Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Прокопенко Н.Ю.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
и
БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

для обучающихся по дисциплине
«Дискретная математика»
по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика и
09.03.04 Программная инженерия.

Нижний Новгород
2021

Прокопенко Н.Ю. / Математическая логика и булевы функции [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пос. / Н.Ю. Прокопенко; Нижегор. гос. архитектур. - строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2021. – 107 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся по очной и заочной форме в ННГАСУ по дисциплине «Дискретная математика» по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика и 09.03.04 Программная инженерия. Каждый раздел начинается с изложения необходимого теоретического материала, затем приводятся и разбираются примеры. Дается достаточное количество упражнений для самостоятельного решения.

© Н.Ю. Прокопенко, 2021
© ННГАСУ, 2021

Оглавление

Введение

Математическая логика – это широкая область логических исследований, изучающая *идеализированные рассуждения* и их системы посредством *логических исчислений* на основе метода *формализации*. Метод формализации подразумевает, что логические рассуждения изучаются в отвлечении от их конкретного содержания; при этом сами логические рассуждения формулируются на некотором точном (формализованном) языке при помощи специального аппарата символов. Определение «формальная логика» было введено И. Кантом с намерением подчеркнуть её ведущую особенность в подходе к изучаемым объектам и отграничить её тем самым от других возможных логик.

Математическая логика – это раздел современной *формальной логики*, в котором логические выводы исследуются посредством логических исчислений на основе математического языка, аксиоматизации и формализации.

Математическая логика формальна. Её интересует истинность или ложность высказываний, но не их содержание. Методы построения логических исчислений на основе строгого символического языка, аксиоматизации и формализации позволяют избежать двусмысленной и логической неясности естественного языка, которым пользовалась при описании правильного мышления традиционная логика.

Математические методы дали логике такие преимущества, как высокая точность формулировок, возможность изучения более сложных, с точки зрения логической формы, объектов.

Основные разделы математической логики – *логика высказываний* и *логика предикатов*.

Логика высказываний (пропозициональная логика) – это раздел символической логики, изучающий сложные высказывания, образованные из простых, и их взаимоотношения.

Логика предикатов – это раздел символической логики, изучающий рассуждения и другие языковые контексты с учётом внутренней структуры входящих в них простых высказываний, при этом выражения языка трактуются функционально, то есть как знаки некоторых функций или же как знаки аргументов этих функций.

Булевы функции названы в честь английского математика XIX века Дж. Буля, который впервые применил алгебраические методы для решения логических задач. Первоначально булевы функции рассматривались как логические формулы, были эффективным средством описания, а иногда и решения различных логических задач и до середины двадцатого века представляли, в основном, теоретический интерес. В 1938 г. К. Шеннон показал, каким образом релейные схемы могут быть описаны с помощью булевых функций. Булева алгебра стала математическим аппаратом для исследования релейно-контактных схем, а сами схемы к середине двадцатого века нашли многочисленные применения в автоматической технике – в телефонии, централизации и блокировке, релейной защите, телемеханике, при проектировании быстродействующих компьютеров. Помимо того, что булевы функции стали признанной моделью для проектирования схем, применяемых в электронике, во второй половине двадцатого века был открыт еще ряд важных применений теории булевых функций в таких областях, как распознавание образов, теория кодирования и криптография.

Многие результаты, полученные с помощью математической логики, легли в основу проектирования и создания компьютеров и программного обеспечения к ним, нашли широчайшее применение в различных областях информатики и систем искусственного интеллекта.

Раздел 1. Логика высказываний

1.1. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы алгебры логики

Под *высказыванием* понимают повествовательное утвердительное предложение, о котором имеет смысл говорить истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Предложения “Какое сегодня число?”, “Да здравствуют наши спортсмены!”, “x=20” не являются высказываниями. Предложения “Параллелограмм имеет четыре вершины”, “Число 6 делится на 2 и на 3” являются истинными высказываниями, а предложения “Париж – столица Англии”, “карась не рыба”, “47< 16” являются ложными.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Обозначают элементарные высказывания малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d, p, q, r, …., а логическое (*истинностное*) значение высказывания обозначается цифрами 1 (истина) и 0 (ложь).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок *не*, *и*, *или*, *если…*, *то….*, *тогда и только тогда*, принято называть сложными или составными.

В алгебре логики для построения сложных высказываний из элементарных используются следующие логические операции: отрицание (обозначение: $\rceil$ или —) конъюнкция (логическое умножение) (обозначение: $\wedge$, & или $\cdot$), дизъюнкция (логическое сложение) (обозначение: $\vee$ или +), импликация ($\to$), эквиваленция (или эквивалентность) ($\leftrightarrow$).

Отрицанием высказывания a называется высказывание $\bar{a}$ ($\rceil a$), которое истинно, если a ложно, и ложно, если a истинно. Высказывание $\bar{a}$ читается «не a».

Конъюнкцией высказываний a, b называется высказывание $a \wedge b$ ($a \& b$, $a \cdot b$), которое истинно, если a и b истинны, и ложно, если хотя бы одно из них ложно. Высказывание $a \wedge b$ читается « a и b ».

Дизъюнкцией высказываний a, b называется высказывание $a \vee b$ ($a+b$), которое истинно, если хотя бы одно из высказываний a или b истинно, и ложно, если оба они ложны. Высказывание $a \vee b$ читается « a или b ».

Импликацией высказываний a, b называется высказывание $a \to b$, которое ложно, если a истинно и b ложно, и истинно во всех остальных случаях. Высказывание $\mathrm{a} \to \mathrm{b}$ читается «если a, то b ».

Эквиваленцией (или *эквивалентностью*) высказываний a, b называется высказывание $a \leftrightarrow b$, которое истинно, если оба высказывания a и b одновременно истинны или ложны, и ложно во всех остальных случаях. Высказывание $\mathrm{a} \leftrightarrow \mathrm{b}$ читается « a тогда и только тогда, когда b ».

Таблица 1.1. (таблица истинности основных логических операций)

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\boldsymbol{p \oplus q}$	$\boldsymbol{p \mid q}$	$\boldsymbol{p \downarrow q}$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

по убыванию приоритета: $\neg, \wedge, \vee \to \leftrightarrow$

Определение 1.1. Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции называется *формулой алгебры логики.*

Определение 1.2. Формула *A*, называется *тождественно истинной* или *тавтологией* (записывается $A \equiv 1$), если она принимает значение 1 (истина) при всех значениях входящих в нее переменных (элементарных высказываний). Формула *B* называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если она принимает значение 0 (ложь) при всех значениях входящих в нее переменных (записывается $B \equiv 0$).

Например, формулы $p \vee \overline{p}$ и $p \to (q \to p)$ – тождественно истинные, а формула $p \wedge \overline{p}$ – тождественно ложная.

Формулы алгебры логики будем обозначать большими латинскими формулами. Логические значения формулы $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, x_n)$ при различных комбинациях значений входящих в нее элементарных высказываний можно описать посредством таблицы, содержащей 2^n строк, которая называется *таблицей истинности* логической формулы.

Пример 1.1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

1) река Волга впадает в озеро Байкал;

2) всякий человек имеет брата;

3) пейте томатный сок!;

4) существует человек, который моложе своего брата;

5) который час?;

6) ни один человек не весит более 1000 кг;

7) 23<5;

8) для всех действительных чисел *x* и *y* верно равенство $x+y=y+x$;

9) $x^2-7x+12$;

10) $x^2-7x+12=0$.

Решение. Высказывания 4), 6), 8) – истинные, а высказывания 1), 2), 7) – ложные. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Пример 1.2. Пусть a – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b – высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1) $a \wedge \overline{b}$; 2) $a \to b$; 3) $\overline{b} \leftrightarrow \overline{a}$.

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; б) «Если студент Иванов изучает английский язык, то он успевает по математической логике».

в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Пример 1.3. Составить таблицу истинности для формулы

$A=(\urcorner q \leftrightarrow r) \vee (r \to p \wedge q)$

p q r	$\urcorner q$	$\urcorner q \leftrightarrow r$	$p \wedge q$	$r \to p \wedge q$	A
1 1 1	0	0	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 0 1	1	1	0	0	1
1 0 0	1	0	0	1	1
0 1 1	0	0	0	0	0
0 1 0	0	1	0	1	1
0 0 1	1	1	0	0	1
0 0 0	1	0	0	1	1

Задачи

1. Для высказываний определите истинностное значений.

1) 15 кратно 3, но не кратно 4;

2) Каждое действительное число x удовлетворяет неравенству $x^2 \geq 0$;

3) это предложение ложно;

4) Пушкин – автор «Медного всадника»;

5) $\pi = 3{,}14$;

6) раскройте учебник на странице 23;

7) эта задача легкая;

8) Да здравствует математика!

2. Запишите символически следующие высказывания, употребляя буквы для обозначения простых высказываний:

1) 3 есть простое число и 9 есть составное число;

2) Петр встанет, и он или Иван уйдет;

3) Петр встанет и уйдет, или Иван уйдет;

4) студент не может заниматься, если он устал или голоден;

5) в шахматном турнире ни Петр, ни Иван не выиграли свои отложенные партии;

6) в степи не будет пыльных бурь тогда и только тогда, когда будут лесозащитные полосы; если лесозащитных полос не будет, то пыльные бури уничтожат посевы и нанесут урон хозяйству;

7) для того, чтобы натуральное число a было нечетным, достаточно, чтобы a было простым и большим двух;

8) необходимое и достаточное условие для жизни растений состоит в наличии питательной почвы, чистого воздуха и солнечного света;

9) если «Спартак» или «Динамо» проиграют и «Торпедо» выиграет, то «Арарат» потеряет первое место и, кроме того, «Заря» покинет высшую лигу.

3. Пусть v_1 будет «сегодня светит солнце», v_2 – «сегодня идет снег», v_3 – «сегодня пасмурно», v_4 – «вчера было ясно». Переведите на обычный язык следующие высказывания:

1) $v_1 \wedge \overline{v_3}$; 2) $v_2 \vee v_3$; 3) $v_1 \wedge \overline{v_2 \vee v_3}$;

4) $v_1 \rightarrow \overline{v_3 \wedge v_2}$; 5) $\overline{v_1} \leftrightarrow v_4$; 6) $(v_2 \rightarrow v_3) \vee v_1$.

4. Придумайте два высказывания, являющиеся дизъюнкцией трех высказываний, одно из которых истинно, а другое ложно.

5. Проверьте, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $p \rightarrow p$; 2) $p \vee \overline{p}$;

3) $\overline{p \wedge \overline{p}}$; 4) $p \leftrightarrow \overline{p}$;

5) $\overline{p} \to p$;

6) $p \leftrightarrow p$;

7) $(p \vee p) \to p$;

8) $\overline{p \wedge (p \leftrightarrow \overline{p})}$;

9) $(p \to p) \vee \overline{p}$;

10) $p \leftrightarrow p \wedge (\overline{p} \to p \wedge p)$;

11) $p \vee (p \leftrightarrow \overline{p})$;

12) $\overline{p \to \overline{p}}$;

13) $\overline{p \leftrightarrow \overline{p}}$;

14) $(p \vee p) \to (p \wedge p)$.

6. Найдите логические значения x, y, z, при которых выполняются равенства: 1) $(1 \to x) \to y = 0$; 2) $x \vee y = \overline{x}$;

3) $(x \vee (y \to x)) \to z = 0$; 4) $x \wedge y \leftrightarrow (y \vee z) = 1$

7. При каких значениях переменных следующие формулы ложны:

1) $((x \to (y \wedge z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y}$; 2) $(x \vee y) \to ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}))$.

8. 1) Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

2) Известно, что эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значении $\bar{x} \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow \bar{y}$?

3) Известно, что x имеет значение 1. Что можно сказать о значениях импликации $\bar{x} \wedge y \to z$; $\bar{x} \to (y \vee z)$?

4) Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$; $\overline{x \to y} \to y$; $(x \to y) \to z$?

9. Составьте таблицы истинности для формул:

1) $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$;

2) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$;

3) $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$;

4) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$;

5) $x \to \overline{y \wedge z}$;

6) $(x \to \overline{y}) \wedge (y \wedge x \vee \overline{x} \wedge \overline{y})$;

7) $\overline{x} \vee y \leftrightarrow x \wedge \overline{z}$;

8) $(x \to y) \to (y \to z) \to (z \to x)$;

9) $(x_1 \to \overline{x_2}) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \overline{x_3})$;

10) $(\bar{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x))$;

11) $(x \to (y \wedge z)) \leftrightarrow ((x \to y) \wedge (x \to z))$.

1.2. Равносильные формулы

Определение 1.3. Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений переменных, входящих в формулы.

Обозначение $A \equiv B$.

Для доказательства равносильности формул A и B достаточно составить их таблицы истинности и сравнить их.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы.

I. Основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ x \wedge x \equiv x \\ 2.\ x \vee x \equiv x \end{array}\right\} \text{ – законы идемпотентности}$$

3. $x \wedge 1 \equiv x$
4. $x \vee 1 \equiv 1$
5. $x \wedge 0 \equiv 0$
6. $x \vee 0 \equiv x$
7. $x \wedge \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия
8. $x \vee \bar{x} \equiv 1$– закон исключенного третьего
9. $\bar{\bar{x}} = x$– закон снятия двойного отрицания

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ x \wedge (y \vee x) \equiv x \\ 11.\ x \vee (y \wedge x) \equiv x \end{array}\right\} \text{ – законы поглощения.}$$

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$
2. $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$ – закон исключения импликации
3. $x \to y \equiv \bar{y} \to \bar{x}$ – закон контрапозиции

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ \overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \\ 5.\ \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y} \end{array}\right\} \text{ – законы де Моргана.}$$

6. $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$

7. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$

8. $x \downarrow y \equiv \overline{x \vee y}$

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$ – коммутативность конъюнкции

2. $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции

3. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ – ассоциативность конъюнкции

4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции

5. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

6. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ –дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

Приведенный список основных равносильностей используется для доказательства равносильности формул алгебры логики, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Пример 1.4. Доказать равносильность формул $A \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$ и $B \equiv (p \wedge q) \to r$.

Решение.

1 способ (используя таблицу истинности).

p q r	$p \to r$	$q \to r$	A	$p \wedge q$	B
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	1	0
1 0 1	1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	1	0	1
0 1 1	1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	1	0	1
0 0 1	1	1	1	0	1
0 0 0	1	1	1	0	1

Истинностные значения у формул A и B совпадают, значит $A \equiv B$.

2 способ (используя метод равносильных преобразований).

$A \equiv (p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \to r \equiv$

$\equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg q \to r \equiv p \wedge q \to r \equiv B.$

Пример 1.5. Упростить формулу $(\overline{x \vee y)} \to \bar{x} \vee y) \wedge y$.

Решение. $(\overline{x \vee y}) \to \bar{x} \vee y) \wedge y \equiv (x \vee y \vee \bar{x} \vee y) \wedge y \equiv ((x \vee \bar{x}) \vee (y \vee y)) \wedge$ $y \equiv (1 \vee y) \wedge y \equiv 1 \wedge y \equiv y$.

Пример 1.6. Доказать, что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

Решение. Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям $A \equiv x \to (y \to x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (x \vee \bar{y}) \equiv (x \vee \bar{x}) \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \bar{y} \equiv 1$.

Закон двойственности.

Пусть формула A содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Будем называть операцию конъюнкции двойственной операции дизъюнкции, а операцию дизъюнкции двойственной операции конъюнкции.

Определение 1.4. Формулы A и A^* называются *двойственными,* если формула A^* получается из формулы A путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Примеры двойственных тавтологий.

1. $x \wedge \bar{x} = 0$ (закон противоречия) и $x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключенного третьего).

2. $x \wedge (y \vee x) = x$ и $x \vee (y \wedge x) = x$ (законы поглощения)

3. $x \wedge x = x$ и $x \vee x = x$ (законы идемпотентности)

4. $\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \wedge y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y} = \overline{x \vee y}$ (законы де Моргана)

Теорема. *Если формулы A и B равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, то есть* $A^* = B^*$.

Доказательство. Пусть формулы A и B равносильны:

$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но тогда, очевидно,

$$\overline{A(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \overline{B(x_1, x_2, \dots, x_n)} \qquad (1)$$

По определению двойственных формул:

$$\overline{A(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \qquad (2)$$

$$\overline{B(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv B^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Из равносильностей (1) и (2) получаем:

$A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \equiv B^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, значит, $A^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv B^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Пример 1.7. Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C, соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций.

Найдем двойственные запросы к следующим запросам:

1) $(A = "monitor") \wedge (C = 2020)$
2) $(A = "monitor") \vee \mathrm{C} = 2020)$
3) $(A = "monitor") \rightarrow (C = 2020)$
4) $(A = "monitor") \downarrow (C = 2020)$

Решение: Применяя определение обратных запросов и правила де Моргана, получим:

1) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \wedge \overline{(C = 2020)}} = (A = "monitor") \vee (C = 2020)$
2) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \vee \overline{(C = 2020)}} = (A = "monitor") \wedge (C = 2020)$
3) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \rightarrow \overline{(C = 2020)}} = \overline{(A = "monitor") \vee \overline{(C = 2020)}} =$ $\overline{(A = "monitor")} \wedge (C = 2020)$
4) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \downarrow \overline{(C = 2020)}} = \overline{(A = "monitor")} \vee \overline{(C = 2020)}$

Задачи

1. Докажите равносильности:

   1) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$; 2) $x \vee (\overline{x} \wedge y) \equiv x \vee y$;

   3) $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$; 4) $x \wedge y \vee \overline{x} \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \equiv x \rightarrow y$;

   5) $x \rightarrow \overline{y} \equiv y \rightarrow \overline{x}$; 6) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow z$;

   7) $x \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$;

   8) $(x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv x \wedge z \vee y \wedge z \vee x \wedge t \vee y \wedge t$;

   9) $x \wedge y \vee z \wedge t \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee t) \wedge (y \vee t)$;

   10) $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \rightarrow y \equiv x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (x_n \rightarrow y) \ldots))$.

