ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ННГАСУ)

Кафедра теоретической механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания для выполнения расчетно-графической работы по статике

Нижний Новгород – 2010

УДК 531.1

Теоретическая механика. Методические указания для выполнения расчетно-графической работы по статике. Нижний Новгород, ННГАСУ, 2010 г.,

Настоящие методические указания предназначены для студентов ННГАСУ. Содержит задания для расчетно-графической работы, краткие сведения из теории, рекомендации по решению задач, примеры решения типичных задач.

Составители: Г.А. Маковкин, А.С. Аистов, С.Г. Юдников

Введение

Настоящие методические указания предназначены для студентов, изучающих курс теоретической механики, и могут быть использованы при выполнении расчетно-графической работы по разделу статика твердого тела. Методические указания содержат в краткой форме теоретические положения, примеры и упражнения с решениями и пояснениями к следующим разделам статики твердого тела:

- *Равновесие твердого тела под действием системы сходящихся сил;*
- *Равновесие твердого тела под действием плоской системы параллельных сил;*
- *Равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил;*
- *Равновесие составных систем твердых тел;*
- *Центр тяжести твердого тела;*
- *Равновесие твердого тела под действием пространственной системы произвольно расположенных сил.*

1.Основные задачи статики твердого тела

Важнейшим понятием в теоретической механике является понятие силы.

Сила *– это мера механического воздействия тел, определяющая интенсивность и направление этого воздействия.*

Силу определяют три его элемента: числовое значение (модуль), направление и точка приложения. Прямая, вдоль которой действует сила, называется линией действия силы.

За единицу силы в Международной системе единиц измерения принимается ньютон, т.е. сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2. В практике силу измеряют и другими единицами: 1 кН (килоньютон) =1000 Н (ньютон), 1 мН (меганьютон) =1000 кН = 10^6 Н.

Совокупность нескольких сил, действующих на тело, называется системой сил. Системы сил, под действием каждой из которых тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются эквивалентными.

Сила, эквивалентная некоторой системе сил называется равнодействующей этой системы сил.

Основными задачами статики являются:

- *преобразование системы сил, приложенных к телу, в более простую эквивалентную систему сил, после чего легко установить, в каком кинематическом состоянии находится тело (в состоянии покоя или в движении).*
- *исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.*

2.Связи и реакции связей

2.1 Степени свободы, число степеней свободы

Движение материальных тел и точек в пространстве можно представить в виде комбинации более простых (элементарных) форм *движения, таких как движение вдоль прямолинейной оси и поворот относительно некоторой оси.*

Возможность совершения телом одного из таких элементарных движений назовем ***степенью свободы.***

Таким образом, положение материального тела и точки в пространстве в данный момент времени определяется геометрическими параметрами:

- при движении тела вдоль прямолинейной оси – x,y,z;

- при повороте относительно некоторой оси – углами поворота φ_x *,* φ_y *,* φ_z

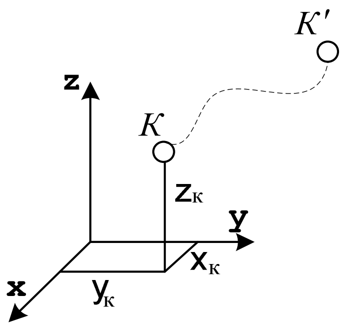
Количество независимых геометрических параметров, определяющих положение тела (точки) в пространстве в данный момент времени при любом его движении назовем ***числом степеней свободы.***

Материальная точка

Движение материальной точки в пространстве может быть представлено в виде комбинации трех элементарных видов движения, а на плоскости, − только двух. Положение точки в пространстве в данный момент времени определяется тремя независимыми геометрическими параметрами – x,y,z. На плоскости – двумя независимыми геометрическими параметрами – x,y.

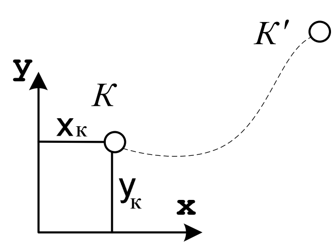
В пространстве

3 степени свободы



На плоскости

2 степени свободы



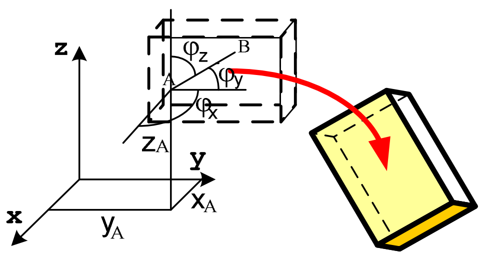
Материальное тело

Материальное тело, двигаясь в пространстве или на плоскости, не только смещается по направлению координатных осей, но может также и поворачиваться.

Положение тела в пространстве в данный момент времени определяется шестью независимыми геометрическими параметрами – x,y,z, $\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$. На плоскости – тремя независимыми геометрическими параметрами – x,y, φ.

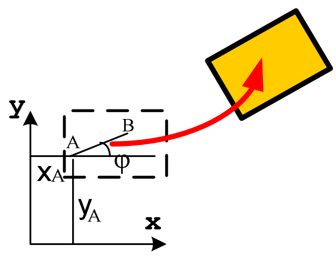
В пространстве

6 степеней свободы



На плоскости

3 степени свободы



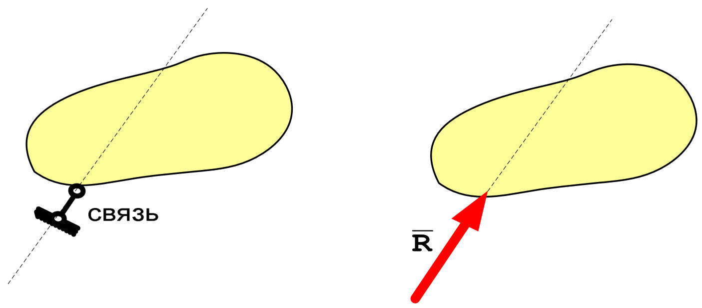
Чтобы конструкция, находясь под действием произвольной системы внешних сил, называемых нагрузками, находилась в покое, конструкции опор и их количество должны быть подобраны таким образом, чтобы исключить все степени свободы тела.

2.2. Понятие о связях

В теоретической механике под связью понимается любое ограничение, наложенное на движение тела. Это ограничение является следствием его взаимодействия с другими телами.

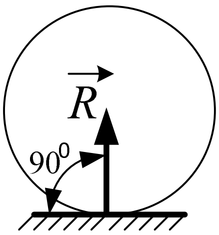
Под связью обычно понимают запрет на перемещение некоторой точки тела по заданному направлению.

В этом случае связь схематически изображают в виде стержня с шаровыми шарнирами по краям. Характерной особенностью такого *стержня является то, что сила, с которой он действует на материальное тело, всегда направлена вдоль его оси. Эта сила называется реакцией связи.*

