{J}{r^2}$ , где  $J$  – момент инерции маховика,  $r$  – радиус зубчатого колеса.

В схеме, представленной на рис. 16,в), в винтовом механизме взаимодействуют винт и гайка. Гайка представляет собой маховик с моментом инерции  $I$ . Здесь:  $m_{um} = \frac{J}{r^2tg^2\alpha}$ , где  $r$  – радиус винта,  $\alpha$  – угол подъема резьбы винта.

Схема на рис. 16,г) демонстрирует подвеску с направляющим параллелограммным механизмом, когда рычаги параллелограмма наклонены к горизонту под углом  $\alpha$ , а пружина  $c$  и демпфер  $b$  встроены внутри параллелограмма. Передаточная функция по вертикальному направлению:

$$T(j\omega) = \frac{x}{V}(j\omega) = \frac{-\omega^2 \cdot m \cdot \sin^2\alpha + b_n j\omega + c_n}{-\omega^2 m + b_n j\omega + c_n},$$

где  $c_n$  и  $b_n$  – приведенные к вертикальному направлению жесткость пружины и коэффициент сопротивления демпфера, зависящие от геометрической ориентации их внутри параллелограмма. При  $\alpha=0$ , т.е. когда рычаги параллелограмма параллельны горизонту, эффект преобразования движения инерционного элемента пропадает.

Последний пример показывает, что в низкочастотных подвесках мобильных машин, снабженных рычажными направляющими механизмами (например, в автомобильных подвесках) свойства виброизоляции существенно зависят от геометрии направляющего механизма и не всегда корректно представлять модели вертикальных и угловых колебаний этих систем, как при

линейном, так и при нелинейном описании, только каскадами твердых тел и масс с пружинами и демпферами между ними.

Экспериментальные данные по системам виброизоляции снабженным элементами с преобразованием движения, показывают, что коэффициенты передач оказываются очень чувствительны к трению в механизмах преобразования движения и при значительной мультипликации движения в стремлении повысить эффект инерционности с использованием малых масс трение в механических передачах мешает проявлению ожидаемых свойств.

## ЛЕКЦИЯ 14

### ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗИНО-МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ

В качестве виброизоляторов в отечественном машиностроении используется большое число (несколько сотен) устройств, которые могут быть отнесены к одному из нижеперечисленных типов.

При соединении между собой по непрерывному контуру вибрирующей и защищаемой от вибраций конструкций в качестве виброизоляторов могут служить виброзадерживающие массы; ребра жесткости; шарнирные препятствия; упругие прокладки; фланцевые и фальцевые соединения; резонансные антивибраторы, динамические виброгасители; антиволноводные системы и другие типы препятствий, нарушающих непрерывность кинематических или динамических параметров при переходе от вибрирующей к защищаемой конструкции.

В тех случаях, когда между источником вибрации и защищаемой конструкцией допустимо соединение в дискретном количестве мест, в качестве виброизоляторов могут применяться пружинные подвески и опоры; упругие прокладки; резинометаллические амортизаторы; гидравлические и фрикционные демпферы; механические фильтры и пр.

При отсутствии постоянного контакта между двумя конструкциями или объектами и возможности их соприкосновения в случаях колебательных или поступательных движений в качестве виброизоляторов от ударных процессов используются упругие прокладки; буферы; ограничители перемещений; упоры; кранцы; мягкие покрытия полов помещений и пр.

В перечисленных типах виброизоляторов в качестве упругих элементов используются, в основном, резиноподобные материалы - эластомеры: упругие прокладки (как непосредственно под оборудованием, так и во фланцевых соединениях, подвесках трубопроводов и мягких покрытиях полов и стен ограждающих конструкций); резинометаллические амортизаторы всевозможных типов; динамические виброгасители; резонансные и антиволноводные системы и демпферы; буферы; упоры; кранцы и т. д.

В качестве примера на рис. 17,а) и 17,б) изображены конструктивные исполнения резиновых виброизоляторов, в которых несущая и присоединительная металлические планки скрепляются между собой привулканизированным к ним резиновым массивом.

На рис.17,а изображен виброизолятор типа АКСС, на рис.17,б – виброизолятор типа АМ, где: 1 – несущая планка; 2 – присоединительная планка; 3 – резиновый массив.

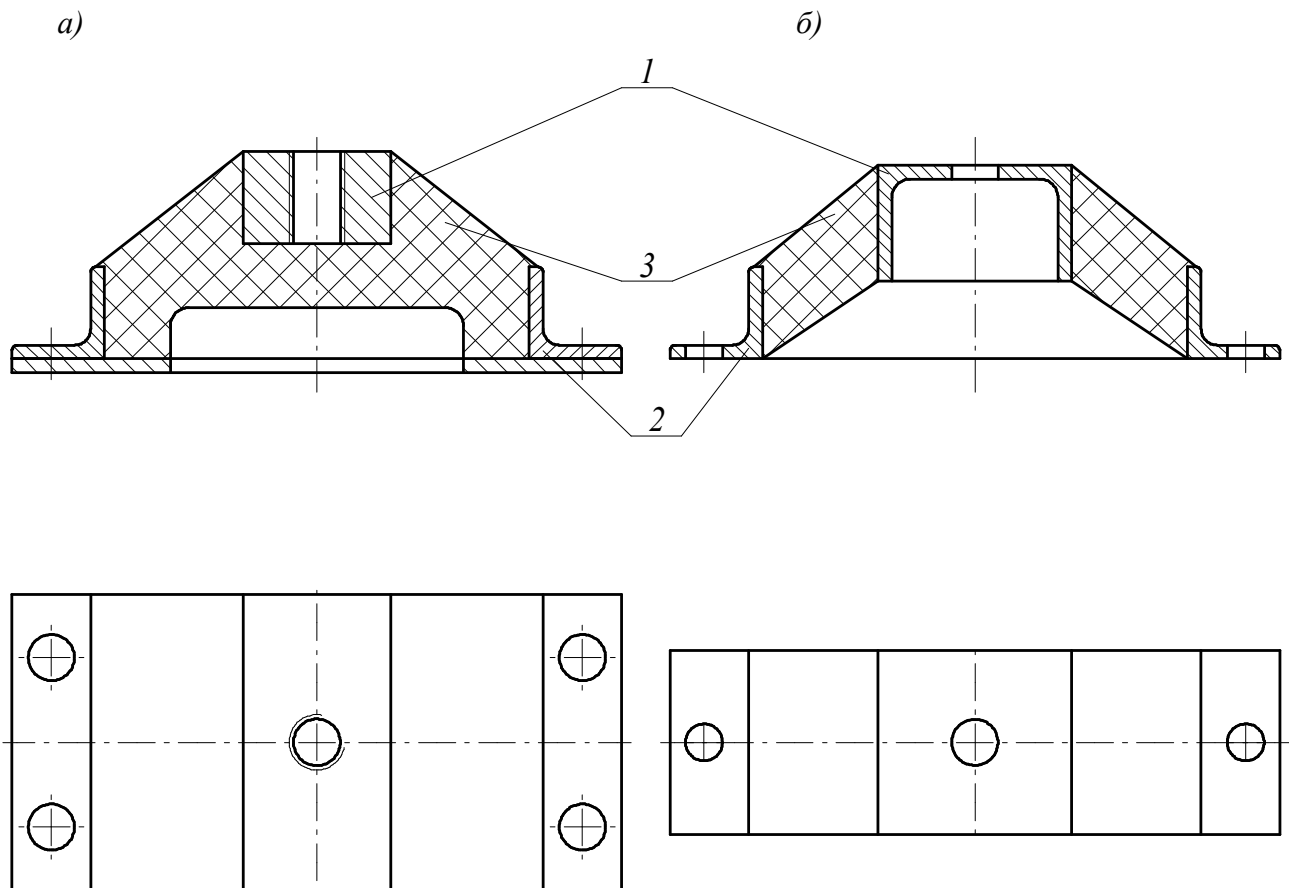


Рис. 17. Типы виброизоляторов: а) – типа АКСС; б) – типа АМ

В течение продолжительного времени конструкции отечественных виброизоляторов непрерывно совершенствовались, практически исчерпав свои возможности. Об этом можно судить по некоторой противоречивости выработанных рекомендаций по проектированию резиновых виброизоляторов.



К указанным рекомендациям следует, в первую очередь, отнести следующие:

- наибольшая эффективность на низких частотах достигается при наименьшей динамической жесткости виброизоляторов, которая определяется, в частности, статическим значением этого же параметра и лимитируется не только свойствами колебательной системы, но и требованием по долговечности, вытекающим из ограничения по статическим деформациям (не должны превышать 50%), а также требованием по тепловому режиму (динамические деформации не более 10 %);

- для обеспечения эффективности на средних частотах целесообразно стремиться к снижению основной собственной частоты упругого элемента виброизоляции и к увеличению значений высших собственных частот при одновременном уменьшении коэффициента возбуждения соответствующих форм колебаний:

- деформирование резиновых элементов должно быть свободным, поскольку резина является малосжимаемым по объему материалом;
- следует избегать соприкосновения свободных поверхностей резины с жесткими деталями и трения между ними;

- необходимо уменьшить концентрации напряжений в резиновом массиве и стремиться к равномерному распределению напряжений;

- не допускать больших напряжений, возникающих в вулканизированной резине при ее усадке;

- виброизоляторы, работающие в условиях ударных нагрузок, должны иметь повышенную жесткость;

- не применять виброизоляторы с мягкой деформационной характеристикой в виде тонкостенных конструкций, способных иметь несколько форм упругого равновесия. Такие упругие элементы теряют устойчивость начальной формы равновесия в процессе деформирования;

- характерный для резин рост модуля сдвига при увеличении частоты приводит к возрастанию жесткости упругого элемента виброизоляции и соответствующему снижению эффективности.

Таким образом, в качестве материала виброизоляторов следует выбирать резины с возможно меньшим отношением  $G(f)/G(0)$  динамического модуля сдвига к статическому в необходимом диапазоне частот; поглощение энергии в резиновых виброизоляторах происходит в резиновом массиве, поэтому величина коэффициента потерь высокоэластического материала существенно отражается на эффективности практически во всем диапазоне частот. На низких частотах в большинстве случаев желательно обеспечить высокий коэффициент потерь  $\eta=0,4...0,8$ , чтобы уменьшить амплитуду колебаний на резонансной частоте колебательной системы. На высоких частотах значительный коэффициент потерь позволяет устранить влияние внутренних резонансов на коэффициенты передачи виброизоляторов. В то же время на средних частотах в области собственного резонанса виброизолирующего элемента желательно обеспечить относительно малый коэффициент потерь материала  $\eta=0,2...0,4$ . Поскольку частотный ход зависимостей комплексного модуля сдвига и сдвиговых потерь взаимосвязаны, удовлетворить вышеизложенные требования практически невозможно.

## ЛЕКЦИЯ 15

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ВИБРООПОРАХ

Гидравлические виброопоры (гидроопоры) объединяют в себе упругий резиновый элемент и гидравлический гаситель колебаний.

В конструкции нет трущихся частей с фрикционным сухим контактом. Изменение объемов полостей с жидкостью происходит за счет деформации эластичной обечайки гидроопоры. В качестве компонентов трения выступают конструкционное трение в резине и гидравлическое вязкое сопротивление жидкости.

Диссипация (рассеивание) в гидравлических виброопорах энергии колебаний происходит в реологической жидкости, заполняющей внутренние полости конструкции, за счет совершения работы по перемещению жидкости из одной полости (камеры) в другую полость (камеру), сопровождающемуся трением слоев, при котором выделяется тепловая энергия, рассеиваемая далее в окружающую среду через металлические корпусные детали гидравлической виброопоры.

Применение гидравлических виброопор позволяет создавать системы виброизоляции двигателей транспортных средств и других видов виброактивного оборудования с более высокими собственными резонансными частотами и в то же время с более низкой динамической жесткостью при малых относительных перемещениях двигателей транспортных средств, а также иметь повышенное демпфирование на резонансных частотах.

Обычно верхняя часть гидроопоры закрепляется на двигателе, а основание на шасси автомобиля или стационарной конструкции. Когда гидроопора нагружается от двигателя или от основания, объем верхней камеры изменяется и вынуждает жидкость течь через отверстия в нижнюю камеру. Это течение порождает два типа силовых реакций в гидроопоре за счет инерции жидкости и вязкого сопротивления течению. Для повышения эффективности виброизоляции предложены различные конструкции гидроопор, которые

обобщенно можно отнести к одному из нижеперечисленных четырех типов гидроопор:

- с простым дроссельным отверстием;
- с дроссельной инерционной трубкой;
- с дроссельной инерционной трубкой или отверстием с разделительной мембраной;
- с введением активного управления, дополняющего пассивные свойства.

### **Динамические жесткости и передаточные функции гидроопор**

Динамической жесткостью механической системы называют отношение амплитуды внешней гармонической силы к комплексной амплитуде колебаний. Для системы с одной степенью свободы динамическая жесткость:

$$c(\eta) = \frac{F(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{F_0}{\tilde{A}} = a \left( 1 - \eta^2 + i \frac{g}{\pi} \cdot \eta \right); \quad (20)$$

где  $c(\eta)$  – динамическая жесткость,  $\eta$  – коэффициент потерь,  $i$  – мнимая единица.

Это понятие вводится по аналогии со статической жесткостью, как отношение силы к смещению в системе, вызванному данной силой. Для системы без демпфирования  $c(\eta)$  – действительная величина. При резонансе система обладает минимальной динамической жесткостью. В частности для системы без демпфирования при резонансе динамическая жесткость равна нулю.

Динамической податливостью системы  $f(\eta)$  называют величину, обратную динамической жесткости:

$$f(\eta) = \frac{1}{c(\eta)} = a^{-1} \left( 1 - \eta^2 + i \frac{g}{\pi} \eta \right)^{-1}. \quad (21)$$

В окрестностях резонанса динамическая податливость механической системы оказывается наибольшей (для системы без демпфирования она при резонансе принимает бесконечное значение). При значениях  $\eta$ , малых по сравнению с единицей, функция  $f(\eta)$  мало отличается от статической податливости.

Механическим импедансом системы  $Z(\eta)$  или просто импедансом называют отношение амплитуды гармонической вынуждающей силы к комплексной амплитуде скорости при установившихся вынужденных колебаниях:

$$Z(\eta) = \frac{a}{i\omega} \left( 1 - \eta^2 + i \frac{g}{\pi} \eta \right). \quad (22)$$

### Динамические жесткости механических элементов

Механическую систему можно представить в виде соединения отдельных сосредоточенных элементов с отличающимися свойствами, которые приближенно можно описать элементарными зависимостями. Так, одни элементы можно представить имеющими только инерционные свойства, другие – безинерционными упругими элементами, третьи — устройствами с трением. Некоторые элементы могут обладать рядом указанных свойств. Отдельно представляются элементы, поставляющие энергию в механическую систему и возбуждающие ее движение, — *активные элементы*, или *источники*. Элементы, не имеющие независимых источников сил или кинематических величин, называют *пассивными*.

Механическую систему, представленную в виде совокупности соединенных между собой активных и пассивных элементов, называют *механической цепью*. Предполагается, что механическая цепь с приемлемой точностью отражает динамические свойства исходной механической системы. Места соединения элементов называют *узлами*. Соединение двух и более пассивных элементов называют *звеном*. Для всякой системы можно указать места, через которые осуществляется ее связь со средой. Место, в котором к системе прикладывается воздействие, называют *входом*. *Выходом* называют место, в котором оценивают реакцию системы. Вход (или выход) системы, характеризующийся обобщенными координатой и силой, называют *полюсом*. В общем случае вход и выход системы могут быть многополюсными. Любой элемент механической цепи имеет по крайней мере два полюса. Элемент, имеющий два полюса, называют *двухполюсником*. Возможны механические цепи, составленные из  $n$ -полюсников, однако на практике наиболее распространены цепи из двухполюсников.

Для рассмотрения связанных колебаний пространственно-многомерных механических цепей наиболее удобны общие методы исследования линейных систем с конечным числом степеней свободы. Однако при исследовании довольно распространенных пространственно одномерных механических цепей для инженерных целей более удобными оказываются методы, в которых уравнения движения системы находят непосредственно из топологии рассматриваемой механической цепи на основе законов Кирхгофа.

### Эквивалентная схема гидропоры с разделением упругого и поршневого действия упругого элемента

Для упрощения расчета гидравлической опоры целесообразно рассчитывать эквивалентную механическую схему гидропоры, с разделением упругого и поршневого действия упругого элемента гидропоры (рис. 18). На рис. 19 показана эквивалентная схема гидропоры.

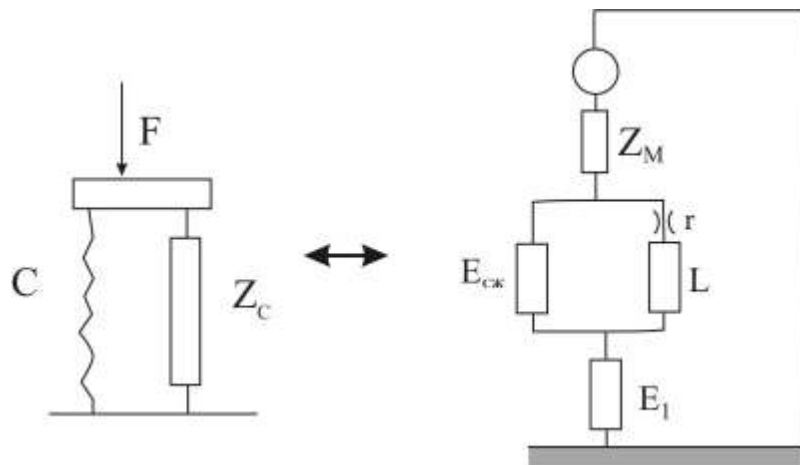


Рис. 18. Действие упругого элемента гидропоры

На рис.18:  $F$  - внешняя сила,  $r$  - жесткость упругого элемента,  $L$  - диссипативное и инерционное сопротивление канала,  $E_1$  - емкость дополнительной камеры, зависящая от жесткости изолирующей мембраны. Принципиально может быть несколько параллельных каналов и в перегородку может быть вставлена промежуточная мембрана.

Проблемой, возникающей при расчете, является разделение упругой и гидравлической составляющих резиновой обечайки и внутренней среды.

Разложим функцию в ряд относительно статического положения, как начала координат для  $x$  и  $p$ .

$$f(x, p) = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial p} p + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 p} p^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} x \cdot p + \dots$$

Как видно из приведенной формулы, члены частной производной второго и более высоких порядков определяют нелинейные свойства обечайки. Если ограничиться первыми двумя членами ряда, то получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c_r \text{ — жесткость собственно обечайки;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = A \text{ — площадь поршневого действия обечайки.}$$

Для статических и динамических расчетов гидропоры важно знание как динамической жесткости обечайки, так и ее площади поршневого действия.

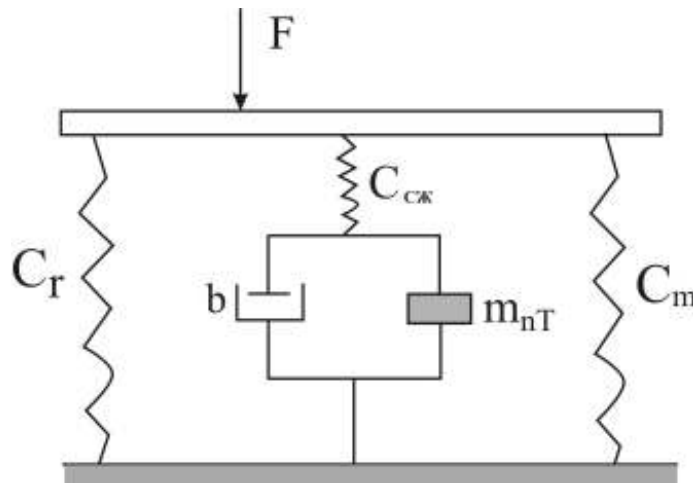


Рис. 19. Эквивалентная схема действия упругого элемента гидропоры

На рис. 19 показано взаимодействие механической и гидравлической подсистем. Механическая часть взаимодействует с гидравлической через эквивалентное сопротивление  $C_r$ , а гидравлическая - с механической через эквивалентное сопротивление  $C_m$ .