2. Докажите тождественную истинность или тождественную ложность формул:

   1) $x \wedge y \rightarrow x$; 2) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x})$;

   3) $x \rightarrow (x \vee y)$; 4) $(\overline{y} \rightarrow \overline{x}) \rightarrow (x \rightarrow y)$;

   5) $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \overline{y}) \rightarrow \overline{x}$; 6) $x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \overline{y})$;

   7) $x \vee \overline{x} \rightarrow y \wedge \overline{y}$; 8) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$;

   9) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow z)$; 10)$(x \wedge y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$;

   11) $(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y))$

   12) $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z))$.

3. Используя основные равносильности, нужно доказать или опровергнуть:

   1)$(x \rightarrow y) \rightarrow z \equiv x \rightarrow (y \rightarrow z)$; 2)$(x \wedge y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \equiv \overline{x} \vee y \vee z$;

   3) $x \wedge (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow x \wedge z$; 4) $x \vee (y \rightarrow z) \equiv x \vee y \rightarrow x \vee z$;

   5) $x \rightarrow y \equiv y \rightarrow x$; 6) $\overline{x \leftrightarrow \overline{y}} \equiv x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}$;

   7) $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \vee z$.

4. Пусть F – тождественно ложная формула.

   Докажите, что $x \wedge \overline{y} \rightarrow F \equiv x \rightarrow y$.

5. Найдите x, если $\overline{x \vee a} \vee \overline{x \vee \overline{a}} \equiv b$.

6. Используя основные равносильности, упростите следующие формулы:

   1) $\overline{x \rightarrow y} \wedge \overline{x \wedge y} \vee y$; 2) $(x \rightarrow y) \wedge (x \vee y \wedge z) \wedge (x \rightarrow z) \vee \overline{z}$;

3) $x \wedge y \vee \overline{y \wedge z} \vee y$; 4) $\overline{x \wedge y \wedge z} \vee x \wedge \overline{y \wedge z} \vee x \wedge y \wedge z$;

5) $\overline{z \to \bar{y}} \vee \overline{y \wedge x} \vee (y \wedge \bar{z} \to \bar{y})$; 6) $\overline{x \to y} \vee \overline{z \to y} \vee y$;

7) $(x \to y) \to \bar{y}$; 8) $x \wedge y \vee x \wedge \bar{z} \vee (\bar{x} \to y) \vee x \vee y \wedge \bar{z}$.

1.3. Логическое следствие и правила вывода

Пусть $A_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$,…, $A_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – формулы алгебры логики.

Определение 1.5. Формула $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *логическим следствием* формул $A_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$,…,$A_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если она обращается в истинное высказывание на всяком наборе значений переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которого в истинные высказывания обращаются все формулы A_1,A_2,…, A_m.

Обозначение: A_1,A_2,…, $A_m \models B$ (читается «из A_1,A_2,…, A_m логически следует *B*»), здесь A_1,A_2,…, A_m – посылки, *B* – следствие.

Если воспользоваться истинностными таблицами, то можно сказать, что *B* есть логическое следствие формул A_1,A_2,…, A_m, если формула *B* имеет значение 1 (истина) во всех тех строках, в которых A_1,A_2,…, A_m одновременно имеют значение 1 (истина).

Пример 1.8.

p	*q*	*p*	*p*→ *q*	*q*
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Формулы p и $p \to q$ одновременно истинны в 4-ой строке, где q тоже имеет значение 1, значит $p, p \to q \models q$.

Свойства.

1. Тавтология логически следует из любой формулы алгебры логики.
2. Противоречие логически влечет любую формулу алгебры логики.
3. $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \models B$ и $B \models A$.

4. $A|=B$ тогда и только тогда, когда $A\to B$ – тавтология.
5. $A_1,A_2,\ldots,A_m\ |=B$ тогда и только тогда, когда $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_m|=B$.
6. $A_1,A_2,\ldots,A_m,B|=C$ тогда и только тогда, когда $A_1,A_2,\ldots,A_m|=B\to C$.
7. $A_1,A_2,\ldots,A_m|=C$ тогда и только тогда, когда $A_1\to(A_2\to\ldots\to(A_m\to C)\ldots)$ – тавтология.

В любом рассуждении в логике высказываний можно проверить, будет ли истинность следствия этого рассуждения определяться истинностью фигурирующих в нем высказываний (если это имеет место в данном рассуждении, то говорят, что оно логически правильное).

Пример 1.9. Является ли логически правильным следующее рассуждение. Студент пойдет домой (*а*) или останется в университете (*в*). Он не останется в университете. Следовательно, студент пойдет домой.

Решение. Запишем это рассуждение символически с помощью указанных в скобках букв: $а\vee в$, $\overline{в}$, $а$. Истинность следствия будет определяться истинностью имеющихся высказываний, если $а\vee в,\overline{в}|=а$.

Имеем, $а\vee в\to(\overline{в}\to а)\equiv\overline{а\vee в}\vee\overline{в}\vee а\equiv\overline{а}\wedge\overline{в}\vee в\vee а\equiv(\overline{а}\vee в)\wedge(\overline{в}\vee в)\vee а\equiv$ $\equiv(\overline{а}\vee в)\wedge 1\vee а\equiv\overline{а}\vee в\vee а\equiv 1$. Таким образом, $а\vee в\to(\overline{в}\to а)$ – тавтология, поэтому можно считать, что данное рассуждение логически правильное.

Пример 1.10. Справедливо ли следующее рассуждение.

Я пойду или в кино на новую комедию (*а*), или на занятие по математической логике (*в*). Если я пойду в кино на новую комедию, то от всей души посмеюсь (*с*). Если я пойду на занятие по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений (*d*). Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.

Решение. Учитывая символические обозначения высказываний, приведенные в условии, запишем посылки нашего рассуждения: $а\vee в$, $а\to с$, $в\to d$ и заключение: $с\vee d$.

Покажем, что имеет место следующее логическое следование:

$a \vee в,\ a \to c,\ в \to d \models c \vee d$.

От противного. Предположим, что это следование неверно, т.е. $a \vee в=1$, $a \to c=1$, $в \to d=1$, но заключение $c \vee d=0$. Тогда из последнего соотношения следует, что $c=0$ и $d=0$. Далее, из $a \to c=1$ и $c=0$ следует, что $a=0$. Затем из $в \to d=1$ и $d=0$ следует, что $в=0$, тогда $a \vee в=0 \vee 0=0$, что противоречит предположению $a \vee в=1$.

Таким образом, приведенное в данной задаче рассуждение справедливо.

Пример 1.11. Если завтра будет холодно (a), то я надену теплое пальто ($в$), если рукав будет починен (c). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?

Решение. Посылки данного рассуждения символически записываются следующим образом: $a \to (c \to в)$, $a \wedge \bar{c}$. Спрашивается: следует ли отсюда утверждение $\bar{в}$?

Предположим, что высказывание $\bar{в}$ ложно, в то время как все посылки являются истинными высказываниями. Тогда $\bar{в}=0$, а $в=1$. Значит, первая посылка $a \to (c \to в)$ действительно истинна, а вторая посылка будет истинной, если a истинно, а c ложно. Таким образом, ситуация, когда посылки все истинны, а высказывание $\bar{в}$ ложно, вполне возможна. Это означает, что высказывание $\bar{в}$не следует из данных посылок.

Логический вывод – это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания или системы высказываний) с помощью логических правил к заключению – новому суждению (высказыванию или системе высказываний).

1. Modus ponens (утверждающий модус): Если из А следует В и А истинно, то и В истинно: $\frac{A \to B, A}{B}$.

Пример. Если посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС», то можно получить автомат за экзамен. Петров присутствовал на всех занятиях по «Представлению знаний в ИС». Следовательно, он получит автомат.

2. Modus tollens (отрицающий модус): Если из А следует В и В ложно, то и А ложно: $\frac{A \to B, \bar{B}}{\bar{A}}$.

Пример. Если посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС», то можно получить автомат за экзамен. Петров не получил автомат. Следовательно, он пропускал занятия по «Представлению знаний в ИС».

3. Modus ponendo-tollens (утверждающе-отрицающий модус): Если А и В не могут одновременно бы истинными и А истинно, то В ложно:

$$\frac{A \vee B, A}{\bar{B}} \quad \text{и} \quad \frac{A \vee B, B}{\bar{A}}$$

Примеры.

a) Мы будем посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС» или придется сдавать экзамен. Да, мы будем посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС». Следовательно, есть надежда на автомат.

b) Мы будем посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС» или придется сдавать экзамен. Печально, но факт – придется сдавать экзамен. Следовательно, можно дальше пропускать занятия по «Представлению знаний в ИС».

4. Modus tollendo-ponens (отрицающе-утверждающий модус): Если либо А, либо В является истинным и А ложно, то В истинно:

$$\frac{A \vee B, \bar{A}}{B} \quad \text{и} \quad \frac{A \vee B, \bar{B}}{A}$$

Примеры.

a) Мы будем посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС» или придется сдавать экзамен. Мы будем пропускать занятия по «Представлению знаний в ИС». Следовательно, придется сдавать экзамен.

b) Мы будем посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС» или придется сдавать экзамен. Есть надежда на автомат. Следовательно, мы будем дальше посещать все занятия по «Представлению знаний в ИС».

5. Исключение И: Знание того, что А и В есть истина, должно означать, что и В истина: $\frac{A \wedge B}{A}$ и $\frac{A \wedge B}{B}$.

6. Интродукция ИЛИ: Если А есть истина, то А или В есть истина (аналогично, если В есть истина): $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}}$ и $\frac{B}{A \vee B}$.

7. Интродукция И: Если А есть истина и В есть истина, то А и В есть истина): $\frac{A, B}{A \wedge B}$.

8. Двойное отрицание: Если А есть НЕ НЕ истина, то А есть истина: $\frac{\bar{\bar{A}}}{A}$.

9. Единичная резолюция: Если А или В есть истина и НЕ В, то А есть истина. Точно так же если НЕ А, то В есть истина:

$$\frac{A \vee B, \bar{B}}{\mathrm{A}} \quad \text{и} \quad \frac{A \vee B, \bar{\mathrm{A}}}{\mathrm{B}}$$

10. Резолюция: Если А или В есть истина и НЕ В или С, то поскольку В не может быть истина и ложь одновременно, должно быть А или В истина:

$$\frac{A \vee B, \bar{B} \vee \mathrm{C}}{\mathrm{A} \vee \mathrm{C}}.$$

Пример 1.12.

Имеется следующая информация: «Если аккумулятор машины разряжен, то машина не заводится. Если машина Джона не заводиться и текущее время оказывается позже 8 часов утра, то Джон опоздает на поезд. Однажды утром после 8 часов утра аккумулятор машины Джона оказался разряженным».

Используя логические правила вывода, покажите, что Джон опоздал на поезд.

Решение.

В символьном виде информация может быть представлена следующим образом:

P: аккумулятор машины разряжен;

Q: машина не заводится;

R: время после 8 часов утра;

S: Джон опоздал на поезд.

Правило 1. $P \rightarrow Q$

Правило 2. $Q \wedge R \rightarrow S$

Известно, что P и R есть истина. Задачей является доказательство S.

$$\frac{P \rightarrow Q, Q \wedge R \rightarrow S, R \wedge P}{S}$$

Доказательство строиться следующим образом.

1. P Дано.
2. R Дано.
3. Q Следует из шага 1 и правила 1 по правилу Modus ponens.
4. $Q \wedge R$ Следует из шагов 2 и 3 по правилу интродукции И.
5. S Следует из шага 4 и правила 2 по правилу Modus ponens.

Пример 1.13.

Если фирма приглашает на работу крупного специалиста в области новейших технологий (A), то она считает эту технологию привлекательной (B) и разворачивает работы по изменению технологии производства своего традиционного продукта (C) или начинает разработку нового продукта (D). Конкурирующая фирма пригласила на работу крупного специалиста в области новейших технологий (A). Следовательно, она разворачивает работы по изменению технологии производства выпускаемого продукта(C) или разработке нового продукта. (D)

Решение.

Запишем условие символами математической логики.

$$\frac{A \to B \wedge (C \vee D); A}{C \vee D}$$

Доказательство строиться следующим образом.

1. $A \to B \wedge (C \vee D)$ Дано (посылка).
2. A Дано (посылка).
3. $B \wedge (C \vee D)$ Следует из шагов 1 и2 по правилу Modus ponens.
4. $C \vee D$ Следует из шага 3 по правилу исключения И.

Задачи

1. Установите, имеют ли место логические следствия:

1) $p \vee q,\quad p \quad \models \quad \overline{q}$

2) $p \vee q \vee r,\quad \overline{p} \wedge \overline{q} \quad \models \quad r$

3) $p \vee q \vee r,\quad p \quad \models \quad \overline{q} \wedge \overline{r}$

4) $p \vee q \vee r,\quad \overline{p} \quad \models \quad q \vee r$

2. Выясните, являются ли логически правильными следующие рассуждения:

1) Или Петр и Иван братья, или они однокурсники. Если Петр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья. Если Петр и Иван однокурсники, то Иван и Михаил также однокурсники. Следовательно, или Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил однокурсники.

2) Если Петр не встречал Ивана, то либо Иван не был на лекциях, либо Петр лжет. Если Иван был на лекциях, то Петр встречал Ивана, и Сергей был в читальном зале после лекций. Если Сергей был в читальном зале после лекций, то либо Иван не был на лекциях, либо Петр лжет. Следовательно, Иван не был на лекциях.

3) Если я пойду завтра на первое занятие (A), то должен буду рано встать (B), а если я пойду вечером на танцы (C), то лягу спать поздно (D). Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами

сна (*E*). Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить вечером на танцы.

4) Опыт Торричелли: Если бы воздух не имел веса, то он давил бы на ртуть в чашке и уровень ртути в колбе сравнялся бы с уровнем ртути в чашке. Но уровень ртути в колбе не сравнялся с уровнем ртути в чашке. Значит неверно, что воздух не имеет веса.

5) Если фирма приглашает на работу крупного специалиста в области новейшей технологии, то она считает ее привлекательной и разворачивает работы по изменению технологии производства своего продукта, или начинает разработку нового продукта. Конкурирующая фирма пригласила на работу крупного специалиста в области новейшей технологии. Следовательно, она разворачивает работу по изменению технологии производства выпускаемого продукта или по разработке нового продукта. Уточните справедливость данного умозаключения методом от противного.

3. Запишите логической формулой следующие умозаключения и уточните их справедливость:

1) Наблюдается рост дефицита торгового баланса (A). При росте дефицита торгового баланса наиболее вероятно снижение курса национальной валюты (B). Следовательно, наиболее вероятно снижение курса национальной валюты.

2) Наблюдается падение индексов акций ($\neg$B). Если состояние национальной экономики хорошее (A), то наблюдается устойчивый рост индексов акций (B). Следовательно, состояние национальной экономики кризисное ($\neg$A).

3) Увеличение первоначального капитала в условиях инфляции произойдет (A), если коэффициент превысит (B) индекс цен. Произошло увеличение капитала. Следовательно, коэффициент наращения больше индекса цен.

4) Увеличение первоначального капитала в условиях инфляции произойдет (А), если коэффициент превысит (В) индекс цен. Коэффициент наращения меньше индекса цен. Следовательно, увеличение капитала не произойдет.

1.4. Решение логических задач с помощью алгебры логики

Суть применения методов алгебры логики к решению логических задач состоит в том, что, конкретные условия логической задачи с помощью соответствующих обозначений записывают в виде формулы алгебры логики. После равносильных преобразований формулы получают ответ на все вопросы задачи.

Пример 1.14. После обсуждения состава участников предполагаемой экспедиции было решено, что должны выполняться два условия:

a) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский;

b) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин.

Требуется: 1) ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую принятое решение в символической форме; 2) для полученной формулы найти возможно более простую равносильную формулу; 3) пользуясь найденной более простой формулой, дать новую и более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников экспедиции.

Решение. Назначение в экспедицию Арбузова, Брюквина и Вишневского обозначим буквами $А$, $Б$, $В$, соответственно. Тогда условие а) можно записать в виде $А \to Б \vee В$, а условие б) в виде $А \wedge В \to Б$. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то они должны быть соединены логической связкой "и". Поэтому принятое решение можно записать в виде следующей символической формулы:

1. $(А \to Б \vee В) \wedge (А \wedge В \to Б)$;

2. $(А \to Б \vee В) \wedge (А \wedge В \to Б) \equiv (\overline{А} \vee Б \vee В) \wedge (\overline{А} \vee \overline{В} \vee Б) \equiv (\overline{А} \vee Б) \vee (В \wedge \overline{В}) \equiv \equiv A \to Б.$

Символическую формулу читаем так: "Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин". Это и есть наиболее простая словесная формулировка принятого решения о составе экспедиции.

Пример 1.15. Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1) Антон был вторым, а Борис – пятым.
2) Виктор был вторым, а Денис – третьим.
3) Григорий был первым, а Борис - третьим
4) Антон был третьим, а Евгений – шестым.
5) Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение. Обозначим высказывания зрителей символом X_y, где X – первая буква имени участника турнира, а y – номер места, которое он занял в турнире. Так как в паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний

$А_2 \vee Б_5 \equiv 1$; $В_2 \vee Д_3 \equiv 1$; $Г_1 \vee Б_3 \equiv 1$; $А_3 \vee Е_6 \equiv 1$; $B_3 \vee E_4 \equiv 1$.