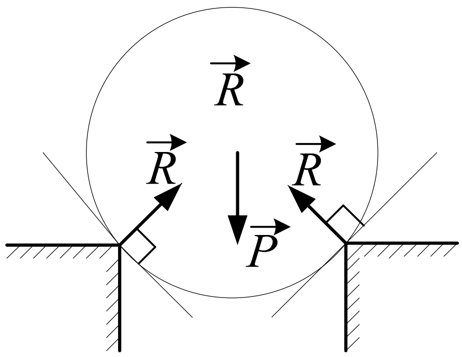


Основные типы связей

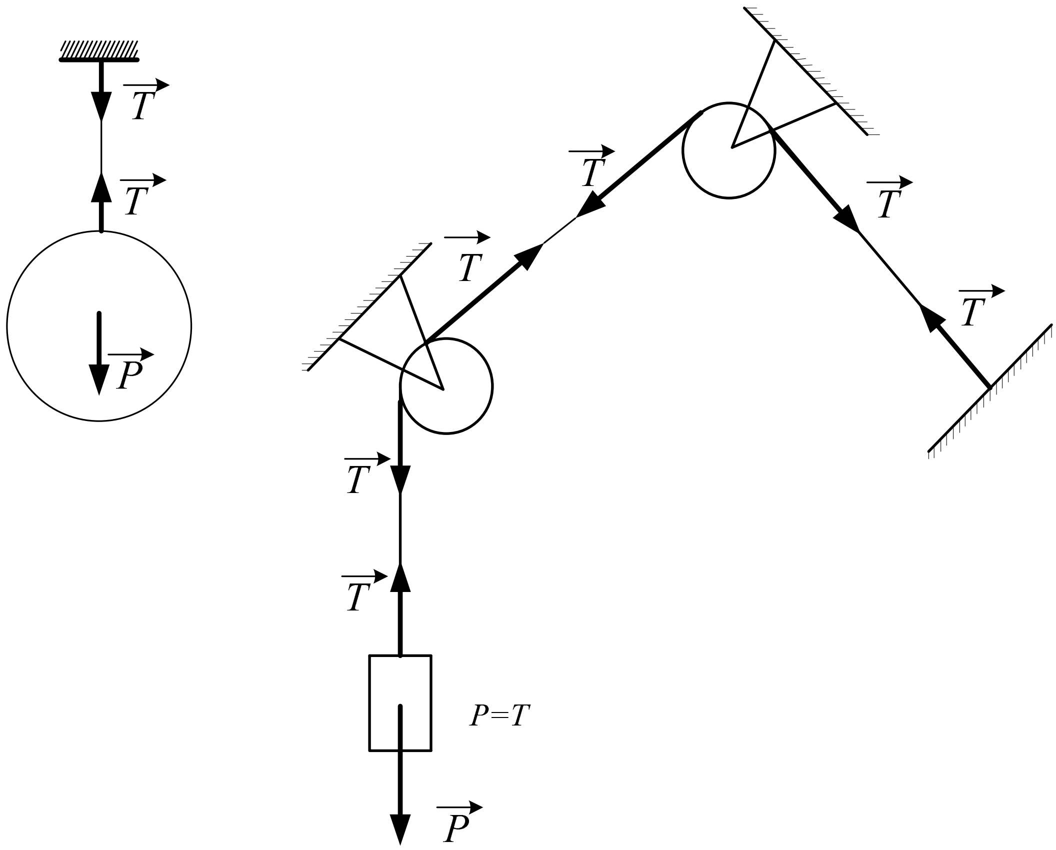
*1.**Абсолютно гладкая поверхность**. Реакция $\vec{\boldsymbol{R}}$ гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности.*



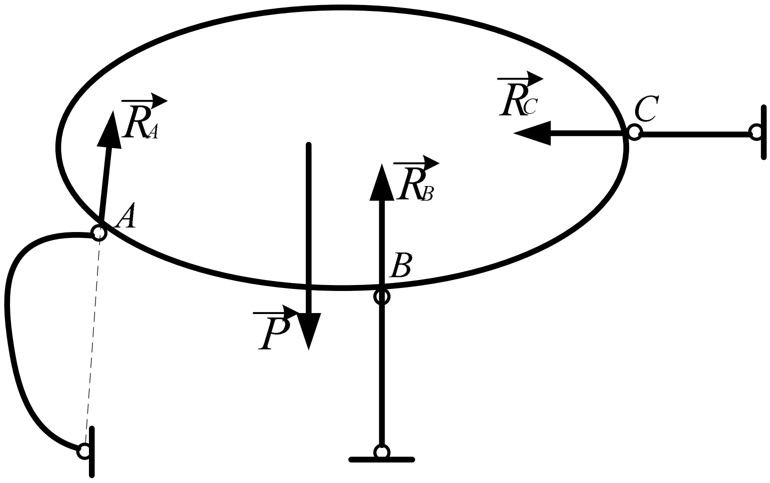
*2.**Ребро.** Реакция ребра $\vec{\boldsymbol{R}}$ направлена по нормали к поверхности тела, опирающегося на это ребро.*

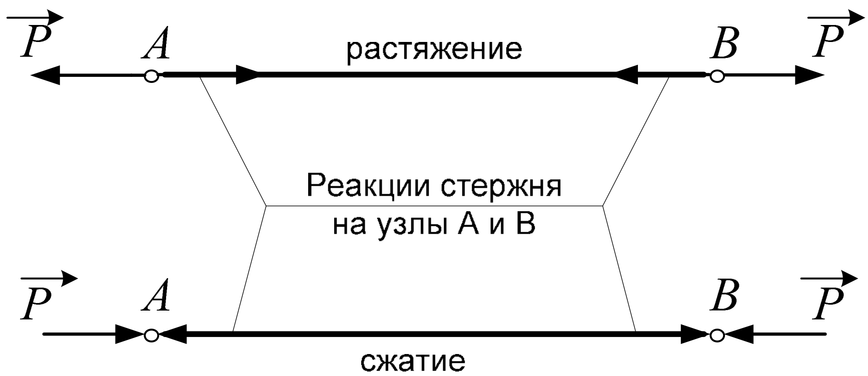


*3.**Гибкая связь** (трос, канат, нить). Реакция нити* $\vec{T}$ *на данное тело направлена вдоль нити. Гибкая связь может испытывать только растяжение. При этом растягивающее усилие нити неизменно на всех ее участках и равно реакции нити на соединяемые ею тела. При растяжении реакции направлены от тел, соединяемых нитью. Если пренебречь силами трения, то натяжение нити на всех ее участках равно величине подвешенного к ней груза.*

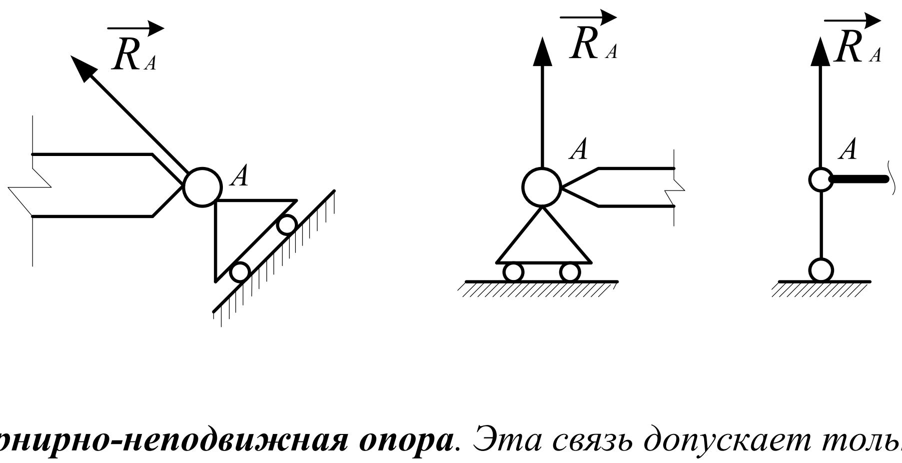


*4.**Тонкий невесомый (ненагруженный) стержень с шарнирами по концам**. Шарнир – это устройство, допускающее поворот одного тела относительно другого. Реакция тонкого стержня* $\vec{\boldsymbol{R}}$ *на данное тело направлена по прямой, соединяющей шарнирные концы стержня. В зависимости от направления сил, действующих со стороны шарниров, прямой невесомый стержень АВ может испытывать растяжение или сжатие. Усилие стержня изображается его реакциями на шарниры, при растяжении от шарниров, а при сжатии – стрелками к шарнирам.*