Рассмотрим сжатие жидкости только в рабочей камере. Тогда общий расход  $Q$ , производимый движением поршня, разделится на расход  $Q_1$  в дополнительную камеру через трубку и расход  $Q_2$  сжимаемости в рабочей камере, как расход в емкость  $E_1$ . Расход сжимаемости в дополнительной камере объединен с расходом, определяемым емкостью за счет податливости

мембраны, которая больше емкости за счет податливости резиновой мембраны.

Рассмотрим запись через систему уравнений:

$$c_r x + pA = F; \quad (23)$$

$$Axs = Q_1 + Q_2; \quad (24)$$

$$p_1 = \left( Ls + r + \frac{1}{E_1 s} \right) Q_1; \quad (25)$$

$$p_2 = \frac{1}{s} \cdot \frac{K_{жс}}{V} \cdot Q_2, \quad (26)$$

где  $F$  – действующая сила,  $p$  – давление в рабочей камере,  $A$  – площадь поршневого действия,  $K_{жс}$  – модуль сжимаемости жидкости,  $V$  – объем рабочей камеры,  $s$  – переменная преобразования Лапласа.

Из уравнений (6) – (7) получим выражение для динамической жесткости:

$$D = \frac{F}{x} = c_r + \frac{\left( A^2 s \right) \left( Ls + r + \frac{1}{E_1 s} \right) + (sV)}{1 + sV} \quad (27)$$

или

$$D = c_r + m_{np} \cdot s^2 + bs + c_m + c_{жс}. \quad (27,a)$$

В формуле (27,a)  $m_{np} = LA^2$  – приведенная масса;  $b = rA^2$  – приведенное демпфирование;  $c_m = \frac{A^2}{E_1}$  – эквивалентная жесткость учитывающая

взаимодействие мембраны и нижней камеры;  $c_{жс} = \frac{A^2 K_{жс}}{V}$  – жесткость, учитывающая сжимаемость жидкости в рабочей камере.

Сделаем сравнительную оценку жесткостей  $c_m$ ,  $c_r$ ,  $c_m$ . Для примера примем объем рабочей камеры как объем усеченного конуса, с размерами показанными на рис. 20:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 \cdot r^2 + R \cdot r) = 39,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$



Модуль сжимаемости жидкости возьмем на примере жидкости ПМС-20:  $K_{жс} = 14000 \cdot 10^5$  Н/м, получим для жидкости ПМС-20  $c_{жс} = 1,42 \cdot 10^{12}$  Н/м, а для силиконовой жидкости  $c_{жс} = 1,05 c_m$ ,  $c_r = 10^{12}$  Н/м.

В то же время жесткость резинового элемента – обечайки - составляет:  $c_r = 5 \cdot 10^6$  Н/м, а приведенная жесткость дополнительной камеры:  $c_m = 0,05 c_r = 0,25 \cdot 10^6$  Н/м.

Из приведенного анализа видно, что жесткость жидкости на шесть порядков превышает жесткость основного упругого элемента, тем самым жидкость в гидроопоре можно считать несжимаемой.

Рассмотрим в качестве примера схему гидроопоры ОГ 120, представленную на рис.20.

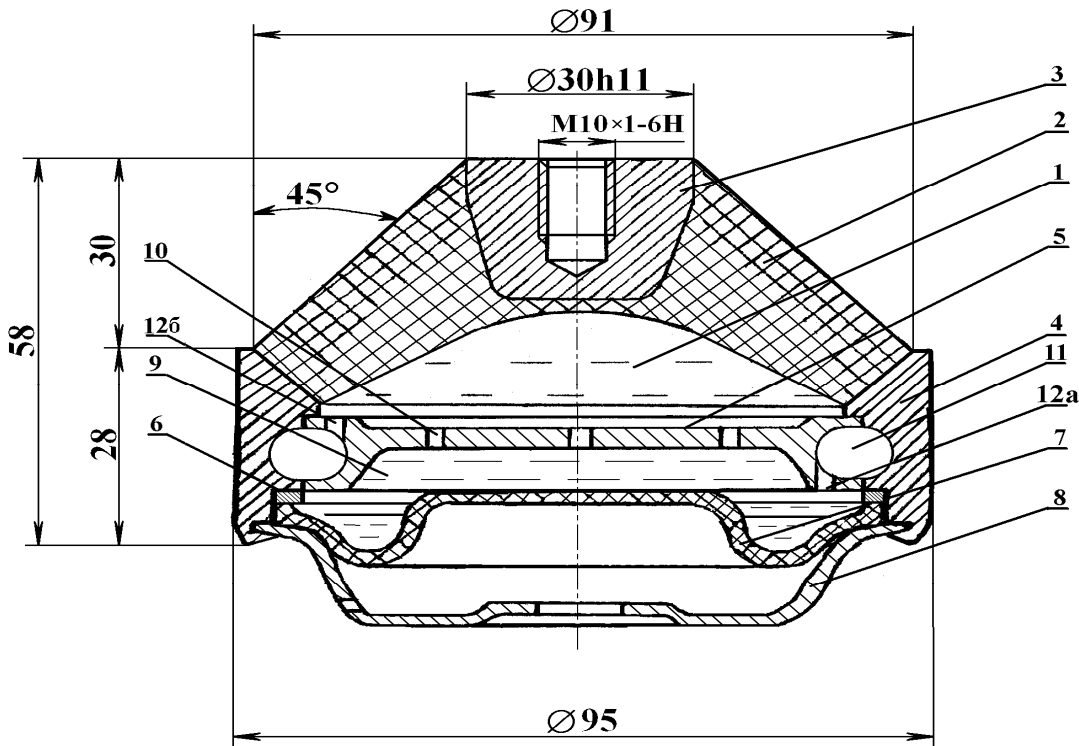


Рис. 20. Гидравлическая виброопора ОГ 120: 1- поршневая полость, 2- резиновая обечайка, 3- опорная плата, 4- корпус, 5- перегородка, 6- кольцо, 7- мембрана, 8- поддон, 9-компенсационная полость, 10- дроссельный канал, 11- карман, 12<sub>а</sub> - дроссельный канал из поршневой полости в карман, 12<sub>б</sub> - дроссельный канал из компенсационной полости в карман.

Описанную конструкцию, можно промоделировать с помощью эквивалентной схемы, в которой объединены механические и гидравлические элементы (рис. 21-23).

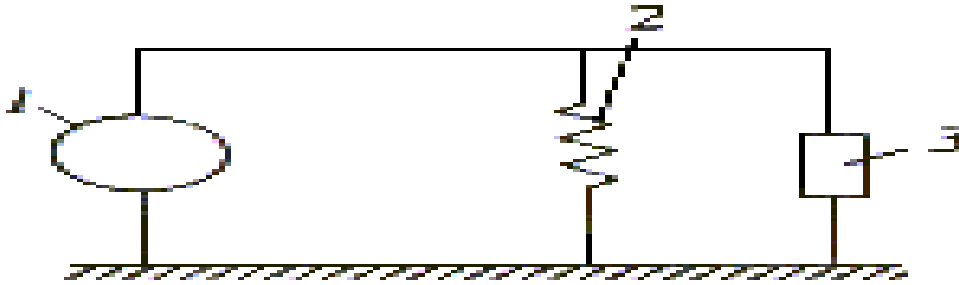


Рис. 21. Эквивалентная схема конструкции гидропоры

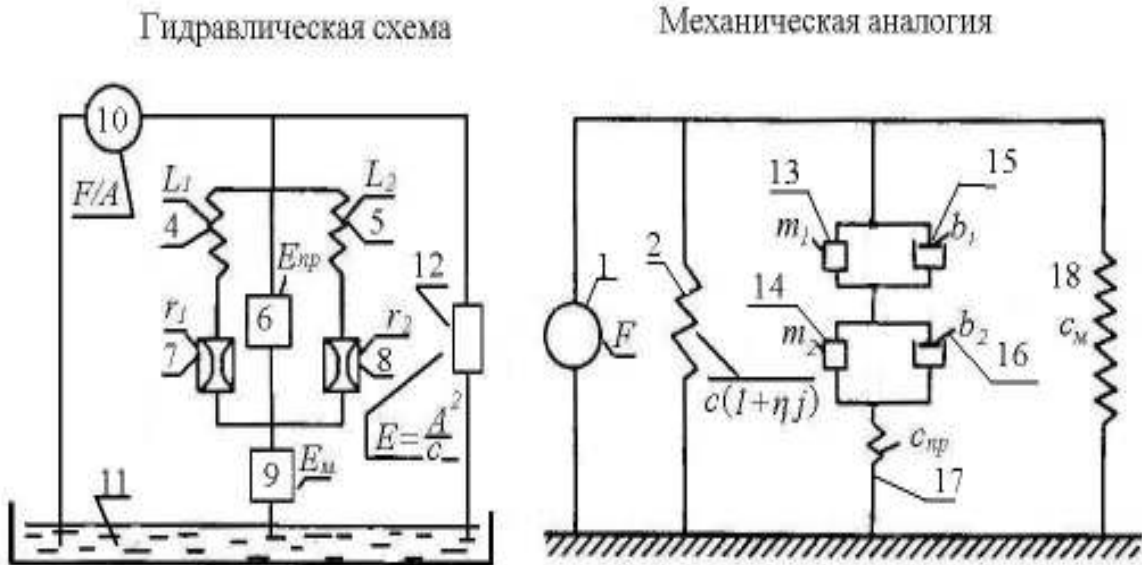


Рис. 22. Гидравлическая схема конструкции гидропоры

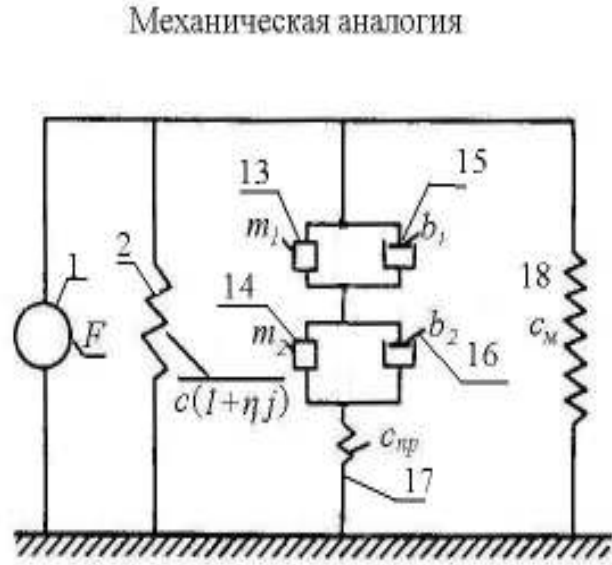


Рис. 23. Механическая схема конструкции гидропоры

На рис. 21-23: 1 – сила, приложенная от агрегата  $F$  (Н); 2 – комплексная жесткость обечайки (с учетом потерь в резине)  $c(1+\eta j)$  (Н/м); 3 – гидравлическая часть в механической системе; 4 – инерционность в кольцевом канале  $L_1$  (Н с<sup>2</sup>/м<sup>5</sup>); 6 – емкость между рабочей и дополнительной камерами, за счет сопротивления промежуточной мембраны  $E_{np}$  (м<sup>5</sup>/Н); диссипативное сопротивление в кольцевом канале  $r_1$  (Н с/м<sup>5</sup>); 8 – суммарное диссипативное сопротивление в торцевых каналах  $r_2$  (Н с/м<sup>5</sup>); Емкость дополнительной камеры, за счет сопротивления нижней мембраны  $E_M$  (м<sup>5</sup>/Н); 10 – генератор

давления эквивалентной силы  $F/A$  (Н/м<sup>2</sup>); 11 – эквивалентная ванна с жидкостью; 12 – механическая часть в гидравлической системе; 13 – приведенная масса жидкости в кольцевом канале  $m_1$  (кг); 14 – суммарная приведенная масса жидкости в торцевых каналах  $m_2$  (кг); 15 – приведенное демпфирование в кольцевом канале  $b_1$  (Н с/м); 16 – суммарное приведенное демпфирование в торцевых каналах  $b_2$  (Н с/м); 17 – жесткость промежуточной мембраны  $c_{пр}$  (Н/м); 18 – жесткость нижней мембраны  $c_m$  (Н/м).

Связь между механической и гидравлической системами происходит посредством перехода от скорости к расходу, а также от силы к давлению в рабочей камере через площадь поршневого действия  $A$ , создаваемой резиновым элементом – обечайкой. Далее методами теории цепей гидравлическая система перестраивается в эквивалентную механическую. Узловые точки гидравлической системы переходят в контуры механической, а контуры гидравлической в узлы механической по законам Кирхгофа (рис.22-23). Замечено, что массы  $m_i$  - это не обычные массы в инерциальной системе координат, а гидравлические инерционные трансформаторы, инерционные свойства которых проявляются на относительных ускорениях.

Рассмотрим метод перестройки гидравлической системы в эквивалентную механическую рис. 22 путем присоединения гидравлической к основной механической системе рис. 23. Осуществляется перестройка контуров в узлы, а узлов в контуры. Такую перестройку возможно, согласно законам Кирхгофа, провести по методике перехода от электрической системы к механической.

Последовательные элементы гидравлической системы на рис.22: инерционный элемент 4 и диссипативное сопротивление 7 перейдут в параллельные механические массу 13 и демпфер 15. Аналогично элементы 5 и 8 перейдут в 14 и 16. Параллельные ветви, включающие элементы 4, 7, 6, 5, 8 гидравлической системы, становятся последовательными 13, 14, 17 и 15, 16 механической. Последовательные элементы 10, 12 блок параллельных элементов 7 и 2 в механической системе присоединены к полной системе слева.

Ёмкость 9 (последовательная в гидравлической схеме) становится параллельной жесткостью 18. Окончательной проверкой можно убедиться, что все последовательные ветви стали параллельными, параллельные - последовательными, контуры превратились в узлы, а узлы - в контуры.

Для окончательной схемы определим комплексную динамическую жесткость:

$$D(j\omega) = F(j\omega) / x(1 + j\eta) + c_m + \left[ \frac{1}{-m_1\omega^2 + b_1j\omega} + \frac{1}{-m_2\omega^2 + b_2j\omega} + \frac{1}{c_{np}} \right]^{-1}. \quad (28)$$

Угол сдвига фаз определяется соотношением действительной и мнимой частей формулы:

$$\varphi = \arctg \left[ \frac{\text{Im}(D(j\omega))}{\text{Re}(D(j\omega))} \right]. \quad (29)$$

## ЛЕКЦИЯ 16

### СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Блок-схема виброизолирующей системы строительной конструкции (рис.24) предназначена для расчета динамических характеристик элементов системы, а именно, амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик, коэффициентов жесткости и виброизоляции.

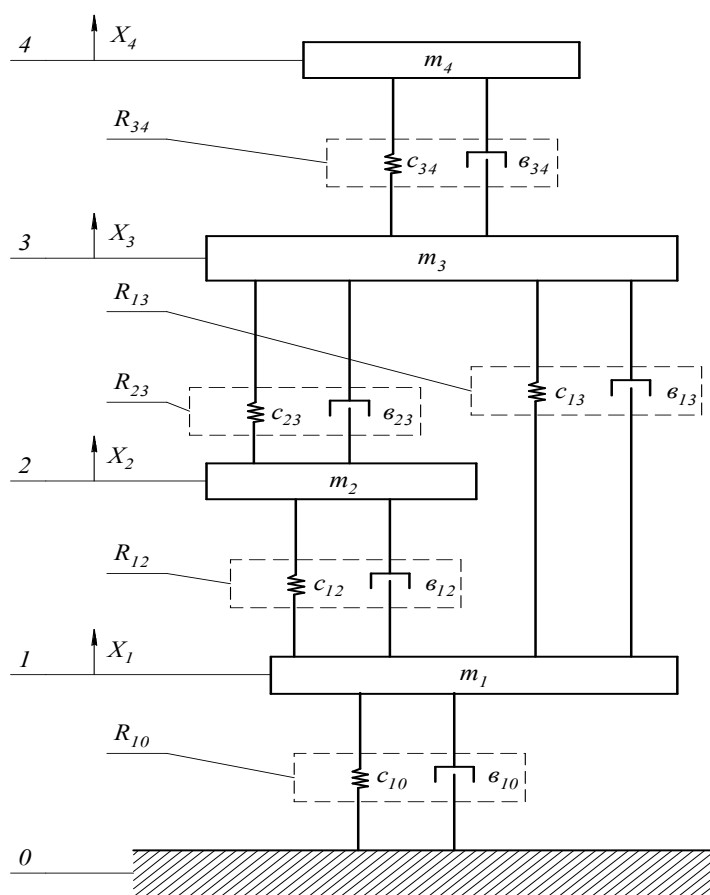


Рис. 24. Схема виброзащитной системы строительной конструкции: 0-фундамент;  $R_{10}$ -демпфирующие блоки;  $m_1$ -масса панели перекрытия;  $R_{12}$ - $R_{23}$ - $R_{34}$ -гидравлические вибропоры

Данная система материальных объектов описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \theta_{10} \dot{x}_1 + c_{10} x_1 + \theta_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_{12} (x_1 - x_2) + \theta_{13} (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + c_{12} (x_1 - x_3) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \theta_{12} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{12} (x_2 - x_1) + \theta_{23} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + c_{23} (x_2 - x_3) = F_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 + \theta_{13} (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + c_{13} (x_3 - x_1) + \theta_{23} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_{23} (x_3 - x_2) + \theta_{34} (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + c_{34} (x_3 - x_4) = F_3 \\ m_4 \ddot{x}_4 + \theta_{34} (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + c_{34} (x_4 - x_3) = F_4 \end{cases}, \quad (30)$$

где  $m_k$  - массы элементов;  $\theta_{kj}$ ,  $c_{kj}$  - коэффициенты демпфирования и жесткости соответствующих вязкоупругих связей;  $F_k$  - внешние силы, определяемые типом возбуждения системы;  $k = 1 \dots 4$  - номер инерционного элемента.

Первый тип возбуждения - динамическое (или силовое) возбуждение (тип Д). В этом случае выбирается один из элементов  $m_{Nik}$ , к которому приложена гармоническая нагрузка, тогда правая часть уравнений имеет вид:

$$F_k = \delta_{Nik} F_0 e^{i\omega t}, \quad \text{где } \delta_{Nik} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq N_1 \\ 1 & \text{при } k = N_1 \end{cases} - \text{ символ Кронекера.}$$

Второй тип возбуждения - кинематическое возбуждение колебаний (тип К). В этом случае жесткое основание движется по закону  $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$ , тогда правая часть уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} F_1 = \theta_{10} \dot{\xi} + c_{10} \xi \\ F_2 = \theta_{20} \dot{\xi} + c_{20} \xi \\ F_{13} = \theta_{30} \dot{\xi} + c_{30} \xi \\ F_4 = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Т. к. данная система линейна и внешнее воздействие на нее одночастотно ( $F_k = f_0 e^{i\omega t}$ ), то решение системы уравнений представляется в виде  $x_k = y_k e^{i\omega t}$ , где  $y_k$  - набор комплексных амплитуд колебаний, удовлетворяющих системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1[-m_1 \omega^2 + i\omega(\theta_{10} + \theta_{12} + \theta_{13}) + c_{10} + c_{12} + c_{13}] - y_2(i\omega\theta_{12} + c_{12}) - y_3(i\omega\theta_{13} + c_{13}) = f_1, \\ y_2[-m_2 \omega^2 + i\omega(\theta_{12} + \theta_{23}) + c_{12} + c_{23}] - y_1(i\omega\theta_{12} + c_{12}) - y_3(i\omega\theta_{23} + c_{23}) = f_2, \\ y_3[-m_3 \omega^2 + i\omega(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{34}) + c_{13} + c_{23} + c_{34}] - y_1(i\omega\theta_{13} + c_{13}) - y_2(i\omega\theta_{23} + c_{23}) - y_4(i\omega\theta_{34} + c_{34}) = f_3, \\ y_4[-m_4 \omega^2 + i\omega\theta_{34} + c_{34}] - y_3(i\omega\theta_{34} + c_{34}) = f_4. \end{cases} \quad (32)$$

Решением данной системы являются выражения:

$$\begin{cases} y_k = g_{1k}(\omega)F_0 & (\text{тип } Д) \\ y_k = g_{2k}(\omega)\xi_0 & (\text{тип } К) \end{cases}, \quad (33)$$

где  $F_0$  и  $\xi_0$  - амплитудные значения силы и перемещения.