Но тогда истинной будет формула

$F \equiv (A_2 \vee Б_5) \wedge (B_2 \vee Д_3) \wedge (Г_1 \vee Б_3) \wedge (A_3 \vee E_6) \wedge (B_3 \vee E_4) \equiv 1.$

Путем равносильных преобразований легко показать, что

$F \equiv А_3 \wedge Б_5 \wedge В_2 \wedge Г_1 \wedge Е_4 \equiv 1$. Откуда получаем $А_3 \equiv 1$, $Б_5 \equiv 1$, $В_2 \equiv 1$, $Г_1 \equiv 1$; $E_4 \equiv 1$, что и дает ответ задачи.

Задачи

1. На вопрос: "Кто из трех студентов изучал математическую логику?" получен ответ – "Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий". Кто изучал математическую логику?

2. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1) Если первый сдал, то и второй сдал.
2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
3) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
4) Если четвертый сдал, то первый сдал.

3. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

4. Четыре студентки, имена которых начинаются буквами *А, Е, С***,** *Р* посещают институт по очереди и ведет общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

1) Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
2) *С* и *Р* не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
3) Если *С* выйдет в среду или *Р* – в четверг, то *Е* согласится побывать на занятиях в пятницу.
4) Если *А* не пойдет в ВУЗ в четверг, то *Е* позволит себе сходить туда в среду.
5) Если *А* или *Р* будут в институте в среду, то *С* сможет пойти в пятницу.
6) Если *Р* в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то *А* придется сходить в институт во вторник, а *С* – в четверг.

5. Для полярной экспедиции из восьми претендентов А, В, С, Д, Е, Ф, К и М надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врач. Обязанности биолога могут выполнять Е и К, гидролога – В и Ф, синоптика – Ф и К, радиста – С и Д, механика – С и М, врача – А и Д. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и с кем следует взять в экспедицию, если Ф не может ехать без В, Д без М и С, С не может ехать одновременно с К, А не может ехать вместе с В?

Раздел 2. Исчисление высказываний

В алгебре высказываний с помощью таблицы истинности можно было всегда определить истинностное значение любой логической формулы. Этот способ становится очень громоздким, если формула содержит большое число переменных. Исчисление высказываний дает другой способ проверки тождественной истинности, основанный на выводе формул по точно установленным правилам из заданной совокупности аксиом.

Исчисление высказываний – это аксиоматическая логическая система, интерпретацией которой является алгебра высказываний.

Алфавит исчисления высказываний состоит из символов трех категорий:

1. $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$ – переменные.
2. $\rceil$ ($\overline{}$), $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ – логические связки.
3. ( ) – скобки.

Определение 2.1. (Понятие формулы исчисления высказываний.)

1. Всякое переменное высказывание x есть элементарная формула.
2. Если A – формула, то $\overline{A}$ - формула.
3. Если A и B формулы, то $A*B$ – формулы, где $*$ обозначает один из символов: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
4. Никакая другая строчка символов не является формулой.

Аксиомы исчисления высказываний:

I_1 $x\rightarrow(y\rightarrow x)$;

I_2 $(x\rightarrow(y\rightarrow z))\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z))$;

II_1 $x\wedge y\rightarrow x$;

II_2 $x\wedge y\rightarrow y$;

II_3 $(z\rightarrow x)\rightarrow((z\rightarrow y)\rightarrow(z\rightarrow x\wedge y))$;

III_1 $x\rightarrow x\vee y$;

III_2 $y\rightarrow x\vee y$;

III_3 $(x\rightarrow z)\rightarrow((y\rightarrow z)\rightarrow(x\vee y\rightarrow z))$;

IY$_1$ $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

IY$_2$ $x \to \bar{\bar{x}}$;

IY$_3$ $\bar{\bar{x}} \to x$.

Аксиомы исчисления высказываний определяют исходный класс доказуемых формул. Доказуемая формула A обозначается $\vdash A$.

Правила вывода:

1. Правило подстановки. Пусть A – доказуемая формула исчисления высказываний, x – переменная, B – любая формула исчисления высказываний. Тогда формула, которая получается из формулы A путем подстановки в нее вместо x формулы B, доказуема.

Подстановка обозначается следующим образом: $\int_x^B (A)$.

Коротко правило подстановки записывается так: $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}$

читается «если формула A доказуема, то доказуема формула $\int_x^B (A)$

2. Правило заключения (ПЗ). Если формулы B, $B \to C$ –доказуемые формулы исчисления высказываний, то формула C доказуема.

Коротко это правило записывается так:

$$\frac{\vdash B, \vdash B \to C}{\vdash C}$$

Определение 2.2. *Доказуемой формулой* называется всякая формула, которая или является аксиомой, или получается из доказуемых формул с помощью правил подстановки и заключения.

Будем обозначать любую доказуемую формулу символом R, а ее отрицание – символом F.

Процесс получения доказуемых формул будем называть доказательством.

Пример 2.1. 1) Доказать, что $\vdash A \to A$ (рефлексивность импликации).

Воспользуемся аксиомой II_2: $\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ и выполним подстановку $\int_{z}^{x} (\mathrm{II}_2)$.

Тогда получим $\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x))$. (1)

Применяя правило заключения к аксиоме II_1 и формуле (1), получим $\vdash (x \to y) \to (x \to x)$. (2)

В формуле (2) осуществим подстановку $\int_{y}^{\bar{\bar{x}}} (2)$, в результате получим доказуемую формулу $\vdash (x \to \bar{\bar{x}}) \to (x \to x)$. (3)

Применим правило заключения к аксиоме IY_2 и формуле (3). Это приводит к доказуемой формуле $\vdash x \to x$. (4)

Наконец, осуществив подстановку в формуле (4) вместо x формулы A, получим $\vdash A \to A$.

2) Доказать, что $\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Возьмем аксиому II_3 и выполним в ней последовательно две подстановки, заменяя сначала x на $\bar{x}$, а затем y на $\bar{y}$. В результате получим доказуемую формулу $\vdash (z \to \bar{x}) \to ((z \to \bar{y}) \to (z \to \bar{x} \wedge \bar{y}))$ (1)

В формуле (1) выполним подстановку $\int_{z}^{\overline{x \vee y}} (1)$, получим

$\vdash (\overline{x \vee y} \to \bar{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}))$. (2)

Докажем, что формулы $\overline{x \vee y} \to \bar{x}$ (3) и $\overline{x \vee y} \to \bar{y}$ (4) доказуемы.

Возьмем аксиому IY_1 и выполним подстановку $\int_{y}^{x \vee y} (\mathrm{IY}_1)$, получим

$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x})$. (5)

Применяя к формуле (5) и аксиоме III_1 правило заключения, получаем доказуемость формулы (3). Аналогично устанавливается доказуемость формулы (4).

Запишем $\int\limits_x^z (\text{IY}_1): \quad \vdash (z \to y) \to (\overline{y} \to \overline{z})$ (6)

и $\int\limits_{z,y}^{y,x\vee y} (6): \quad \vdash (y \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{y})$. (7)

Из аксиомы III_2 и формулы (7) по ПЗ получаем доказуемость формулы (4).

Применим правило заключения к формулам (3) и (2), получим доказуемую формулу $\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y})$. (8)

Применяя ПЗ к формулам (4) и (8), получаем доказуемость исходной формулы $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Производные правила вывода.

I. $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int\limits_{x_1,\dots,x_n}^{B_1,\dots,B_n} (A)}$ – правило одновременной подстановки.

II. $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$ – правило силлогизма.

III. $\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}$ – правило контрапозиции.

IV. а) $\dfrac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B}$, б) $\dfrac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B}$ – правило снятия двойного отрицания.

V. $\dfrac{\vdash A_1, \vdash A_2, \dots, \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))}{\vdash L}$ – правило сложного заключения.

Определение 2.3. (Понятие выводимости формулы из совокупности формул). Пусть имеется конечная совокупность формул $H=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Говорят, что *формула B выводима из совокупности H* (обозначение $H \vdash B$), если:

а) либо $B \in H$,

б) либо B – доказуемая формула исчисления высказываний,

в) либо B получается по ПЗ из формул C и $C \to B$, которые выводимы из совокупности H.

Также говорят, что *конечная совокупность формул* $B_1, B_2, \ldots B_к$ *есть вывод из H,* если для каждой формулы B_i (i=1,2,…,k) этой совокупности :

а) либо $B_i \in$ H ,

б) либо B_i – доказуема,

в) либо получается по ПЗ из формул C, $C \to B_i$, которые находятся в выводе, предшествуя B_i.

Пример 2.2. Доказать, что из совокупности $H=\{A,B\}$ можно вывести $A \wedge B$. Записать полученный вывод.

Решение.

1. $H \vdash A$, так как $A \in H$;

2. $H \vdash B$, так как $B \in H$;

3. $H \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B))$, как доказуемая формула (получается подстановкой $\int_{x,y,z}^{A,B,A} (\mathrm{II}_3)$) ;

4. $H \vdash A \to A$, как доказуемая формула ;

5. $H \vdash (A \to B) \to (A \to A \wedge B)$ – из 3. и 4. по ПЗ ;

6. $H \vdash B \to (A \to B)$, так как $\int_{x,y}^{B,A} (\mathrm{I}_1)$;

7. $H \vdash A \to B$ – из 2. и 6. по ПЗ ;

8. $H \vdash A \to A \wedge B$ – по ПЗ из 5. и 7. ;

9. $H \vdash A \wedge B$ – по ПЗ из 1. и 8.

Запишем вывод: A, B, $(A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B))$, $A\to A$, $(A\to B)\to(A\to A\wedge B)$, $B\to(A\to B)$, $A\to B$, $A\to A\wedge B$, $A\wedge B$.

Правила выводимости.

Пусть H и W – две совокупности формул исчисления высказываний. Будем обозначать через **H,W** их объединение, то есть H,W=H$\cup$W.

I. $\dfrac{H|-A}{H,W|-A}$

II. $\dfrac{H,C|-A, \quad H|-C}{H|-A}$

III. $\dfrac{H,C|-A, \quad W|-C}{H,W|-A}$

IY. $\dfrac{H|-C\to A}{H,C|-A}$

Y. $\dfrac{H,C|-A}{H|-C\to A}$ - теорема дедукции

YI. $\dfrac{\{C_1,C_2,...,C_n\}|-A}{|-C_1\to(C_2\to(C_3\to...\to(C_n\to A)...))}$ – обобщенная теорема дедукции

YII. $\dfrac{H|-A, \quad H|-B}{H|-A\wedge B}$ - правило введения конъюнкции

YIII. $\dfrac{H,A|-C, \quad H,B|-C}{H,A\vee B|-C}$ - правило введения дизъюнкции

IX. $\dfrac{|-A\to(B\to C)}{|-B\to(A\to C)}$ - правило перестановки посылок

X. $\dfrac{|-A\to(B\to C)}{|-A\wedge B\to C)}$ - правило соединения посылок

XI. $\dfrac{|-A\wedge B\to C}{|-A\to(B\to C)}$ - правило разъединения посылок

Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний устанавливают следующие теоремы.

Теорема 1. Каждая формула, доказуемая в исчислении высказываний, является тождественно истинной в алгебре высказываний.

Теорема 2 (о выводимости). Пусть A – некоторая формула; $x_1, x_2, ..., x_n$ - набор переменных, содержащихся в формуле *A;* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$- произвольный набор значений переменных. Тогда

а) если $R_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n}(A) = 1$, то Н=$\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}\} \vdash A$

б) если $R_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n}(A) = 0$, то Н=$\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}\} \vdash \overline{A}$

здесь $R_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n}(A)$ - значение формулы *A* на наборе значений переменных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, и $x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad \alpha_i = 1 \\ \overline{x_i}, & \text{если} \quad \alpha_i = 0 \end{cases}$.

Теорема 3. Каждая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний.

Пример 2.3. Пусть $A = x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3$ и наборы значений переменных (1,0,1) и (1,0,0). Тогда $\{x_1, \overline{x_2}, x_3\} \vdash$А, а $\{x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}\} \vdash \overline{A}$. Записать выводы в обоих случаях.

Решение. а) Покажем, что $\{x_1, \overline{x_2}, x_3\} \vdash A$.

Вывод из Н: x_1, $\overline{x_2}$, x_3, $x_3 \to (x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3)$, $x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3$ (А).

б) Покажем, что $\{x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}\} \vdash \overline{A}$.

Вывод из Н: x_1, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$, $x_1 \wedge \overline{x_2}$, $(x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3) \to (x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3)$, по правилу перестановки посылок $x_1 \wedge \overline{x_2} \to ((x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3) \to x_3)$, по ПЗ $(x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3) \to x_3$, подстановкой в аксиому IY_1 $((x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3) \to x_3) \to (\overline{x_3} \to \overline{x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3})$, по ПЗ $\overline{x_3} \to \overline{x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3}$, по ПЗ $\overline{x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_3}$ $(\overline{A})$.

Задачи

1. Какие из следующих выражений являются формулами исчисления высказываний:

1) $(((\overline{A}) \to B) \vee ((\overline{B} \wedge C)$;

2) $(A \to C) \to ((\overline{C}) \to (\overline{A})))$;

3) $(A \wedge (\to B)) \to (B \to C)$;

4) $((A \vee ((\overline{B}) \to C)) \to (\overline{A}))$.

2. Для формул $L_1 = (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$, $L_2 = A \vee B$, $L_3 = A \to B \vee C$ записать результаты каждой из следующих подстановок:

1) $\int_{A,B}^{B,C}(L_1)$; 2) $\int_{A}^{A \to B}(L_2)$; 3) $\int_{A,C}^{B \to A \wedge B, B}(L_3)$;

4) $\int_{A,B}^{A \wedge B, A \vee B}(L_1)$; 5) $\int_{A,B}^{B,A}(L_2)$ 6) $\int_{A,B,C}^{A \wedge \overline{A}, C, \overline{A}}(L_3)$.

3. Применяя правило подстановки, доказать, что доказуема формула:

1) $(A \to B) \wedge B \to B$;

2) $A \wedge B \to A \wedge \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$;

3) $(\overline{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\overline{A} \vee C \to B))$;

4) $\overline{\overline{C \vee D}} \to C \vee D$;

5) $(A \wedge B \to (C \to B \wedge C)) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C))$.

4. Применяя правило подстановки и правило заключения, установить доказуемость формул:

1) $A \vee A \to A$; 2) $A \to A \wedge A$;

3) $A \wedge B \to B \wedge A$; 4) $A \vee B \to B \vee A$;

5) $(A \to B) \to (A \to A)$ 6) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

5. Применяя производные правила вывода, показать, что доказуемы формулы:

1) $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B}$; 2) $A \to R$;

3) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$; 4) $F \to A$;

5) $(A\to B)\to(A\to A)$; 6) $A\wedge\overline{A}\to F$;

7) $(A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{A}$; 8) $\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A\vee B}$.

6. Выводом из какого множества гипотез H являются следующие последовательности:

1) $A\to(B\to C)$, A, $B\to C$, B, C

2) $B\to(A\to B)$, B, $A\to B$

3) $A\to(A\to B\wedge B)$, A, $A\to B\wedge B$, $B\wedge B$

4) $A\to(A\to B\wedge B)$, $A\to B\wedge B$, A, $B\wedge B$

7. Доказать, что

1) $H=\{A\}\vdash B\to A$;

2) $H=\{A\to C\}\vdash\overline{C}\to\overline{A}$;

3) $H=\{A\to B,\ \overline{B}\}\vdash\overline{A}$;

4) $H=\left\{A,\overline{\overline{A}}\to B\right\}\vdash B$;

5) $H=\{A\to B,\ B\to C\}\vdash A\to C$;

6) $H=\{A\to B\}\vdash A\wedge C\to B\wedge C$;

7) $H=\{A\to B\}\vdash(C\to A)\to(C\to B)$;

8) $H=\{A\to B\}\vdash(B\to C)\to(A\to C)$;

9) $H=\{A\to(B\to C)\}\vdash B\to(A\to C)$;

10) $H=\{A\to B\}\vdash A\vee C\to B\vee C$.

8. Показать доказуемость формулы, используя теорему дедукции или обобщенную теорему дедукции:

1) $\vdash A\to(B\to B)$; 2) $\vdash A\to((A\to B)\to B)$;

3) $\vdash(A\to B)\to(A\to A)$; 4) $\vdash(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))$;

5) $\vdash(A\to B)\to(A\vee C\to B\vee C)$; 6) $\vdash(A\to B)\to(A\wedge C\to B\wedge C)$;

7) $\vdash(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$; 8) $\vdash(A\to\overline{B})\to(B\to\overline{A})$;

9) $\vdash(\overline{A}\to B)\to(\overline{B}\to A)$; 10) $\vdash(\overline{A}\to B)\to((A\to B)\to B)$;

11) $\vdash(A\to B)\to(C\wedge A\to C\wedge B)$; 12) $\vdash(A\to B)\to(C\vee A\to C\vee B)$;

13) $\vdash(A\to(B\to C))\to(A\wedge B\to C)$; 14) $\vdash(A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C)$.

9. Показать, что справедливы законы логики (доказуемы формулы):

1) $x\to(\overline{x}\to y)$;   2) $x\vee\overline{x}$;   3) $\overline{x}\wedge\overline{y}\to\overline{x\vee y}$.

10. Используя правила перестановки посылок, соединения посылок и разъединения посылок, доказать, что

1) $\vdash x\to(y\to x\wedge y)$;

2) $\vdash(A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{A}$;

3) $\vdash\overline{A}\to(A\to B)$.

