Министерство образования и науки Российской Федерации

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ННГАСУ)

Кафедра теоретической механики

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 2. Кинематика точки

Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике

Нижний Новгород – 2011

УДК 531.1

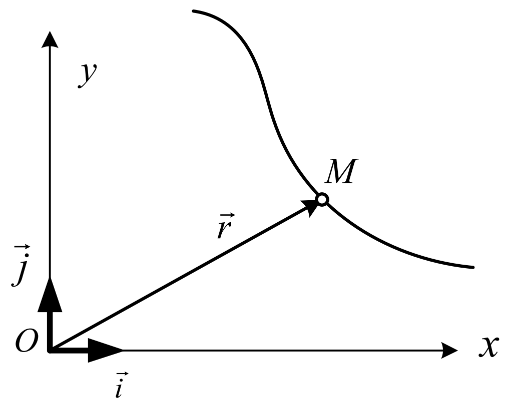
Интернет-тестирование по теоретической механике. Выпуск 2. Кинематика точки. Методические указания для подготовки к интернет - тестированию по теоретической механике, Нижний Новгород, ННГАСУ, 2011 г..

Настоящие методические указания предназначены для студентов ННГАСУ, обучающихся по специальностям «Строительство» и «Теплоэнергетика». Методические указания содержат основные теоретические положения по кинематике точки и примеры решения типовых задач по данной теме, предлагавшихся для решения в процессе интернет - тестирования.

Составители: Г.А. Маковкин, А.С. Аистов, А.С. Баранова, Т.Е. Круглова, И.С. Куликов, Е.А. Никитина, О.И. Орехова, С.Г. Юдников, Г.А. Лупанова.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Векторный способ задания движения точки



$\vec{r}$ - радиус вектор точки M.

траектория - годограф радиус - вектора $\vec{r}$.

Закон движения: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Траектория: годограф радиус-вектора.

Скорость: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$.

Ускорение: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Координатный способ задания движения точки

Закон движения: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Траектория: из закона движения надо исключить время.

Скорость: Проекции вектора скорости:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}$$

Модуль вектора скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Направляющие косинусы:

$$\begin{cases} n_x = v_x / v \\ n_y = v_y / v \end{cases}.$$

Ускорение: Проекции вектора ускорения:

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \end{cases}$$

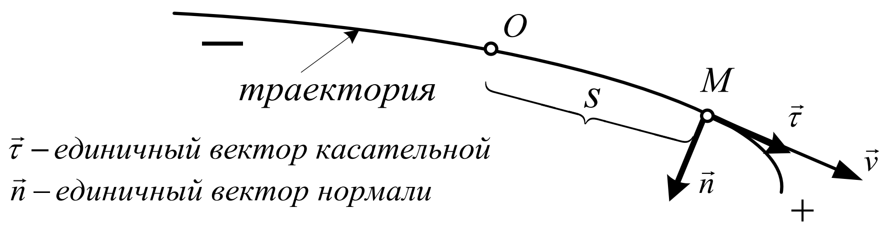
Модуль вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Направляющие косинусы:

$$\begin{cases} l_x = a_x/a \\ l_y = a_y/a \end{cases}.$$

<u>Естественный способ задания движения точки</u>



Закон движения: $s = s(t)$, где s – дуговая координата.

Траектория: задана.

Скорость: $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}$

$v_\tau = \dot{s}$ - проекция вектора скорости на касательную.

Модуль вектора скорости:

$$v = |v_\tau|.$$

Ускорение:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n},$$

где

$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}$ - касательное ускорение,

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ - нормальное ускорение

(направлено в сторону вогнутости траектории) ,

ρ –радиус кривизны траектории, $k = \frac{1}{\rho}$ – кривизна.

Модуль вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Знак скалярного произведения векторов ускорения и скорости позволяет определить является движение ускоренным или замедленным.
При ускоренном движении оно положительно, а при замедленном - отрицательно.

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Понятие о сложном движении точки

Сложным движением называют такое движение точки, которое рассматривается одновременно в двух системах отсчета.

При описании сложного движения одну из систем отсчета считают **неподвижной или основной** . Другая система отсчета рассматривается как **подвижная** . В таких случаях можно выделить три вида движения: **абсолютное, относительное и переносное**.

1. **Абсолютным движением** называется движение точки по отношению к неподвижной системе координат. Характеристиками абсолютного движения являются **абсолютная скорость** $\vec{v}_a$ и **абсолютное ускорение** $\vec{a}_a$, то есть скорость и ускорение точки относительно неподвижной системы координат (относительно платформы). Они обозначаются индексом «a».
2. **Относительным движением** называется движение точки по отношению к подвижной системе координат. Характеристиками относительного движения являются **относительная скорость** $\vec{v}_r$ и **относительное ускорение** $\vec{a}_r$, то есть скорость и ускорение точки относительно подвижной системы координат (относительно вагона). Они обозначаются индексом «r».
3. **Переносным движением** называется движение подвижной системы координат относительно неподвижной. В подвижной системе координат положение точки М все время меняется. **Переносной скоростью** $\vec{v}_e$ и **переносным ускорением** $\vec{a}_e$ называется скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Они обозначаются индексом «e».