Особо следует выделить решения, получающиеся при единичном воздействии:

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{y_k}{F_0} = g_{1k}(\omega) & (\text{тип } Д) \\ z_k &= \frac{y_k}{\xi_0} = g_{2k}(\omega) & (\text{тип } К) \end{aligned}, \quad (34)$$

где  $g_{1k}(\omega)$ ,  $g_{2k}(\omega)$  - комплексные функции действительного переменного.

Зная функции  $g_{1k}(\omega)$ ,  $g_{2k}(\omega)$ , можно получить любую требуемую информацию о динамическом поведении системы.

В зависимости от типа воздействия на систему можно в виде графиков получить различные характеристики динамического поведения.

На экран выдается следующая информация:

- амплитудно-частотная характеристика:  $A(\omega) = |g_{1N2}(\omega)|$ ,
- фазо-частотная характеристика:  $F(\omega) = |\arg(g_{1N2}(\omega))|$ ,
- коэффициент виброизоляции:  $KV(\omega) = \left| \frac{m_{N2}\omega^2 y_{N2} + f_{N2}}{F_0} \right|$ ,
- динамическая жесткость:  $DJ(\omega) = \frac{1}{A(\omega)} = \frac{1}{|g_{1N2}(\omega)|}$ .

#### Тип К

- амплитудно-частотная характеристика:  $A(\omega) = |g_{2N2}(\omega)|$ ,
- фазо-частотная характеристика:  $F(\omega) = |\arg(g_{2N2}(\omega))|$ ,
- коэффициент виброизоляции:  $KV(\omega) = |g_{2N2}(\omega)|$ .

## ЛЕКЦИЯ 17

### АКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРООПОРАМИ

Рассматривается задача синтеза системы активного силового управления для нового класса усовершенствованных гидроопор на примере простейшей линейной модели с одной степенью свободы. При интегральном квадратичном ограничении на интенсивность искомого управляющего воздействия решение получено на основе процедуры, включающей применение метода гармонической линеаризации и вариационных методов. В качестве критерия оптимальности используется минимум величины коэффициента передачи усилия в установившемся периодическом режиме. Отыскиваются различные законы управления с обратной связью. Решаются задачи синтеза цепей обратной связи. Повышение эффективности разработанного в ИМАШ РАН нового класса гидроопор, связано с введением активных виброгасящих воздействий.

В соответствии с приведенной на рис. 25 схемой поэлементные уравнения динамики гидроопоры имеют вид:

$$m_0\ddot{x} + c_r\dot{x} = F(t) - p_1A; \quad p_1 - p_2 = rA\dot{x} + LA\ddot{x}; \quad p_2E - Ax = \frac{E}{s}u, \quad (35)$$

где  $m$  - масса объекта;  $A$  - площадь поршня;  $c_r$  - жесткость конической резиновой обечайки;  $L$  - гидравлическая инерционность;  $E$  — емкость дополнительной камеры,  $s$  - площадь поперечного сечения мембраны,  $r$  - линейное гидравлическое диссипативное сопротивление канала,  $p_1$  - давление в рабочей камере;  $p_2$  - давление в дополнительной камере;  $F(t) = B \sin \omega t$  - возмущающая сила с переменной частотой;  $u(x, \dot{x})$  — подлежащее определению активное силовое виброгасящее воздействие.

Выражая из третьего уравнения (35)  $p_2$  через  $x$  и  $u$  и подставляя полученное выражение во второе, а из второго уравнения (35), выражая  $p_2$  через  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$ , получим уравнение, связывающее  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ ,  $x$ ,  $F(t)$  и  $u$ :

$$\left(m_0 + LA^2\right)\ddot{x} + rA^2\dot{x} + \left(c_r + \frac{A^2}{E}\right)x = F(t) - \frac{A}{s}u(x, \dot{x}). \quad (36)$$





Предполагаем, что решение уравнения (37) можно аппроксимировать в гармоническом приближении  $x = A \sin \psi$ ,  $\psi = \omega t + \varphi$ . Поскольку, в силу этого, подлежащий минимизации критерий  $\bar{n}$  (39) в соответствии с (38), определяется в виде:

$$\bar{n} = \left[ (m_1 \omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 \omega^2 \right]^{1/2} (A/B),$$

то минимизация величины  $\bar{n}$  эквивалентна минимизации амплитуды колебаний  $A$ .

Для этого сначала определяем программный закон  $u^*(\psi)$ , обеспечивающий минимальную амплитуду  $A^*$ :

$$u^*(\psi) = \frac{\sqrt{\omega V / \pi}}{|Q(\omega)|} \left[ (\omega_0^2 - m\omega^2) \sin \psi + 2k\alpha \cos \psi \right], |Q(\omega)| = \left[ (\omega_0^2 - m\omega^2)^2 + 4k^4 \omega^2 \right]^{1/2}. \quad (40)$$

При этом

$$A^* = \left[ B - \sqrt{(\omega V / \pi)} N_1 \right] / |Q(\omega)| \quad (41)$$

и предполагается, что  $\sqrt{(\omega V / \pi)} N_1 < B$ .

Поскольку  $u^*(\psi)$  является гармонической функцией, то решение системы (35) ищется в виде  $x^* = A^* \sin \Psi$ ,  $\dot{x}^* = \omega A^* \cos \Psi$ . С учетом этого из (40), учитывая соотношение (41), находится решение задачи синтеза:

$$u^*(x, \dot{x}) = M(x) \left[ (\omega_0^2 - m\omega^2)x + 2k\dot{x} \right], M(\omega) = \sqrt{\omega V / \pi} / (B - N_1 \sqrt{\omega V / \pi}) \quad (42)$$

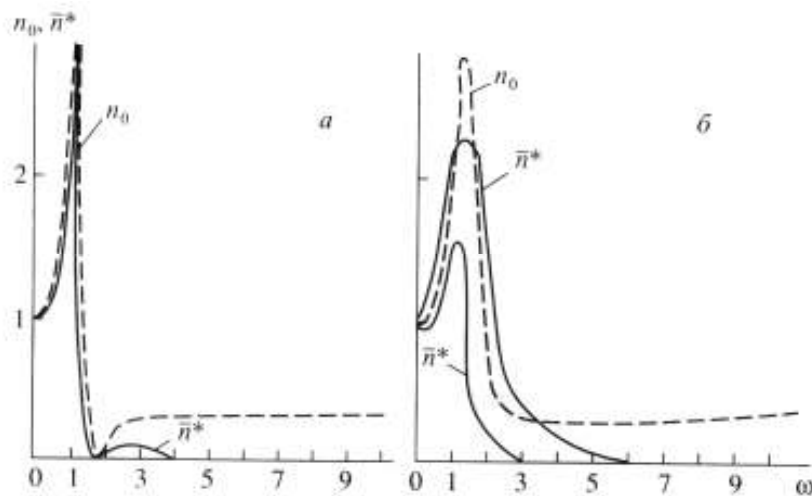


Рис. 26. Зависимости коэффициента передачи усилия от частоты возмущения при:

$$c_r + A^2 / E = 1, \quad m_0 = 1, \quad LA^2 = 0,5$$

В силу (41) и (42) выражение для минимального амплитудного значения коэффициента передачи усилия принимает вид:

$$\bar{n}^* = |Q_1(\omega)|/|Q(\omega)| \left[ 1 - \left( \sqrt{\omega V / \pi N_1} / B \right) \right], \text{ где } |Q_1(\omega)| = \left[ (m_1 \omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 \omega^2 \right]^{1/2}.$$

На рис. 26 изображены зависимости  $\bar{n}^*(\omega)$ . Пунктиром представлены соответствующие зависимости при отсутствии активного виброгасящего воздействия.

Следует отметить, что, хотя для построения закона  $u^*(x, \dot{x})$  использовали приближенную процедуру, замкнутая система имеет точное гармоническое решение  $x^* = A^* \sin \Psi$ .

Решение задачи синтеза в виде (42) не является единственным. Действительно, поскольку  $\ddot{x} = -\omega^2 A^* \sin \psi$ , то вместо (42) получаем закон с обратной связью в функции ускорения и скорости:

$$u^*(x, \dot{x}) = M(\omega) \left[ -\frac{(\omega_0^2 - m\omega^2)}{\omega^2} \ddot{x} + 2k\dot{x} \right].$$

Более общую структуру закона с обратной связью можно получить, исходя из тождества:

$$\sin \psi = \frac{1}{A^*} \left( \gamma \cdot x \frac{1-\gamma}{\omega^2} \ddot{x} \right). \quad (43)$$

где  $\gamma$  - произвольный параметр.

С учетом (42) и (43) получим закон с обратной связью:

$$u^*(x, \dot{x}, \ddot{x}) = M(\omega) \left[ (\omega_0^2 - m\omega^2) \left( \gamma \cdot x \frac{1-\gamma}{\omega^2} \ddot{x} \right) + 2k\dot{x} \right]. \quad (44)$$

Допустим, что частота возмущения не соответствует заранее рассчитанной величине, а изменяется в процессе функционирования системы. Тогда уравнение замкнутой системы:

$$\left[ n - N_1 M (\omega_0^2 - m\omega^2) \frac{1-\gamma}{\omega^2} \ddot{x} \right] + 2k(1 + N_1 M) \dot{x} + [\omega_0^2 - N_1 M (\omega_0^2 - m\omega^2) \gamma] x = B \sin \tilde{\omega} t, \quad (45)$$

где  $\tilde{\omega}$  - переменная частота возмущения.

Для системы (40) амплитудное значение коэффициента передачи усилия:

$$n(\gamma, \tilde{\omega}) = \frac{|\tilde{Q}_1(\gamma, \tilde{\omega})|}{|\tilde{Q}_2(\gamma, \tilde{\omega})|}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1(\gamma, \tilde{\omega}) &= \left[ (m_1 \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 (1 + N_1 M)^2 \tilde{\omega}^2 \right]^{1/2}; \\ \tilde{Q}_2(\gamma, \tilde{\omega}) &= \left[ (m \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2 (1 + N_1 M)^2 \tilde{\omega}^2 \right]^{1/2}; \\ \tilde{m} &= m - N_1 M (\omega_0^2 - m \omega^2) \frac{1-\gamma}{\omega^2}, \quad \tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 - N_1 M (\omega_0^2 - m \omega^2) \gamma. \end{aligned}$$

Если предполагать, что частота  $\tilde{\omega}$ , равная двойной частоте оборотов двигателя, может изменяться в процессе функционирования системы, то параметр  $\gamma$  может настраиваться в функции величины  $\tilde{\omega}$ , т.е.  $\gamma = \gamma(\tilde{\omega})$ . За счет выбора структуры функции  $\gamma(\tilde{\omega})$  можно обеспечить некоторые дополнительные полезные свойства системы. В частности, можно обеспечить постоянство амплитудного значения коэффициента передачи усилия при изменении  $\tilde{\omega}$ .

Пусть  $n(\gamma, \tilde{\omega}) = n$  - заданное постоянное значение. Тогда из (46) получим уравнение относительно  $\gamma$ :  $\tilde{Q}_1(\gamma, \tilde{\omega}) / \tilde{Q}_2(\gamma, \tilde{\omega}) = \bar{n}$ . Это уравнение сводится к квадратному уравнению относительно  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} (m_1 \tilde{\omega} - \omega_0^2)^2 - 2(m_1 \tilde{\omega}^2 - \omega_0^2) N_1 M (\omega_0^2 - m \omega^2) \gamma + [N_1 M (\omega_0^2 - m \omega^2)]^2 \gamma^2 + 4k^2 (1 + N_1 M)^2 \tilde{\omega}^2 = \\ = \bar{n} \left\{ (m \omega^2 - \omega_0^2)^2 - 2(m \tilde{\omega} - \omega_0^2) N_1 M (\omega_0^2 - m \omega^2) \left( \frac{1-\gamma}{\omega^2} + \gamma \right) + [N_1 M (\omega_0^2 - m \omega^2) \left( \frac{1-\gamma}{\omega^2} + \gamma \right)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

В результате решения уравнения (28) определяем зависимость  $\gamma(\tilde{\omega}, \bar{n})$ , обеспечивающую постоянство величины  $n(\gamma, \tilde{\omega}) = \bar{n}$ .

**ПРИЛОЖЕНИЕ****ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ  
ВЫСОТНОГО ЗДАНИЯ****1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИСТОЧНИКА**

В данной научно-исследовательской работе были проведены измерения параметров вибраций в частотном диапазоне от 0,5 до 100 Гц в различных контрольных точках исследуемых объектов. Контрольные точки выбирались после проведения предварительных исследований по согласованию с Заказчиком. Записанные временные реализации вибропроцессов разлагались в спектры. В результате анализа спектров выяснилось, что гармонические составляющие свыше 30 Гц в исследуемых сигналах практически отсутствуют и на жизнедеятельность рабочего персонала вредного влияния не оказывают. Выяснено, что наибольшие виброперегрузки находятся в диапазоне частот 5 – 20 Гц. Кроме того во всех измерениях присутствовали низкочастотные составляющие спектра – 0,5 Гц. Причем амплитуда этой гармоники превышала на 6 децибел по виброскорости и на 4,7 децибел по мощности амплитуду второй гармоники. Поскольку низкочастотные гармоники 0,5 – 1 Гц присутствовали во всех измерениях, включая измерения на конденсатном баке, (предполагаемом источнике вибрации) и находящегося вне территории данного объекта, а также в рабочих помещениях предприятия (рис.1), их следует рассматривать как шумы, которые не оказывают существенного влияния на оператора. Однако была установлена корреляционная связь гармонических составляющих в диапазоне от 5 до 15 Гц при синхронных измерениях виброперегрузок на конденсатном баке и в производственных помещениях корпуса №3 дома №39 по проспекту Гагарина (исследуемого объекта) в Нижнем Новгороде. Предложены мероприятия по снижению уровней вибрации в производственных помещениях.

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДУЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Измерения, проведенные в различных контрольных точках корпуса №3, показали отсутствие внутренних источников вибрации. Было выяснено, что в исследуемом объекте отсутствуют энергоемкие механизмы циклического действия, которые могли бы провоцировать возникновение вибрации. При дальнейших исследованиях было выяснено, что основным источником вибрации расположен вне корпуса №3. Поэтому передающей средой является грунт. Грунт является довольно сложной средой, требующей записи громоздких моделей теории упругости и их трудоемкого численного анализа. В дополнение к математическим трудностям проблема осложняется неполнотой данных о геометрических характеристиках и упругих свойствах слоев грунта. В этом случае даже корректно сформулированные модели практически бесполезны вследствие их параметрической неопределенности. В силу этого использование традиционных численных подходов при моделировании распространения упругих волн, основанных на достаточно точных алгоритмах метода конечных элементов (МКЭ), метода граничных элементов (МГЭ), сеточных и вариационных подходах, приводит к избыточным вычислительным затратам при неизбежной потере точности из-за ошибок в задании параметров. Здесь же возникает и проблема выбора шага интегрирования исходных уравнений. Наличие в задаче процессов и объектов с существенно различными масштабами может привести к потере важных составляющих решения при некорректном задании численной сетки. Чрезмерная детализация может привести к недопустимому росту объема необходимых вычислений и ужесточению требований на производительность используемых ЭВМ. Динамические свойства грунта будут характеризоваться скоростями продольных и поперечных упругих волн в твердой среде, а также связанными с ними динамическими модулями упругости (Юнга и Пуассона) и скоростью распространения поверхностных волн Рэлея. Диссипативные свойства характеризуются энергетическим коэффициентом затухания  $\gamma$  или связанным с ним амплитудным коэффициентом  $\beta = \gamma / 2$ . Рассматриваются средние значения параметров для октавных диапазонов частот, при этом их величина может зависеть от частоты.

Измерения выполнялись с целью контроля вибрации, генерируемой внешним источником, в помещениях здания на соответствие допустимым уровням, установленным СНиП 32-02, и определении места расположения источника вибрации. При постановке физической модели и обработке экспериментальных данных учтены требования и рекомендации основополагающих нормативно-технических документов: ГОСТ 12.1.012-2004, СН 2.2.4/2.1.8.566-96, МР 2957-84 общетехнического характера. Вместе с тем, в нормативной документации конкретизированы требования к виду и составу подлежащих измерению и контролю параметров вибрации исходя из временного характера и спектрального состава вибрации, генерируемой внешним источником; определены требования к аппаратуре, условиям и правилам выполнения измерений; процедурам обработки результатов измерений и оценке их на соответствие допустимым значениям. При этом использован опыт, накопленный мировой практикой и отраженный в международном стандарте ИСО 2631/1 и немецком стандарте ДИН 4150/2.

В настоящем отчете использованы следующие нормативные документы:

ГОСТ 12.1.012-90 ССБТ. Вибрационная безопасность. Общие требования

ГОСТ 12.4.012-83 ССБТ. Вибрация. Средства измерения и контроля вибрации на рабочих местах. Технические требования

ГОСТ 17168-82. Фильтры электронные октавные и третьоктавные. Общие технические требования и методы испытаний

СНиП 32-02-2003. Метрополитены

Оценку вибрации в рабочих и жилых помещениях необходимо проводить в соответствии с правилами, изложенными в СНиП 32-02. Рассчитываемыми параметрами вибрации при этом являются:

– скорректированные максимальные и эквивалентные значения виброскорости  $v_{\max}$  и  $v_{eq}$ , м/с;

– максимальные и эквивалентные значения виброскорости  $\tilde{v}_{\max}$  и  $\tilde{v}_{eq}$  м/с, в октавных полосах со среднегеометрическими частотами 16, 31,5 и 63 Гц, наиболее характерных для метрополитена.

Расчет скорректированных и эквивалентных значений виброскорости следует выполнять по формулам ГОСТ 12.1.012, принимая весовые коэффициенты коррекции для вертикального и горизонтального направлений для случая общей вибрации.

В качестве дополнительного параметра вибрации могут использоваться уровни виброскорости  $L$  (дБ), определяемые соотношением вида  $L = 20 \lg (v / v_0)$ , где в качестве величины  $v$  выступают перечисленные выше параметры;  $v_0$  - пороговая величина виброскорости, равная  $5 \cdot 10^{-8}$  м/с.

При проектировании в зоне действия вибрации необходимо выполнение следующих условий:  $v \leq v_{\text{дон}}$ ,  $L \leq L_{\text{дон}}$ , где  $v$  и  $L$  - ожидаемые абсолютные величины и уровни виброскорости в оцениваемом здании соответственно в м/с и дБ;  $v_{\text{дон}}$  и  $L_{\text{дон}}$  - допустимые абсолютные величины и уровни виброскорости, принимаемые в соответствии с СНиП 32-02 по табл. 1.

Таблица 1

**Нормативные значения для оценки вибрационного воздействия на соответствие требованиям СНиП 32-02**

Помещения, здания	Допустимое значение							
	$v_{\text{max}} \cdot 10^4$ , м/с	$L_{\text{max}}$ , дБ	$v_{\text{eq}} \cdot 10^5$ , м/с	$L_{\text{eq}}$ , дБ	$\tilde{v}_{\text{max}} \cdot 10^4$ , м/с	$L_{\text{max}}$ , дБ	$\tilde{v}_{\text{eq}} \cdot 10^5$ , м/с	$L_{\text{eq}}$ , дБ
Жилые	1,1	67	3,5	57	2,3	73	7,4	63
Палаты больниц и санаториев	0,8	64	2,6	54	1,7	70	5,4	60
Административно-управленческие, общественные здания	2,8	75	9,0	65	5,9	81	18,8	71
Учебные заведения, читальные залы библиотек	2,0	72	6,4	62	4,2	78	13,4	68

При проверке данных в таблице условий в качестве ожидаемых величин вибрации в оцениваемом здании допускается принимать значения виброскорости, рассчитанные на поверхности грунта в месте расположения фундамента.



Общая схема и физическая модель системы "источник с виброизоляторами в верхнем слое грунта" представлена на рис. 2. В процессе измерений выяснено, что продольная волна, распространялась в грунте от источника вибраций к фундаменту корпуса №3, трансформировалась в корпусе в изгибную волну и на верхних этажах здания проявлялась как вибрация в полосе частот от 5 до 15 Гц. При этом виброскорость и виброускорение связаны с виброперемещениями следующим образом.