11. Доказать производные правила вывода:

1) $\dfrac{\vdash\overline{A}}{\vdash\overline{A\wedge B}}$;   2) $\dfrac{\vdash A}{\vdash A\vee B}$;   3) $\dfrac{\vdash\overline{A}}{\vdash A\to B}$;

4) $\dfrac{\vdash B}{\vdash A\to B}$;   5) $\dfrac{\vdash A\wedge B}{\vdash A}$;   6) $\dfrac{\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A\wedge B}}$;

7) $\dfrac{\vdash A\to B,\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A}}$;   8) $\dfrac{\vdash A,\vdash B}{\vdash A\wedge B}$;   9) $\dfrac{\vdash\overline{A},\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A\vee B}}$;

10) $\dfrac{\vdash A,\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A\to B}}$;   11) $\dfrac{\vdash A\to\overline{A}}{\vdash\overline{A}}$;   12) $\dfrac{\vdash\overline{A}\to A}{\vdash A}$;

13) $\dfrac{\vdash A\to B,\vdash\overline{A}\to B}{\vdash B}$;   14) $\dfrac{\vdash A\to B,\vdash A\to\overline{B}}{\vdash\overline{A}}$;   15) $\dfrac{\vdash A,\vdash\overline{A}}{\vdash B}$.

12. Дана формула $A=x_1\vee x_2\to x_3$ и наборы значений переменных 1) (0,0,1), 2) (1,0,0). Записать вывод формулы A или ее отрицания из соответствующей совокупности формул.

13. Дана формула $A=\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}$ и наборы значений переменных 1) (1,1,1); 2) (1,0,1); 3) (0,1,0). Записать вывод формулы A или ее отрицания из соответствующей совокупности формул.

14. Дана формула $A=(x\vee\overline{y})\to\overline{x}\wedge\overline{z}$ и наборы значений переменных 1) (1,0,0), 2) (0,1,1). Записать вывод формулы A или ее отрицания из соответствующей совокупности формул.

Раздел 3. Логика предикатов

3.1 Понятие предиката. Классификация предикатов

Логика предикатов – это расширение логики высказываний за счет использования предикатов в роли логических функций (*предикат* – буквально «сказуемое», хотя оно может играть и роль определения).

Например, в высказывании «7 – простое число», «7» – субъект, «простое число» – предикат. Это высказывание утверждает, что «7» обладает свойством «быть простым числом».

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим высказывательную форму «*x – простое число*». При одних значениях x (например, $x = 13$, $x = 17$) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, $x =10$, $x =18$) эта форма дает ложные высказывания.

Наиболее важная особенность логики предикатов состоит в том, что так называемые общие имена (например, «человек», «город», «металл»), знаки свойств («белый», «умный», «электропроводный») и знаки отношений («старше», «севернее», «тяжелее») рассматриваются как принадлежащие одной категории знаков, а именно, категории *предикаторов.* Предикаторы представляют собой *функции*, возможными аргументами которых являются *объекты* некоторого рассматриваемого множества, а значениями – истинностные *оценки* (в классической логике – это «истина» и «ложь»).

Например, предикатор «человек» представляет функцию, которая каждому отдельному человеку сопоставляет оценку «истина», а каждому отличному от человека существу – оценку «ложь». Функция, соответствующая предикатору «севернее», сопоставляет «истину» каждой такой паре географических точек, первая из которых действительно расположена севернее второй (например, паре «Петербург, Москва»), всем остальным парам географических точек (например, парам «Москва, Санкт-Петербург» и «Москва, Москва») эта функция сопоставляет оценку «ложь».

Замечание: в отличие от предикаторов, предикаты – это не просто знаки свойств или отношений, а знаки признаков. Например, слово «белый» как знак отвлеченного от предметов свойства является предикатором, а как знак признака предмета «свитер» («белый свитер») или «снег» («белый снег») – предикатом.

Определение 3.1. *Одноместным предикатом* $P(x)$ называется всякая функция одного переменного, в которой аргумент x пробегает значения из некоторого множества M, а функция при этом принимает одно из двух значений: 1 (истина) или 0 (ложь).

Множество M, на котором задан предикат, называется *областью определения* предиката $P(x)$.

Множество $I_P \subset M$, на котором предикат принимает только истинные значения, называется *областью истинности* предиката $P(x)$.

Предикат $P(x)$ называется *тождественно истинным (тождественно ложным)* на множестве M, если $I_P = M$ ($I_P = \varnothing$).

Определение 3.2. *n-местным предикатом* называется всякая функция n переменных $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, и принимающая на этом множестве одно из двух значений: 1 (истина) и 0 (ложь).

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \xrightarrow{P} \{И, Л\},$$

или $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{P} \{И, Л\},$$

$$x_i \in A_i (i = 1,2, \ldots, n); P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{И, Л,\}.$$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то областью определения предиката P является множество A^n:

$$A^n \xrightarrow{P} \{И, Л\}.$$

Множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *областью определения* n-местного предиката P.

Как и для одноместных предикатов, для n-местных предикатов можно определить область истинности, понятие тождественно истинного и тождественно ложного предиката.

Пример 3.1. Предложение «Река x впадает в озеро Байкал» является одноместным предикатом, определенным на множестве всех названий рек. Подставив вместо предметной переменной x название «Воронеж», получим высказывание «Река Воронеж впадает в озеро Байкал». Это высказывание ложно. Подставив вместо предметной переменной x название «Баргузин», получим истинное высказывание «Река Баргузин впадает в озеро Байкал».

Пример 3.2. Предложение «$x^2 + y^2 \leq 9$» является двухместным предикатом, заданном на множестве $R \times R = R^2$. Пара действительных чисел 2 , 1 превращает данный предикат в истинное высказывание «$2^2 + 1^2 \leq 9$», а пара чисел 3 , 3 – в ложное высказывание «$3^2 + 3^2 \leq 9$».

Определение 3.3. Говорят, что предикат $P(x)$ является *следствием* предиката $Q(x)$ ($Q(x) \to P(x)$), если$I_Q \subset I_P$; и предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ *равносильны* ($Q(x) \equiv P(x)$), если $I_Q = I_P$.

Пример 3.3. Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если $M=R$ для одноместных предикатов и $M=R \times R$ для двухместных предикатов:

1) $x+5=1$;
2) при $x=2$ выполняется равенство $x^2-1=0$;
3) $x^2- 2x+1=0$;
4) существует такое число x, что $x^2- 2x+1=0$;
5) $x+2< 3x-4$;
6) однозначное число x кратно 3;
7) $(x+2)-(3x-4)$;
8) $x^2 + y^2 >0$.

Решение.

1) Предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P=\{-4\}$.

2) Предложение не является предикатом. Это ложное высказывание.

3) Предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P=\{1\}$.

4) Предложение не является предикатом. Это истинное высказывание.

5) Предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P=(3;+\infty)$.

6) Предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P=\{0,3,6,9\}$.

7) Предложение не является предикатом.

8) Предложение является двухместным предикатом $Q(x,y)$, $I_Q=R\times R\backslash\{(0,0)\}$.

Определение 3.4. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный на множестве $A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$, называется:

1) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

2) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ он превращается в ложное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

3) *выполнимым* (*опровержимым*), если существует по крайней мере один набор предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, при подстановке которого вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ последний превращается в истинное (ложное) высказывание.

Пример 3.4. Одноместный предикат «Город x расположен на берегу реки Волги», определенный на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, как говорят, удовлетворяют данному предикату (например, Ульяновск, Саратов и др.). Но данный предикат не является тождественно истинным, потому что существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание (например, Москва, Прага и др.). Этот же предикат является примером опровержимого, но не тождественно ложного высказывания.

Пример 3.5. Одноместный предикат «$sin^2 x + cos^2 x = 1$», определенный на множестве действительных чисел, тождественно истинный.

Пример 3.6. Двухместный предикат «$x^2 + y^2 < 0$» определенный на множестве действительных чисел R^2, тождественно ложным предикатом, потому что любая пара действительных чисел превращает его в ложное высказывание.

Замечание. Отметим некоторые очевидные закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов:

1) каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно;

2) каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но обратное неверно;

3) каждый не тождественно истинный предикат будет опровержимым, но, вообще говоря, не будет тождественно ложным;

4) каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым, но, вообще говоря, не будет тождественно истинным.

Пример 3.7. Выяснить какие из следующих предикатов являются тождественно истинными: 1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$;
3) $Sin^2 x + Cos^2 x = 1$; 4) $(x+1)^2 > x-1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x+1)^2$.

Решение. Очевидно, предикаты 1), 3), 4) являются тождественно истинными. В предикате 2) при x=0, y=0 неравенство нарушается, а в предикате 5) неравенство нарушается при всех положительных значениях x. Следовательно, предикаты 2) и 5) не тождественно истинны.

Пример 3.8. Для следующих предикатов, определенных на множестве $\boldsymbol{N}$, указать какой является следствием и почему.

1) $R(n)$: «n делится на 6», $Q(n)$: «n делится на 3»;

2)$R_1(n)$: «$n + 3 = 5$», $Q_1(n)$: «$n = 2$»;

3)$R_2(x, y)$: «$x - y = 3$», $Q_2(x, y)$: «$x - y \geq 3$»;

4)$R_3(x, y)$: «$x^2 - y^2 \geq 0$», $Q_3(x, y)$: «$(x - y)(x + y) \geq 0$»

Решение. 1) $Q(n)$ – следствие $R(n)$, но не наоборот, так как $I_R \subset I_Q$, но $I_Q \not\subset I_R$ ($Q(9)=1$, $R(9)=0$);

2) каждый из предикатов $R_1(n)$ и $Q_1(n)$ есть следствие другого, то есть $R_1(n) \equiv Q_1(n)$;

3) $Q_2(x, y)$ есть следствие $R_2(x, y)$, но не наоборот ($R_2(5,1) = 0$, $Q_2(5,1) = 1$);

4) каждый из предикатов $R_3(x, y)$ и $Q_3(x, y)$ есть следствие другого, то есть $R_3(x, y) \equiv Q_3(x, y)$.

Язык множеств истинности позволяет установить взаимосвязь между понятиями равносильности и следования предикатов: два предиката, определенные на одном и том же множестве, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого. Этот язык позволяет установить также следующие утверждения.

Теорема 1. Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, заданных на одном и том же множестве, равносильны.

Теорема 2. Всякий предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному) сам является тождественно истинным (тождественно ложным).

Теорема 3. Каждый тождественно истинный n-местный предикат является следствием любого другого n-местного предиката, определенного на том же множестве.

Теорема 4. Каждый n-местный предикат является следствием любого тождественно ложного n-местного предиката, определенного на том же множестве.

Теорема 5. Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – два n-местных предиката, определенных на одном и том же множестве, причем $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является следствием $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда:

1) если $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно истинный (выполнимый) предикат, то и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ также тождественно истинный (выполнимый);

2) если $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно ложный (опровержимый) предикат, то и $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно ложный (опровержимый).

3.2. Логические и кванторные операции над предикатами

Так как предикаты могут принимать два значения 1 и 0, то к ним применимы все операции алгебры высказываний.

Пусть на некотором множестве M определены два одноместных предиката P(x) и Q(x):

Отрицанием предиката P(x) называется новый предикат $\overline{P(x)}$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых предикат P(x) принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых предикат P(x) принимает значение «истина». Из этого определения следует, что множеством истинности предиката $\overline{P(x)}$ является разность множеств M и I_P, где I_P – множество истинности предиката P(x), что записывается так: $I_{\overline{P}} = CI_P$.

Конъюнкцией двух предикатов *P(x)* и *Q(x)* называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов *P(x)* и *Q(x)* принимает значение 1 и принимает значение 0 во всех остальных случаях. Очевидно, что $I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q$.

Аналогично определяются операции дизъюнкция, импликация, эквиваленция двух предикатов.

Импликацией предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x)→Q(x), который является ложным при тех значениях x∈M, при которых предикат P(x) принимает значение «истина», а предикат Q(x) − значение «ложь», и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Легко видеть, что $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q$, $I_{P\to Q} = CI_P \cup I_Q$.

$I_{\mathrm{A}\leftrightarrow \mathrm{B}} = (I_{A\to B}) \cap (I_{B\to A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = (I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_B)$

Ясно, что при выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.

Пример 3.9. Отрицанием одноместного предиката «$x\leq 3$», определенного на множестве R, является одноместный предикат «$x>3$», определенный на том же множестве R.

Пример 3.10. Отрицанием предиката «Река x впадает в озеро Байкал» является предикат «Река x не впадает в озеро Байкал» (оба одноместных предиката определены на множестве названий рек).

Пример 3.11. Отрицанием предиката «$sin^2 x + cos^2 x = 1$» является предикат «$sin^2 x + cos^2 x \neq 1$»

Пример 2.12. Конъюнкцией двух одноместных предикатов « $x = 0$ » и « $y= 0$» , заданных на R , будет двухместный предикат «$(x = 0) \wedge (y = 0)$», заданный на R^2 , который равносилен предикату «$x^2 + y^2 = 0$».

Пример 3.13. Дизъюнкцией двух одноместных предикатов « $x \neq 0$ » и «$y\neq 0$», определенных на R, будет двухместный предикат «$(x \neq 0) \vee (y \neq 0)$», заданный на R^2, который равносилен предикату «$x^2 + y^2 \neq 0$» над R .

Пример 3.14. Дизъюнкция двух двухместных предикатов $(x^2 + y^2 < 0) \vee (xy = 0)$, определенных на R^2, есть выполнимый предикат, потому что выполнимым является предикат $x\, y = 0$.

Пример 3.15. Пусть даны предикаты: *P(x)*: «*x* – четное число» и *Q(x)*: «*x* кратно 3», определенные на множестве *N*. Найти области истинности предикатов:

1) $P(x)\wedge Q(x)$; 2) $P(x)\vee Q(x)$; 3) $\overline{P(x)}$; 4) $P(x)\to Q(x)$.

Решение. Так как $I_P = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$, $I_Q = \{3, 6, 9,....., 3n, ...\}$, то

1) $I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{6, 12, ..., 6n, ...\}$;

2) $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, ..., 2n, 3n, ...\}$;

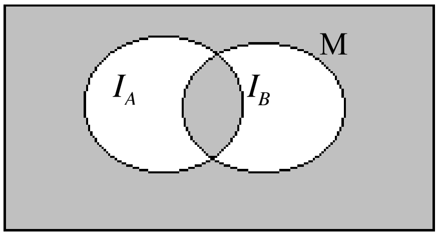
3) $I_{\overline{P}} = CI_P = \boldsymbol{N} \setminus I_P = \{1, 3, 5, ..., 2n - 1, ...\}$;

4) $I_{P\to Q} = CI_P \cup I_Q = \{1,3, 5, ..., 2n\text{-}1, ...\} \cup \{3, 6, 9, ..., 3n, ...\}$.

Пример 3.16. Пусть даны предикаты *A(x,y)* и *B(x,y),* определенные на множестве $M = M_1 \times M_2 \subset R \times R$. Найти множество истинности предиката $A(x,y) \leftrightarrow B(x,y)$ и изобразить ее с помощью кругов Эйлера-Венна.

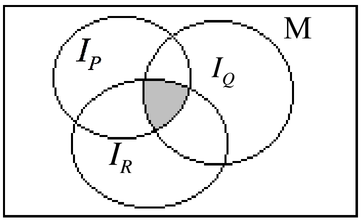
Решение. Так как $A(x,y) \leftrightarrow B(x,y) = (A(x,y) \to B(x,y)) \wedge (B(x,y) \to A(x,y))$, то $I_{A\leftrightarrow B} = (I_{A\to B}) \cap (I_{B\to A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = (I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_B)$.

$I_{A\leftrightarrow B}$ изображена заштрихованной частью рисунка.



Можно рассматривать и обратную задачу. Зная область истинности предиката, полученного в результате применения логических операций к некоторым предикатам, можно записать этот предикат.

Пример 3.17. Записать предикат, полученный в результате логических



операций над предикатами *P(x), Q(x)*, *R(x)* область истинности которого *I* заштрихована на рисунке.

Решение. Так как здесь $I = I_P \cap I_Q \cap I_R$, то искомый предикат имеет вид $P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)$.

Пусть имеется предикат *P(x)*, определенный на множестве М. Если $a \in$ М, то подстановка *a* вместо *x* в предикат *P(x)* превращает этот предикат в высказывание *P(a)*. Такое высказывание называется *единичным.* Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматриваются еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

Использование особого типа логических символов – кванторов является отличительной чертой логики предикатов. Наиболее употребимы в логике квантор общности ∀ (в естественном языке ему соответствуют термины типа «всякий», «каждый», «любой», «произвольный») и квантор существования ∃ («существует», «найдётся», «имеется», «некоторый»). К примеру, логическая форма высказывания «Некто умён» может быть выражена с использованием квантора ∃ и переменной *x*, пробегающей по множеству людей, так; $\exists x P(x)$, где символ P соответствует одноместному предикатору «умный», а форма высказывания «Каждый знает кого-нибудь» –посредством формулы $\forall x \exists\, y R(x, y)$, где квантифицируемые переменные *x* и *y* пробегают по тому же множеству, а символ *R* соответствует двухместному предикатору «знает».

Определение 3.5. Пусть *P(x)* – предикат, определенный на множестве *M.* Под выражением $\forall x\ P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда *P(x)* тождественно истинный на множестве *M* предикат, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от *x.* Соответствующее ему словесное выражение будет «Для всякого *x P(x)* истинно». Символ ∀ называют *квантором всеобщности.* Переменную *x* в предикате *P(x)* называют свободной (ей можно придавать различные значения из *M*), в высказывании $\forall x\ P(x)$ переменную *x* называют связанной квантором ∀.