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА заключается в том, чтобы по известным характеристикам относительного и переносного движений находить кинематические характеристики абсолютного движения.

Сложение скоростей при сложном движении

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Сложение ускорений

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor}.$$

Вычисление ускорения Кориолиса

Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

а его модуль может быть найден по формуле:

$$a_{cor} = 2\ \omega_e\ v_r\ sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r).$$

Направление ускорения Кориолиса определяют по правилу Жуковского:

Чтобы найти направление кориолисова ускорения надо:

1. **спроектировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения;**
2. **повернуть полученную проекцию на 90^0 по ходу вращения;**
3. **полученное таким образом направление указывает направление вектора ускорения Кориолиса.**

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1.

По окружности радиуса R=1м движется точка по закону $S = 3 + t^3$, где t – время в секундах, S – в метрах.
Касательное ускорение точки в момент времени t=2c равно… (м/с^2) .

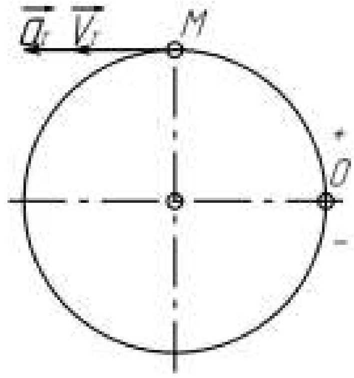
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ.

1. 18;	2. 6;	3. 12;	4. 24;	5. 36.

РЕШЕНИЕ.

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории и определяется проекцией вектора ускорения на касательную:

$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{S}$,



знак которой показывает, в какую именно сторону оно направлено, т.е. в сторону положительного или отрицательного отсчета дуговой координаты.

$v_\tau = \dot{S} = (3 + t^3)' = 3t^2$ (м/с);

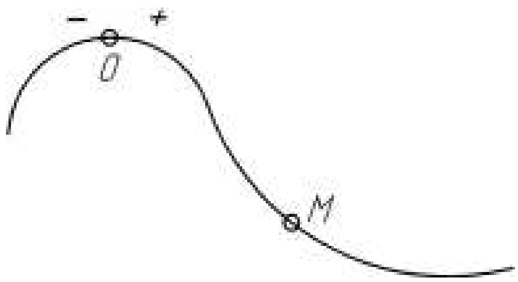
$a_\tau = \ddot{S} = \frac{dv_\tau}{dt} = 6t$ (м/с^2).

Касательное ускорение необходимо определить в момент времени t=2 (с), поэтому подставляем t=2 (с) в выражение касательного ускорения:

$a_\tau = 6t|_{t=2} = 6 \cdot 2 = 12$ (м/с^2).

ОТВЕТ: 3. $a_\tau = 12$ (м/с^2).

ЗАДАЧА 2.



Движение точки по известной траектории задано уравнением $S = 7 - 8t + 2t^3$(м). OM=S.

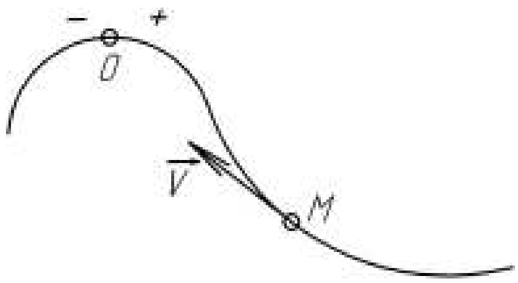
Скорость точки v в момент времени t=1с равна… (м/с).

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ.

1. 1;	2. 5;	3. 4;	4. -2.

Решение.

Движение точки задано естественным способом, т.е. задана её траектория и уравнение движения $S = 7 - 8t + 2t^3$ (м).



Скорость всегда направлена по касательной к траектории в сторону движения, а по модулю равна
$v = |v_\tau| = |\dot{S}|$.
Знак показывает конкретное направление вектора скорости: если $v_\tau > 0$, то скорость направлена в сторону положительного отсчета дуговой координаты, а при $v_\tau < 0$ – в сторону отрицательного отсчета дуговой координаты.
$v = \dot{S} = (7 - 8t + 2t^3)' = -8 + 6t^2$ (м/с).
Подставляем t=1c в полученное уравнение:
$v = (-8 + 6t^2)|_{t=1} = -8 + 6 \cdot 1^2 = -2$ (м/с).
Знак минус показывает, что вектор скорости направлен в сторону отрицательного отсчета дуговой координаты.

Ответ: 4. $v = -2$ (м/с).

ЗАДАЧА 3.

Точка движется по заданной траектории по закону $S = 3 - 4t + t^3$ (м). В момент времени t=1c нормальное ускорение равно $a_n = 5$ (м/с^2). OM=S.
Радиус кривизны траектории ρ в данный момент равен …(м).

Варианты ответов.

1. 0,8;	2. 0,2;	3. 1,8;	4. 3,2.

Решение.