Виброперемещения:  $X = X_0 \sin \omega t$ , где  $X_0$  - амплитуда,  $\omega = 2\pi f$  - круговая частота,  $f$  - циклическая частота [Гц].

Виброскорость:  $\dot{X} = X_0 \omega \cos \omega t$ .

Виброускорение:  $\ddot{X} = -X_0 \omega^2 \sin \omega t$ .

Физически это означает, что когда виброперемещение достигает максимального (амплитудного) значения, тогда виброскорость равна нулю, а когда виброперемещение равно нулю виброскорость достигает наибольшего значения. Виброускорение находится в противофазе с виброперемещением, когда виброперемещения достигают наименьшего значения, то виброускорение наибольшее.

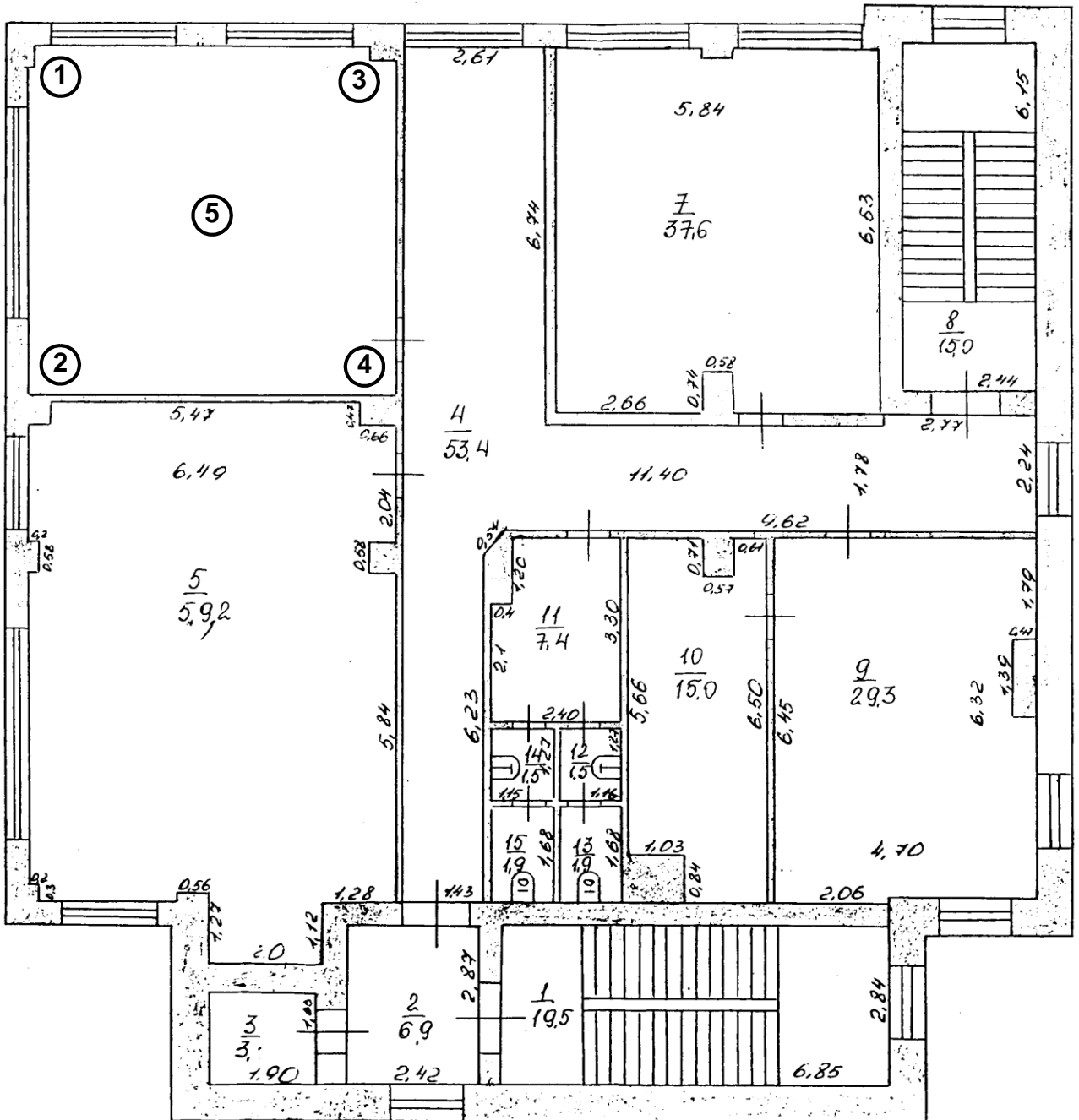


Рис.1. План этажа рабочего здания

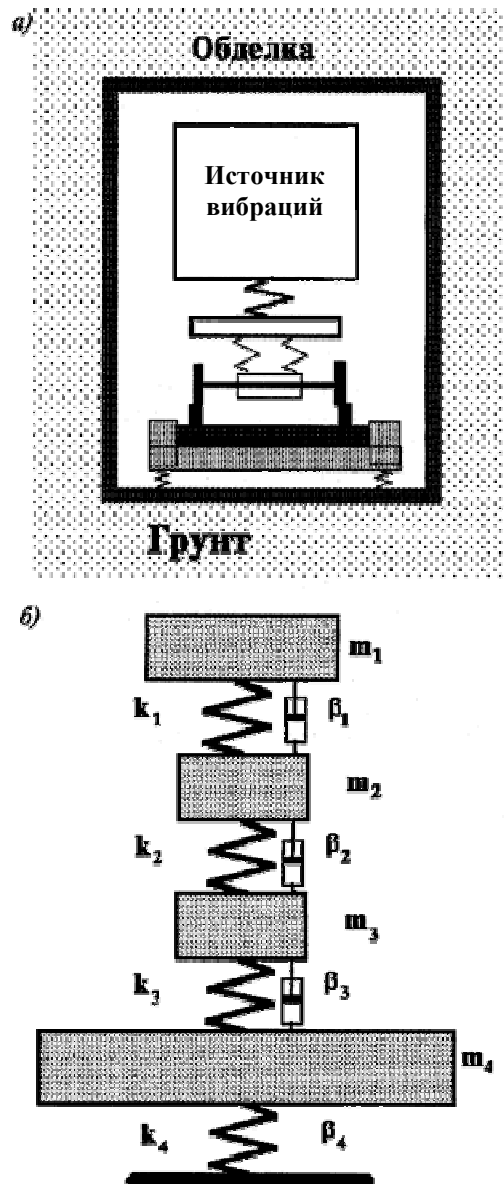


Рис. 2. Взаимодействующие вязкоупругие элементы в системе "источник – виброизоляционная конструкция верхнего слоя грунта": а) - механическая схема; б) - физическая модель конструкции исследуемого объекта (корпуса №3)

При проведении измерений использовалась аттестованная измерительная аппаратура отечественного производства: «Вибран – 2» и «Октава – 110 М». В измерительном тракте в качестве вибродатчиков использовались акселерометры типа AP-98 фирмы "Глобал-Тест" (Россия), типа D3143M1 фирмы "Ditran Instruments", типа 4332 фирмы "Bruel & Kjaer" (Дания).

Для выполнения частотного анализа применялись цифровые анализаторы фирм "Svantek" (Польша) - типы SVAN 912AE, SVAN 946, SVAN 947, "Октава+" (Россия) - тип Октава 101В, "Bruel & Kjaer" (Дания) - тип 2260, "Hewlett Packard" (США) - тип HP 3569А.

Первичные измерительные преобразователи регистрировали виброперемещения, виброскорость и виброускорения.

### 3. ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Основные измерения параметров вибраций (виброперемещения и виброскорость) проводились 4,10,11,12,17 и 23 марта 2011 года на конденсатном баке, находящемся на территории завода НИТЕЛ, на прилегающей территории, по пути распространения поверхностных волн, в различных точках помещений девятого этажа корпуса №3.

Рассмотрим результаты измерений, проведенные на баке (рис.3) и синхронно в корпусе №3, на девятом этаже в контрольной точке 5, расположенной в центре углового рабочего помещения. Контрольная точка 5 выбрана базовой, так как в ней были зарегистрированы наибольшие виброперегрузки. Первая контрольная точка 1 на баке была выбрана ближайшей к трубопроводам бака. Трубопроводы на баке расположены в наибольшем удалении от исследуемого объекта (корпуса №3).

На рис. 4 представлены спектры вибросигнала в контрольной точке 1 бака, а на рис. 5 – спектры вибросигнала в рабочем помещении девятого этажа корпуса №3. Условно будем считать вибросигнал на баке входным, а в указанном помещении выходным (рис. 5). На рис. 4 отчетливо проявляется гармоника 12 Гц, а из низких частот гармоники 5 и 8 Гц. В выходном сигнале также проявляются гармоники 5 и 8 Гц, а гармоника 12 Гц хотя и проявляется, но на 40 децибел ниже. Этот эффект обусловлен собственными частотами самого исследуемого объекта. Вид спектров входного и выходного сигналов обусловлен различными типами измерительной аппаратуры. Входной сигнал (рис.4) получен с использованием измерительного комплекса «Вибран – 2», выходной – «Октава - 110 М».

Причем анализ спектров выходного сигнала проводился двумя способами: с помощью однооктавных фильтров (слева) и третьоктавных (справа).

На рис. 6 представлен спектр входного сигнала, измеренного в контрольной точке 2. Наибольшая амплитуда соответствует гармоникам 10 Гц и 8 Гц. В выходном сигнале они также проявляются очень отчетливо (рис 7).

На рис. 8 представлен спектр вибросигнала в контрольной точке 7 бака. Отчетливо проявляется гармоника 15 Гц. Она же ярко выражена в спектре однооктавного фильтра (рис.9) выходного сигнала. Однако в спектре, полученном с помощью третьоктавных фильтров, ярче проявляется гармоника 12,5 Гц, что обусловлено, как говорилось ранее, характеристиками самого исследуемого объекта (рис.9). Поскольку уровни вибрации во входном сигнале ниже 12 Гц и малы по амплитуде (несколько микрометров), то в выходном они совсем не появляются.

На рис. 10 представлен спектр входного сигнала в точке 8. Поскольку точка выбрана на более «мягкой» основе, верхней обечайке бака, рядом с консолью, то уровни гармоник более сглаженные по сравнению с точкой 7. Но в выходном сигнале присутствуют гармоники от 7 до 12 Гц на 40 децибел, превышающие остальные (рис.11).

Далее рассмотрим спектры входных сигналов на баке в контрольных точках 3, 4, 5, расположенных наиболее близко к исследуемому объекту. В точке 3 проявляются гармоники 15 и 16 Гц (рис.12). Они же проявляются и в выходном сигнале (рис.13). Кроме того, присутствуют в выходном сигнале гармоники 7 и 8 Гц достаточно высокой амплитуды, обусловленные амплитудно-частотными характеристиками объекта исследования. Аналогичные процессы происходят в точке 4 на баке, где опять превалирует гармоника 15 Гц (рис.14). Эта же гармоника выделяется в выходном сигнале, представленном на рис. 15. Наиболее четко выделяется в спектре, полученном с помощью третьоктавного фильтра.

В самой крайней точке бака 5 спектральный состав вибросигнала очень насыщен низкочастотными гармониками, начиная с 5 Гц (рис. 16). В выходном сигнале проявляется почти сплошной спектр, где преобладают низкочастотные гармоники (рис.17).

В контрольной точке 6 (рис. 3) преобладают гармоники 5, 13, 14, 15, 16 Гц (рис 18). Но в выходном сигнале проявляется только гармоника 5 Гц (рис.19). Чем это вызвано? Здесь имеют место две причины. Высокочастотные гармоники частично поглощаются в среде распространения, а самое главное – гармоника частотой 5 Гц наиболее близка к собственной частоте объекта. Аналогичные результаты получены в точке 9 на баке (рис.20). Поскольку по своему местоположению они очень близки, то в выходных сигналах обеих точек 9 и 10 спектры идентичны (рис.19, 21). В контрольной точке 10 измерения проводились неоднократно и выявлено присутствие гармоник 11, 12 Гц высокой амплитуды (рис.22, 24). Учитывая то, что эта контрольная точка выбрана около лестницы, где повышенная жесткость, эти гармоники на 4 – 5 децибел превосходили более низкочастотные. Однако в выходных сигналах преобладали низкочастотные (рис. 23, 25). Следует отметить, что входные вибросигналы являются нестационарными и поэтому измерения в каждой точке проводились многократно с последующим интегрированием для получения достоверных результатов.

Измерения параметров вибрации в рабочем помещении девятого этажа корпуса №3 проводились с помощью прибора «Октава – М» в трехкоординатной системе  $X, Y, Z$ . Измерялась вибрация продольная, поперечная и вертикальная. Было выявлено, что спектральный состав вибросигналов по всем трем координатам идентичен. Небольшое отличие в том, что уровни гармоник вертикальной вибрации по оси  $Z$  на 2 – 3 децибела превышают уровни соответствующих гармоник по осям  $X$  и  $Y$ .

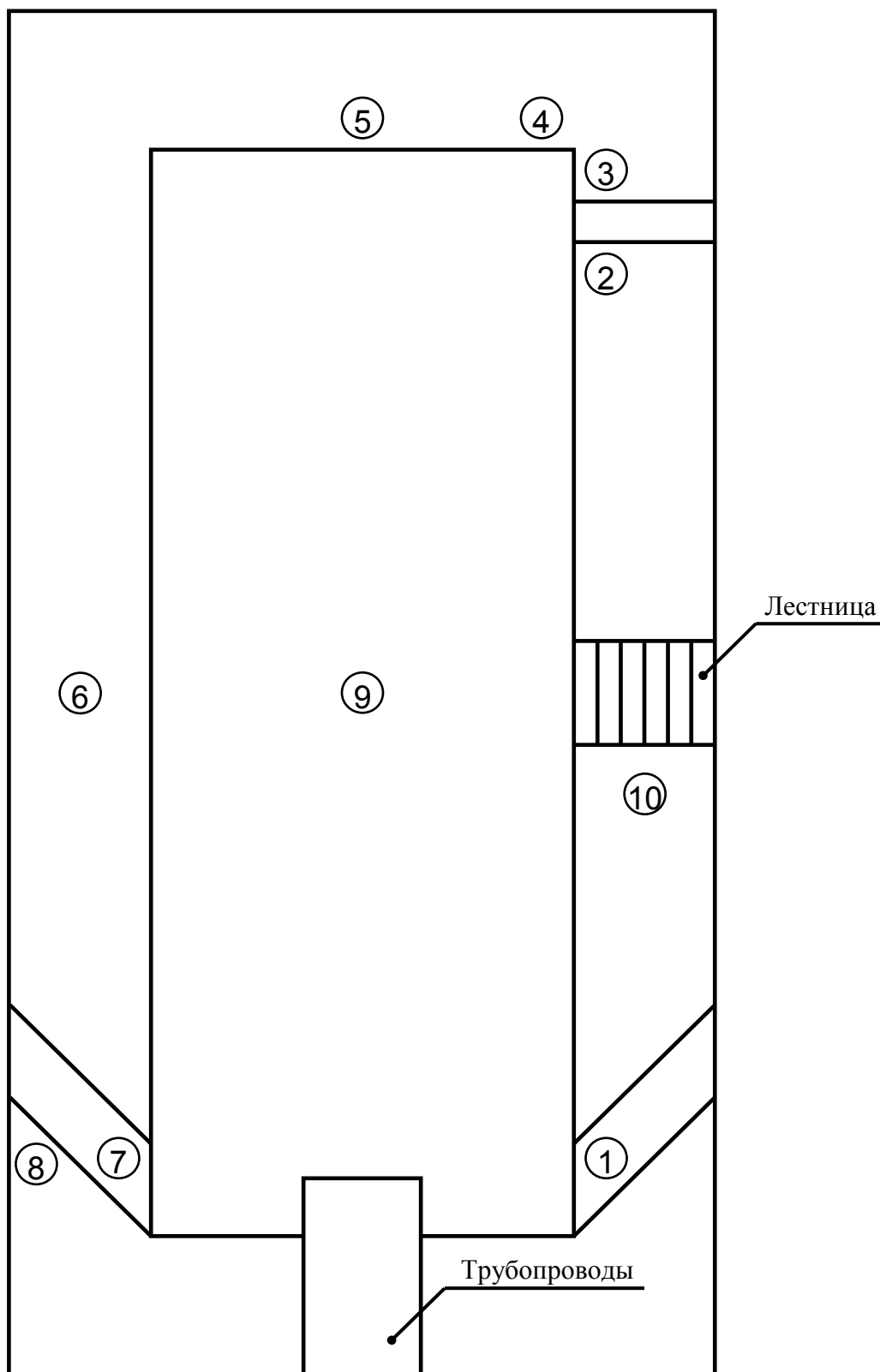


Рис. 3. Конденсатный бак с обозначением контрольных точек

Анализ спектров этих измерений выявил явную корреляцию вибросигналов на конденсатном баке и рабочих помещениях корпуса №3, на верхнем этаже. Для снижения вибрации в рабочих помещениях необходимо снизить уровень виброактивности в основном источнике – конденсатном баке.

Кроме этого выявлены собственные частоты корпуса №3, они соответствуют частотам 5-15 Гц. Поэтому в этом диапазоне они всегда проявляются в моменты, когда на конденсатном баке нестационарный режим работы с широким спектром гармонических составляющих. Высокочастотные гармоники, выше 20 Гц, которые могут присутствовать при нестационарных процессах в конденсатном баке, в корпусе №3 не обнаружены.

Измерения вибрации, проведенные в корпусе №3 при стационарных режимах работы конденсатного бака, а также при его отключении показали наличие вибрации на частотах 5-7 Гц, что на 1 – 2 порядка ниже чем при нестационарных режимах работы конденсатного бака. Уровни вибрации от остальных источников – движения транспорта по проспекту Гагарина и по прилегающей территории, ветровых нагрузок, возможных внутренних механических перегрузок на 20 и более децибел ниже по сравнению с работой конденсатного бака в нестационарных режимах. Поэтому их значимость пренебрежимо мала.

Дальнейшие измерения в рабочем помещении корпуса №3 (рис.1) показали отсутствие высокочастотных гармоник, но усиление низкочастотных, которые обуславливаются конструктивными особенностями исследуемого здания.

#### 4. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО СНИЖЕНИЮ ВИБРАЦИИ И ШУМА В РАБОЧИХ ПОМЕЩЕНИЯХ КОРПУСА №3

Поскольку основным источником вибрации с достоверной вероятностью 95% является конденсатный бак, работающий в нестационарных режимах, то наиболее эффективной и менее дорогостоящей виброзащитой производственного здания является прорытие траншеи на глубину промерзания грунта и засыпка ее вибропоглощающими материалами. Этими материалами могут быть керамзит, шлак, торф и т.п. Однако, надо при этом обеспечить строгую гидроизоляцию, так как при морозных зимах такая защита малоэффективна. Одной из стенок траншеи может быть фундамент самого бака. Ширина траншеи порядка полутора – двух метров. Для справки ниже приведена таблица физико-механических свойств грунтов, в которых распространяются продольные и поверхностные волны.