Определение 3.6. Пусть *P(x)* – предикат, определенный на множестве *M.* Под выражением $\exists x\ P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует хотя бы один элемент $x \in M$, для которого *P(x)* истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называют *квантором существования.* В высказывании $\exists x\, P(x)$ переменная x связана квантором $\exists$.

Пример 3.18. Даны предикаты $P(x)$: $x^2 + x + 1 > 0$ и $Q(x) : x^2 - 4x + 3=0$, определенные на множестве R. Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

1) $\forall x\, P(x)$; 2) $\exists x\, P(x)$; 3) $\forall x\, Q(x)$; 4) $\exists x\, Q(x)$.

Решение. Так как $x^2 + x + 1 =(x + ½)^2 + ¾ >0$ при всех x, то будут истинны высказывания $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$. Так как уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет только два действительных корня $x_1= 3$ и $x_2= 1$, то предикат $Q(x)$ принимает значение 1 только при x=3 или x=1 и 0 в остальных случаях. Но тогда высказывание $\forall x\, Q(x)$ ложно, а высказывание $\exists x\, Q(x)$ истинно.

Нетрудно видеть, что когда предикат $P(x)$ определен на конечном множестве $M=\{a_1,a_2,,...,a_n\}$, то $\forall x\, P(x) = P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge... \wedge P(a_n)$, а

$\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee...\vee P(a_n)$, то есть кванторные операции обобщают операции конъюнкции и дизъюнкции на случай конечных областей.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Так, применение к двухместному предикату $Q(x,y)$ квантора всеобщности по переменной x дает одноместный предикат $\forall x\, Q(x,y)$, зависящий от y. К этому предикату можно применить кванторную операцию по переменной y. В результате получим или высказывание $\forall y \forall x\, Q(x,y)$ или высказывание $\exists y\, \forall x\, Q(x,y)$.

Таким образом, может быть получено одно из восьми высказываний: $\forall y\forall x\, Q(x,y)$, $\exists y\, \forall x\, Q(x,y)$, $\forall y\exists x\, Q(x,y)$, $\exists y\exists x\, Q(x,y)$, $\forall x\forall y\, Q(x,y)$, $\forall x\exists y Q(x,y)$, $\exists x\forall y\, Q(x,y)$, $\exists x\exists y Q(x,y)$.

Пример 3.19.

Пусть дан двухместный предикат $P(x,y)$: «Студенты x решают задачи y» на множествах:

$M_x = \{1,2\}$ – множество студентов, $M_y = \{1,2\}$ – множество задач. Тогда возможны следующие варианты для одного квантора:

1) $\exists x P(x,y) = P(1,y) \vee P(2,y)$ – хотя бы один студент решает задачи;
2) $\exists y P(x,y) = P(x,1) \vee P(x,2)$ – хотя бы одна задача решается студентами;
3) $\forall x P(x,y) = P(1,y) \wedge P(2,y)$ – каждый студент решает задачи;
4) $\forall y P(x,y) = P(x,1) \wedge P(x,2)$ – каждая задача решается студентами.
5) $\exists x \exists y P(x,y) = P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(2,1) \vee P(2,2) = \exists y \exists x P(x,y)$ – существуют студенты, решающие хотя бы одну задачу, или, что то же самое, существуют задачи, решаемые хотя бы одним студентом;
6) $\forall x \forall y P(x,y) = P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) = \forall y \forall x P(x,y)$ – каждый студент, решает каждую задачу, или, что то же самое, каждая задача, решается каждым студентом;
7) $\exists x \forall y P(x,y) = P(1,1) \wedge P(1,2) \vee P(2,1) \wedge P(2,2)$ – существуют студенты, решающие каждую задачу;
8) $\forall y \exists x P(x,y) = (P(1,1) \vee P(2,1)) \wedge (P(1,2) \vee P(2,2))$ – каждая задача, решается хотя бы одним студентом;
9) $\forall x \exists y P(x,y) = (P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$ – каждый студент решает хотя бы одну задачу;
10) $\exists y \forall x P(x,y) = P(1,1) \wedge P(2,1) \vee P(1,2) \wedge P(2,2)$ – существуют задачи, решаемые каждым студентом.

Можно показать, что перестановка кванторов $\forall$ и $\exists$ местами, вообще говоря, изменяет логическое значение высказывания.

Пример 3.20. Пусть предикат *Q(x,y)*: « x⋮ (делится на) y » определен на множестве N×N. Показать, что высказывания $\forall y \exists x\, Q(x,y)$ и $\exists x \forall y\, Q(x,y)$ имеют различные логические значения.

Решение. Так как высказывание $\forall y \exists x\ Q(x,y)$ означает, что для всякого натурального числа y существует натуральное число x такое, что y является делителем x, то это высказывание истинно.

Высказывание $\exists x \forall y\ Q(x,y)$ означает, что есть натуральное число x, которое делится на любое натуральное число y. Это высказывание, очевидно, ложно.

Задачи

1. Среди следующих предложений выделите предикаты, для каждого из предикатов укажите одну из возможных областей определения и в соответствии с ней область истинности:

1) Луна есть спутник Венеры;

2) Планеты x и y принадлежат Солнечной системе;

3) $5 + \sqrt[5]{70} - \sqrt[6]{10} > 150$;

4) $x^2 + 3x + 2 = 0$;

5) $x^4 - 3x + 8$;

6) любое простое число p не имеет делителей, отличных от себя и 1;

7) натуральное число n не меньше 1;

8) треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;

9) $x^2+2x+1>0$;

10) $1 + tg^2 x = \frac{1}{Cos^2 x}$.

2. На множестве $M=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заданы два предиката $P(x)$: «x- простое число», $Q(x)$: «x – нечетное число». Запишите их множества истинности. Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множестве $L=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $K=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

3. Будут ли следующие предикаты равносильны или один из них является следствием другого? (Предметные переменные в предикатах принадлежат R)

1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$ и $\sqrt{xy} = 15$;

2) $lg\, a\, b = 1$ и $lg\, a + lg\, b = 1$;

3) $Sin^2 x + Cos^2 x = 1$ и $tg^2 x + 1 = \frac{1}{Cos^2 x}$;

4) $2^{log_2 x} = y$ и $y=x$;

5) $x^2 \leq 0$ и $2^{|x|} = Cosx$;

6) $x + y = z$ и $(x+y)(x-z) = -zy$;

7) $x^3 + y^3 = 0$ и $x^2 - y^2 = 0$.

4. 1) Привести по три примера предикатов разной местности на множестве действительных чисел на каждый из трех типов, причем выполнимый предикат не должен быть тождественно истинным.

2) Привести примеры предикатов на множестве целых чисел:

а) $R(x,y)$, что $R(x,5)$ – тождественно истинный;

б) $Q(x,y)$, что $Q(x,7)$ – выполнимый;

в) $S(x,y)$, что $S(x,3)$ – тождественно ложный;

г) $R_1(x, y)$ – выполнимый, а $R_1(x, 4)$ – тождественно ложный;

д) $Q_1(x, y)$ – не тождественно-истинный, а $Q_1(x, 5)$ – тождественно истинный.

1) Привести два примера предикатов $R(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$ на множестве натуральных чисел, что $Q(x,y,z)$ – следствие $R(x,y,z)$.
2) Привести три примера двух равносильных n-местных предикатов на множестве целых чисел.

5. Изобразите на декартовой плоскости области истинности предикатов:

1) $x + y =1$; 2) $x +3y = 3$; 3) $x - y^2 \geq 0$;

4) $Sin\ x = Sin\ y$; 5) $(x - 2)^2 + (y +3)^2 = 0$; 6) $\lg x = \lg y$.

6. На множестве $M=\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ заданы предикаты $A(x)$: «x не делится на 5»; $B(x)$: «x – четное число»; $C(x)$: «x – число простое»; $D(x)$: «x кратно 3».

Найдите множества истинности следующих предикатов:

1) $A(x) \wedge B(x)$; 2) $C(x) \wedge B(x)$;

3) $C(x) \wedge D(x)$; 4) $B(x) \wedge D(x)$;

5) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$; 6) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$;

7) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$; 8) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;

9) $A(x) \vee B(x)$; 10) $B(x) \vee C(x)$;

11) $C(x) \vee D(x)$; 12) $B(x) \vee D(x)$;

13) $\overline{B(x)} \vee D(x)$; 14) $B(x) \vee \overline{D(x)}$;

15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$; 16) $C(x) \rightarrow A(x)$;

17) $D(x) \rightarrow \overline{C(x)}$; 18) $A(x) \rightarrow B(x)$;

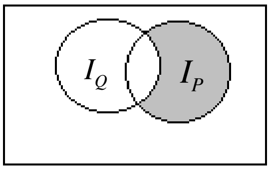
19) $A(x) \wedge C(x) \rightarrow \overline{D(x)}$; 20) $A(x) \wedge D(x) \rightarrow \overline{C(x)}$.

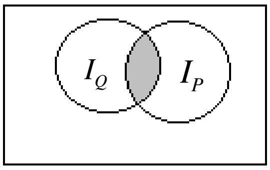
7. Изобразите на диаграммах Эйлера-Венна области истинности для следующих предикатов: 1) $\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}$; 2) $\overline{P(x)} \leftrightarrow \overline{Q(x)}$;

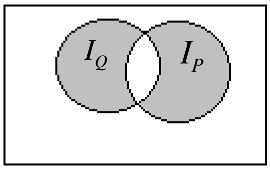
3) $(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R(x) \wedge \overline{Q(x)}$; 4) $P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \overline{Q(x)})$;

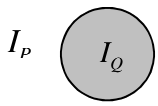
5) $P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{R(x)}$; 6) $P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \overline{R(x)}$.

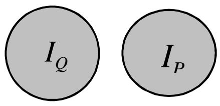
8. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, области истинности которых заштрихованы на следующих рисунках.

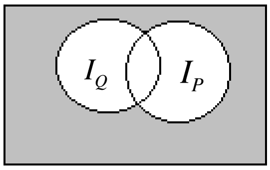
1)


2)


3)


4)


5)


6)


9. Какой местности и какого типа следующие предикаты на множестве целых чисел: 1) $\forall x\ (x - y \geq 2)$; 2) $\forall x\ (xy=0)$; 3) $\exists x\ (\sqrt{|x|} + y = 0)$; 4)$\forall x_1 (x_1{}^2 + |x_2 x_3| \geq 0)$; 5) $\exists x\ (x + y \geq 2)$; 6) $\exists y\ (x + y > y + x)$; 7) $\forall x\ \forall y\ (x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz})$.

10. Найти значения следующих высказываний, образованных из предикатов на множестве целых чисел:

1) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x+y+z=5)$; 2) $\exists x\ \forall y\ \exists z\ (xy = z)$;

3) $\forall x\ \exists y\ (xy = x)$; 4) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (xz = y)$;

5) $\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((xz = y) \wedge (yz = x))$; 6) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (xz = y)$.

11. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов совпадает с **R**:

1) $\exists x\ (x+5 = x+3)$; 2) $\exists x\ (x^2 + x + ½ = 0)$;

3) $\forall x\ (x^2 + x + 1 > 0)$; 4) $\forall x\ (x^2 - 5x + 6 \geq 0)$;

5) $\exists x\ ((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \wedge (x^2 - 2x + 1 > 0))$; 6) $\exists x\ ((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \wedge (x^2 - 6x + 8 \leq 0\ ))$

7) $\forall x\ ((x^2 - 6x + 8 \geq 0\ ) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0))$; 8) $\exists x\ ((\ x \in \{2, 5\}) \rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0\ ))$

12. Приведите примеры таких значений a, для которых данное высказывание:1) истинно; 2) ложно (M=R).

1) $\exists x<0\ (x^2 + ax + a = 0)$; 2) $\forall x \in [0,1]\ (x^2 + x + a < 0)$;

3) $\forall$x>7 $(x^2 + ax + 1 > 0)$; 4) $\exists x \in [a, a+1]\ \ (x^2 - x - 2 < 0)$.

13. Пусть предикат $P(x,y)$: « $x \leq$ y » определен на множестве M=N×**N**.

1) Какие из следующих предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные: а) $\exists x\ P(x,y)$; б) $\forall x\ P(x,y)$; в) $\exists y\ P(x,y)$; г)$\forall y P(x,y)$?

2) Для тех предикатов из 1), которые не являются тождественно истинными, указать область истинности.

3) Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны:

а) $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$; б) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; в) $\forall y \exists x\ P(x,y)$; г) $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$;

д) $\forall y \forall x\ P(x,y)$; е) $\exists y \forall x\ P(x,y)$; ж) $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$; з) $\exists y \exists x\ P(x,y)$?

14. Пусть S(x,y,z): «$x+y=z$» – предикат суммы и $П(x,y,z)$: «x·y=z» – предикат произведения, определенные: а) на множестве Z всех целых чисел;

б) на множестве N_0 натуральных чисел с нулем.

Какой смысл имеют формулы: 1) $\exists y \forall x S(x,y,z)$; 2) $\exists y \forall x П(x,y,z)$;

3) $\forall z \forall x \exists y S(x,y,z)$; 4) $\forall z \forall x \exists y П(x,y,z)$.

15. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на предикат $P(x,y)$, описать в словесной форме полученные выражения и определить область истинности (для полученных предикатов) или истинностное значение (для высказываний), если:

1. $P(x,y)$, определенный на конечном множестве натуральных чисел $N' \subset N$, означает: а) «x является делителем y»; б) «x делится на y»;

в) «x имеет общий делитель с y»; г) «x, y делятся на 3»;

д) «x, y – четные числа»; е) «$x \geq y$» ; ж) «$x < y$».

2. $P(x,y)$, определенный на множестве людей, означает;

а) «x является родителем y»; б) «x является сыном y»;

в) «x живет в одном городе с y»; г) «x любит y».

3.3. Понятие формулы логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов

В логике предикатов используется следующая символика:

1. Символы p, q, r,… – переменные высказывания, принимающие два значения: 1 – истина, 0 – ложь.

2. Предметные переменные – x, y, z,…, которые пробегают значения из некоторого множества M, x^o, y^o, z^o,… – предметные константы, то есть значения предметных переменных.

3. $P(\cdot)$, $F(\cdot)$ – одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ – n-местные предикатные переменные. $P^o(\cdot)$, $Q^o(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ – символы постоянных предикатов.

4. Символы логических операций: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\rceil$($\overline{}$).

5. Символы кванторных операций $\forall$, $\exists$.

6. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение 3.7. (Понятие формулы логики предикатов).

1. Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой.

2. Если $R(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ – n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x_1, x_2,…, x_n – предметные переменные или предметные постоянные, не обязательно все различные, то $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть формула. В этой формуле предметные переменные являются свободными. Формулы вида 1 и 2 называются элементарными.

3. Если A и B – формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой свободной, то

$A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

4. Если A – формула, то $\overline{A}$ – формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы A к формуле $\overline{A}$ не меняется.

5. Если $A(x)$ – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall x\, A(x)$ и $\exists x\, A(x)$ являются формулами, причем предметная переменная в них входит связанно.

6. Никакая другая строка символов формулой не является.

Пример 3.21. Какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов? В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные.

1) $\overline{\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))}$; 2) $(p \to q) \wedge (\overline{r} \to \overline{p})$;

3) $P(x) \wedge \forall x Q(x)$; 4) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x R(x,y))$;

5) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y (\forall y R(y))$; 6) $\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))$.

Решение. Выражения 1), 2), 4), 6) являются формулами, так как записаны в соответствии с определением формулы логики предикатов. В формулах 1) и 6) переменная y свободна, а переменные x и z связаны. В формуле 2) нет предметных переменных. В формуле 4) переменная x связана, а переменная y свободна.

Выражения 3) и 5) не являются формулами. В выражении 3) операция конъюнкция применена к формулам $P(x)$ и $\forall x Q(x)$, в первой из них переменная x свободна, а во второй связана квантором общности, что противоречит определению формулы. В выражении 5) квантор существования по переменной y навешен на формулу $\forall y R(y)$, в которой переменная y связана квантором общности, что также противоречит определению формулы.

О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значения трех видов переменных, входящих в формулу:

1) переменных высказываний;

2) свободных предметных переменных из множества M;

3) предикатных переменных.

При конкретных значениях этих переменных формула принимает конкретное логическое значение.

Превращение формулы логики предикатов в высказывание описанным выше способом, а также само получаемое высказывание, называется *интерпретацией этой формулы на множестве A*.

Пример 3.22. Дадим интерпретацию формуле $(\forall x)(\exists y)[P(x,y)]$.

В качестве множества A возьмем множество всех мужчин, а вместо предикатной переменной $P(x,y)$ подставим конкретный предикат, определенный на A: «x есть отец y». Тогда исходная формула превратится в следующее ложное высказывание $(\forall x)(\exists y)[x есть отец y]$, т.е. «у каждого мужчины есть сын».

Этой же формуле можно дать и другую интерпретацию, Возьмем в качестве A множество N^2 (где N – множество натуральных чисел), а в качестве предикатной переменной $P(x, y)$ подставим предикат $x < y$,
определенный на N^2. Тогда исходная формула превратится в истинное высказывание $(\forall x)(\exists y)[x < y]$ – «для каждого натурального числа существует большее него натуральное число».

Пример 3.23. Дана формула $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$, где предикаты $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ определены на множестве $\mathbf{N}$. Найти ее значение, если

1) $P(x)$: «число x делится на 3», $Q(x)$: «число x делится на 4», $R(x)$: «число x делится на 2»;

2) $P(x)$: «число x делится на 3», $Q(x)$: «число x делится на 4», $R(x)$: «число x делится на 5».