Нормальное ускорение направлено по нормали, а его проекция равна
$a_n = \frac{v^2}{\rho}$,
следовательно, радиус кривизны равен $\rho = \frac{v^2}{a_n}$.
Значение нормального ускорения дано в условии задачи, поэтому остается найти только модуль скорости.
Так как движение точки задано естественным способом, то модуль скорости определяется по формуле:

$v = |v_\tau| = |\dot{S}|$,
$v = \dot{S} = (3 - 4t + t^3)' = -4 + 3t^2$.
В полученное выражение подставляем t=1с
$v = (-4 + 3t^2)|_{t=1} = -4 + 3 \cdot 1^2 = -1$ (м/с).
Определяем радиус кривизны
$\rho = \frac{(-1)^2}{5} = 0{,}2$ (м).

Ответ: 2. $\rho = 0{,}2$ (м).

ЗАДАЧА 4.

Уравнение, приведенное ниже, используется при … способе задания движения точки: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Варианты ответов.

1. векторном;
2.координатном (в декартовой системе координат);
3.координатном (в цилиндрической системе координат);
4.естественном;

Решение.

Положение движущейся точки по отношению к некоторой системе отсчета Oxyz можно задать радиус-вектором этой точки $\vec{r}$. В процессе движения этот радиус-вектор будет меняться, т.е. он является векторной функцией времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Данное уравнение представляет собой уравнения движения точки в векторной форме.

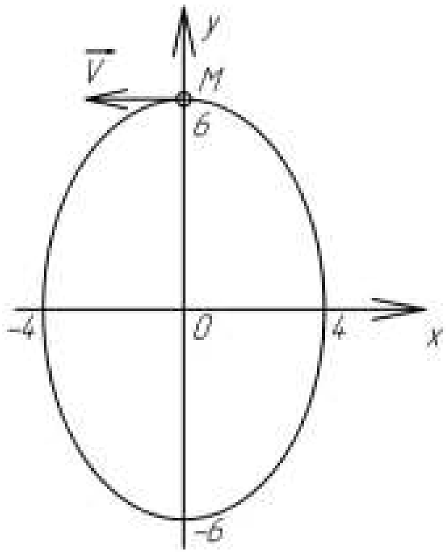
Ответ: 1. векторном.

ЗАДАЧА 5.

Точка движется согласно уравнениям $x = 4cos3t, y = 6\,sin\,3t$ (x,y – в метрах). Угол (в градусах) между осью Oy и вектором скорости точки в положении x=0, y=6 равен…

Вариантов ответа нет.

Решение.

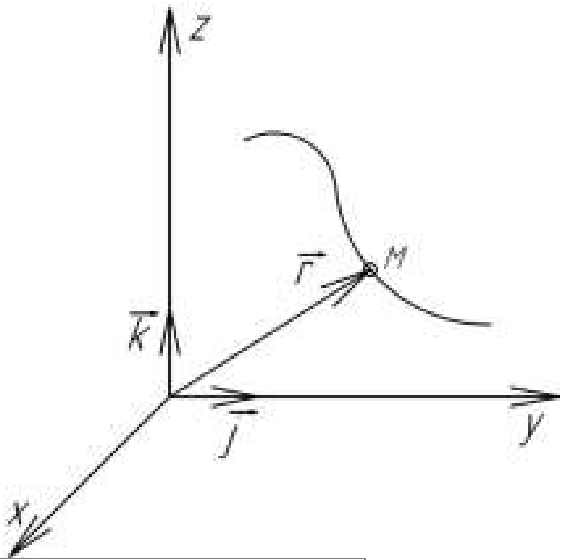


Движение точки задано координатным способом, координаты точки являются функциями времени.
$\frac{x}{4} = cos3t, \ \frac{y}{6} = sin\,3t$,
Воспользуемся тригонометрическим тождеством $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ и исключим время из уравнений движения:
$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$.
Получаем, что траектория движения точки - уравнение эллипса с полуосями 4 см и 6 см по осям x и y соответственно, центр которого находится в начале координат.
Находим положение точки М по ее координатам x=0, y=6.
Скорость всегда направлена по касательной к траектории в сторону движения. В данном случае касательная к траектории будет параллельна оси Ox или перпендикулярна оси Oy.
Направление скорости определяем, дифференцируя уравнения движения:
$v_x = \dot{x} = (4cos3t)' = -4 \cdot 3sin3t = -12sin3t;$
$v_y = \dot{y} = (6sin3t)' = 6 \cdot 3cos3t = 18cos3t.$
Подставив в уравнения движения координаты точки, находим время через которое точка будет находиться в данном положении:
$x = 4cos3t$; $0 = 4cos3t$; $0 = cos3t$; $3t = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{\pi}{6}$ (с);
$y = 6\,sin\,3t$; $6 = 6\,sin\,3t$; $1 = sin\,3t$; $3t = \frac{\pi}{2}$; $t = \frac{\pi}{6}$ (с).
То есть, точка М будет находиться в положении (0;6) в момент времени $t = \frac{\pi}{6}$ (с). Подставив это время в уравнения проекций скорости, получаем:
$v_x = -12sin3t|_{t=\frac{\pi}{6}} = -12sin\frac{\pi}{2} = -12$ (м/с),
$v_y = 18cos3t|_{t=\frac{\pi}{6}} = 18cos\frac{\pi}{2} = 0$ (м/с).
Следовательно, по оси Ox проекция скорости направлена в сторону отрицательного отсчета, а по оси Oy проекция вектора скорости равна нулю.
То есть угол между осью Oy и вектором скорости точки М будет равен 90^0.