**Значения упругих, массовых и диссипативных параметров  
различных грунтов (ВСН 211-91)**

Наименование грунта	Плотность	Скорость распространения продольных упругих волн	Скорость распространения поперечных упругих волн	Коэффициент поглощения
	кг/м <sup>3</sup>	м/с	м/с	
Насыпной грунт, уплотненный со степенью влажности $G < 0,5$	1600	300	100	0,1
Песок крупный и средней крупности со степенью влажности $G < 0,8$	1700	500	150	0,1
Суглинок тугопластичный и плотнопластичный	1700	600	250	0,15
Глина твердая и полутвердая	1700	1500	350	0,15
Лесс, лессовидный суглинок при показателе просадочности $\Pi = 0,17$	1500	400	150	0,15-0,2
Грунт при относительном содержании растительных остатков $q > 0,6$ , торф	1000	200	80	0,2
Илы супесчаные, глинистые	1500-1800	1100	300	0,2
Водонасыщенный грунт ниже уровня грунтовых вод при степени влажности $G > 0,9$	2000	1750	250	0,1
Насыпные рыхлые пески, супеси, суглинки и другие неводонасыщенные грунты	1400-1700	100-300	70-150	0,1-0,2
Гравелисто-песчаные	1600-1900	200-500	100-250	0,1
Песчаные маловлажные	1400-1700	150-900	130-500	0,05-0,1
То же, средней влажности	1600-1900	250-1300	160-600	0,05-0,1
То же, водонасыщенные	1700-2200	300-1600	200-800	0,05-0,1
Супеси	1600-2000	300-1200	120-600	0,1-0,15
Суглинки	1600-2100	300-1400	140-700	0,15-0,2
Глинистые влажные, пластичные	1700-2200	500-2800	130-200	0,2
То же, плотные, полутвердые	1900-2600	2000-3500	1100-2000	0,15
Лесс и лессовидные грунты	1300-1600	380-400	130-140	0,15
<b>ПОЛУСКАЛЬНЫЕ И СКАЛЬНЫЕ ПОРОДЫ</b>				
Мергель	1800-2600	1400-3500	800-2000	0,05-0,1
Песчаник рыхлый	1800-2200	1500-2500	800-1700	0,1
То же, плотный	2000-2600	2000-4300	1100-2500	0,05-0,1
То же, сильновыветренный	1700-2200	1000-3000	600-1800	0,1
Известняк прочный	2000-3000	3000-6500	1500-3700	0,05
Глинистые сланцы	2000-2800	2000-5000	1200-3000	0,05-0,1
Изверженные и метаморфические породы (гранит, гнейс, базальт, диабаз и пр.) трещиноватые	2400-3000	3000-5000	1700-3000	0,05-0,1
То же, нетрещиноватые	2700-3300	4000-6500	2700-4300	0,03-0,05