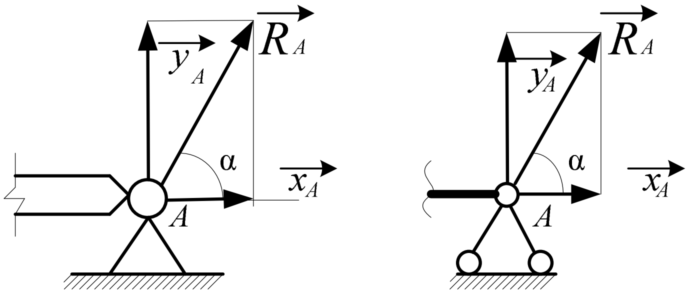


5.***Шарнирно-подвижная опора***. *Эта связь допускает поворот данного тела вокруг оси опорного шарнира и поступательное перемещение тела параллельно опорной плоскости. Реакция связи* $\vec{\boldsymbol{R}}$ *проходит через центр шарнира перпендикулярно опорной плоскости.*

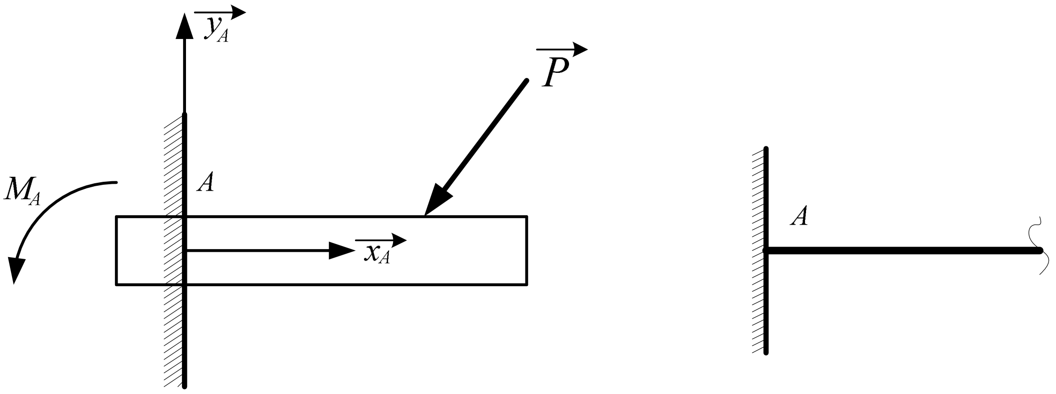


6.***Шарнирно-неподвижная опора***. *Эта связь допускает только поворот данного тела вокруг оси опорного шарнира и препятствует любому поступательному движению тела. Реакция связи* $\vec{\boldsymbol{R}}$ *проходит через центр* *шарнира, но линия действия реакции может быть какой угодно в зависимости от сил, действующих на тело. При решении задач реакцию* $\vec{R}$ *представляют в виде дух составляющих* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *по взаимно перпендикулярным осям. Модуль и направление реакции* $\vec{R}$ *определяют следующим образом:*

$R=\sqrt{x^2+y^2}$; $tg\,\alpha = y/x$.



7.***Жесткая опора (заделка)****. Эта связь препятствует любому поступательному и вращательному движению данного тела. При решении задач реакцию заделки* $\vec{R}$ *представляют двумя составляющими* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *по взаимно перпендикулярным осям и опорным моментом* M_A .



3.Свободное и несвободное тело. Активные и реактивные силы

Тело называется свободным, если под действием приложенных к нему сил может перемещаться в любом направлении.

Тело, свобода перемещения которого ограничена другими телами, называется несвободным.

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются его связями.

При действии данного тела на связь с ее стороны возникает противодействие. Сила, с которой связь действует на данное тело, называется ***реакцией связи.***

Все силы, действующие на данное тело, можно подразделить на активные и реактивные силы.

Активными *называются известные по модулю и направлению силы, с которыми на данное тело действуют другие тела, не являющиеся его связями.*

Реактивные *силы – это реакции связей данного тела. Реакции связей возникают только в том случае, когда тело под действием активных сил давит на связи. При этом направление реакции связи противоположно направлению, по которому связь препятствует перемещению данного тела, и зависит от типа связи.*

При решении задач статики часто используется принцип освобождаемости тел от связей. Согласно этому принципу несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи заменить их реакциями.

4. Момент силы относительно точки на плоскости и в пространстве

Моментом силы *относительно точки на плоскости называется произведение модуля силы на ее плечо относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус.*

$$M_0(\vec{\mathbf{P}}) = \pm Ph$$

Точка, относительно которой определяется момент, называется ***моментной точкой****.*

Плечо силы *– длина отрезка перпендикуляра, восстановленного из моментной точки к линии действия силы. Момент силы считают положительным, если направление вращения плоскости под действием силы происходит против хода часовой стрелки и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.*

Единица измерения модуля момента силы равна произведению единицы силы на единицу длины (Нм; кНм).

Момент силы относительно точки в пространстве определяется вектором, приложенным в этой точке, модуль которого равен произведению модуля силы на плечо.

Этот вектор перпендикулярен к плоскости, проведенной через моментную точку, и линию действия силы и направлен так, чтобы вращение плоскости (если смотреть с конца вектора) происходило против хода часовой стрелки.

$$|M_0(\vec{P})| = Ph$$

5.Пара сил. Момент пары сил на плоскости и в пространстве

Парой сил называется *совокупность двух параллельных сил (линии действия которых, не совпадают), равных по модулю и направленных в противоположные стороны.*

Плоскость, в которой действуют силы, называется плоскостью действия пары.

Кратчайшее расстояние «h» между линиями действия сил, составляющих пару, называется плечом пары.

Если пару сил приложить к телу, находящемуся в покое, то оно будет совершать вращательное движение.

Пару сил нельзя уравновесить силой, так как она не имеет равнодействующей. Уравновесить пару можно только с помощью другой пары.

Вращательное действие пары на твердое тело характеризуют моментом пары.

Момент пары на плоскости – это скалярная величина, равная произведению одной из сил на плечо пары, взятое со знаком плюс или минус

$$M_0(\vec{P}, \overrightarrow{P'}) = \pm Ph$$

Пару сил в пространстве характеризуют:

- плоскость действия;

-величина момента пары;

-направление вращения.

Момент пары в пространстве зависит от расположения плоскости действия и от направления, в котором пара стремится вращать тело, т.е. является векторной величиной.

Вектор, определяющий момент пары, называют вектор-моментом. Вектор-момент пары равен по модулю произведению силы пары на ее плечо и направлен перпендикулярно к плоскости действия пары таким образом, чтобы вращение плоскости происходило против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора.

6. Порядок решения задачи на определение реакций связей

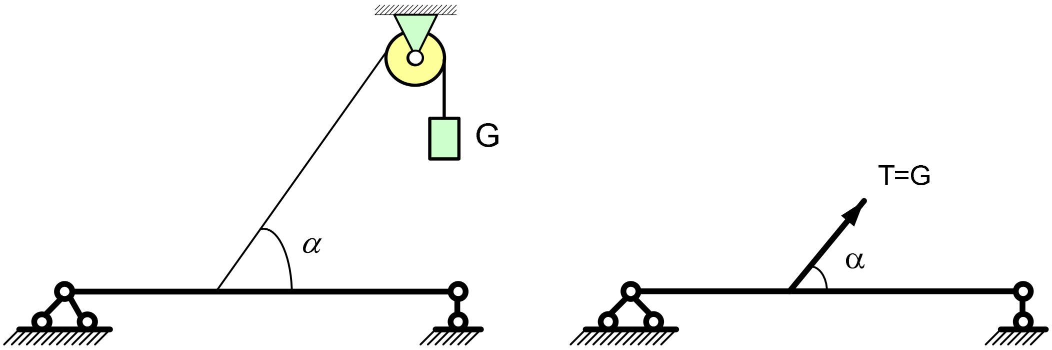
При решении рассматриваемой задачи рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1. *выбрать тело, равновесие которого будет рассматриваться;*
2. *приложить к нему все активные силы, заменив распределенную нагрузку сосредоточенной силой. Равнодействующая распределенной нагрузки проходит через центр тяжести грузовой эпюры и равна по модулю ее площади;*
3. *выбрать систему координат и заменить отброшенные связи их реакциями;*
4. *составить уравнения равновесия и определить из них неизвестные реакции;*
5. *проверить правильность решения задачи.*