Ответ: 90 градусов.

ЗАДАЧА 6.

Движение материальной точки M задано уравнением
$\vec{r} = 0{,}5\vec{i} + 2t\vec{j} - 4e^{3t}\vec{k}$.
Вектор скорости точки направлен…



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ.

1. параллельно плоскости xOz (непараллельно осям);
2. параллельно оси Ox;
3.параллельно плоскости yOz;
4.перпендикулярно плоскости yOz;

РЕШЕНИЕ.

Дифференцируя $\vec{r} = 0{,}5\vec{i} + 2t\vec{j} - 4e^{3t}\vec{k}$, находим вектор скорости:
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 2\vec{j} - 12e^{3t}\vec{k}$,
следовательно, проекции вектора скорости на оси будут:
$v_x = 0;\ v_y = 2;\ v_z = -12e^{3t}$,
то есть, вектор лежит в плоскости перпендикулярной оси Ox и, следовательно, параллелен плоскости yOz.

ОТВЕТ: 3. параллельно плоскости yOz.

ЗАДАЧА 7.

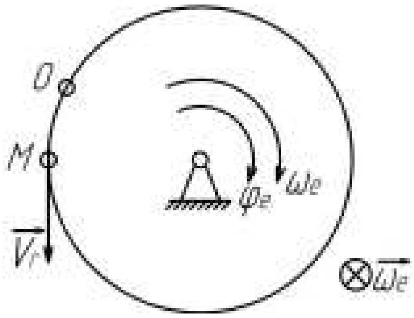
Круглая горизонтальная пластина радиуса R вращается вокруг вертикальной оси, проходящий через ее центр по закону $\varphi_e = \frac{\pi}{4}t$ (рад). По ободу пластины движется точка M по закону
$\mathrm{OM} = 3t$ (м).
Ускорение Кориолиса для точки M равно…(м/с^2).

Варианты ответов.

1. 0;	2. $\frac{3\pi}{2}$;	3. $\frac{3\pi}{4}$;	4. $\frac{3\pi}{2}t$.

Решение.

Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения ($\vec{\omega}_e$) на относительную скорость точки ($\vec{v}_r$): $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$,
при этом его модуль равен : $a_{cor} = 2\omega_e v_r sin\,(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r)$.



Относительным движением является движение точки М по ободу пластины по закону
$\text{OM} = 3t$ (м). Относительная скорость точки будет направлена по касательной к траектории в сторону движения, а по модулю равна:
$v_r = \dot{\text{OM}} = (3t)' = 3$ (м/с).

Переносным движением является вращение круглой горизонтальной пластины вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_\text{e} = \frac{\pi}{4}t$ (рад). Угловая скорость $\vec{\omega}_e$ - вектор, лежащий на оси вращения и имеющий проекцию на эту ось, равную производной по времени от угла поворота: $\omega_e = \dot{\varphi}_\text{e} = (\frac{\pi}{4}t)' = \frac{\pi}{4}$ (рад/с). Направлен вектор угловой скорости в ту сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Вектор $\bar{v}_r$ лежит в плоскости диска, а $\bar{\omega}_e$ перпендикулярен к этой плоскости, следовательно, угол между вектором относительной скорости точки и вектором переносной угловой скорости равен 90^0.

$a_{cor} = 2\omega_e v_r\, sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 3 \cdot sin90^0 = \frac{3\pi}{2}$ (м/с^2).

Ответ: 2. $a_{cor} = \frac{3\pi}{2}$ (м/с^2).

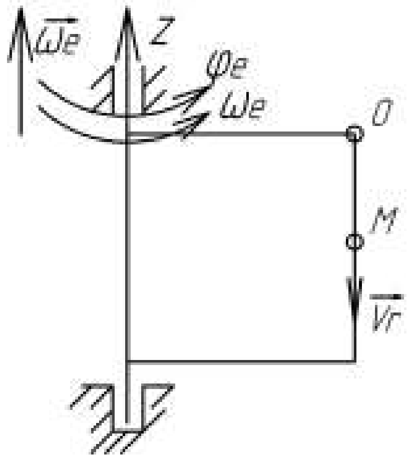
ЗАДАЧА 8.

Прямоугольная пластинка вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = \frac{\pi}{3}t$ (рад). По одной из сторон пластинки движется точка по закону $\text{OM} = 2t$ (м).
Ускорение Кориолиса для точки М, равно…(м/с^2).

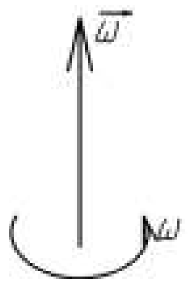
Варианты ответов.