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

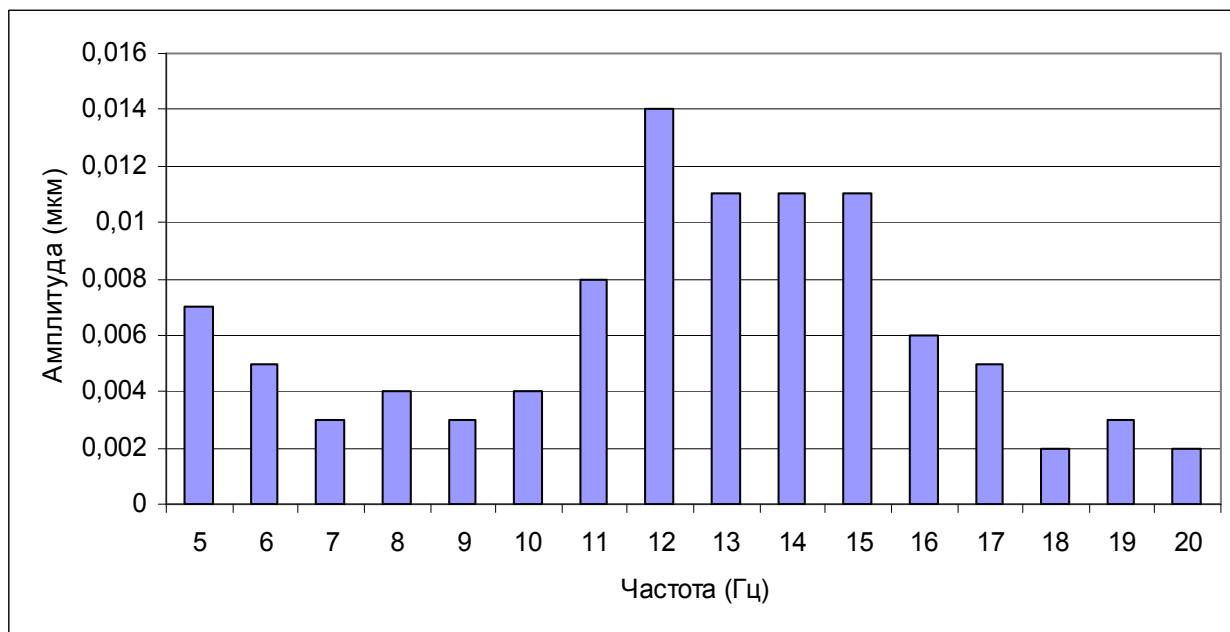


Рис. 4. Спектры вибросигнала в контрольной точке 1 бака

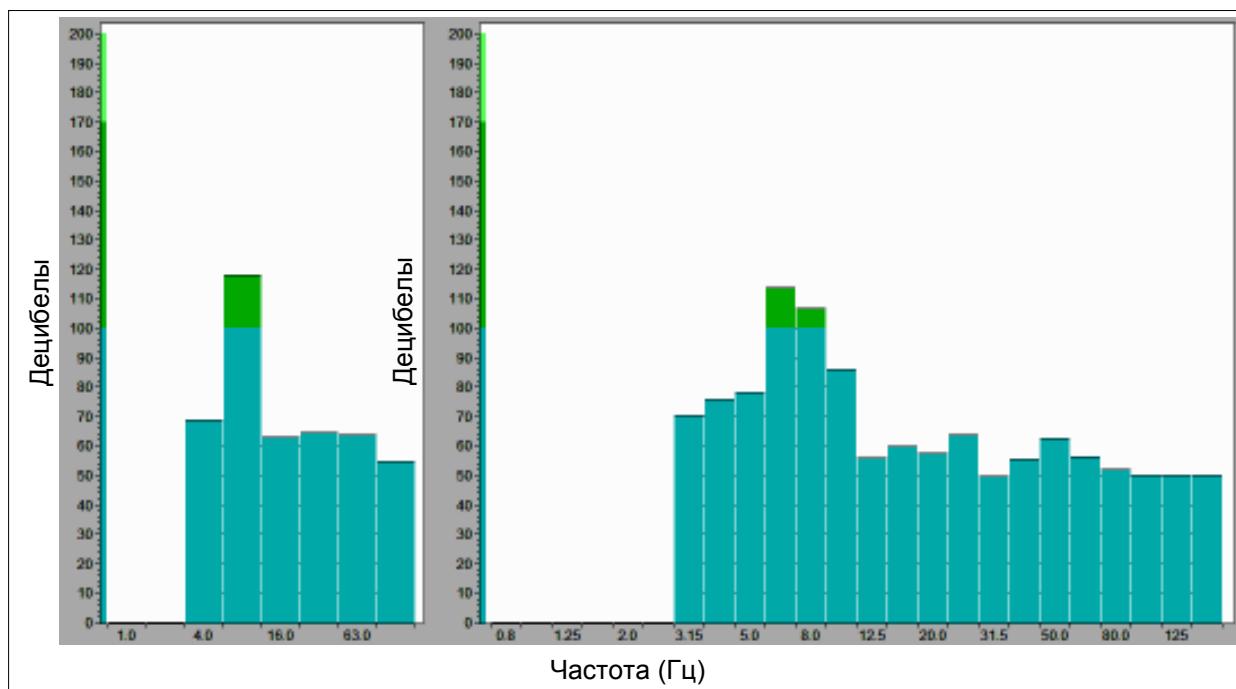


Рис. 5. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

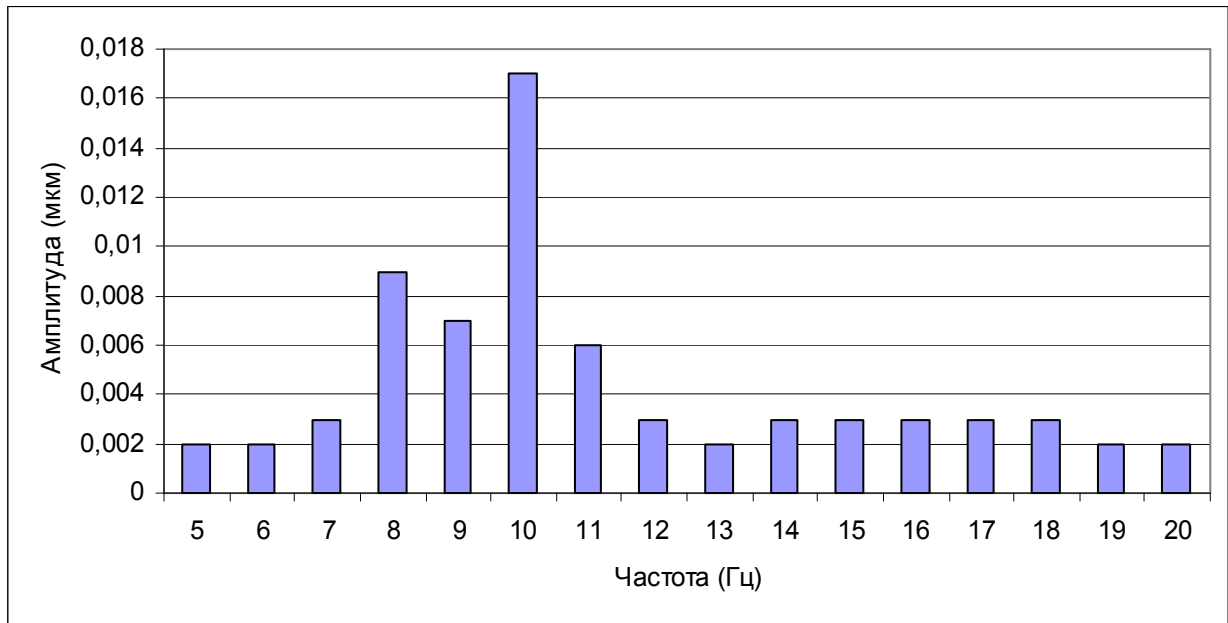


Рис. 6. Спектры входного сигнала в контрольной точке 2 бака

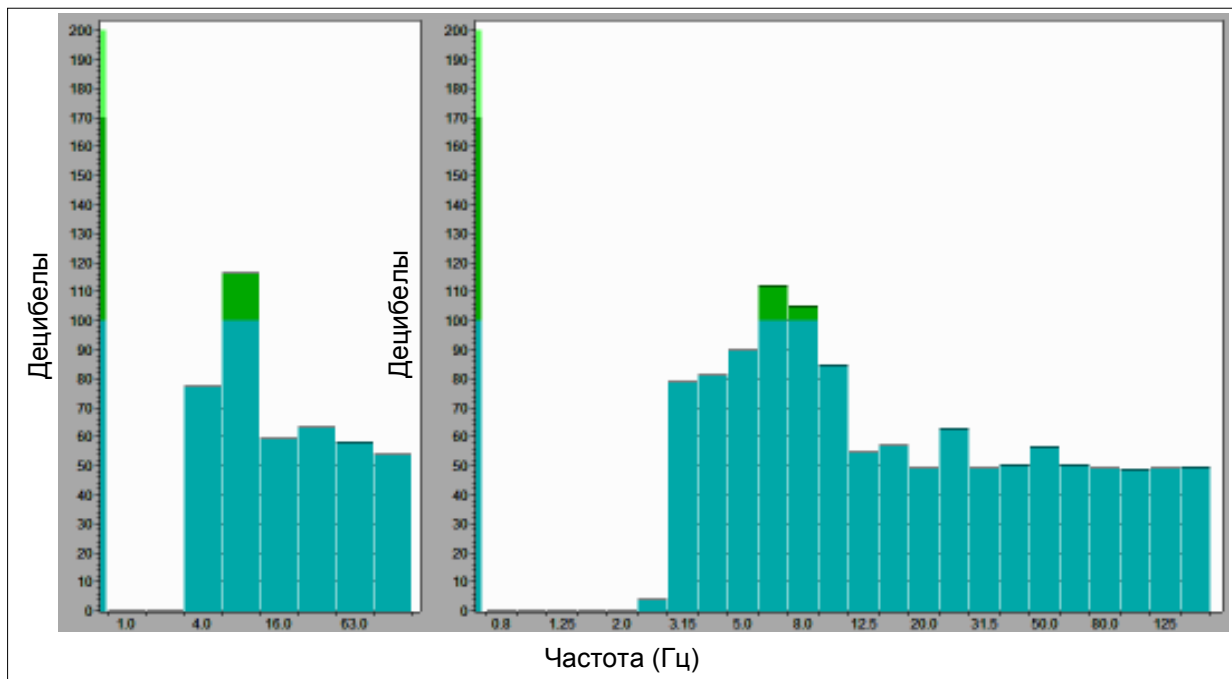


Рис. 7. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

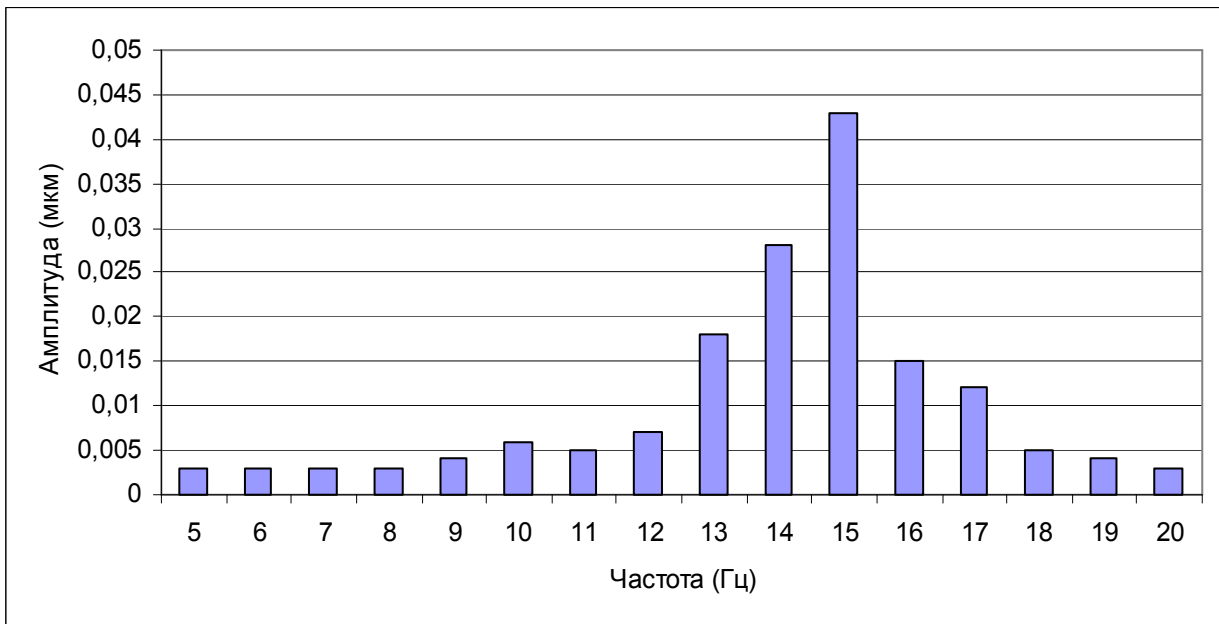


Рис. 8. Спектры входного сигнала в контрольной точке 7 бака

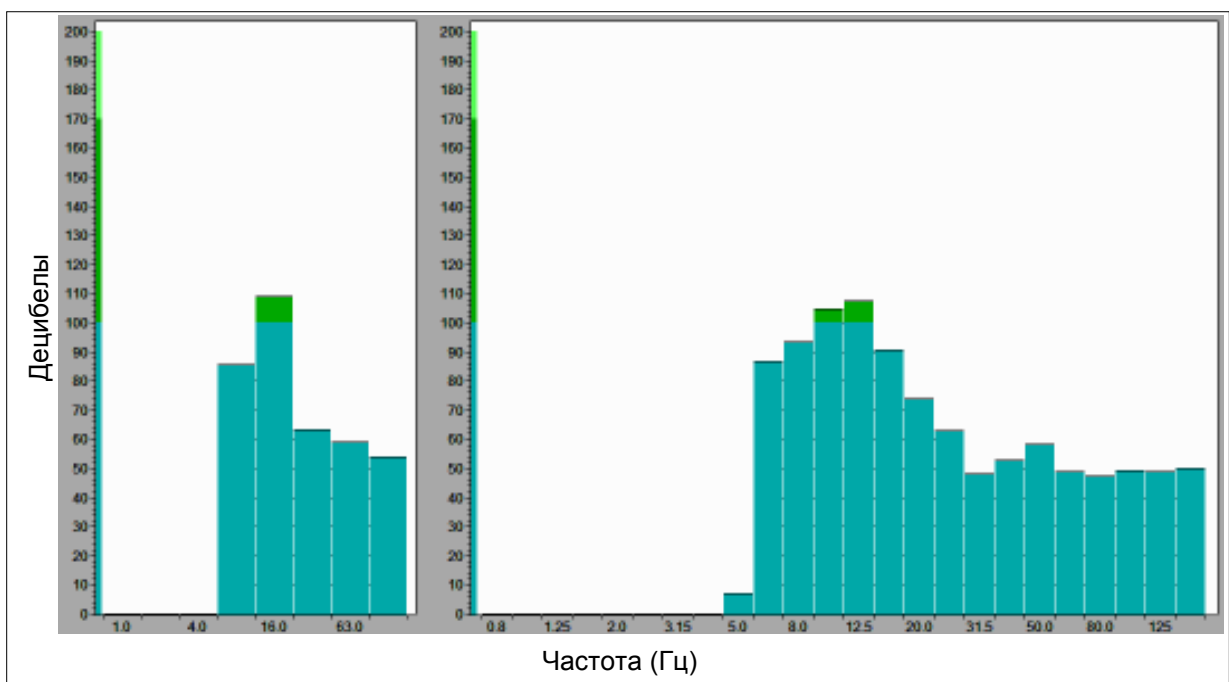


Рис. 9. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

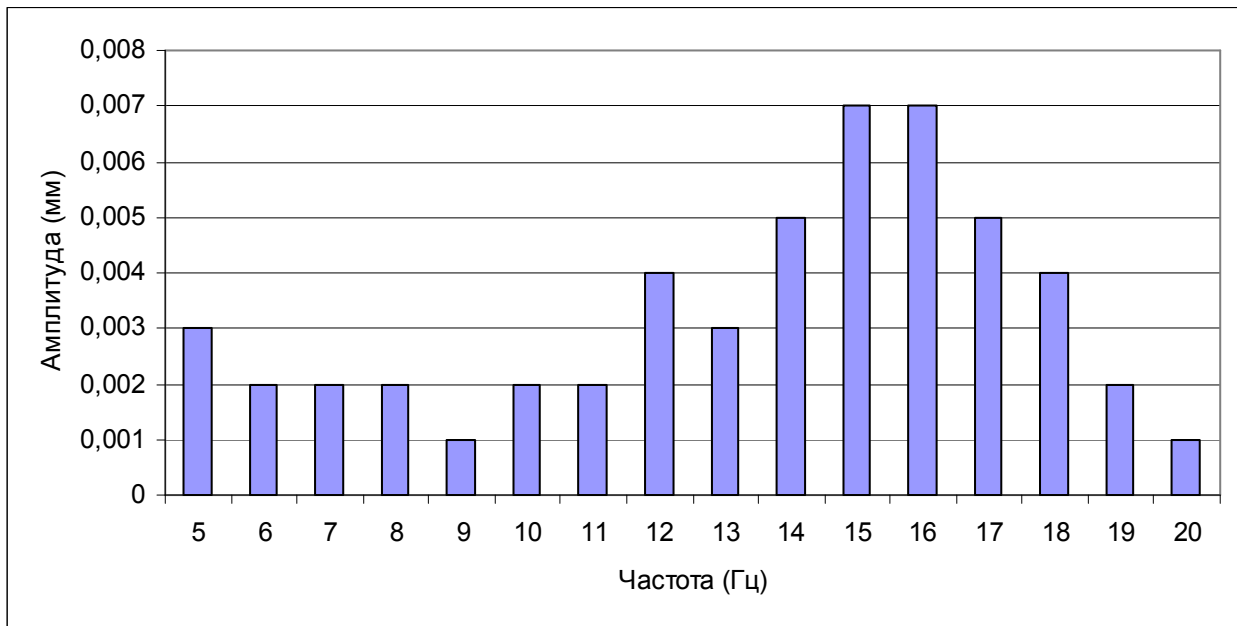


Рис. 10. Спектры входного сигнала в контрольной точке 8 бака

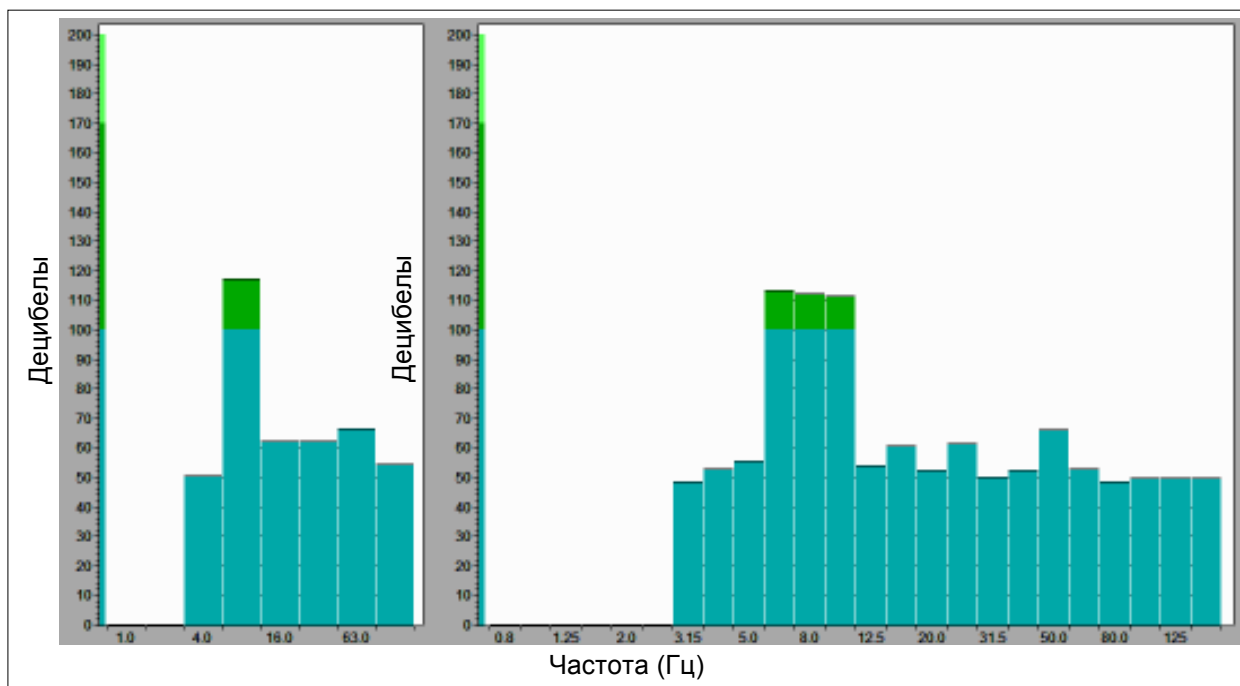


Рис. 11. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

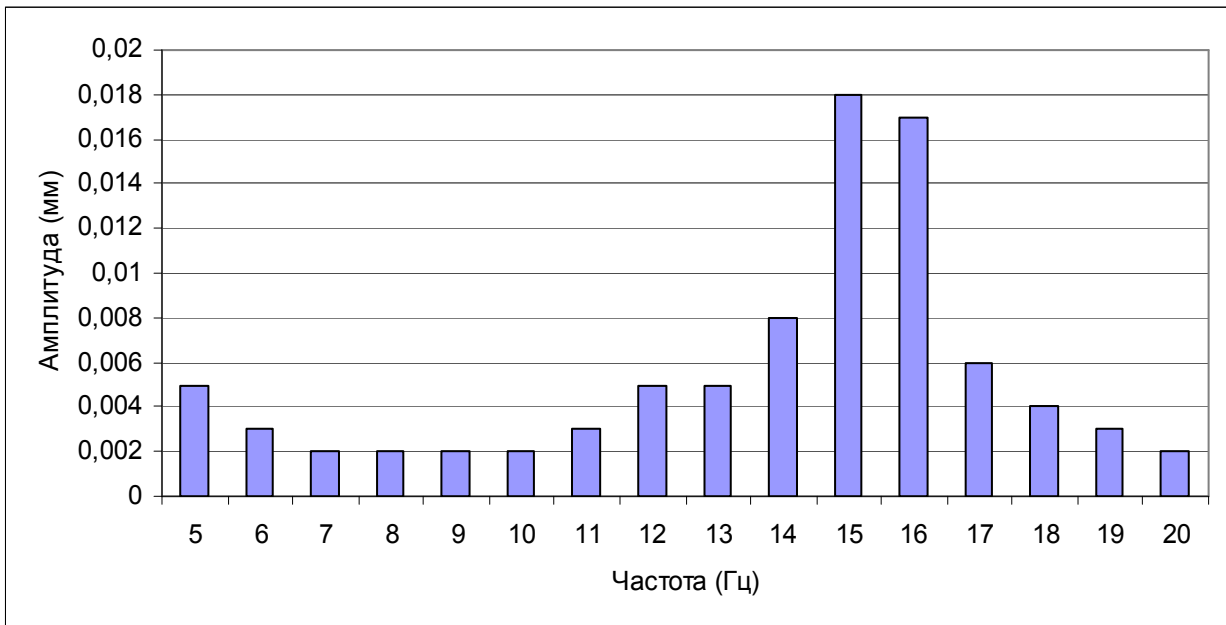


Рис. 12. Спектры входного сигнала в контрольной точке 3 бака

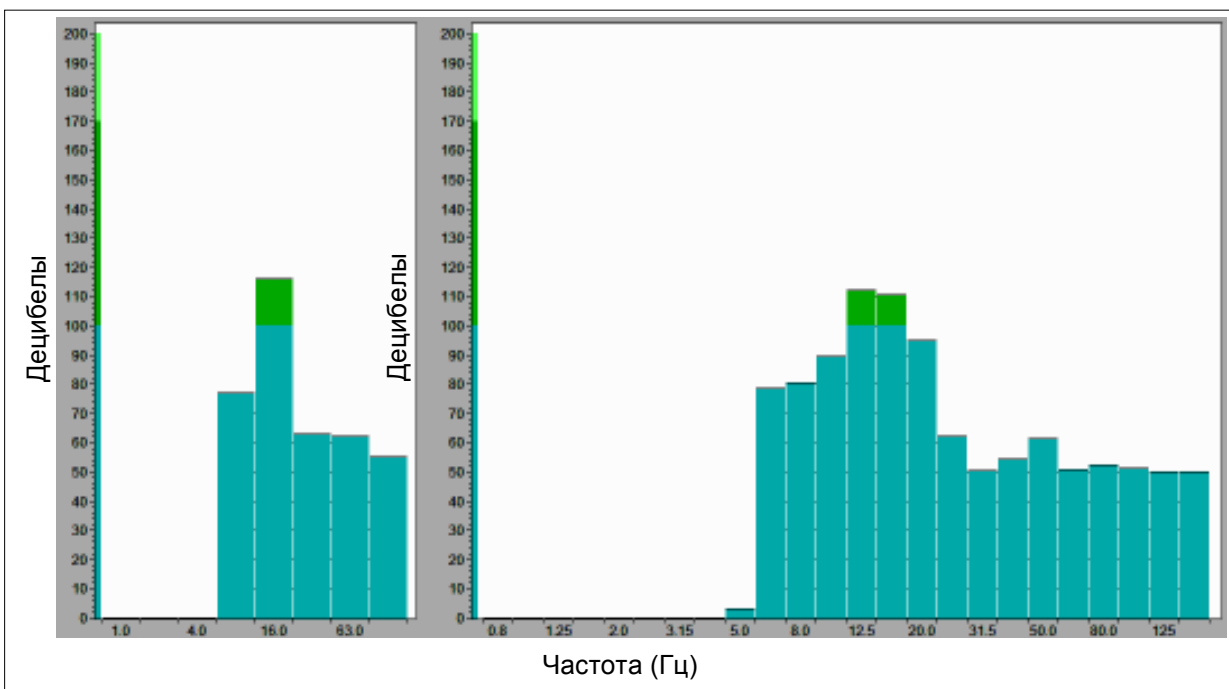


Рис. 13. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

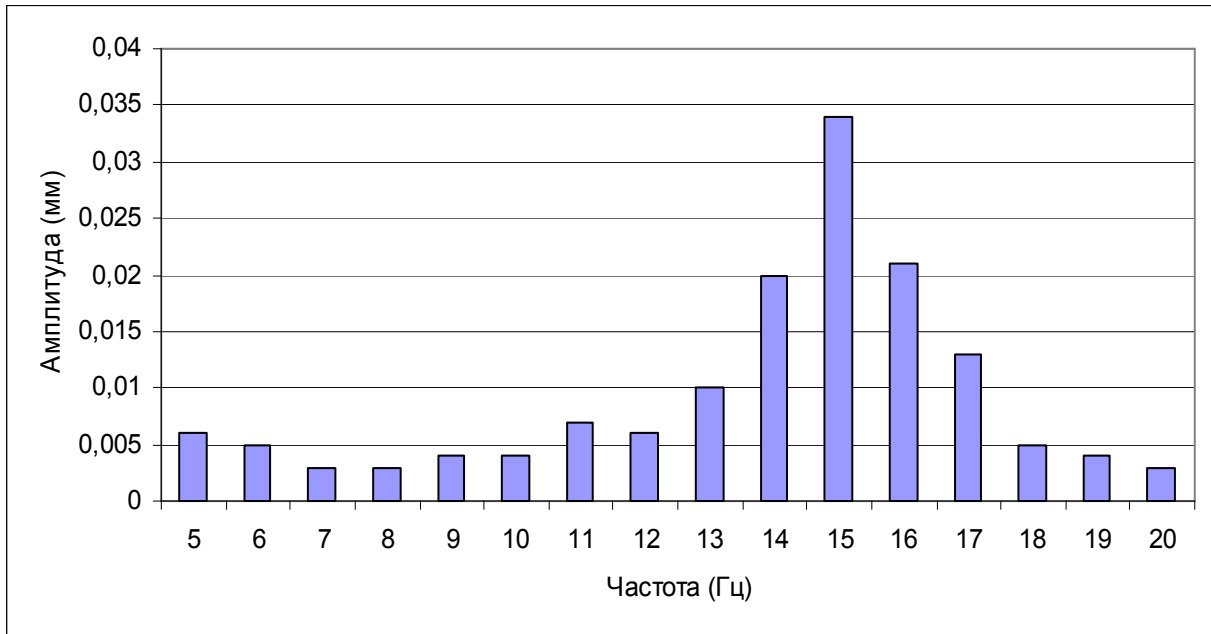


Рис. 14. Спектры входного сигнала в контрольной точке 4 бака

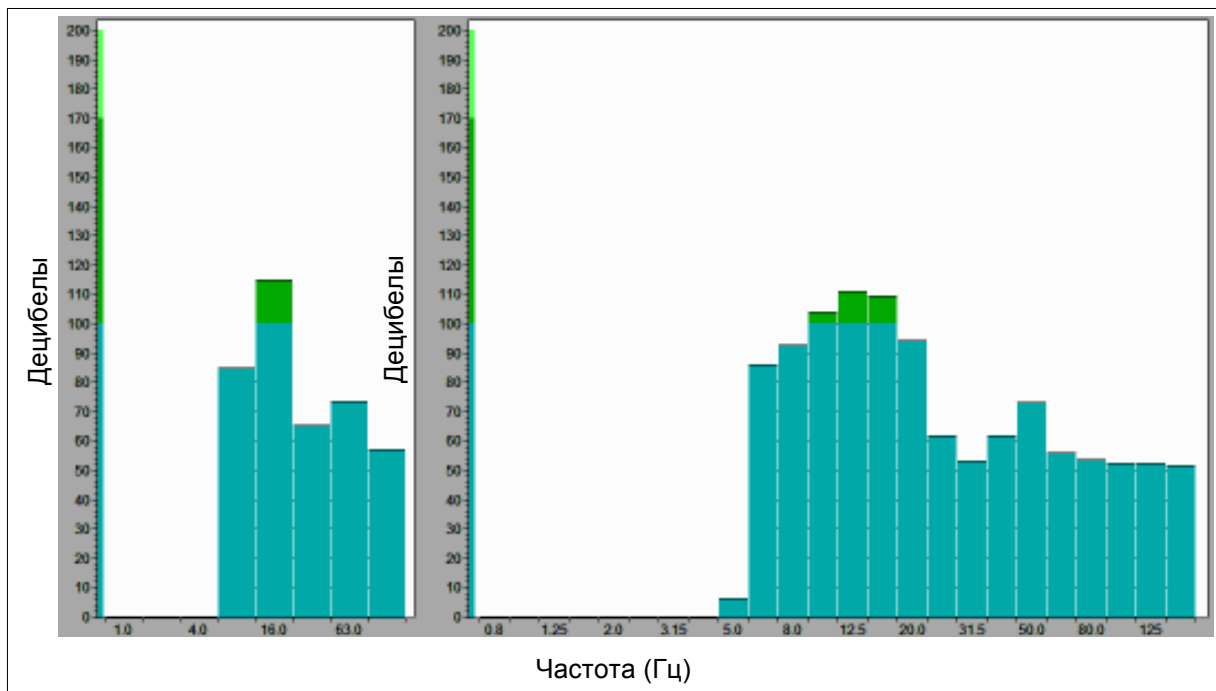


Рис. 15. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

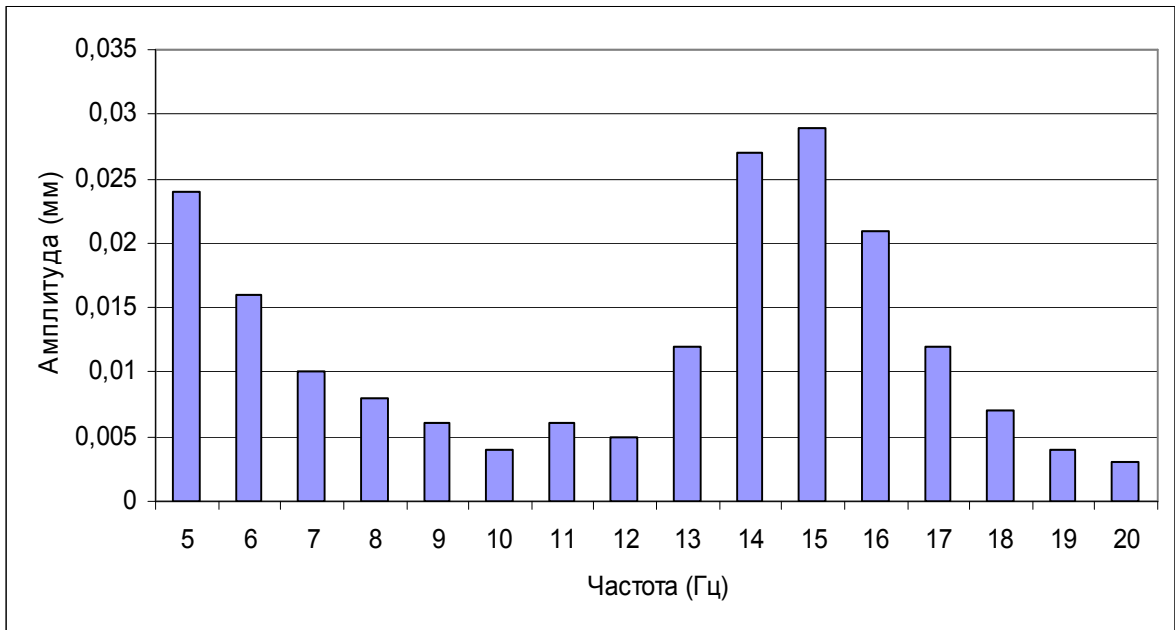


Рис. 16. Спектры входного сигнала в контрольной точке 5 бака

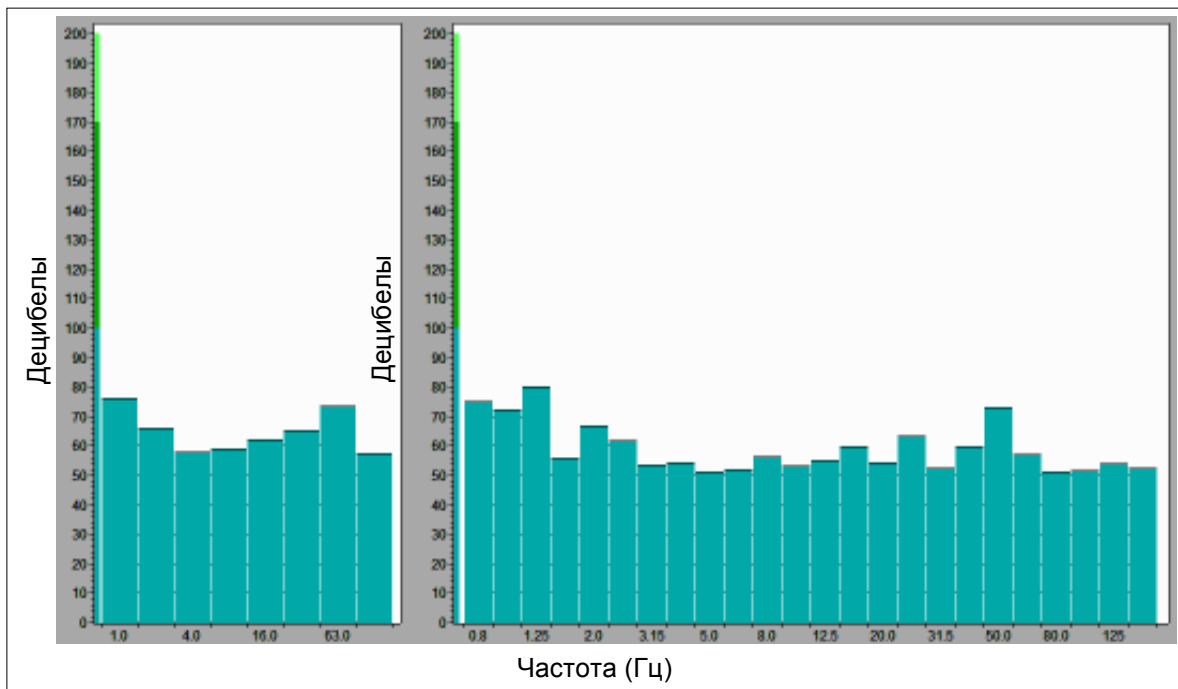


Рис. 17. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3



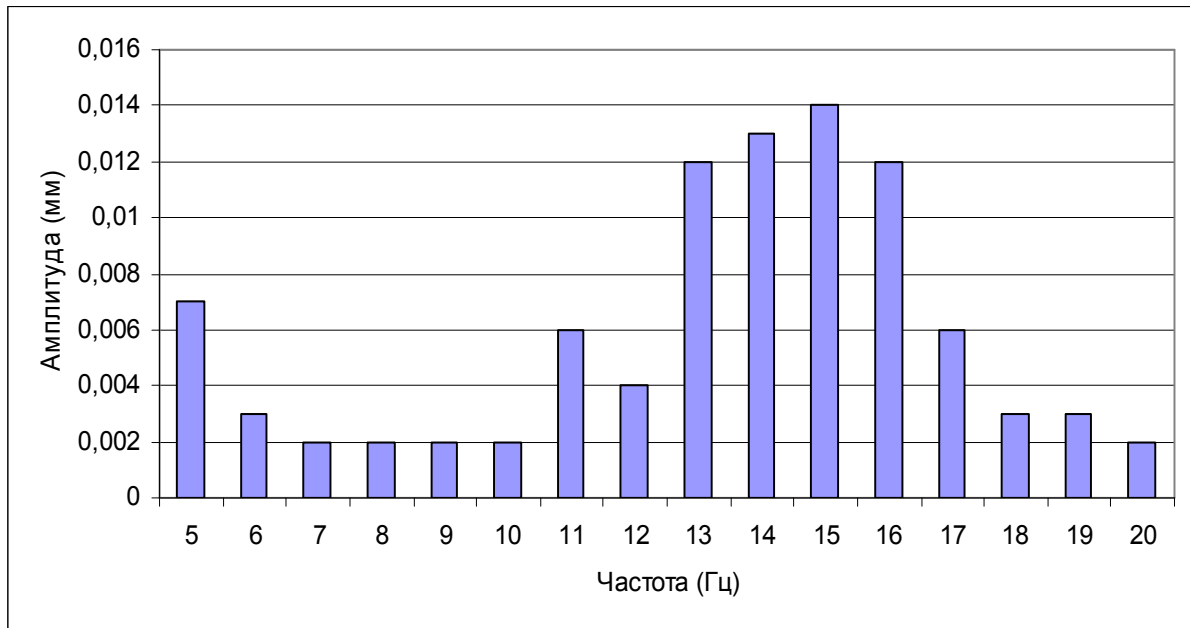


Рис. 18. Спектры входного сигнала в контрольной точке 6 бака

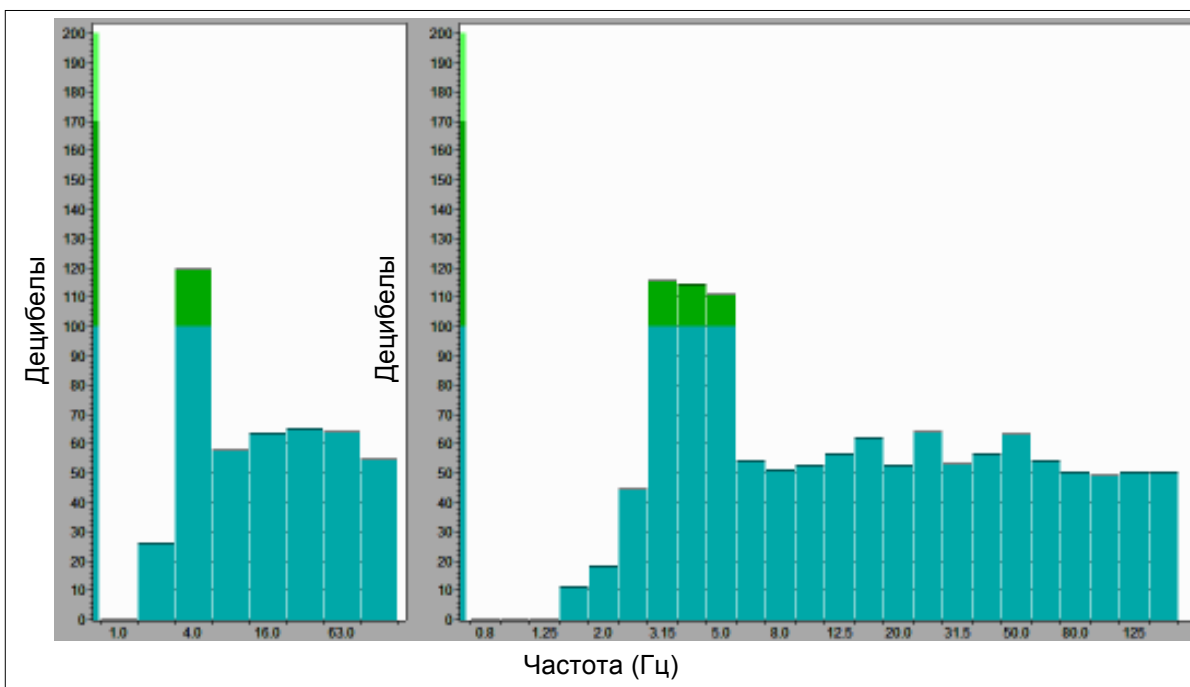


Рис. 19. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

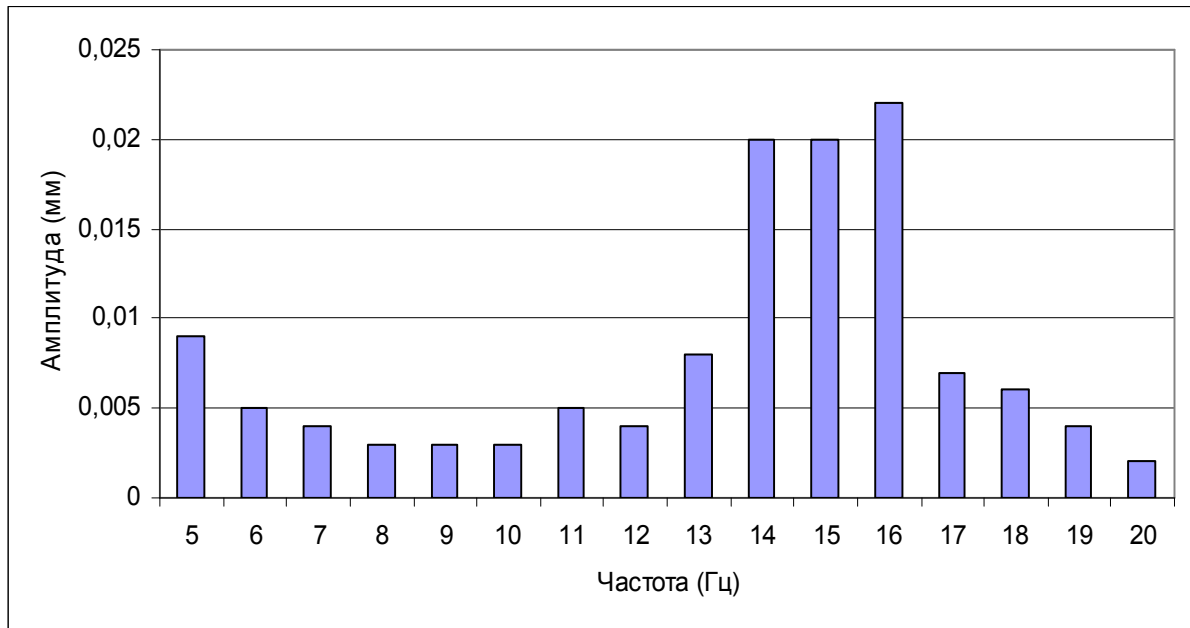


Рис. 20. Спектры входного сигнала в контрольной точке 9 бака

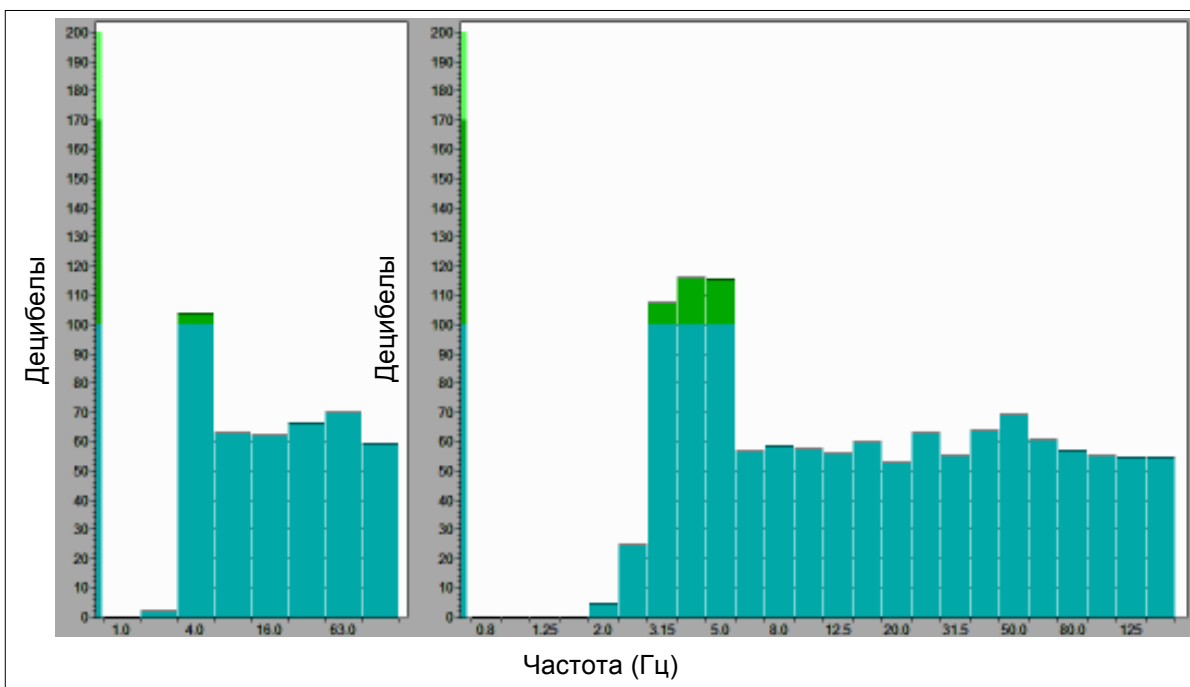


Рис. 21. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

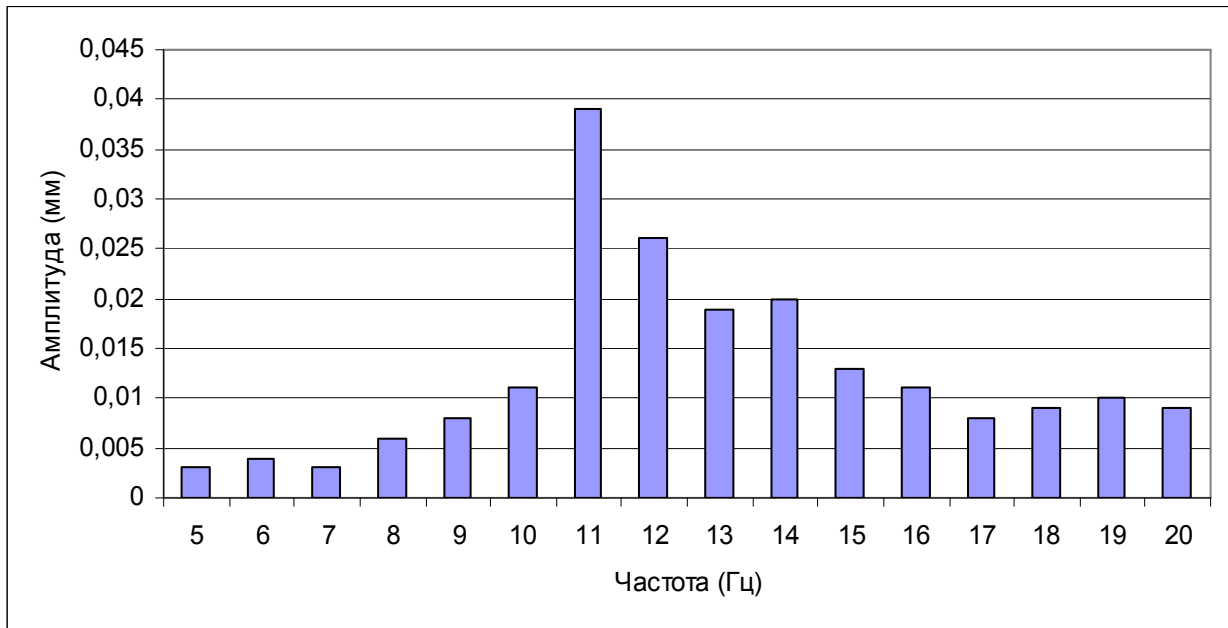


Рис. 22. Спектры входного сигнала в контрольной точке 10 бака

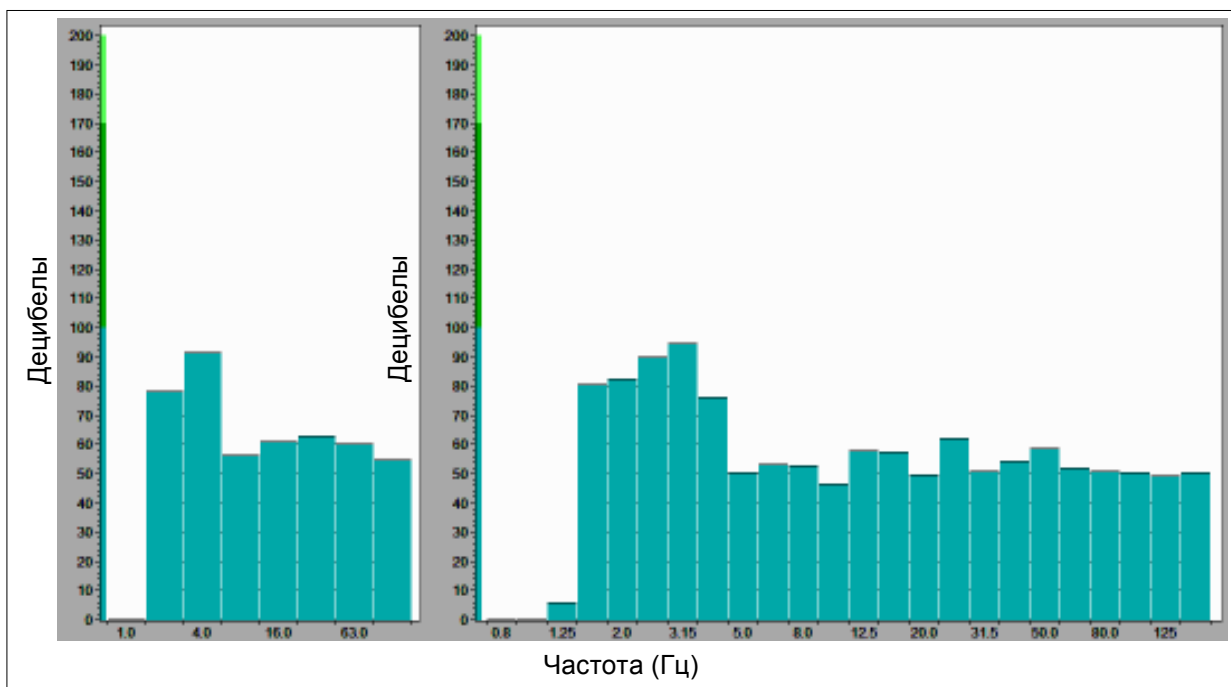


Рис. 23. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

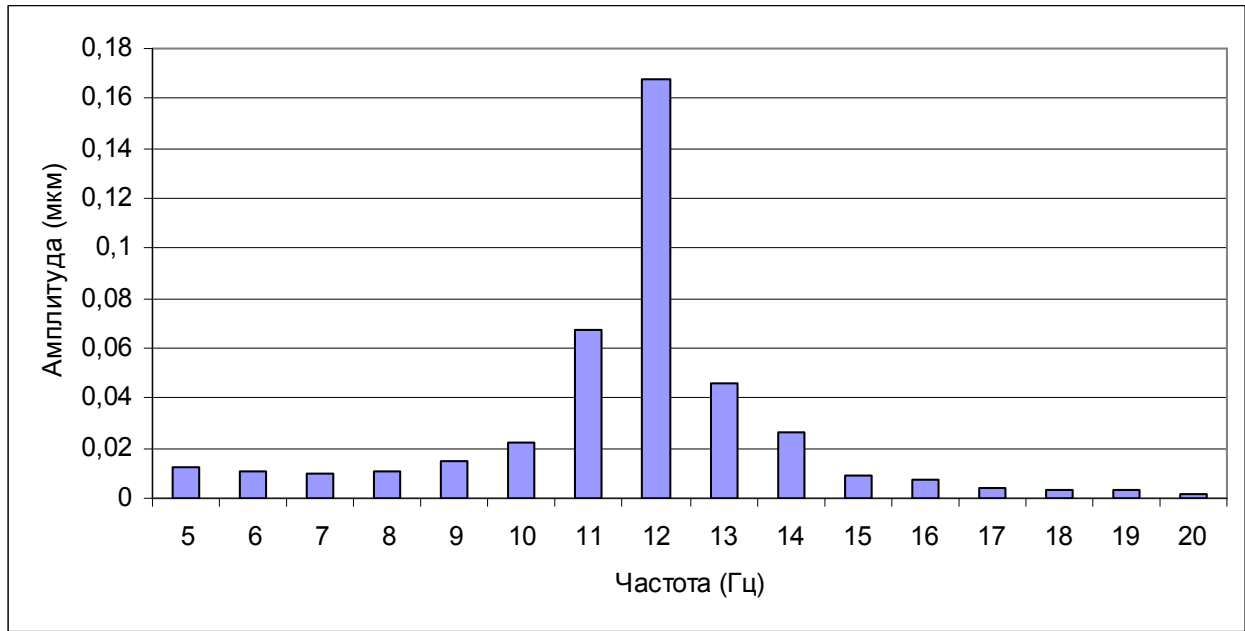


Рис. 24. Спектры входного сигнала в контрольной точке 10 бака

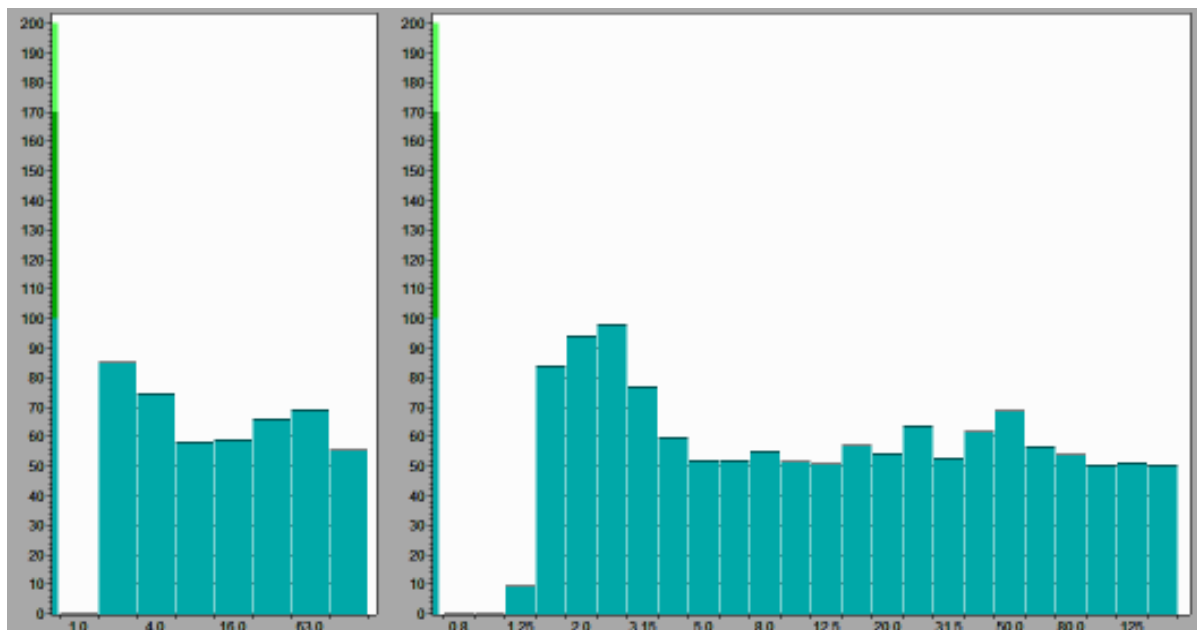