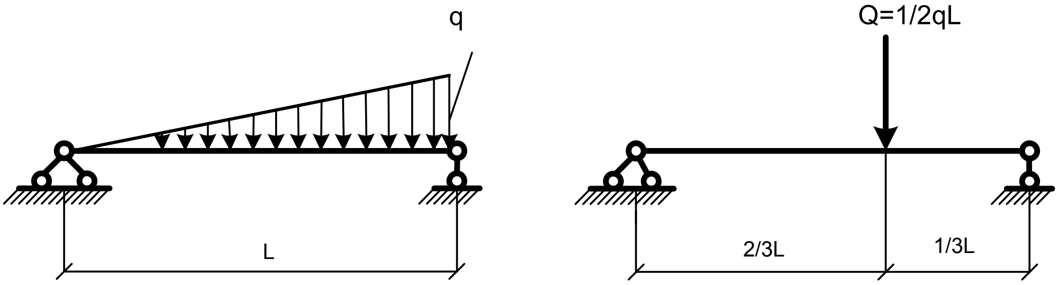
Рассмотрим подробнее каждый из этих этапов.

1.Выбор тела в данной задаче не вызывает затруднений.

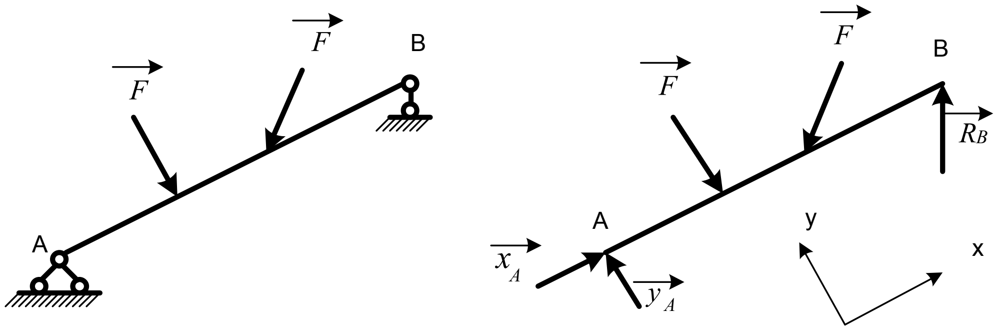
2.Если нагрузка приложена к телу посредством нити, переброшенной через *идеальный блок, сила натяжения нити по модулю всюду будет равна весу, подвешенного на ней груза.*



Равнодействующая распределенной нагрузки проходит через центр тяжести грузовой эпюры и равна по модулю ее площади.



3. Систему координат надо по возможности выбирать так, чтобы оси Ox и Oy были ориентированы вдоль известных по направлению сил. Составляющие опорных реакций обычно направляют в положительную сторону этих осей.



4.При составлении уравнений равновесия надо учесть следующее.

а) Система сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся в пространстве необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую координатную ось равнялась нулю

$$\sum \boldsymbol{X} = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0.$$

Для равновесия системы сходящихся на плоскости необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на оси X и Y равнялась нулю

$$\sum X = 0; \sum Y = 0.$$

б) Плоская система произвольно расположенных сил

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_0 = 0.$ *- 1-я форма*

$\sum X = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0.$ *– 2-я форма (прямая АВ не перпендикулярна оси ОХ)*

$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0.$ *– 3-я форма (точки А,В,С не лежат на одной прямой)*

При выборе той или иной формы уравнений равновесия надо стремиться к тому, чтобы из полученной системы трех уравнений неизвестные реакции определялись независимо друг от друга или хотя бы последовательно. Для достижения этого в качестве моментных целесообразно выбирать точки, где пересекаются линии действия двух других неизвестных реакций или составляющих.

в) Пространственная система произвольно расположенных сил

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0;$$

$$\sum M_X = 0; \sum M_Y = 0; \sum M_Z = 0.$$

Задача 1. Тема: Равновесие плоской системы сходящихся сил.

Силы называются сходящимися, *если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке.*

Изучение системы сходящихся сил необходимо для дальнейших обобщений, относящихся к произвольной системе сил.

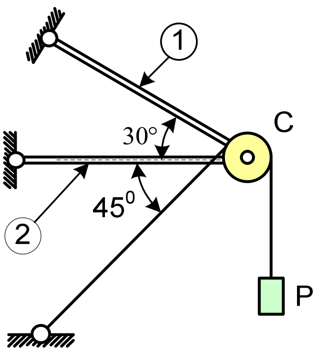
Аналитическим условием равновесия *сходящейся системы сил является равенство нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.*

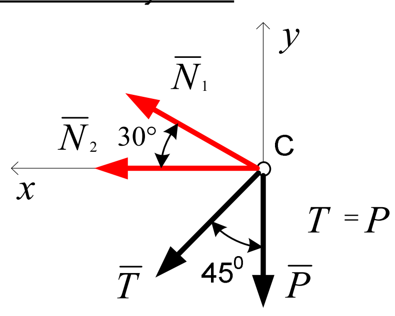
Условием равновесия такой системы сил в геометрической форме является условие замкнутости силового многоугольника построенного на этих силах, как на сторонах, т. е. конец последней силы в этом многоугольнике совпадает с началом первой силы.

Пример*: определить усилия в стержнях, удерживающих центр невесомого блока C , пренебрегая его размерами и трением в нем, от действия веса P данного груза.*

Дано: $P = 10кН$; *трение отсутствует; размеры блока не учитываются.*

Определить реакции связей $\overline{N}_1$ *и* $\overline{N}_2$.





Аналитическое решение.

1. *Освобождаем узел C от связей, и предполагая стержни растянутыми, заменяем их действие неизвестными реакциями* $\overline{N}_1$ *и* $\overline{N}_2$.

2. *Выбираем систему прямоугольных координат с центром в точке С - Схy.*
3. *Записываем уравнения равновесия полученной системы сходящихся сил на плоскости*

$$\begin{cases}\sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0;\end{cases} \qquad \begin{cases} N_1 \cos 30° + N_2 + T\cos 45° = 0; \\ N_1 \sin 30° - T\sin 45° - P = 0;\end{cases}$$

4. *Решаем систему уравнений:*

$$N_1 = \frac{P(1+\sin 45°)}{\sin 30°} = 2P\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(2+\sqrt{2}\right) = 3.4142P = 34.142кН;$$

$$N_2 = -N_1\cos 30° - T\cos 45° = -34.142\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -36.638кН.$$

Знак «минус» говорит о том, что реакция N_2 *на самом деле направлена в другую сторону, то есть 2-й стержень сжат .*

<u>Проверяем решение графоаналитическим (геометрическим) способом.</u>

1. *Выбираем масштаб и строим многоугольник сил, начиная с известных сил* $\overline{P}$ *и* $\overline{T}$*.*