1. $\frac{2\pi\cdot\sqrt{3}}{3}$;	2. 0;	3. $\frac{2\pi}{3}t$;	4. $\frac{2\pi}{3}$.

Решение.



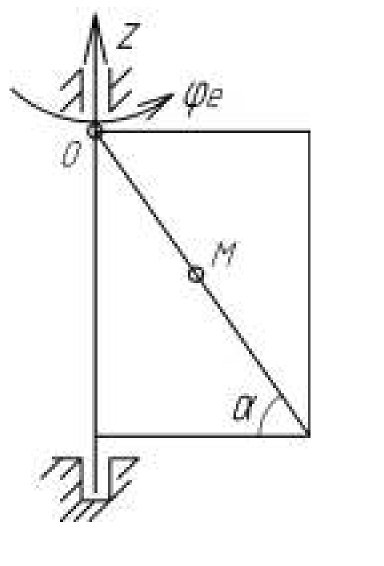
Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения ($\overline{\omega}_e$) на относительную скорость точки ($\overline{v}_r$):
$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, при этом его модуль равен:
$a_{cor} = 2\omega_e v_r sin\,(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r)$.
Относительным движением является движение точки М по стороне прямоугольной пластины по закону $\mathrm{OM} = 2t$ (м). Относительная скорость точки будет направлена по касательной к траектории в сторону движения, а по модулю равна: $v_r = \dot{\mathrm{OM}} = 2$ (м/с).
Переносным движением является вращение прямоугольной пластины вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_\text{е} = \frac{\pi}{3}t$ (рад). Угловая скорость $\overline{\omega}_e$ – вектор, лежащий на оси вращения и имеющий проекцию на эту ось, равную производной по времени от угла поворота: $\omega_e = \dot{\varphi}_\text{е} = \frac{\pi}{3}$ (рад/с). Направлен вектор угловой скорости в ту сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.



Вектор $\vec{v}_r$ и $\vec{\omega}_e$ лежат в одной плоскости, параллельны и направлены в разные стороны. Значит угол между вектором относительной скорости точки и вектором переносной угловой скорости равен 180^0. $a_{cor} = 2\omega_e v_r\, sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 3\cdot sin180^0 = 0$ (м/с^2).

Ответ: 2. $a_{cor} = 0$ (м/с^2).

ЗАДАЧА 9.

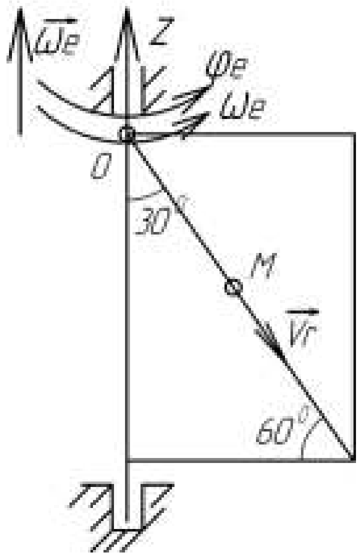


Прямоугольная пластинка вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = 5t$ (рад). По одной из сторон пластинки движется точка по закону $\mathrm{OM} = 4t + 3$ (м) (α=60^0).
Ускорение Кориолиса для точки М, равно…(м/с).

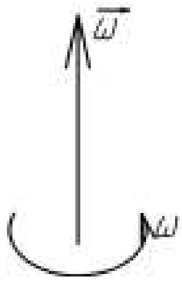
<u>Варианты ответов.</u>

1. 10;	2. $10\sqrt{3}$;	3. $20\sqrt{3}$;	4. 20.

<u>Решение.</u>

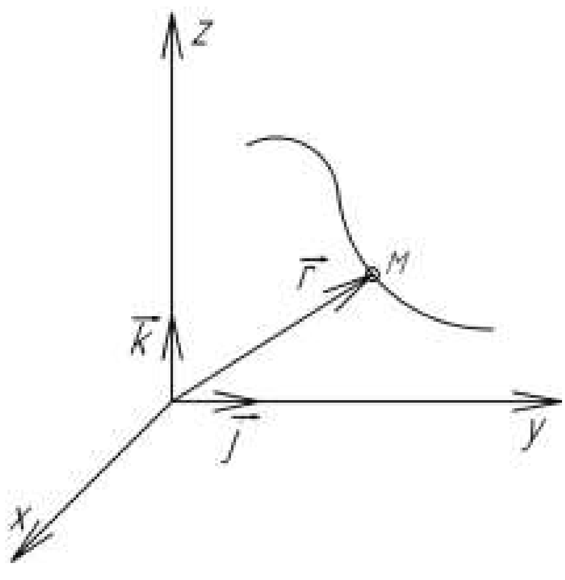


Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения ($\vec{\omega}_e$) на относительную скорость точки ($\vec{v}_r$):
$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, при этом его модуль равен:
$a_{cor} = 2\omega_e v_r sin\,(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r)$.
Относительным движением является движение точки М по диагонали прямоугольной пластины по закону $0\text{M} = 4t + 3$ (м). Относительная скорость точки будет направлена по касательной к траектории в сторону движения, а по модулю равна: $v_r = 0\dot{\text{M}} = 4$ (м/с).
Переносным движением является вращение прямоугольной пластины вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_\text{e} = 5t$ (рад). Угловая скорость $\vec{\omega}_e$ - вектор, лежащий на оси вращения и имеющий проекцию на эту ось, равную производной по времени от угла поворота: $\omega_e = \dot{\varphi}_\text{e} = 5$(рад/с). Направлен вектор угловой скорости в ту сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.