Решение. В обоих случаях конъюнкция $P(x) \wedge Q(x)$ есть утверждение, что число x делится на 12. Но тогда при всех x, если число x делится на 12, то оно делится и на 2, и, значит, в случае 1) формула истинна.

Так как из делимости числа x на 12 не при всех x следует делимость числа на 5, то в случае 2) формула ложна.

Определение 3.23. Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными на области M*, если они принимают одинаковые значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M. ($A \underset{M}{\equiv} B$)

Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области. ($A \equiv B$).

Ясно, что все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний поставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют равносильности самой логики предикатов.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – переменные предикаты, а C – переменное высказывание или предикат, не зависящий от переменной x.

Законы де Моргана:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$

2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$

3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$

4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$

Вынесение квантора за скобки

5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$

6. $\forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv \forall x \forall y [A(x) \vee B(y)]$

7. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$

8. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$

9. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x [C \to B(x)]$

10. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$

11. $\exists x[A(x) \lor B(x)] \equiv \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

12. $\exists x[C \lor B(x)] \equiv C \lor \exists x B(x)$

13. $\exists x[C \land B(x)] \equiv C \land \exists x B(x)$

14. $\exists x A(x) \land \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \land B(y)]$

15. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$

16. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$

Законы коммутативности для одноименных кванторов:

17. $\forall x \forall y\ A(x,y) = \forall y \forall x\ A(x,y)$

18. $\exists x \exists y\ A(x,y) = \exists y \exists x\ A(x,y)$

Доказательство равносильностей логики предикатов требует или детального рассмотрения значений формул, или использования известных равносильностей.

Можно доказать, что следующие формулы не равносильны:

$$\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \not\equiv \forall x (A(x) \lor B(x))$$

$$\exists x A(x) \land \exists x B(x) \not\equiv \exists x (A(x) \land B(x))$$

Пример 3.24. Доказать равносильности:

1) $\exists x[A(x) \lor B(x)] \equiv \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$;

2) $C \land \forall x A(x) \equiv \forall x[C \land A(x)]$

Решение. 1) Для доказательства достаточно рассмотреть два случая:

а) пусть предикаты $A(x)$ и $B(x)$ тождественно ложны, тогда будет тождественно ложным и предикат $A(x) \lor B(x)$. При этом будут ложными высказывания $\exists x[A(x) \lor B(x)]$ и $\exists x A(x) \lor \exists x B(x)$.

б) пусть теперь хотя бы один из предикатов (например, $A(x)$) не тождественно ложный, тогда будет не тождественно ложным и предикат $A(x) \lor B(x)$. При этом будут истинными высказывания $\exists x A(x)$ и $\exists x[A(x) \lor B(x)]$, а, значит, будут истинными и исходные формулы.

Следовательно, $\exists x[A(x) \lor B(x)] \equiv \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$.

2) Рассмотрим два случая: а) пусть высказывание C ложно, тогда для любого предиката $A(x)$ будет тождественно ложным высказывание $C \wedge \forall x A(x)$ и предикат $C \wedge A(x)$, и, следовательно, высказывание $\forall x[C \wedge A(x)]$. Значит, в этом случае обе исходные формулы тождественно ложны.

б) Пусть теперь высказывание C истинно, тогда, очевидно, значения исходных формул будут целиком зависеть от значений предиката $A(x)$. Если $A(x)$ – тождественно истинный предикат, то будет тождественно истинным и предикат $C \wedge A(x)$, и, следовательно, будут тождественно истинными высказывания $\forall x A(x)$, $C \wedge \forall x A(x)$, $\forall x(C \wedge A(x))$, то есть тождественно истинные исходные формулы. Если же предикат $A(x)$ не тождественно истинный, тогда будет не тождественно истинным предикат $C \wedge A(x)$, а высказывания $\forall x A(x)$, $C \wedge \forall x A(x)$, $\forall x(C \wedge A(x))$ будут ложными, то есть ложные значения в этом случае принимают обе исходные формулы, что в итоге и доказывает их равносильность.

Определение 3.8. Формула логики предикатов называется *выполнимой (опровержимой) в области М*, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула принимает истинные значения.

Формула логики предикатов называется *выполнимой*, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Определение 3.9. Формула логики предикатов называется *тождественно истинной (общезначимой) в области М*, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к данной области M., т.е. это формула, для которой при любой ее интерпретации область истинности совпадает с областью определения.

Формула логики предикатов называется *тождественно ложной в области М*, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области M, т.е. это формула, для которой область истинности пуста.

Определение 3.10. Формула логики предикатов называется *общезначимой (логическим законом)*, если она тождественно истинная во всякой области.

Из приведенных определений следует:

1. Если формула общезначима, то она и выполнима на всякой области.

2. Если формула тождественно истинна в области, то она выполнима в этой области.

3. Если формула невыполнима, то она тождественно ложна в любой области.

Пример 3.25. Проверим, будет ли выполнимой формула

$$(\exists x)(\exists y)\big[P(x) \wedge \overline{P(y)}\big].$$

Пусть предметные переменные x и y пробегают множество натуральных чисел, а предикатная переменная $P(x)$ означает, что «x – четное число». Тогда данная формула превращается в высказывание: «Среди натуральных чисел существуют как четные, так и нечетные», которое истинно. Следовательно, данная формула выполнима.

Если же вместо предикатной переменной $P(x)$ взять «x – положительное число», то данная формула превращается в высказывание: «среди натуральных чисел существуют как положительные, так и неположительные числа», которое ложно. Следовательно, эта же формула является опровержимой.

Пример 3.26. Доказать, что формула $A \equiv \exists x\ \forall y\ P(x,y)$ выполнима.

Решение. Для доказательства выполнимости формулы A достаточно найти область определения двухместного предиката $P(x,y)$ и такое его значение, что в этой области формула принимает истинные значения. Такой областью определения предиката, в частности, будет множество $M=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. Действительно, если $P(x,y)$ – предикат «$y \vdots x$», то формула A тождественно истинна в области M, и, следовательно, выполнима в этой области. Однако, если в качестве предиката $P(x,y)$ взять предикат « $y< x$ », то формула A будет тождественно ложной в области *M*, и, следовательно, невыполнимой в области *M*. При этом ясно, что формула не общезначима.

Пример 3.27. Пусть X – множество книг в библиотеке, У – множество студентов группы; предикат *Q(x,y)* означает « студент y прочитал книгу x». Показать, что высказывания $\exists x\forall y\, Q(x,y)\to\forall y\exists x\, Q(x,y)$ и $\forall x\exists y\, Q(x,y)\to \exists\, y\forall x\, Q(x,y)$ имеют различные логические значения.

Решение. Импликация $\exists x\forall y\, Q(x,y)\to\forall y\exists x\, Q(x,y)$ является тавтологией (общезначимой). В посылке этой формулы утверждается, что существует книга (обозначим ее К), которую прочитали все студенты группы. Из этого действительно следует заключение первой формулы: каждый студент группы прочитал какую-либо книгу, например, упомянутую К.

Импликация $\forall x\exists y\, Q(x,y)\to \exists\, y\forall x\, Q(x,y)$ не является тавтологией, так как если каждая книга библиотеки прочитана каким-либо студентом (такова посылка этой формулы), то это не значит, что есть студент, прочитавший все эти книги.

Пример 3.28. Доказать, что формула $A\equiv\forall\mathrm{x}\big(P(x)\to\overline{Q(x)}\big)\to\overline{\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)}$ является общезначимой.

Решение. Считая, что формула *A* определена на любой области *M*, проведем равносильные преобразования:

$$A\equiv\forall\mathrm{x}\big(P(x)\to\overline{Q(x)}\big)\to\overline{\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)}$$

$$\equiv\overline{\forall x\big(P(x)\to\overline{Q(x)}\big)}\vee\overline{\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)}\equiv$$

$$\equiv\exists x(\overline{\overline{P(x)}\vee\overline{Q(x)}})\vee\overline{\exists xP(x)}\vee\overline{\forall xQ(x)}$$

$$\equiv\exists x(P(x)\wedge Q(x))\vee\overline{\exists xP(x)}\vee\exists x\overline{Q(x)}\equiv$$

$$\equiv\exists x(P(x)\wedge Q(x))\vee\exists x\overline{Q(x)}\vee\overline{\exists xP(x)}\equiv\exists x\big(P(x)\wedge Q(x)\vee\overline{Q(x)}\big)\vee\overline{\exists xP(x)}$$

$$\equiv\exists x\big(P(x)\vee\overline{Q(x)}\big)\vee\overline{\exists xP(x)}\equiv\big(\exists xP(x)\vee\overline{\exists xP(x)}\big)\vee\exists x\overline{Q(x)}$$

$$\equiv 1\vee\exists x\overline{Q(x)}\equiv 1$$

Пример 3.29. Доказать, что формула $A \equiv \exists x \left(\left(F(x) \rightarrow \overline{F(x)} \right) \wedge \left(\overline{F(x)} \rightarrow F(x) \right) \right)$ тождественно ложна.

Решение. Так как формула $\left(F(x) \rightarrow \overline{F(x)} \right) \wedge \left(\overline{F(x)} \rightarrow F(x) \right) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$, а формула $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$, очевидно, тождественно ложна, то тождественно ложна и формула A.

Определение 3.11. Говорят, что формула логики предикатов имеет *нормальную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Среди нормальных форм формул логики предикатов важное значение имеют так называемые *предваренные нормальные формы.* В них кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех логических операций, то есть предваренная нормальная форма формулы логики предикатов имеет вид: $(\sigma x_1)(\sigma x_2)\dots(\sigma x_n)A(x_1, x_2, \dots, x_m)$, n ≤ m, где под символом (σx_i) понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула A кванторов не содержит.

Всякая формула логики предикатов путем равносильных преобразований может быть приведена к предваренной нормальной форме (п.н.ф.), при этом следует использовать равносильности логики предикатов, которые позволяют выносить за скобки кванторы существования и всеобщности.

Пример 3.30. Найти предваренные нормальные формы для следующих формул:

1) $\overline{\forall x R(x) \wedge \exists y Q(x, y)}$;

2) $\exists x \overline{R(x)} \vee \forall x Q(x, y)$;

3) $\overline{p \rightarrow \exists x R(x)}$;

4) $\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)}$

Решение (под знаком ≡ указан номер используемой равносильности).

1) $\overline{\forall x R(x) \wedge \exists y Q(x,y)} \equiv$

$\overline{\forall a R(a) \wedge \exists y Q(x,y)} \underset{7}{\equiv} \overline{\forall a(R(a) \wedge \exists y Q(x,y))} \underset{13}{\equiv} \overline{\forall a \exists y(R(a) \wedge Q(x,y))} \underset{1}{\equiv}$

$\underset{1}{\equiv} \exists a \overline{\exists y(R(a) \wedge Q(x,y))} \underset{2}{\equiv} \exists a \forall y \overline{(R(a) \wedge Q(x,y))} \equiv \exists a \forall y\left(\overline{R(a)} \vee \overline{Q(x,y)}\right)$

2) $\exists x \overline{R(x)} \vee \forall x Q(x,y) \equiv \exists z \overline{R(z)} \vee \forall x Q(x,y) \underset{12}{\equiv} \exists z\left(\overline{R(z)} \vee\right.$

$\left.\forall x Q(x,y)\right) \underset{8}{\equiv} \exists z \forall x\left(\overline{R(z)} \vee Q(x,y)\right)$

3) $\overline{p \to \exists x R(x)} \equiv \overline{\overline{p} \vee \exists x R(x)} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\exists x R(x)} \underset{2}{\equiv} p \wedge \forall x \overline{R(x)} \underset{7}{\equiv} \forall x\left(p \wedge \overline{R(x)}\right)$

4) $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x,y)} \underset{5}{\equiv} \forall x\left(\exists y P(x,y) \wedge \exists y \overline{Q(x,y)}\right) \equiv \forall x\left(\exists y P(x,y) \wedge\right.$

$\left.\exists z \overline{Q(x,z)}\right) \underset{14}{\equiv} \forall x \exists y \exists z\left(P(x,y) \wedge \overline{Q(x,z)}\right)$

3.4. Сравнение логики предикатов и логики высказываний

Мы уже отмечали, что язык и логика алгебры предикатов тоньше и точнее отражают процессы мышления, недели язык и логика алгебры высказываний. Приведем два примера, подтверждающих эту мысль.

Пример 3.31. Рассмотрим высказывание «Каждый человек имеет мать». Если на языке алгебры высказываний формулировка данного высказывания сведется лишь к обозначению его некоторой буквой, скажем, A, то на языке алгебры предикатов возможна формализация, учитывающая внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру этого высказывания.

Действительно, пусть $P(x,y)$ – двухместный предикат «x есть мать y», определенный на множестве всех людей. Тогда данному высказыванию отвечает формула логики предикатов $(\forall y)(\exists x)(P(x,y))$.

Рассматриваемое высказывание можно перевести на язык логики предикатов и иначе. Если ввести еще одноместный предикат $Q(y)$ – «y есть человек», определенный на произвольном множестве, то высказывание запишется так: $(\forall y)\left(Q(y) \to (\exists x)(P(x,y))\right)$.

Пример 3.32. Этот пример еще более наглядно демонстрирует возможности логики предикатов по сравнению с логикой высказываний.

Рассмотрим два высказывания: «В Москве живет женщина, имеющая брата в Воронеже» и «В Воронеже живет мужчина, имеющий сестру в Москве». Каждое из данных утверждений следует из другого, т.е. они равносильны. Спрашивается, можно ли выразить эту равносильность на языке алгебры высказываний и на языке логики предикатов. Оказывается, второе возможно, а первое – нет.

В самом деле, как мы могли бы формализовать данные высказывания на языке алгебры высказываний? Можно обозначить первое высказывание через A, второе – через B. Ясно, что ни о какой равносильности формул A и B говорить не приходится. Можно расчленить данные высказывания на более простые: A_1 – «Женщина живет в Москве», A_2 – «Женщина имеет брата в Воронеже», B_1 – «Мужчина живет в Воронеже», B_2 – «Мужчина имеет сестру в Москве». Тогда первое исходное высказывание есть конъюнкция $A_1 \wedge A_2$, а второе – конъюнкция $B_1 \wedge B_2$. Но и эти две формулы алгебры высказываний не следуют одна из другой.

В отличие от алгебры высказываний формализация на языке логики предикатов позволяет обнаружить равносильность двух данных высказываний.

Действительно, введем предикаты, определенные на множестве всех людей: $P_1(x)$ – «x – женщина»; $P_2(x)$ – «x – живет в Москве»;

$Q_1(x)$ – «x – мужчина»; $Q_2(x)$ – «x – живет в Воронеже»;

$S(x, y)$ – «x есть сестра y».

Тогда высказыванию «В Москве живет женщина, имеющая брата в Воронеже» соответствует следующая формула логики предикатов:

$$(\exists x)[P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge (\exists y)(Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge S(x, y))],$$

а высказыванию «В Воронеже живет мужчина, имеющий сестру в Москве» соответствует формула

$$(\exists y)[Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge S(x, y))].$$

Покажем, что полученные формулы равносильны.

$$(\exists x)[P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge (\exists y)(Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge S(x,y))] \cong$$
$$\cong (\exists x)(\exists y)[P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge S(x,y)] \cong$$
$$\cong (\exists y)(\exists x)[Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge S(x,y)] \cong$$
$$\cong (\exists y)[Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge S(x,y))].$$

Задачи

1. Даны утверждения $A(n)$: «число n делится на 3», $B(n)$: «число n делится на 2», $C(n)$: «число n делится на 4», $D(n)$: «число n делится на 6», $E(n)$: «число n делится на 12». Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны: 1) $\forall n\ (A(n) \wedge B(n) \to E(n))$; 2) $\forall n\ (B(n) \wedge D(n) \to E(n))$;

3) $\exists n\ (C(n) \wedge D(n) \to E(n))$; 4) $\forall n\ (E(n) \to C(n) \wedge D(n))$;

5) $\forall n\ (\overline{E(n)} \to B(n) \wedge D(n))$; 6) $\exists n\ (B(n) \wedge C(n) \to \overline{D(n)})$;

7) $\forall n\ \left(\overline{A(n)} \to \overline{E(n)}\right)$.

2. Имеют ли место следующие равносильности?

1) $\forall x(R(x) \to Q(x)) \underset{M}{\equiv} \forall x R(x) \to \forall x Q(x)$, если а) M={a}, б) M={a,в} ;

2) $\forall x\ R(x) \wedge \forall x\ Q(x) \equiv \forall x\ (R(x) \wedge Q(x))$; 3) $\forall x\ R(x) \vee \forall x\ Q(x) \equiv \forall x\ (R(x) \vee Q(x))$;

4) $\exists x\ R(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv \exists x\ (R(x) \wedge Q(x))$; 5) $\forall x\ \forall y\ R(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ R(x,y)$;

6) $\exists x\ R(x) \vee \exists x\ Q(x) \equiv \exists x\ (R(x) \vee Q(x))$; 7) $\forall x\ \exists y\ R(x,y) \equiv \exists y\ \forall x\ R(x,y)$;

8) $\exists x\ \exists y\ R(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ R(x,y)$; 9) $\forall x\ R(x,z) \equiv \forall y\ R(y,z)$;

10) $\exists x\ R(x,z) \equiv \exists y\ R(y,z)$.

3. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – любые предикаты. Какие их следующих формул равносильны формуле $A(x) \to \overline{B(x)}$?