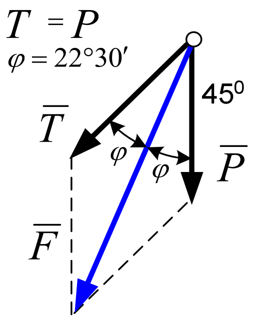


Рис. 1

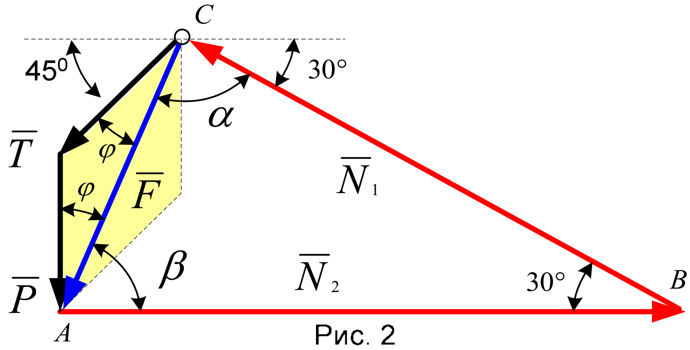


Рис. 2

1. *Согласно аксиоме параллелограмма сил складываем силы* $\overline{P}$ *и* $\overline{T}$*, заменяя их равнодействующей* $\overline{F}$*.*

$$F = \sqrt{P^2 + T^2 + 2PT\cos 45°} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 18.478кН. \quad \textit{(Рис. 1)}$$

2. *Определяем углы треугольника ABC.*

$$\alpha = 180° - 45° - \varphi - 30° = 82°30'; \qquad \beta = 180° - 30° - \alpha = 67°30'. \qquad \textit{(Рис. 2)}$$

3. Определяем реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, используя теорему синусов.

$$\frac{N_1}{\sin 67°30'} = \frac{F}{\sin 30°}, \quad \text{откуда} \quad N_1 = \frac{F \cdot \sin 67°30'}{\sin 30°} = \frac{18.478 \cdot 0.9225}{0.5} = 34.092 кН;$$

$$\frac{N_2}{\sin 82°30'} = \frac{F}{\sin 30°}, \quad \text{откуда} \quad N_2 = \frac{F \cdot \sin 82°30'}{\sin 30°} = \frac{18.478 \cdot 0.9910}{0.5} = 36.623 кН.$$

Погрешности составляют:

$$\delta_1 = \left|\frac{34.142 - 34.092}{34.142}\right| \cdot 100\% = 0.146\%, \qquad \delta_2 = \left|\frac{36.638 - 36.623}{36.638}\right| \cdot 100\% = 0.041\%.$$

<u>Ответ:</u> Реакции стержней равны: $N_1 = 34.092 кН$ *(стержень растянут),*

$N_2 = 36.623 кН$ *(стержень сжат).*

<u>Задача 2. Тема: Равновесие плоской системы параллельных сил.</u>

Одной из простейших строительных конструкций является балка на двух опорах, загруженная системой параллельных сил в виде сосредоточенных сил, распределенных нагрузок и пар сил.

Если данная конструкция находится в равновесии под действием системы параллельных сил, то число неизвестных реакций <u>не должно быть больше двух</u>, так как в этом случае мы имеем только <u>два</u> уравнения равновесия в виде:

$$\Sigma У = 0, \ \Sigma M_o = 0,$$

где ось «у» параллельна данным силам.

А также уравнения равновесия в данном случае можно выразить и в другой форме:

$$\Sigma M_A = 0, \ \Sigma M_B = 0,$$

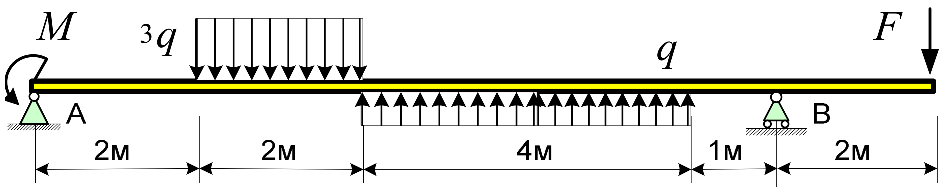
Причем прямая АВ не параллельна данным силам.

Пример: *однородная балка, размеры которой указаны на рисунке, находится в равновесии под действием заданных нагрузок F, g, M и реакций связей (опор) в точках A и B. Найти реакции опор.*

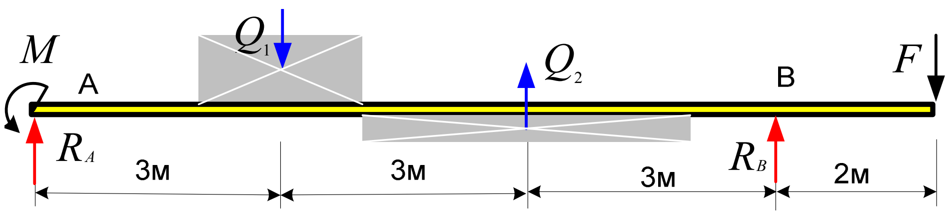
Дано: $F = 20кН$, $q = 10кН/м$, $M = 30кНм$.

Определить реакции опор A и B.

Решение.



1. *Отбрасываем связи (опоры) и заменяем их неизвестными реакциями. Распределенные нагрузки заменяем равнодействующими:* $Q_1 = 3g \cdot 2м$ *и* $Q_2 = g \cdot 4м$.



2. *Составляем уравнения равновесия.*

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} M - Q_1 \cdot 3 + Q_2 \cdot 6 - F \cdot 11 + R_B \cdot 9 = 0 \\ M + Q_1 \cdot 6 - Q_2 \cdot 3 - F \cdot 2 - R_A \cdot 9 = 0; \end{cases}$$

3. *Решаем систему уравнений и находим неизвестные реакции.*

$$\begin{cases} R_B = (-M + Q_1 \cdot 3 - Q_2 \cdot 6 + F \cdot 11)/9 = (-30 + 60 \cdot 3 - 40 \cdot 6 + 20 \cdot 11)/9 = 14.444кН \\ R_A = (+M + Q_1 \cdot 6 - Q_2 \cdot 3 - F \cdot 2)/9 = (30 + 60 \cdot 6 - 40 \cdot 3 - 20 \cdot 2)/9 = 25.555кН; \end{cases}$$

4. *Выполняем проверку, проектируя все силы на вертикальную ось.*

$$\sum Y = R_A - Q_1 + Q_2 + R_B - F = 25.555 - 60 + 40 + 14.444 - 20 = -0.001 \cong 0.$$

Проверка выполняется с удовлетворительной точностью.

Ответ: *Реакции равны* $R_A = 25.555кН$, $R_B = 14.444кН$.

Задача 3. Тема: Равновесие плоской системы произвольно расположенных сил.

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно главный вектор и главный момент равнялись нулю. Эти условия аналитически могут быть выполнены в трех формах (первая – основная и две- производные).

1-ая (основная форма уравнений равновесия):

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma У = 0,\ \Sigma M_o = 0.$$

Так как оси прямоугольных координат выбираются произвольно и точка О – любая точка плоскости, то для полученной системы уравнений равновесия отсутствуют ограничения. Поэтому такая система уравнений равновесия является основной.

2-ая форма уравнений равновесия:

$$\Sigma M_A = 0,\ \Sigma M_B = 0,\ \Sigma X = 0,$$

т.е. для равновесия произвольной системы сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех этих сил относительно любых двух точек А и В на плоскости и сумма их проекций на ось Х, не перпендикулярную к прямой АВ, были равны нулю.