Вектор $\vec{v}_r$ и $\vec{\omega}_e$ лежат в одной плоскости, а угол между векторами относительной скорости точки и вектором переносной угловой скорости равен $90^0+60^0=150^0$.
$a_{cor} = 2\omega_e v_r\, sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot sin150^0 = 20$ (м/с^2).

<u>Ответ:</u> 4. $a_{cor} = 20$ (м/с).



<u>ЗАДАЧА 10.</u>

Движение материальной точки М задано уравнением
$\vec{r} = 4\vec{\imath} + sint\vec{\jmath} - 3t\vec{k}$.

Ускорение точки направлено…

Варианты ответов.

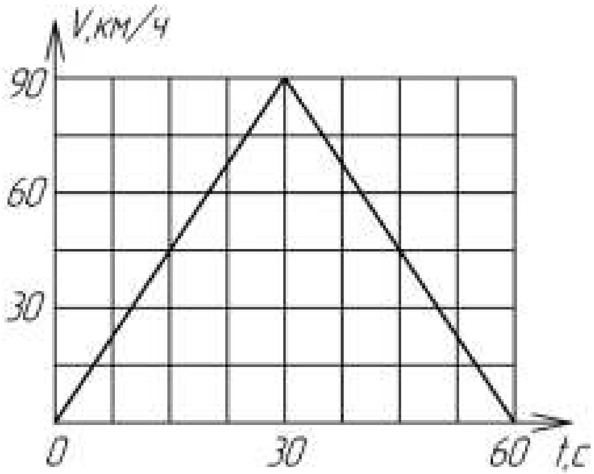
1. перпендикулярно оси Oy;
2. параллельно плоскости xOz;
3. перпендикулярно плоскости yOz (параллельно осям);
4. параллельно оси Oy.

Решение.

Ускорение точки равно производной по времени от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора этой точки.
Дифференцируя $\vec{r} = 4\vec{\imath} + sint\vec{\jmath} - 3t\vec{k}$, находим вектор скорости:
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = cost\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.
Далее дифференцируя уравнение $\vec{v} = cost\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, находим вектор ускорения:
$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -sint\vec{\jmath}$,
следовательно, проекции вектора на оси будут:
$a_x = 0;\ a_y = -sint;\ a_z = 0,$
то есть, вектор ускорения параллелен оси Oy.
Ответ: 4.параллельно оси Oy.

ЗАДАЧА 11.

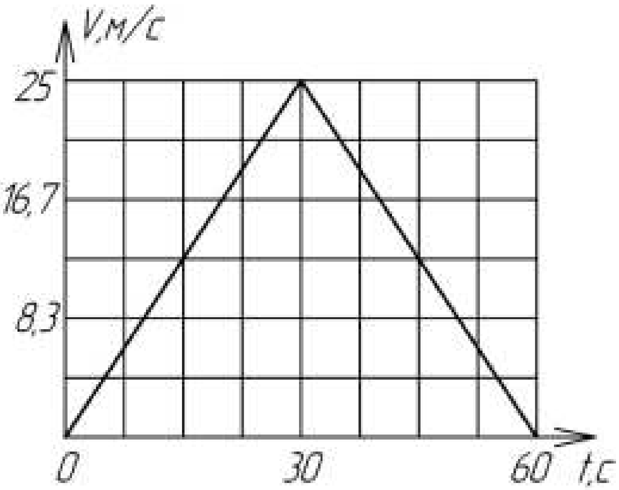
Точка движется по прямой.
Дан график скорости движения точки $v = f(t)$.
Определить пройденный путь в момент времени t=60c.



Варианты ответов.

1. 1350;	2. 750;	3. 375;	4. 800.

Решение.



Так как на графике значения скорости даны в км/ч, а времени - в секундах, то необходимо привести их к одной единице измерения.
Переводим км/ч в м/с:
$90\frac{км}{ч} = \frac{90\cdot1000}{3600}\frac{м}{с} = 25$(м/с).
График можно разделить на два участка от 0 до 30с и от 30с до 60с.

Они симметричны, следовательно, можно определить путь только на одном участке (s_1), а путь на втором будет равным ($s_2 = s_1$).
$s = s_1 + s_2 = 2s_1$
Рассмотрим первый участок, по графику можно определить уравнение зависимости скорости от времени: $v_1 = \frac{v - v_0}{\Delta t} t = \frac{25-0}{30} t = 0{,}83t$ (м/с).
Так как модуль скорости по модулю равен $v = |v_\tau| = |\dot{S}|$, то проинтегрировав уравнение скорости, получим уравнение движения точки

$$s_1 = \int_{t=0}^{t=30} v_1 dt = \int_0^{30} 0{,}83t\, dt = 0{,}83 \frac{t^2}{2}\Big|_0^{30} = 0{,}83 \frac{30^2}{2} - 0{,}83 \cdot 0 = 375\ (м),$$

получили, что за первые 30 секунд точка преодолеет путь $s_1 = 375$ (м).
$s = 2s_1 = 2 \cdot 375 = 750$ (м).