Рис. 25. Спектры вибросигнала в рабочем помещении 9 этажа корпуса № 3

## 5. ВЫВОДЫ

Измерения параметров вибрации проводились неоднократно в различные времена суток. Установлено, что, с вероятностью 95%, причиной повышенной виброактивности в рабочих помещениях корпуса №3 является нестационарный режим работы конденсатного бака и котельной установки, расположенных на территории завода «Нител». Кроме этой основной версии имеются дополнительные предположения относительно возможных источников вибрации. К таковым можно отнести движение транспорта по проспекту Гагарина, ветровые нагрузки на здание, кинематические возмущения, передающиеся на здание от водяных и газовых магистралей, но их значимость на 1 – 2 порядка ниже основного источника – конденсатного бака.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А., Ложкин Ф.В. Синев А.В. Предварительная оценка статической жесткости обечаек гидропор силовых агрегатов.// Проблемы машиностроения и надежности машин, 2001. № 3, С. 99-103.
2. Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В. Ложкин Ф.В. Исследования гидравлических вибропор с различными рабочими жидкостями.//Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002, №2 С. 33-36.
3. Адамов В.Н., Гольштейн Б.Г., Пятов В.Л., Снижение вибрации корпуса грунтоуплотняющих машин ударного действия// Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М.: ИМАШ АН СССР, 1977.
4. Агафонов В.К., Бакланов В.С., Вуль В.М., Попков В.И., Попов А.В. Исследование динамических и виброакустических характеристик самолета и двигателя методом тарированного тестирования.// Доклады VIII научно-техн. конф. по аэроакустике, ЦАГИ, М., 1990. С. 141-144.
5. Алабужев П.М., Гритчин А.А., Ким Л.И. и др. Виброзащитные системы с квазиулевым жесткостью. Под ред. Рагульскиса К.М. Л. Машиностроение, 1986, 96 с.
6. Алабужев П.М., Гритчин А.А., Степанов П.Т., Хон В.Ф. К вопросу испытаний виброзащитных систем. //Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М. : ИМАШ АН СССР, 1977.
7. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М. Наука. 1985. 328 с.
8. Айрапетов Э.Л. Денисенко Т.И., Круглый А.Л., Перминов М.Д. Экспериментальное исследование взаимодействия вибрационного и акустического полей в салоне легкового автомобиля.// Всесоюзное научное совещание по проблемам улучшения акустических характеристик машин.: материалы ИМАШ АН СССР, М. 1988. С. 91-92.

9. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979, 296 с.

10. А.С. № 821988 (СССР). Устройство управления вибростендом// Гордеев Б.А., Золин В.В., Лейфер Л.А. Заявлено 29.03.79, № 2768252/25-28, опубл. 15.04.81. Бюл. №14.

11. А.С. № 930236 (СССР). Устройство для управления вибростендом// Гордеев Б.А., Золин В.В., Беленова Н.А. Заявлено 13.05.80, № 2924293/18-24, опубл. 23.05.82. Бюл. № 19.

12. А.С. № 993218 (СССР). Устройство для формирования спектра случайных вибраций// Гордеев Б.А., Китаев В.Б., Мальцев А.А., Сергеев Е.И. Заявлено 2.06.81, № 3323762/8-24, опубл. 30.01.83. Бюл. №14.

13. А.С. № 1087777 (СССР). Устройство для виброакустического контроля// Гордеев Б.А., Золин В.В. Заявлено 28.02.83, № 3557360/18-28, опубл. 23.04.84. Бюл. № 15.

14. А.С. № 1746093 (СССР). Колебательная система// Черкунов В.Б., Бусаров Ю.П., Черкунов В.В., Татарченко А.Е., Гордеев Б.А. Заявлено 12.05.88., опубл. 07.07.92, бюл. № 25.

15. А.С. №1654617. (СССР) Упругая опора// Акименко С.И., Глумин В.Б., Гордеев Б.А., Образцов Д.И. бюл. №21, 07.06.91.

16. А.С. №1732076. (СССР) Опора// Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Глумин В.Б., Новожилов М.В. бюл. №17, 07.05.92.

17. А.С. №1779843 (СССР) Виброизолирующее устройство// Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Юдин В.А., Поташев О.А. бюл. №45, 07.12.92.

18. Авторское свидетельство Российской Федерации на полезную модель №16532. Гидравлическая виброопора// Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А., Ложкин Ф.В. бюл. №1, 10.01.2001.

19. Бакланов В.С., Горобцов А.С., Карцов С.К., Синев А.В., Фролов В.В. Анализ реактивных свойств динамических жесткостей и передаточных функций гидроопор// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1999. № 3. С. 31-37.

20. Бакланов В.С., Горобцов А.С., Карцов С.К., Синев А.В., Фролов В.В. Анализ реактивных свойств динамических жесткостей и передаточных функций гидроопор при введении промежуточных масс.// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2000. № 1. С.41-50.
21. Бакланов В.С., Морозков А.С. Измерение динамических характеристик газотурбинного двигателя при увеличении степени двухконтурности. XXVIII научно-техн. совещание по проблемам прочности двигателей, 26-28 ноября 2002 г. тез. докл. М. 2002. С. 10-12.
22. Беляковский Н.Г. Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах.// Л., Судостроение, 1965. с.
23. Бендат Д., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа.//М.: Мир, 1963. 312 с.
24. Блехман И.И. Синхронизация механических систем. М. Наука. 1971.
25. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем.// М.: Наука, 1979. 336 с.
26. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем.: Наука , 1983. 257 с.
27. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. Метод граничных элементов.// М., Мир, 1987.
28. Бреббия, С. Уокер. Применение метода граничных элементов в технике.// М., Мир, 1982.
29. Васин В.А., Лазарев С.О. Чиков А.Н., Фролов В.В. Применение гидроопор с динамическими гасителями в системах виброизоляции объектов для защиты от структурного шума.// Проблемы машиностроения и надежности машин, №4, 1998, С.31-38.
30. Весницкий А.И., Гордеев Б.А. Газогидравлические способы демпфирования вибраций.// Третья международная конференция железнодорожных экспертов. Югославия, Белград, октябрь 1996, с. 353.
31. Вибрации в технике.// Под редакцией К.В. Фролова. Т. 6 : Машиностроение, 1981, 456 с.



32. Генкин М.Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов.// М.: Машиностроение, 1978, 282 с.

33. Генкин М.Д., Рябой В.М., Яблонский В.В. Об одной обратной задаче виброакустики.//Акуст. журн. 1980. Т.26, вып. 4. С. 618-620.

Генкин М.Д., Рябой В.М. Упругоинерционные виброизолирующие системы//АН СССР М. Наука, 1988, 191 с.

34. Гордеев Б.А., Образцов Д.И. Виброизолирующая подвеска силового агрегата автомобиля.// Автомобильная промышленность, №6, 1990. С. 17.

35. Гордеев Б.А., Образцов Д.И., Новожилов М.В. Применение диссипативных элементов в виброопорах силовых агрегатов машин.// АН СССР, Горьковский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова. Препринт, Горький, 1989 г., 10 с.

36. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И., Шишкин В.И. Технологические особенности изготовления гидравлических виброопор.// Физические технологии в машиностроении, Нижегородский Государственный технический университет. 1998. с. 82-84.

37. Гордеев Б.А., Ковригин Д.А., Аббакумов Е.И. Применение гидравлических виброопор для демпфирования вибраций силовых агрегатов подвижного состава.// The 5 th international scientific conference of railway experts. Ygoslavia, October 28-30, 1998, p. 240-241.

38. Гордеев Б.А., Ильичев Н.А., Золотарев Ю.П. Расчет жесткости шинных блоков.// Сб. докладов. Модели и анализ систем. Изд-во ВВКЦ. Н. Новгород.1995. С. 40-43.

39. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И. Применение газогидравлических вибропор в машиностроении.// Сб докладов научно-технической конференции. Проблемы машиностроения. Интелсервис. Н. Новгород 1997.

40. Гордеев Б.А., Аббакумов Е. И. Методы расчета основных параметров газогидравлических виброопор и результаты экспериментальных исследований.// Сб. научных трудов Прикладная механика и технология машиностроения, часть 3. Интелсервис. Н. Новгород 1997.

41. Гордеев Б.А. Применение неньютоновских реологических сред для гашения колебаний силовых агрегатов транспортных средств Волновые задачи механики.// Сб. научных трудов. Н. Новгород. Изд. Нф ИМАШ РАН. 1991. Вып. 2 С. 165-173.

42. Гордеев Б.А., Весницкий А.И., Аббакумов Е.И. Методы расчета демпфирующих характеристик газогидравлических виброопор транспортных средств.// 4th international scientific conference of railway experts/ 1997. Yugoslavia. P. 325-328.

43. Гордеев Б.А., Куклина И.Г. Моделирование динамических процессов роторно-винтовых машин с газогидравлическими демпферами.// Физические технологии в машиностроении Н. Новгород. Интелсервис 2000. С. 197-202.

44. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И., Куклина И.Г. Расчетные методы выбора характеристик гидравлических виброопор.// Физические технологии в машиностроении Н. Новгород. Интелсервис 2000. С. 203-208.

45. Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И., Ложкин Ф.В. Экологические требования к современному автомобильному транспорту.// Тезисы докладов Всероссийской конференции. Необратимые процессы в природе и технике. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 62-64.

46. Гордеев Б.А., Синев А.В. Эффективность гашения вибрации гидроопорой силового агрегата в зависимости от размеров соединительной трубки и свойств рабочей жидкости.// Проблемы машиностроения и надежности машин. № 1.2001. С.35-38

47. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Ковригин Д.А., Синев А.В., Аббакумов Е.И. Взаимодействие силового агрегата мотор-компрессора электровоза с вибрационными полями в переходных режимах. //Проблемы машиностроения и надежности машин, №4, 2002. С.105-111.

48. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синев А.В. Применение инерционных электрореологических трансформаторов в системах виброизоляции. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003 г. 6 выпуск. С.22-27.

49. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Аббакумов Е.И., Ложкин Ф.В. Особенности применения газогидравлических демпфирующих элементов для снижения вибрации и шума транспортных средств//Известия ВУЗов. Северо-кавказский регион. 2001. Спецвыпуск, с. 53-55.

50. Гордеев Б.А., В.И. Ерофеев, А.В. Синев, О.О. Мугин. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред.// Физматлит, 2004. 173 с.

51. Градецкий А.В., Пашков А.И., Рыбак Л.А., Синев А.В. Соловьев В.С. Инвариантная система виброизоляции с цифровым управлением для защиты от микрогравитации.// Проблем машиностроения и надежности машин. 1995, № 4. с. 78-86.

52. Диментберг Ф.М., Фролов К.В. Вибрация в технике и человек.// М., Знание,1987. с.

53. Елисеев С.В. Структурная теория виброзащитных систем. // Новосибирск. "Наука". 1978. 220 с.

54. Елисеев С.В., Волков Л.Н., Кухаренко В.П. Динамика механических систем с дополнительными связями.// Новосибирск. "Наука". Сибирское отделение. 1990. 214 с.

55. Завьялов В.Б., Куликовский Г.К., Тютин В.А. Расчетное исследование изгибных колебаний трансмиссии легкового автомобиля.// Автомобильная промышленность №8, 1979.

56. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г. Описание реологических свойств электрореологических жидкостей на основе многочастичной, упорядоченной, трехмерной модели//Механика композиционных материалов и конструкций, 2002. Т. 8, №4. С. 577-584.

57. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г. Описание реологических свойств электрореологических жидкостей на основе кристаллической модели композита//Механика композиционных материалов и конструкций. 2001.Т. 7, №3. С. 344-362.

58. Исследование акустических полей автомобиля ГАЗ-3105.// Отчет о НИР Гф ИМАШ АН СССР, научный руководитель Весницкий А.И. ВИНТИ № 01870071106, инв. № 02.98.0037526. Горький. 1988. 111 с.

59. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

60. Латышев Г.В. Исследование вибрационных напряжений в картер-ных деталях силового агрегата автомобиля.// Труды НАМИ, №123. 1970.

61. Латышев Г.В., Тольский В.Е. Изгибные колебания силовой передачи и шум в кузове легкового автомобиля.// Виброакустика автомобиля. Куйбышев, 1982. с.

62. Луканин В.Н., Гудцов В.Н., Бочаров Н.Ф. Снижение шума автомобиля.// М., Машиностроение, 1981.

63. Ляпунов В.Т., Лавендел Э. Э., Шляпочников С.А. Резиновые виброизоляторы.// Л., Судостроение, 1988.

64. Манохин А.Е., Шаматурич А.Е. Стандартизация методов и средств аттестации испытательных виброустановок.// Измерительная техника, 1985, № 7. С. 34-35.

65. Никифоров А.С., Будрин С.В. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах//Л.: Судостроение,1986. 286 с.

66. Нюнин Б.Н., Бочаров Н.Ф. Основные источники инфразвука в легковом автомобиле.// Автомобильная промышленность, № 4, 1983.

67. Осипов Г.Л., Юдин Е.Я. Снижение шума в зданиях и жилых помещениях. М.: Стройиздат, 1987, 556 с.

68. Пановко Я.М. Введение в теорию механических колебаний.// М., Наука, 1971.

69. Патент Российской Федерации № 2104424. Гидравлическая виброопора.// Гордеев Б.А., Весницкий А.И., Марков В.И., Аббакумов Е.И. Заявлено 03.01.96. Заявка № 96100147/28. Оpubл. 10.02.98. Бюл. № 4.

70. Патент РФ № 2135855. Гидравлическая виброопора.// Гордеев Б.А., Аббакумов Е.И. бюл. № 24 от 27.08.99.

71. Патент Германии №3612436 MKU F16F13/00.// публ. от 15.10.87.
72. Патент Германии №4205229 MKU F16F13/00.// публ. от 02.09.93.
73. Патент Германии №4126673 MKU F16F13/00.// публ. от 25.02.93.
74. Патент Германии №4117130 MKU F16F13/00.// публ. от 26.11.92.
75. Патент Германии №4027808 MKU F16F13/00.// публ. от 30.04.92.
76. Попков В.И., Мышинский Э.Л., Попков О.И. Виброакустическая диагностика в судостроении.//Л.: Судостроение, 1983.-256 С.
77. Попов Э.А., Квартин Л.М. Виброизоляция машин. Ч.1 Учебное пособие.: М. РИО МТИ, 1984, 26 с.
78. Рыбак Л.А., Синев А.В. Пашков А.И. Синтез активных систем виброизоляции на космических объектах. М.: Янус-К, 1997, 160 с.
79. Рябой В.М. О наименьшей массе упругоинерционных виброизолирующих систем// Изв. АН СССР. ММТ. 1980. № 4. С. 59-67.
80. Рябой В.М. О принципиальной ограниченности возможностей пассивной упругоинерционной виброизоляции // Вибротехника. 1983. № 2. С. 79-82.
81. Рябой В.М. Построение динамических схем и определение параметров виброизолирующих систем с заданными свойствами // Машиноведение , 1985, № 5. Сю 38-44.
82. Рябой В.М., Яблонский В.В. Метод увеличения виброизоляции в некоторых стержневых конструкциях// Виброизолирующие системы в машинах и механизма.: Наука, 1977. С. 67-74.
83. Сафронов Ю.Г., Синев А.В., Соловьев В.С. Исследование электрогидравлической системы виброизоляции сиденья человека-оператора//Сб. тр. "Влияние вибраций на организм человека и проблемы виброзащитты". М., Наука,1974.
84. Сидорова М.Н., Синев А.В. Оптимизация геометрических характеристик и жесткостных характеристик системы виброизоляции автомобильного двигателя.// Проблемы машиностроения и надежности машин, № 6, 1997.

85. Синев А.В., Чернявская Н.А., Соловьев В.С., Маков П.В., Пашков А.И., Кочетов О.С. Система виброизоляции (варианты) Патент Российской Федерации № 2152547, Б.И. № 19, 10.07.2000.

86. Синев А.В., Соловьев В.С. Цифровое управление активной подвеской с адаптацией к внешнему возмущению// Сб. тр. "Колебания и виброакустическая активность машин и конструкций ". М.: Наука , 1986. С. 60-69.

87. Синев А.В., Соловьев В.С. Исследование активных виброзащитных систем с автоподстройкой частоты// Сб. тр. "Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах". М.: Наука, 1977. С. 38-40.

88. Синев А.В. Выбор параметров систем виброизоляции и динамических гасителей на основе методов синтеза цепей// Машиноведение. 1972, № 1. С. 28-34.

89. Справочник по ударным нагрузкам. Под ред. С.М. Харриса, Ч.И. Крида. Л.: Судостроение, 1980, 360 с.

90. Тарасов А.Я. Влияние резонансных изгибных колебаний силового агрегата на поломки картерных деталей.// Автомобильная промышленность, 1981, №3.

91. Тольский В.Е. Виброакустика автомобиля.// М., Машиностроение, 1988.

92. Тольский В.Е., Корчемный Л.В., Латышев Г.В., Минкин Л.М.// Колебания силового агрегата. М., Машиностроение, 1976.

93. Фролов К.В., Тэнг Югенг, Аббакумов Е.И., Синев А.В., Гидроупругие технология виброизоляции – прогрессивное направление в виброзащите мобильных машин.// Аналитический обзор. М., Приводная техника, № 6, 2000.

94. Фролов К.В., Тихонов В.А., Чистяков А.Г., Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А. Экспериментальное определение статических и вибрационных характеристик гидроопор двух типов//. Проблемы машиностроения и надежности машин. №4. 2001 г. С. 98-102.

95. Фролов К.В., Чистяков А.Г., Синев А.В., Мугин О.О., Гордеев Б.А.

Идентификация математической модели гидропоры по экспериментальным данным// Проблемы машиностроения и надежности машин. № 5, 2002. С. 3-8.

96. Ходжаев К.Ш. Резонансные и нерезонансные случаи в задаче о возбуждении механических колебаний// ПММ. Т. 32, вып.1 1968. С. 85-100.

97. Чернышев Г.Д., Семенов Г.И., Чудаков Л.К., Романов Е.П. Динамические нагрузки в зоне соединения двигателя и коробки передач.// Автомобильная промышленность, №5, 1975.

98. Andre Gennenseaux. Research for new vibration isolation technique from hydro-mounts.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1993 №931324.

99. Andre Gennenseaux. A new generation of engine mounts.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1995 №951296.

100. Bermuchon M. A new generation of engine mounts.// Proceeding of SAE noise and vibration conference, 1984 № 840259.

101. Kazuto Seto and Katsumi Sowatari, Akio Nagamatsu. Optimum design method for hydraulic.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1991 № 911055.

102. Kohito Kadomatsu. Hydraulic mount for stock isolation at acceleration on the FWD cars.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1989 №891138.

103. G. Kim and R. Sigh. Nonlinear analysis of automotive hydraulic engine mount. ASME.// J. of dynamic system measurement and control 115, 1996.

104. John Bretl. Advancements in computer simulation methods for vehicle noise and vibration.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1995 №951252.

105. Kern G. und andere. Computerunterschtutzte Auslegung von hydraulic geparten Grummilager.// Automobiltechnische Zeitschrift. 94 (1992) 9.

106. G. Ducloe. An external tunable hydraulic mounts which uses Electro-Rheological fluid.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1987 №870963.

107. Leng the error analysis for inpendance tube measurements.// Banks-Lee., Peng H.// J. Acoust. Soc. Amer. -1989.-85, № 4.-p.1769-1772.

108. Thomas J. Royston and R. Singh. Study of nonlinear hydraulic engine mounts focusing on decoupler modeling and design.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1997 № 971936.

109. Wallace C. Flower. Understanding hydraulic mounts for improved vehicle noise, vibration and ride qualities.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1985 № 850975.

110. Thomas J. Royston and Rajendra Singh. Period's response of nonlinear engine mounting system.// Proceedings of SAE noise and vibration conference 1995. № 951297.

111. Steve J. Gan and Jeffry D. Cotton. Experiment study and modeling of hydraulic mounts and engine system.// Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1995 № 951348.

112. R. Matthew Brach and Aian G. Haddow. One the dynamic response of hydraulic engine mounts. Proceedings of SAE noise and vibration conference, 1993 № 931328.

113. United States Patent № 5601164. Feb. 11, 1997. Device using electrorheological fluid// Toshiyuki Ohsaki et al. Int. Cl. F16F 9/42.

114. United States Patent № 6029783. Feb. 29, 2000. Variable resistance device using electroactive fluid// Alvin R. Wirthin. Int. Cl. F16F 15/03.

115. United States Patent № 5947238. Sep. 7, 1999. Passive magnetorheological fluid device with excursion dependent characteristic// Marc R. Jolly et al. Int. Cl. F16F 9/06.

116. Optimal protection from impact, shock and vibration// D.V. Balandin, N.N. Bolotnik, W.D. Pelcey. Gordon and Breach Science Publishers/ 2000.

117. Горсков В.П., Гордеев Б.А., Осмехин А.Н., Охулков С.Н., Технология создания адаптивных систем управления при виброиспытаниях // Вестник научно-технического развития, № 12 (52), 2011, С.3-6.

118. Гордеев Б.А., Горсков В.П., Самосинхронизация источников вибрации, как причина возникновения низкочастотных биений // 9-е Всероссийское совещание-семинар, МГТУ им. Баумана, № 9, 2011, С.109-117.



Гордеев Борис Александрович  
Горсков Владимир Петрович  
Ковригин Дмитрий Анатольевич  
Никитенкова Светлана Павловна

## Математические модели виброзащитных систем высотных зданий

Редактор

Елизарова С.А.

Компьютерный набор

Горсков В.П.

Подписано в печать \_\_\_\_\_ Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.  
Уч. изд. л. 7,6 Усл. печ. Л.8,1 Тираж 300 экз. Заказ № \_\_\_\_\_  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»  
603950, Н.Новгород, Ильинская, 65.  
Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65