3-я форма уравнений равновесия:

$$\Sigma M_A = 0,\ \Sigma M_B = 0,\ \Sigma M_C = 0,$$

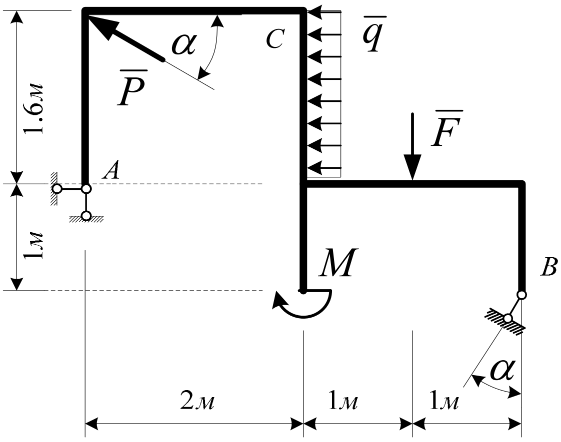
т.е. в случае использования данной формы уравнений необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно любых трех точек А, В и С на плоскости, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

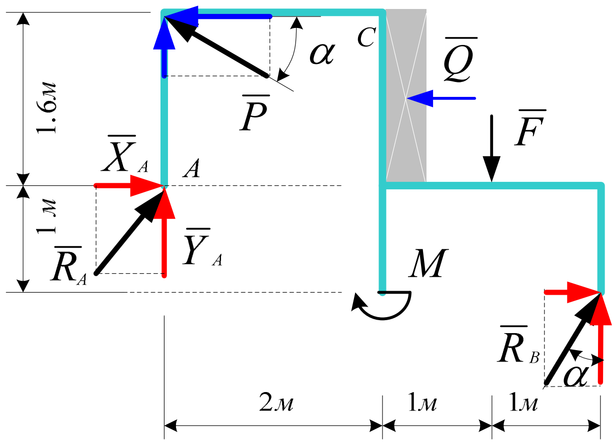
Пример: *Конструкция в виде жесткой рамы, закреплена с помощью опор в точках А и В (В-шарнирно-подвижная, А-шарнирно-неподвижная). К раме приложены нагрузки: сосредоточенные силы-Р и F, сосреточенный момент – М и распределенная нагрузка интенсивности –g.*

Определить реакции опор А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Дано: $F = 24кН$, $P = 20кН$, $q = 10кН/м$, $M = 30кНм$, $\alpha = 30°$.

Определить реакции опор *A* и *B*.





Решение.

1. *Отбрасываем связи (опоры) и заменяем их действие неизвестными реакциями. Реакция шарнирно-неподвижной опоры A неизвестна по направлению, поэтому мы представляем ее в виде двух составляющих X и Y. Реакцию шарнирно-подвижной опоры B направляем вдоль линии соединяющей концевые шарниры невесомого стержня.*
2. *Раскладываем все наклонные силы на составляющие по осям x и y с целью использования теоремы Вариньона для вычисления их моментов относительно заданных точек.*
3. *Заменяем распределенную нагрузку ее равнодействующей, величина которой равна площади эпюры, т.е.*

$$Q = q \cdot 1.6м = 10\frac{кН}{м} \cdot 1.6м = 16кН.$$

4.Составляем уравнения равновесия полученной системы сил, используя основную форму (1-ю):

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum X = 0 \\ \sum Y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} P \cdot \cos\alpha \cdot 1.6 + Q \cdot 0.8 - M - F \cdot 3 + R_B \cdot \sin\alpha \cdot 1 + R_B \cdot \cos\alpha \cdot 4 = 0 \\ X_A - P \cdot \cos\alpha - Q + R_B \cdot \sin\alpha = 0 \\ Y_A + P\sin\alpha + R_B\cos\alpha - F = 0. \end{cases}$$

5. Решаем систему уравнений и находим неизвестные реакции.

$$R_B = \frac{-P\cdot\cos\alpha\cdot 1.6 - Q\cdot 0.8 + M + F\cdot 3}{\sin\alpha\cdot 1 + \cos\alpha\cdot 4} = \frac{-20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1.6 - 16\cdot 0.8 + 30 + 24\cdot 3}{\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 15.511\kappa H;$$

$$X_A = P\cdot cos\alpha + Q - R_B\cdot\sin\alpha = 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 16 - 15.511\cdot\frac{1}{2} = 25.565\kappa H;$$

$$Y_A = -P\cdot\sin\alpha - R_B\cdot\cos\alpha + F = -20\cdot\frac{1}{2} - 15.511\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 24 = 0.567\kappa H.$$

6.Выполняем проверку, вычисляя сумму моментов относительно произвольной точки С.

$$\sum M_C = X_A\cdot 1.6 - Y_A\cdot 2 - P\sin\alpha\cdot 2 - Q\cdot 0.8 - M - F\cdot 1 + R_B\sin\alpha\cdot 2.6 + R_B\cos\alpha\cdot 2 =$$

$$25.565\cdot 1.6 - 0.567\cdot 2 - 20\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 - 16\cdot 0.8 - 30 - 24\cdot 1 + 15.511\cdot\frac{1}{2}\cdot 2.6 + 15.511\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = 0.0007.$$

Проверка выполняется с удовлетворительной точностью.

Ответ: *Реакции равны* $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 25.571\kappa H$, $R_B = 14.444\kappa H$.

Задача 4. Тема: Равновесие плоской системы сил, приложенных к составной раме.

Конструкции, состоящие из нескольких твердых тел, соединенных между собой связями (шарнирами), называются сочлененными системами. В соответствии с аксиомой отвердевания совокупность сил, действующих на любую систему тел, должна при равновесии этой системы удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела.

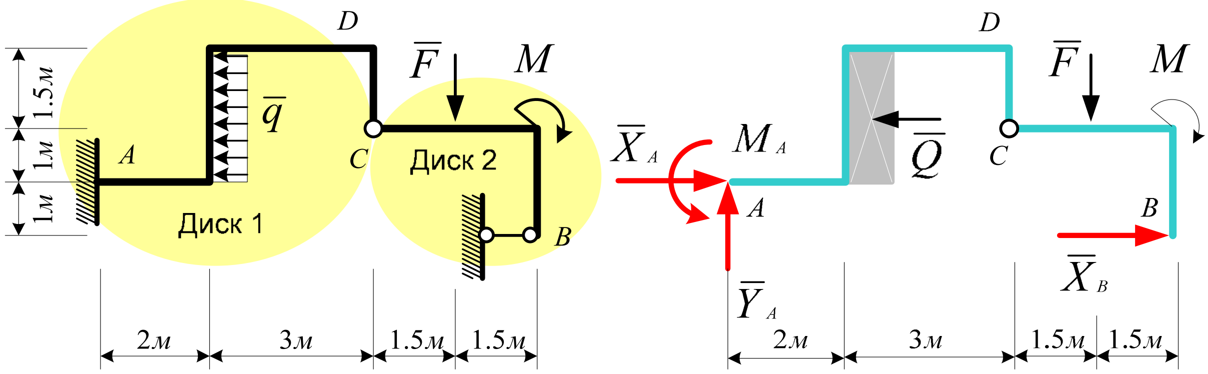
При решении задач на равновесие системы тел необходимо учесть, что все внешние и внутренние силы, приложенные к каждому телу в отдельности, уравновешиваются. Следовательно, в случае плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия для каждого из этих тел в отдельности. Таким образом, для системы, состоящей из n тел, можно составить всего 3n уравнений равновесия.

Весьма часто, бывает целесообразно определить только реакции внешних связей (опор) сочлененной конструкции. В этом случае достаточно *составить три уравнения равновесия для всей системы в целом (как для одного абсолютно твердого тела) и затем к ним присоединить необходимое число уравнений моментов сил относительно внутренних шарниров, соединяющих отдельные части (диски) данной конструкции.*

Пример: *данная сочлененная система состоит из двух тел: балки АС и балки СВ, шарнирно соединенными в точке С. Балка АС в точке А жестко заделана в стену, балка СВ в точке В опирается на шарнирно-**подвижную опору.***

Дано: $F = 24кН$, $q = 10кН/м$, $M = 30кНм$.

Определить *реакции опор А и В.*



Решение.