Ответ: 2. $s = 750$ (м).

ЗАДАЧА 12.

Точка начинает движение из состояния покоя и движется по прямой с постоянным ускорением a=0,2(м/с^2). Определить путь, который точка пройдет за промежуток времени от t_1=4(с) до t_2=10(с).

Варианты ответов.

1. 6,0;	2. 7,2;	3. 8,4;	4. 1,2.

Решение.

Движение точки происходит по прямой, следовательно, нормальное ускорение точки равно нулю ($a_n = 0$), а ее полное ускорение (a) равно касательному (a_τ).
Чтобы определить путь точки сначала необходимо найти уравнение скорости $v = f(t)$. Касательное ускорение равно производной по времени от скорости, значит, уравнение скорости определяется интегрированием:

$$v = \int_{t_o=0}^{t} a\ dt = \int_0^t 0{,}2\, dt = 0{,}2t|_0^t = 0{,}2t - 0 = 0{,}2t\ (\text{м/с}).$$

Граничные значения при интегрировании определяются из условия задачи, точка начинает движение из состояния покоя, и отсчет времени начинается с этого момента (t_0=0). А для того чтобы выразить зависимость скорости от времени, конечное значение остается переменной t.

Далее, интегрируя $v = 0{,}2t\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, получим уравнение движения точки, а в задании следует определить путь, который точка пройдет за промежуток времени от t_1=4(с) до t_2=10(с), поэтому, подставив данное время в граничные значения и решив определенный интеграл, получим искомый ответ:

$$s = \int_{t_1=4}^{t_2=10} v\,dt = \int_4^{10} 0{,}2t\,dt = \frac{0{,}2t^2}{2}\Bigg|_4^{10} = 0{,}1\cdot 10^2 - 0{,}1\cdot 4^2 = 8{,}4\ (\text{м}).$$

За промежуток времени от 4(с) до 10(с) точка пройдет путь $s = 8{,}4$ (м).

<u>Ответ:</u> 3. $s = 8{,}4$ (м).

<u>ЗАДАЧА 13.</u>

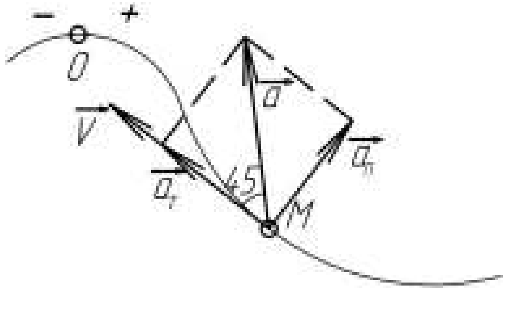
Ускорение точки a=1 (м/с^2). Векторы ускорения и скорости образуют угол 45^0. Определить скорость в км/ч, если радиус кривизны траектории $\rho = 300$(м).

<u>Варианты ответов.</u>

1. 52,4;	2. 12,3;	3. 14,6;	4. 44,3.

<u>Решение.</u>

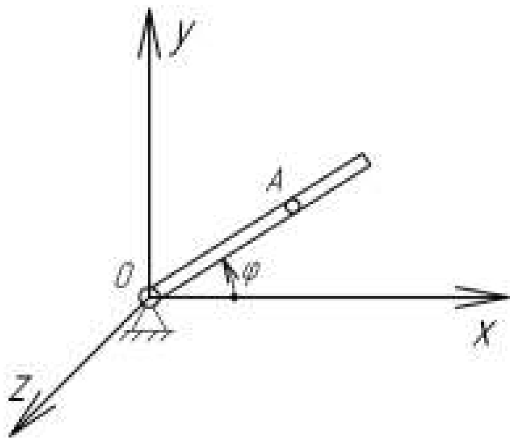
Полное ускорение точки ($\vec{a}$) складывается из двух – касательного ($\vec{a}_\tau$) и нормального ($\vec{a}_n$):
$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.
Касательное ускорение направлено по касательной к траектории. Скорость также всегда направлена по касательной к траектории в сторону движения, таким образом, вектор скорости и касательного ускорения расположены на одной прямой.
Нормальное ускорение направлено по нормали, и его проекция на нормаль $a_n = v^2/\rho$. То есть касательное и нормальное ускорения расположены под углом 90°.
Отсюда следует, что между векторами полного ускорения и касательного угол 45°, а значит, и между векторами полного ускорения и нормального также 45°. Следовательно, значение нормального ускорения равно:



$a_n = a\cdot cos\,45° = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$(м/с^2).
Из уравнения $a_n = v^2/\rho$ находим значение скорости

$v = \sqrt{a_n \cdot \rho} = \sqrt{0{,}707 \cdot 300} = 14{,}56$ (м/с).
В ответе требуется указать значение скорости в км/ч, поэтому переводим м/с в км/ч:
$v = 14{,}56 \frac{м}{с} = 14{,}56 : \frac{1000}{3600} = \frac{14{,}56 \cdot 3600}{1000} \frac{км}{ч} = 52{,}4$ (км/ч).
Ответ: 1. $v = 52{,}4$ (км/ч).