1) $A(x) \vee B(x)$; 2) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; 3) $\overline{A(x)} \to B(x)$; 4) $\overline{B(x)} \to A(x)$;

5) $\overline{\overline{A(x)} \wedge \mathrm{B}(x)}$; 6) $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$; 7) $B(x) \to \overline{A(x)}$.

4. Доказать, что следующие формулы не равносильны:

1) $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$;

2) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ и $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$;

5. Найти отрицания следующих формул:

1) $\exists x\ (A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$; 2) $\forall x\ (A(x) \to \forall y\ B(y))$;

3) $\forall x\ (A(x) \vee \exists y\ B(y))$; 4) $\forall x\ (A(x) \to B(x)) \wedge \exists x\ (S\ (x) \wedge \overline{R(x)})$;

5) $\exists x\ (\ R(x) \leftrightarrow Q(x))$; 6) $\forall x\ \exists y \forall z\ (P(x,y,z) \to Q(x,\ y,z))$.

6. Даны два предиката $R(x,y)$ и $Q(y,z)$, определенные на множестве $M \times M$, где M={a, b, c }. Для следующих предикатов найти им равносильные, не содержащие кванторов 1) $\forall x\ R(x,y) \vee \exists y\ Q(y,z)$; 2) $\exists x\ R(x,y) \wedge \forall z\ Q(y,z)$;

3) $\forall x \exists y\ (\ R(x,y) \wedge Q(y,z))$; 4) $\exists x \forall y\ R(x,y) \wedge \forall z\ Q(y,z)$;

5) $\forall x \exists y\ R(x,y) \to \exists y \forall x\ R(x,y)$; 6) $\forall x \forall y\ R(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x\ R(x,y)$.

7. Каким условиям будут удовлетворять области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M, если истинны высказывания:

1) $\forall \mathrm{x}(A(x) \to B(x)) \wedge \exists \mathrm{x}\left(\overline{A(x)} \wedge \mathrm{B}(x)\right)$

2) $\overline{\exists \mathrm{x}(A(x) \wedge \mathrm{B}(x))} \wedge \left(\forall \mathrm{x}(A(x) \to B(x))\right)$;

3) $\exists \mathrm{x}(A(x) \wedge \mathrm{B}(x)) \to \left(\forall \mathrm{x}(A(x) \to B(x))\right)$.

8. На множестве целых чисел построить следующие предикаты:

1) $R(x,y)$, что $\overline{R(x,y)}$ – выполнимый, но не тождественно истинный;

2) $R(x)$ и $Q(x)$, что $R(x) \wedge Q(x)$ – выполнимый, но не тождественно истинный;

3) $R(x,y)$ и $Q(x,y)$, что $R(x,y) \vee Q(x,y)$ – выполнимый;

4) $R(x,y)$ и $Q(x,y)$, каждый из которых не тождественно истинный, а $R(x,y) \vee Q(x,y)$ – тождественно истинный;

6) $R(x)$ и $Q(x,y,z)$, что $R(x) \leftrightarrow Q(x,y,z)$ – тождественно ложный;

7) $R(x,y,z)$, что $\forall y\ R(x,y,z)$ – тождественно истинный;

8) $R(x,y)$, что $\forall x\ R(x,y)$ – выполнимый, но не тождественно истинный.

9. Можно ли привести пример формулы $R(x)$ такой, что выполнимы следующие формулы: 1) $\exists x\ R(x)$; 2) $\forall x\ R(x)$; 3) $\overline{\forall \mathrm{x} R(x) \to R(t)}$;

4) $\overline{R(t) \to \forall x R(x)}$.

10. Какие из ниже приведенных формул являются общезначимыми?

1) $\exists x\, R(x) \to \forall x\, R(x)$; 2) $\forall x\, (q \to R(x)) \leftrightarrow (q \to \forall x\, R(x))$;

3) $\forall x\, R(x) \to \exists x\, R(x)$; 4) $\exists x\, (R(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x\, R(x) \wedge \exists x\, Q(x))$;

5) $\exists x\, (R(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists x\, R(x) \wedge \exists x\, Q(x))$;

6) $(\forall x\, R(x) \vee \forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (R(x) \vee Q(x))$;

7) $(\forall x\, R(x) \wedge \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (R(x) \wedge Q(x))$;

8) $(\forall x\, R(x) \vee \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (R(x) \vee Q(x))$.

11. Выполнимы ли следующие формулы:

1) $\forall x\, R(x)$; 2) $\exists x\, \forall y\, R(x,y)$;

3) $\forall x\, \exists y (R(x,x) \wedge \overline{R(y,x)})$;

4) $\exists x\, \exists y (R(x) \wedge \overline{R(y)})$;

5) $\exists y\, \forall x\, (R(x,y) \to \overline{R(y,x)})$; 6) $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \to \forall y \exists x\, R(y,x)$;

7) $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \wedge \exists y \forall x\, R(x,y)$; 8) $\forall x \overline{R(x,x)} \wedge \forall x \exists y R(x,y)$.

Раздел 4. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

4.1. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Логическую формулу можно рассматривать, как логическую функцию. Запишем в функциональном виде например конъюнкцию: $F(x_1, x_2)=x_1 \wedge x_2$. Элементарные высказывания и в этом случае играют роль аргументов (независимых переменных), которые в классической логике могут принимать 2 значения: *истина* или *ложь*.

Определение 4.1. *Функцией алгебры логики n переменных (или булевой функцией)* называется любая функция n переменных $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументы которой принимают два значения 1 и 0, и при этом сама функция может принимать одно из двух значений 0 или 1.

Всякая формула алгебры логики есть функция алгебры логики. Тождественно истинная и тождественно ложная формулы представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Используя правила комбинаторики, можно установить, что число различных функций алгебры логики n переменных равно числу двоичных векторов длины 2^n, т.е. 2^{2^n}.

Если фактически функция не зависит от некоторой переменной, то такую переменную называют *фиктивной*, иначе переменную называют *существенной.*

Пример 4.1. Даны функции:

1) $f(a, b, c) = (b \to c \vee a) \wedge (a \to c \vee b)$
2) $f(a, b, c) = \bar{b} \wedge c \vee b \wedge (a \downarrow c \vee a \wedge \bar{c})$
3) $f(a, b, c) = (a \to b \vee c) \wedge (a \oplus c \vee \bar{b})$
4) $f(a, b, c) = \bar{a} \wedge (b \leftrightarrow c) \vee a \wedge b \wedge c)$
5) $f(a, b, c) = (\bar{a} | (b \downarrow c)) \wedge (a \to c \vee b)$

Проверим, для каких функций переменная a является фиктивной.

Решение. Рассмотрим значения функций на наборах, которые отличаются только значением переменной *a* (на соседних наборах по переменной *a*).

1) f(0, 0, 0) = 1, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 0, f(0, 1, 1) = 1,

f(1, 0, 0) = 1, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 0, f(1, 1, 1) = 1.

Изменение значения переменной *a* в любом наборе значений переменных не изменяет значение функции, поэтому переменная *a* для этой функции является фиктивной.

2) f(0, 0, 0) = 0, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 1, f(0, 1, 1) = 0,

f(1, 0, 0) = 0, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 1, f(1, 1, 1) = 0.

Изменение значения переменной *a* в любом наборе значение переменных не изменяет значение функции, поэтому переменная *a* для этой функции является фиктивной.

3) f(0, 0, 0) = 1, f(1, 0, 0) = 0.

Изменение значения переменной *a* в наборе (0, 0, 0) приводит к изменению значения функции, поэтому переменная *a* для этой функции является существенной.

4) f(0, 0, 0) = 1, f(1, 0, 0) = 0.

Изменение значения переменной *a* в наборе (0, 0, 0) приводит к изменению значения функции, поэтому переменная *a* для этой функции является существенной.

5) f(0, 0, 0) = 0, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 1, f(0, 1, 1) = 1,

f(1, 0, 0) = 0, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 1, f(1, 1, 1) = 1.

Изменение значения переменной *a* в любом наборе значение переменных не изменяет значение функции, поэтому переменная *a* для этой функции является фиктивной.

Итак, переменная *a* является фиктивной в переключательных функциях 1, 2, 5.■

Найдем все булевы функции одной переменной y=f(x). Перенумеруем эти функции (их 4) естественным образом и представим в виде таблицы:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Видно, что $f_0(x) = 0$, а $f_3(x) = 1$, т.е. эти две функции не зависят от x, $f_1(x)=x$, т.е. она не меняет аргумента. Функция $f_2(x)$ принимает значения, противоположные значениям аргумента, обозначается $f_2(x)=\overline{x}$.

Найдем все булевы функции двух переменных z = $f(x,y)$.

Число этих функций равно $2^4 = 16$. Перенумеруем и расположим их тоже в естественном порядке в таблице:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рассмотрим более подробно эти функции. Две из них $f_0 = 0$ и $f_{15} = 1$ являются константами.

$$f_3 = x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, f_{12} = \overline{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, f_5 = y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, f_{10} = \overline{y} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f_1(x,y) = x \wedge y = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} f_7(x,y) = x \vee y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} f_{11}(x,y) = y \to x =$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \; f_{13}(x,y) = x \to y = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad f_2(x,y) = \overline{x \to y} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad f_4(x,y) =$$

$$\overline{y \to x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$f_6(x,y) = x \oplus y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f_9(x,y) = \overline{x \oplus y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_8(x,y) =$

$x \downarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$– стрелка Пирса; $f_{14}(x,y) = x|y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – штрих Шеффера.

Можно показать, что всякую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы алгебры логики следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(1, \ldots, 1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \vee F(1, \ldots, 1, 0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \wedge \overline{x_n} \vee \vee F(1, \ldots, 1, 0, 0) \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-2} \wedge \overline{x_{n-1}} \wedge \overline{x_n} \vee \ldots \vee F(0, 0, \ldots, 0) \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \ldots \wedge \overline{x_n} \quad (1)$$

или в виде формулы:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F(1, \ldots, 1) \vee \overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_n}) \wedge (F(1, \ldots, 1, 0) \vee \overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_{n-1}} \vee x_n) \wedge \wedge (F(1, \ldots, 1, 0, 0) \vee \overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_{n-2}} \vee x_{n-1} \vee x_n) \wedge \ldots \wedge (F(0, \ldots, 0) \vee x_1 \vee \ldots \vee x_n) \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно привести при помощи равносильных преобразований в алгебре высказываний к некоторому специальному виду – *совершенной нормальной форме*.

Определение 4.2. *Элементарной конъюнкцией n* переменных называется конъюнкция переменных и их отрицаний.

Примеры элементарных конъюнкций: $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{x} \wedge z$, $x \wedge y \wedge \bar{z}$, $y \wedge \bar{y} \wedge \bar{x}$.

Элементарной дизъюнкцией n переменных называется дизъюнкция переменных и их отрицаний.

Примеры элементарных дизъюнкций: $y \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee x$, $x \vee y \vee \bar{x}$, $x \vee z \vee x$.

Определение 4.3. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ДНФ и КНФ, причем не единственную.

Определение 4.4. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) формулы *A* называется ДНФ *A*, обладающая следующими свойствами:

1. Все элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ *A*, различны.
2. Все элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ *A*, содержат все переменные, участвующие в формуле.
3. Каждая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ *A*, не содержит двух одинаковых выражений.
4. Каждая элементарная конъюнкция не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

СДНФ для формулы единственна с точностью до перестановки дизъюнктивных и конъюнктивных членов.

СДНФ *A* можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

Построение СДНФ с помощью таблицы истинности.

1. Составить таблицу истинности данной логической формулы или булевой функции.
2. Указать в таблице строки, где формула равна 1.
3. Для каждого набора значений переменных, на котором формула имеет значение 1, выписать конъюнкции всех переменных, причем над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания.
4. Все полученные конъюнкции нужно соединить знаками дизъюнкции.

Пример 4.2. Булеву функцию трех переменных

$F(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3) = (x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \rightarrow (x_1 \vee x_3) \wedge x_2$ представить логической формулой – в виде СДНФ.

$x_1\ x_2\ x_3$	$\overline{x_2}$	$x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_3) \wedge x_2$	$F(x_1,x_2,x_3)$	
0 0 0	1	0	0	0	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$
0 0 1	1	0	1	0	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$
0 1 0	0	1	0	0	0	
0 1 1	0	1	1	1	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$
1 0 0	1	1	1	0	0	
1 0 1	1	1	1	0	0	
1 1 0	0	0	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$
1 1 1	0	0	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Искомая СДНФ логической функции

$F(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$

Правило получения СДНФ формулы A с помощью равносильных преобразований.

1. Для формулы A получить любую ДНФ (пусть$A \equiv B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_к$).
2. Если B есть элементарная конъюнкция, не содержащая переменнуюx_i, то нужно заменить B равносильной формулой $B \wedge (x_i \vee \overline{x_i}) \equiv B \wedge x_i \vee B \wedge \overline{x_i}$
3. Если в ДНФ есть два одинаковых выражения $B \vee B$, то одно можно отбросить, так как $B \vee B \equiv B$.
4. Если в некоторую элементарную конъюнкцию B переменная x_i входит дважды, то лишнюю переменную надо отбросить, так как $x_i \wedge x_i = x_i$.
5. Если B содержит конъюнкцию $x_i \wedge \overline{x_i}$, то это слагаемое можно отбросить, так как $x_i \wedge \overline{x_i} \equiv 0$, и, следовательно, $B \equiv 0$, а ложное высказывание из дизъюнкции можно отбросить в силу равносильности $C \vee 0 \equiv C$.

Пример 4.3. Для формулы $A \equiv x \vee y \wedge (x \vee \overline{y})$ построить СДНФ.

Решение. ДНФ $A \equiv x \vee y \wedge x \vee y \wedge \overline{y}$

$x \vee y \wedge x \vee y \wedge \overline{y} \equiv x \vee y \wedge x \vee 0 \equiv x \equiv x \wedge (y \vee \overline{y}) \equiv x \wedge y \vee x \wedge \overline{y}$

СДНФ $A \equiv x \wedge y \vee x \wedge \overline{y}$.

Определение 4.5. КНФ A называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* формулы A (СКНФ), если для нее выполнены условия:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, различны.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, содержат все переменные, участвующие в формуле.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит двух одинаковых выражений.
4. Каждая элементарная дизъюнкция не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

Можно доказать, что каждая не тождественно истинная формула имеет единственную СКНФ.

СКНФ A можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности (используя закон двойственности $СКНФ A \equiv \overline{СДНФ\overline{A}}$);

б) с помощью равносильных преобразований.

Построение СКНФ с помощью таблицы истинности.

1. Составить таблицу истинности данной логической формулы или булевой функции.
2. Указать в таблице строки, где формула равна 0.
3. Для каждого набора значений переменных, на котором формула имеет значение 0, выписать дизъюнкции всех переменных, причем отрицание ставится над теми переменными, которые на этом наборе имеют значение 1.
4. Все полученные дизъюнкции нужно соединить знаками конъюнкции.

Пример 4.4. Булеву функцию трех переменных

$F(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = (x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \to (x_1 \vee x_3) \wedge x_2$ представить логической формулой – в виде СКНФ.

x_1 x_2 x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_3) \wedge x_2$	$F(x_1, x_2, x_3$	
0 0 0	1	0	0	0	1	
0 0 1	1	0	1	0	1	
0 1 0	0	1	0	0	0	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
0 1 1	0	1	1	1	1	
1 0 0	1	1	1	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
1 0 1	1	1	1	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
1 1 0	0	0	1	1	1	
1 1 1	0	0	1	1	1	

Искомая СКНФ логической функции:

$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

Правило получения СКНФ формулы *А* с помощью равносильных преобразований.

1. Для формулы *А* получить любую КНФ (пусть $A \equiv B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_к$).
2. Если *В* есть элементарная дизъюнкция, не содержащая переменную x_i, то нужно заменить *В* равносильной формулой $B \vee x_i \wedge \overline{x_i} \equiv (B \vee x_i) \wedge (B \vee \overline{x_i})$.
3. Если в КНФ есть два одинаковых выражения *В*∧*В*, то одно можно отбросить, так как *В*∧*В*≡*В*.
4. Если в некоторую элементарную дизъюнкцию *В* переменная x_i входит дважды, то лишнюю переменную надо отбросить, так как $x_i \vee x_i \equiv x_i$.
5. Если *В* содержит дизъюнкцию $x_i \vee \overline{x_i}$, то это слагаемое можно отбросить, так как $x_i \vee \overline{x_i} \equiv 1$, и, следовательно, *В*≡1, а истинное высказывание из конъюнкции можно отбросить в силу равносильности *С*∧1≡*С*.

Пример 4.5. Для формулы $A \equiv x \vee \mathrm{y} \wedge (x \vee \overline{y})$ построить СКНФ.

Решение. КНФ $A \equiv (\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{x} \vee \mathrm{x} \vee \overline{\mathrm{y}})$, СКНФ $A \equiv (x \vee \mathrm{y}) \wedge (x \vee \overline{y})$.

Определение 4.6. *Полиномом (многочленом) Жегалкина* от n переменных называется функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv a_0 x_1 x_2 \dots x_n \oplus a_1 x_1 x_2 \dots x_{n-1} \oplus \dots \oplus a_{m-1} x_n \oplus a_m$$

Всего здесь 2^n слагаемых. Напомним, что $\oplus$ означает сложение по модулю 2, коэффициенты a_i являются константами (равными нулю или единице).

Теорема. Любая функция n переменных может быть представлена полиномом Жегалкина и это представление единственно.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *линейной*, если ее полином Жегалкина содержит только первые степени слагаемых. Более точно функция называется линейной, если ее можно представить в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$$

Построение полинома Жегалкина с помощью таблицы истинности.