1. *Отбрасываем связи (опоры) и заменяем их неизвестными реакциями.*
2. *Заменяем распределенную нагрузку ее равнодействующей*

$$Q = q \cdot 2.5м = 10\frac{кН}{м} \cdot 2.5м = 25кН.$$

3. *Составляем уравнение, выражающее отсутствие поворота второго диска относительно первого диска.*

$$\sum M_C^{(CB)} = 0; \; -F \cdot 1.5 - M + X_B \cdot 2 = 0;$$

откуда $$X_B = \frac{F \cdot 1.5 + M}{2} = \frac{24 \cdot 1.5 + 30}{2} = 33кН.$$

4. *Пользуясь аксиомой отвердения, составляем уравнения равновесия всей конструкции, считая ее абсолютно твердым телом.*

$$\begin{cases}\sum X = 0\\ \sum Y = 0\\ \sum M_A = 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}X_A + X_B - Q = 0\\ Y_A - F = 0\\ M_A + Q\cdot 1.25 - F\cdot 6.5 - M + X_B\cdot 1 = 0.\end{cases}$$

5. *Решаем систему уравнений и находим неизвестные реакции.*

$X_A = -X_B + Q = -33 + 25 = -8кН;$

$Y_A = F = 24кН;$

$M_A = -Q\cdot 1.25 + F\cdot 6.5 + M - X_B\cdot 1 = -25\cdot 1.25 + 24\cdot 6.5 + 30 - 33\cdot 1 = 121.75кН\cdot м.$

6. *Выполняем проверку, вычисляя сумму моментов всех сил приложенных к раме относительно произвольной точки D.*

$$\sum M_D = M_A + X_A\cdot 2.5 - Y_A\cdot 5 - Q\cdot 1.25 - F\cdot 1.5 - M + X_B\cdot 2 =$$

$$121.75 - 8\cdot 2.5 - 24\cdot 5 - 25\cdot 1.25 - 24\cdot 1.5 - 30 + 33\cdot 3.5 = 0$$

Проверка выполняется.

Ответ: *Реакции равны:* $X_A = -8кН$ (*сила направлена в другую сторону*),

$Y_A = 24кН, \quad M_A = 121.75кН\cdot м, \quad X_B = 33кН.$

Задача 5. Тема: Равновесие пространственной системы параллельных сил.

Тело произвольной формы, находящееся в поле сил тяжести, можно разбить сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объемы. Если учесть, что радиус Земли очень велик, то силы тяжести, действующие на каждый элементарный объем, можно считать параллельными друг другу. Система таких сил может быть приведена к равнодействующей, которая называется силой тяжести данного тела. А точка приложения этой силы называется центром тяжести данного тела. Положение центра тяжести тела зависит только от формы тела и распределения в нем элементарных объемов.

Таким образом, центр тяжести- это такая геометрическая точка, неизменно связанная с телом, через которую проходит линия действия силы тяжести данного тела при любом его положении в пространстве.

Координаты центра тяжести твердого тела (точки С) определяются формулами:

$$x_c = \frac{\sum G_k x_k}{\sum G_k} \qquad y_c = \frac{\sum G_k y_k}{\sum G_k} \qquad z_c = \frac{\sum G_k z_k}{\sum G_k}$$

где $G_к$ – сила тяжести элементарных объемов тела,

$x_к$, $y_к$, $z_к$ – координаты центров тяжести элементарных объемов тела,

$G = \Sigma\, G_к$ – сила тяжести данного тела (его вес).

В частном случае, для плоских однородных тел в виде тонких фигур постоянной толщины, координаты центра тяжести определяются формулами:

$$x_c = \frac{\sum A_k x_k}{\sum A_k}\ ; \qquad y_c = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k},$$

где $A_к$ – площади простейших частей плоской фигуры, центры тяжести которых заранее известны,

$x_к$, $y_к$ – координаты центров тяжести простейших фигур,

$A = \Sigma\, A_к$ – площадь данной плоской фигуры.

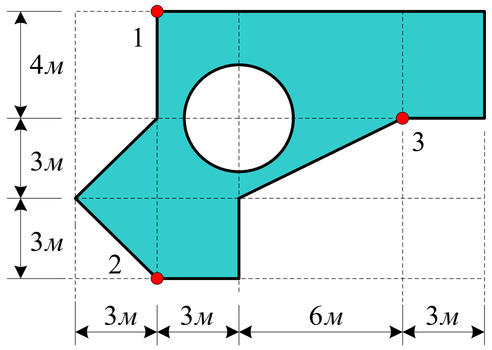
Пример: *Однородная плита, изображенная на рисунке с указанными размерами, прикреплена к земле при помощи трех стоек (опор). Способом разбиения на элементарные фигуры найти координаты центра тяжести этой плиты и реакции опор в указанных точках их крепления.*

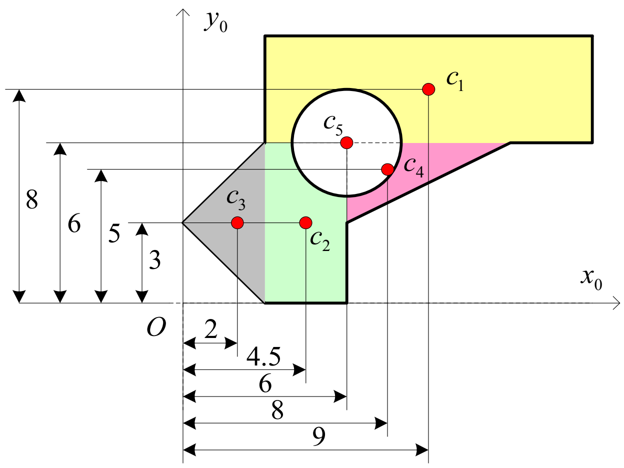
Дано: *вес 1м^2 плиты равен $g = 5\,{}^{кН}\!/_{м^2}$.*

Определить *реакции связей на опорах 1,2 и 3.*

Решение

1. *Выбираем исходную систему координат $x_O y_O$.*
2. *Разбиваем фигуру на простые составляющие.*





3. *Определяем площади и координаты центров тяжести составных частей фигуры.*

$A_1 = 12 \cdot 4 = 48 м^2;$ $x_1 = 9м;$ $y_1 = 8м;$

$A_2 = 6 \cdot 3 = 18 м^2;$ $x_2 = 4.5м;$ $y_2 = 3м;$

$A_3 = 3 \cdot 6/2 = 9 м^2;$ $x_3 = 2м;$ $y_3 = 3м;$

$A_4 = 3 \cdot 6/2 = 9 м^2;$ $x_4 = 8м;$ $y_4 = 5м;$

$A_5 = \pi \cdot 2^2 = 12.56 м^2;$ $x_5 = 6м;$ $y_5 = 6м.$

4. *Определяем общую площадь фигуры и вес плиты (равнодействующую системы параллельных сил тяжести).*

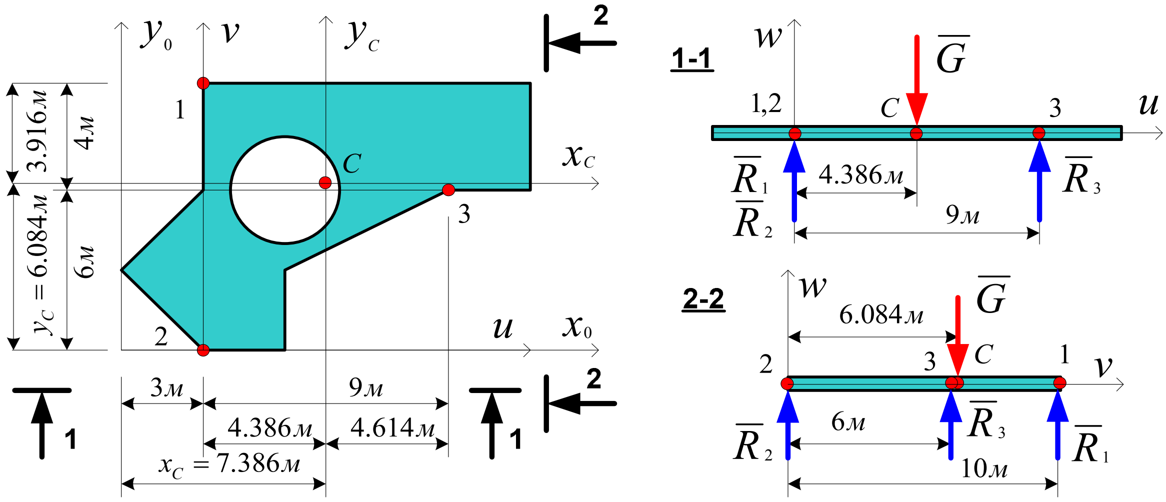
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 = 48 + 18 + 9 + 9 - 12.56 = 71.44 м^2;$$