ЗАДАЧА 14.



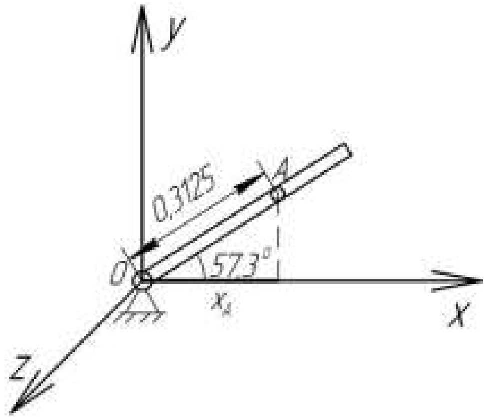
В трубке, вращающейся по закону $\varphi = 4t$ (рад) вокруг оси Oz, движется шарик по закону $OA=5t^2$ (м).
Определить координату x_A(м) шарика в момент времени t=0,25(с).

Варианты ответов.

1. 0,3;	2. 0,169;	3. 0,312;	4. 0,174.

Решение.

Шарик участвует в сложном движении: движение шарика по трубке – относительное движение; вращение шарика вместе с трубкой – переносное движение.



Координату необходимо найти в момент времени t=0,25с, поэтому, подставляем данное время в уравнения движений:
$\varphi = 4t|_{t=0,25} = 4 \cdot 0{,}25 = 1$ (*рад*),
$OA = 5t^2|_{t=0,25} = 5 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}3125$ (*м*).
$\varphi = 1$ рад – показывает на какой угол отклонилась трубка за время t=0,25с от начального своего положения, оси Ox (переносное движение).
$\mathrm{OA} = 0{,}3125$ м – показывает какое расстояние в трубке преодолел шарик за это же время, двигаясь из точки O (относительное движение).
По рисунку видно, что проекция $\mathrm{OA} = 0{,}3125$ м на ось Ox и будет искомой координатой x_A. Предварительно переведем угол φ из радиан в градусы: $180^o \cdot 1/\pi = 57{,}3^o$.
$x_A = 0{,}3125 \cdot cos57{,}3^o = 0{,}169$ м.

Ответ: 1. $x_A = 0{,}169$ *м.*

ЗАДАЧА 15.

Заданы уравнения движения точки $x = 3t, y = t^2$. Определить расстояние (м) точки от начала координат в момент времени t=2 (с).

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ.

1. 2,0;	2. 6,32;	3. 10,0;	4. 7,21.

РЕШЕНИЕ.

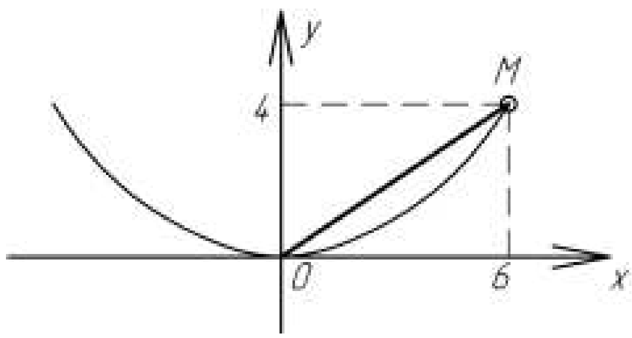
Движение точки задано координатным способом, координаты точки являются функциями времени.

$\frac{x}{3} = t, \; y = t^2,$

Исключим время из уравнений движения:

$y = \left(\frac{x}{3}\right)^2.$

Получаем, что траектория движения точки - это уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, а центр находится в начале координат.



Подставив время t=2(c) в уравнения движения, получим координаты точки M:

$x = 3t|_{t=2} = 3 \cdot 2 = 6$ м,

$y = t^2|_{t=2} = 2^2 = 4$ м.

Из рисунка видно, что расстояние от центра координат до точки M - это гипотенуза в прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 6м и 4 м.

$$OM = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}21 \text{ (м)}.$$

ОТВЕТ: 4. $OM = 7{,}21$ м.

Маковкин Георгий Анатольевич
Аистов Анатолий Сергеевич
Куликов Игорь Сергеевич
Юдников Сергей Георгиевич
Баранова Алла Сергеевна
Никитина Елена Александровна
Круглова Татьяна Евгеньевна
Орехова Ольга Ивановна
Лупанова Галия Алексеевна

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Выпуск 2. Кинематика точки

Методические указания для подготовки к интернет - тестированию
по теоретической механике

Подписано к печати . Формат 60х90 1\16 Бумага газетная. Печать трафаретная
Уч.изд.л.1,0. Усл.печ.л.1,2 Тираж 200 экз. Заказ №

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.