$$G = g \cdot A = 5 \cdot 71.44 = 357.2 кН.$$

5. *Определяем точку приложения равнодействующей (координаты центра тяжести) и показываем ее на рисунке.*

$$x_C = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 - x_5 A_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5} = \frac{9 \cdot 48 + 4.5 \cdot 18 + 2 \cdot 9 + 8 \cdot 9 - 6 \cdot 12.56}{71.44} = 7.386 м;$$

$$y_C = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4 - y_5 A_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5} = \frac{8 \cdot 48 + 3 \cdot 18 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 9 - 6 \cdot 12.56}{71.44} = 6.084 м;$$



6. Составляем уравнения равновесия, используя систему координатных осей uvw, проходящих через точки опирания плиты.

$$\begin{cases} \sum M_V = 0 \\ \sum M_U = 0 \\ \sum W = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} G \cdot 4.386 - R_3 \cdot 9 = 0 \\ R_3 \cdot 6 - G \cdot 6.084 + R_1 \cdot 10 = 0 \\ R_1 + R_2 + R_3 - G = 0; \end{cases}$$

6. Решая систему уравнений, определяем реакции опор.

$$\begin{cases} R_3 = G \cdot 4.386/9 = 357.2 \cdot 4.386/9 = 174.075кН \\ R_1 = (G \cdot 6.084 - R_3 \cdot 6)/10 = (357.2 \cdot 6.084 - 174.075 \cdot 6)/10 = 112.875кН \\ R_2 = G - R_1 - R_3 = 357.2 - 112.875 - 174.075 = 70.25кН. \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> реакции стоек равны $R_1 = 112.875кН$, $R_2 = 70.25кН$, $R_3 = 174.075кН$.

<u>***Задача 6. Тема: Равновесие пространственной системы произвольно расположенных сил.***</u>

<u>Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы равнялись нулю.</u> В проекциях на координатные оси это условие равновесия может быть записано в виде шести уравнений равновесия: трех уравнений проекций сил на координатные оси и трех уравнений моментов этих сил относительно данных осей.

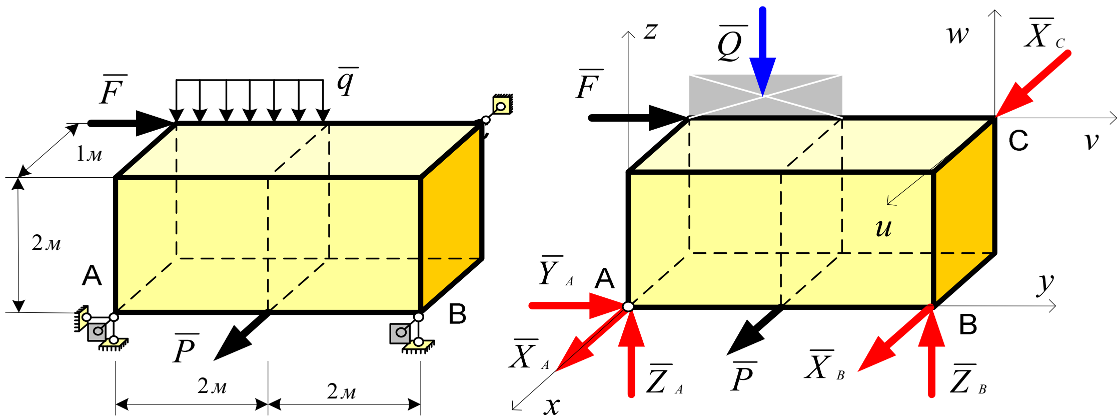
$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma У = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0;$$

Пример: *абсолютно твердое тело, в виде параллелепипеда заданных размеров, полностью закреплено с помощью внешних связей. К ребрам и граням данного тела приложены активные нагрузки в виде сосредоточенных сил и распределенных нагрузок. Требуется определить реакции связей.*

Дано: $F = 8кН;\ P = 12кН;\ q = 2кН/м.$

Определить реакции связей.



1. Отбрасываем связи (опоры) и заменяем их неизвестными реакциями. Распределенные нагрузки заменяем равнодействующими.

2Выбираем систему координат xyz, проводя оси через шаровой шарнир.

3Составляем уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \sum M_X = 0 \\ \sum M_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \\ \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} Z_B \cdot 4 - F \cdot 2 - Q \cdot 1 = 0 \\ X_C \cdot 2 - Q \cdot 1 = 0 \\ -X_B \cdot 4 - X_C \cdot 4 - F \cdot 1 - P \cdot 2 = 0 \\ +X_A + X_B + P + X_C = 0 \\ F + Y_A = 0 \\ Z_A + Z_B - Q = 0. \end{cases}.$$

1. Решаем систему уравнений и находим неизвестные реакции.

$$\begin{cases} Z_B = (F \cdot 2 + Q \cdot 1)/4 = (8 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/4 = 5кН \\ X_C = Q/2 = 4/2 = 2кН \\ X_B = (-X_C \cdot 4 - F \cdot 1 - P \cdot 2)/4 = (-2 \cdot 4 - 8 \cdot 1 - 12 \cdot 2)/4 = -10кН\ (\text{в другую сторону}) \\ X_A = -X_B - P - X_C = -(-10) - 12 - 2 = -4кН\ (\text{в другую сторону}) \\ Y_A = -F = -8кН\ \ (\text{в другую сторону}) \\ Z_A = -Z_B + Q = -5 + 4 = -1кН\ \ \ (\text{в другую сторону}). \end{cases}$$

2. *Выполняем проверку, для чего проводим оси uvw через произвольную точку C и относительно них вычисляем суммы моментов.*

$$\begin{cases} \sum M_U = Q \cdot 3 + Y_A \cdot 2 - Z_A \cdot 4 = 4 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 0 \\ \sum M_V = -X_A \cdot 2 - Z_A \cdot 1 - P \cdot 2 - X_B \cdot 2 - Z_B \cdot 1 = -(-4) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 - 12 \cdot 2 + -(-10) \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 0 \\ \sum M_W = +X_A \cdot 4 + Y_A \cdot 1 + P \cdot 2 = -4 \cdot 4 - 8 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Проверка выполняется.

<u>Ответ:</u> реакции связей равны: $X_A = -4кН$, $X_B = -10кН$, $Y_A = -8кН$,

$Z_A = -1кН$ (*реакции имеют противоположные направления*), $X_C = 2кН$, $Z_B = 5кН$.

Список литературы

1. *Айзенберг Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осетский. – М.: Наука, 1968, и последующие издания. – 392 с.*
2. *Бутенин Н.В. , Лунц Я.Л. , Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.1, СПб, 2002.*
3. *Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах ч.1 / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: ФН, 1961, и последующие издания. – 472 с.*
4. *Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие – СПб.: Издательство «Лань», 2005.-320 с.*
5. *Диевский В.А. , Малышева И.А. Теоретическая механика. Сборник заданий: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2007.-192 с.*
6. *Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука,1986. - 448 с.*
7. *Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Под ред. К.С. Колесникова. – М.: Наука, 1989. – 448 с.*
8. *Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985. – 367 с.*
9. *Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: наука, 1995. – 478 с.*
10. *Яблонский А.А. Курс теоретической механики. ч.1 / А.А. Яблонский, В.И. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1984. – 360 с.*