1. Составить таблицу истинности данной логической формулы или булевой функции.
2. Указать в таблице строки, где формула равна 1.
3. Для каждого набора значений переменных, на котором формула имеет значение 1, выписать конъюнкции всех переменных, причем над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания.
4. Все полученные конъюнкции нужно соединить знаками $\oplus$ суммы по модулю 2.
5. Все отрицания заменяем равносильной формулой $\bar{x} \equiv x \oplus 1$, раскрываем скобки и упрощаем, используя формулу: $x \oplus x \equiv 0$.

Пример 4.6. Представим в виде полинома Жегалкина дизъюнкцию $f(x_1, x_2) \equiv x_1 \vee x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	
0	0	0	
0	1	1	$\overline{x_1} \wedge x_2$
1	0	1	$x_1 \wedge \overline{x_2}$
1	1	1	$x_1 \wedge x_2$

$$f(x_1, x_2) \equiv x_1 \vee x_2 \equiv \overline{x_1} \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge \overline{x_2} \oplus x_1 \wedge x_2$$
$$\equiv (x_1 \oplus 1) \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge (x_2 \oplus 1) \oplus x_1 \wedge x_2$$
$$\equiv x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$$

4.2. Минимизация булевых функций

При проектировании цифровых автоматов широко используются методы минимизации булевых функций, позволяющие получать рекомендации для построения экономичных схем цифровых автоматов. Общая задача минимизации булевых функций может быть сформулирована следующим образом: найти аналитическое выражение заданной булевой функции в форме, содержащей минимально возможное число букв. Следует отметить, что в общей постановке данная задача пока не решена, однако достаточно хорошо исследована в классе дизъюнктивно-конъюнктивных нормальных форм.

Определение 4.7. *Минимальной дизъюнктивной* нормальной формой булевой функции называется ДНФ, содержащая наименьшее число букв (по отношению ко всем другим ДНФ, представляющим заданную булеву функцию).

Определение 4.8. Булева функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется *импликантой* булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если для любого набора переменных, на котором $g = 1$, справедливо $f = 1$.

Пример 4.7. Булева функция f задана табл.1. Там же приведены все ее импликанты. При записи функции f и ее импликант в СДНФ имеем:

$f = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = g_7$

$g_1 = x_1 x_2 x_3$

$g_2 = x_1 x_2 \overline{x_3}$

$g_3 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 = x_1 x_2 (x_3 \vee \overline{x}_3) = x_1 x_2$

$g_4 = \overline{x}_1 x_2 x_3$

$g_5 = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3$

$g_6 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3$

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1

Определение 4.9. *Импликанта* g булевой функции f, являющаяся элементарной конъюнкцией, называется *простой*, если никакая часть импликанты g не является импликантой функции f.

Из примера видно, что импликанты $g_3 = x_1 x_2$ и $g_5 = x_2 x_3$, являются простыми импликантами функции f. Импликанты g_1, g_2, g_4, g_5 не являются простыми, так как их части являются импликантами функции f, например g_5 является частью g_1. Приведем без доказательства два утверждения, полезные при получении минимальной ДНФ.

1. Дизъюнкция любого числа импликант булевой функции f также является импликантой этой функции.

2. Любая булева функция f эквивалентна дизъюнкции всех своих простых импликант. Такая форма представления булевой функции называется *сокращенной ДНФ*.

Перебор всех возможных импликант для булевой функции f из рассмотренного примера дает возможность убедиться, что простых импликант всего две: g_3 и g_5. Следовательно, сокращенная ДНФ функции f имеет вид:

$$f = g_3 \vee g_5 = x_1 x_2 \vee x_2 x_3.$$

Как видно из табл. 1, импликанты g_3, g_5 в совокупности покрывают своими единицами все единицы функции f. Получение сокращенных ДНФ является первым этапом отыскания минимальных форм булевых функций. Как уже отмечалось, в сокращенную ДНФ входят все простые импликанты булевой функции. Иногда из сокращенной ДНФ можно убрать одну или несколько простых импликант, не нарушая эквивалентности исходной функции. Такие простые импликанты назовем лишними. Исключение лишних простых импликант из сокращенных ДНФ – второй этап минимизации.

Определение 4.10. *Сокращенная ДНФ* булевой функции называется *тупиковой,* если в ней отсутствуют лишние простые импликанты.

Устранение лишних простых импликант из сокращенной ДНФ булевой функции не является однозначным процессом, т. е. булева функция может иметь несколько тупиковых ДНФ.

Утверждение. *Тупиковые* ДНФ булевой функции *f*, содержащие минимальное число букв, являются *минимальными*. Минимальных ДНФ тоже может быть несколько.

Существует несколько методов минимизации. Все они практически различаются лишь на первом этапе – этапе получения сокращенной ДНФ. Следует отметить, что, поиск минимальной ДНФ всегда связан с некоторым перебором решений. Существуют методы уменьшения этого перебора, однако он всегда остается.

Общая схема минимизации для всех методов минимизации включает следующие этапы:

1. Построение их исходных функций сокращенной ДНФ.
2. Нахождение тупиковых ДНФ из сокращенных ДНФ.
3. Нахождение среди тупиковых ДНФ минимальных ДНФ.

Метод Блейка-Порецкого позволяет получать сокращенную ДНФ булевой функции f из ее произвольной ДНФ. Базируется на применении формулы обобщенного склеивания: $Ax \vee B\bar{x} = Ax \vee B\bar{x} \vee AB$, справедливость которой легко доказать (используя закон поглощения)

$$Ax \vee B\bar{x} = Ax \vee ABx \vee B\bar{x} \vee AB\bar{x} = Ax \vee B\bar{x} \vee AB.$$

В основу метода положено следующее утверждение: если в произвольной ДНФ булевой функции f произвести все возможные обобщенные склеивания, а затем выполнить все поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ функции *f*.

Пример 4.8. Булева функция *f* задана произвольной ДНФ.

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2.$$

Найти методом Блейка-Порецкого сокращенную ДНФ функции *f*. Проводим обобщенные склеивания. Легко видеть, что первый и второй элемент заданной ДНФ допускают обобщенное склеивание по переменной x_1.

В результате склеивания имеем:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Первый и третий элемент исходной ДНФ допускают обобщенное склеивание как. по переменной x_1так и по x_2. После склеивания по x_1 имеем:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2.$$

После склеивания по x_2 имеем: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$.

Второй и третий элемент ДНФ допускают обобщенное склеивание по переменной x_2. После склеивания получаем:

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3.$$

Выполнив последнее обобщенное склеивание, приходим к ДНФ:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3.$$

После выполнения поглощений получаем

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3.$$

Попытки дальнейшего применения операции обобщенного склеивания и поглощения не дают результата. Следовательно, получена сокращенная ДНФ функции *f*.

Метод Нельсона позволяет получать сокращенную ДНФ булевой функции *f* из ее произвольной конъюнктивной нормальной формы. Суть метода заключается в использовании следующего утверждения: если в произвольной КНФ булевой функции *f* раскрыть скобки и произвести все поглощения, то в результате будет получена сокращенная ДНФ булевой функции *f*.

Пример 4.9. Булева функция *f* задана КНФ.

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Найти методом Нельсона сокращенную ДНФ функции *f*. После раскрытия скобок получаем:

$$f = (x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = x_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

После проведения всех поглощений имеем $f = x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$. Получена сокращенная ДНФ функции *f*.

Пример 4.10. Пусть имеется булева функция СДНФ которой имеет вид:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4$$

Заметим, что результатом склеивания является всегда элементарное произведение, представляющее собой общую часть склеиваемых конституент.

Для удобства изложения пометим каждую конституенту единицы из СДНФ функции *f* каким-либо десятичным номером (произвольно). Выполняем склеивания. Конституента 1 склеивается только с конституентой 2 (по переменной x_3) и с конституентой 3 (по переменной x_2), конституента 2 с конституентой 4 и т. д.

В результате получаем: 1 – 2: $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_4$

1 – 3: $\bar{x}_1\bar{x}_3 x_4$

2 – 4: $\bar{x}_1 x_3 x_4$

3 – 4: $\bar{x}_1 x_2 x_4$

4 – 6: $x_2 x_3 x_4$

5 – 6: $x_1 x_2 x_3$

Далее производим склеивания получаемых элементарных произведений. Склеиваются только те произведения, которые содержат одинаковые переменные. Имеет место два случая склеивания:

$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$ **;**

$\bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_4$ **,** с появлением одного и того же элементарного произведения $\bar{x}_1 x_4$ дальнейшие склеивания невозможны. Произведя поглощения (из полученной ДНФ вычеркиваем все поглощаемые элементарные произведения), получим сокращенную ДНФ:

$x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_4$ **.**

Метод Квайна получения из сокращенных минимальных ДНФ с помощью *импликантной таблицы*. Строки такой матрицы отмечаются простыми импликантами булевой функции, т. е. членами сокращенной ДНФ, а столбцы – конституентами единицы, т. е. членами СДНФ булевой функции.

Пример 4.10. (продолжение).

Импликантная матрица имеет вид (табл. 2).

Как уже отмечалось, простая импликанта поглощает некоторую конституенту единицы, если является ее собственной частью. Соответствующая клетка импликантной матрицы на пересечении строки (с рассматриваемой простой импликантой) и столбца (с конституентой единицы) отмечается крестиком (табл. 2). Минимальные ДНФ строятся по импликантной матрице следующим образом:

1) ищутся столбцы импликантной матрицы, имеющие только один крестик. Соответствующие этим крестикам простые импликанты называются

базисными и составляют так называемое ядро булевой функции. Ядро обязательно входит в минимальную ДНФ.

2) рассматриваются различные варианты выбора совокупности простых импликант, которые накроют крестиками остальные столбцы импликантной матрицы, и выбираются варианты с минимальным суммарным числом букв в такой совокупности импликант.

Таблица 2.

Простые Импликанты	Конституенты единицы					
		$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_4$	x	x	x	x		
$x_2x_3x_4$				x		x
$x_1x_2x_3$					x	x

Пример 4.10. (продолжение). Ядром заданной функции являются импликанты $x_1x_2x_3$; $\bar{x}_1x_4$.Импликанта $x_2x_3x_4$ – лишняя, так как ядро накрывает все столбцы импликантной матрицы. Поэтому функция имеет единственную тупиковую и минимальную ДНФ: $f = \bar{x}_1x_4 \vee x_1x_2x_3$.

Следует отметить, что число N крестиков в одной строке всегда является степенью 2. Более того, можно убедиться в том, что $N = 2^{n-k}$, где k – число букв, содержащихся в простой импликанте, n – число переменных, от которых зависит функция.

4.3. Проблема разрешимости

Все формулы алгебры высказываний делятся на три класса: тождественно истинные, тождественно ложные, выполнимые.

Проблема разрешимости может быть сформулирована следующим образом: существует ли способ, который позволял бы для каждой формулы алгебры высказываний за конечное число шагов ответить на вопрос, к какому классу эта формула принадлежит?

Очевидно, проблема разрешимости алгебры высказываний разрешима. Действительно, для каждой логической формулы может быть записана таблица истинности, которая и даст ответ на поставленный вопрос. Однако практическое использование таблицы истинности для формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при больших n затруднительно.

Существует другой способ проверки к какому классу принадлежит данная формула, этот способ основан на приведении формулы к ДНФ и КНФ.

Критерий разрешимости. Для того, чтобы формула алгебры высказываний A была тождественна истинна (тождественно ложна), необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция (конъюнкция), входящая в КНФ (ДНФ) формулы A, содержала переменную и ее отрицание.

Пример 4.11. Будет ли формула $A \equiv (x \to y) \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y}$ тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой?

Решение. Приведем формулу A к ДНФ.

$(x \to y) \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee y \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv \overline{\bar{x} \vee y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y}$.

Полученная ДНФ не является тождественно ложной, так как каждая элементарная конъюнкция не содержит переменную и ее отрицание. Следовательно, исходная формула тождественно истинна или выполнима.

Преобразуем данную формулу к КНФ: $(x \to y) \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv$

$\equiv x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv (x \wedge \bar{y} \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \wedge y \equiv \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \equiv (\bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{y} \vee y) \equiv \bar{y} \vee \bar{x}$.

Полученная КНФ не является тождественно истинной, так как элементарная дизъюнкция не содержит переменную и ее отрицание.

Следовательно, данная формула A выполнима.

Задачи

1. Для следующих формул найдите СДНФ и СКНФ, каждую двумя способами (путем равносильных преобразований и, используя таблицы истинности):

1) $x \wedge (x \to y)$; 2) $(\overline{x \wedge y} \to \overline{x}) \wedge \overline{x \wedge y \to \overline{y}}$;

3) $(x \to y) \to (y \to x)$; 4) $(x \vee \overline{z}) \to y \wedge z$;

5) $(\overline{a} \to c) \to \overline{\overline{b} \to \overline{a}}$; 6) $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to \overline{x \to \overline{x}} \vee y \wedge \overline{z}$;

7) $(\overline{a} \to \overline{b}) \to (b \wedge c \to a \wedge c)$; 8) $(a \wedge b \to b \wedge c) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;

9) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_{n-1} \to x_n)\ldots))$;

10) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

2. Найдите СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей одну, две или три переменных.

3. Найдите СКНФ для всякой тождественно ложной формулы, содержащей одну, две или три переменных.

4. Докажите равносильность формул $\overline{x \wedge \overline{y}} \to (\overline{y} \to x)$ и $\overline{x \to y} \vee x \vee y$ сравнением их совершенных нормальных форм (конъюнктивных или дизъюнктивных).

5. По таблицам истинности найдите формулы, определяющие функции $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$, $F_3(x,y,z)$, $F_4(x,y,z)$, и придайте им более простой вид:

x	y	z	$F_1(x,y,z)$	$F_2(x,y,z)$	$F_3(x,y,z)$	$F_4(x,y,z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1

6. Запишите формулами все функции алгебры логики одной и двух переменных (составить их таблицы истинности и записать аналитические выражения этих функций).

7. Найдите более простой вид формул, имеющих следующие совершенные нормальные формы: 1) $x \wedge y \vee x\overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$;

2) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge z$;

3) $(x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$; 4) $(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

8. Используя критерий тождественной истинности и тождественной ложности формулы, установите, будет ли данная формула тождественно истиной, тождественно ложной или выполнимой:

1) $\overline{x \wedge \overline{y}} \leftrightarrow \overline{x} \vee x \wedge y$; 2) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y)$;

3) $x \wedge y \to (x \to \overline{y})$; 4) $x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$;

5) $x \vee y \to z$; 6) $(x \to z) \wedge (y \to z) \wedge (x \to y)$.

4.4. Релейно-контактные схемы (РКС)

Релейно-контактные схемы (их часто называют переключательными схемами) широко используются в технике автоматного управления.

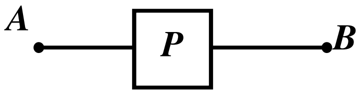
Определение 4.11. Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящее из следующих элементов:

1) *переключателей*, которыми могут быть механические устройства, электромагнитные реле, полупроводники и т.д.;

2) соединяющие их *проводники*;

3) *входы* в схему и *выходы* из нее (клеммы, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами.

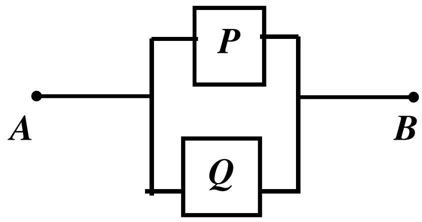
Простейшая схема содержит один переключатель P и имеет один вход A и один выход B. Переключателю P поставим в соответствие высказывание p: «Переключатель P замкнут». Если p истинно, то импульс, поступающий на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения, т. е. схема пропускает ток. Если p ложно, то переключатель разомкнут, и схема тока не проводит. Таким образом, если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема с двумя полюсами (двухполюсная схема).



Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Так, конъюнкции двух высказываний $p\wedge q$ ставится в соответствие схема:

а дизъюнкции $p\vee q$ схема:

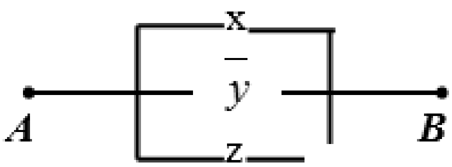


Так как любая формула алгебры логики может быть записана в виде ДНФ или КНФ, то ясно, что каждой формуле алгебры логики можно поставить в соответствие некоторую РКС, а каждой РКС можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики. Поэтому возможности схемы можно выявить, изучая соответствующую ей формулу, а упрощение схемы можно свести к упрощению формулы.

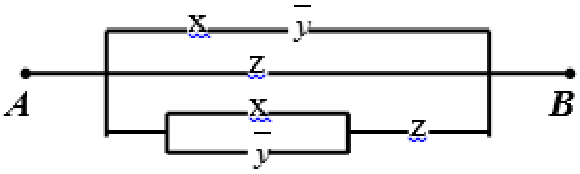
Пример 4.12. Составить РКС для формулы $(\bar{x}\wedge y)\to(z\vee x)$.

Решение. Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований: $(\bar{x}\wedge y)\to(z\vee x)\equiv\overline{\bar{x}\wedge y}\vee z\vee x\equiv x\vee\bar{y}\vee z\vee x\equiv x\vee\bar{y}\vee z$.

Тогда РКС для данной формулы имеет вид:

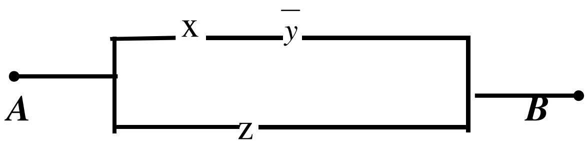


Пример 4.13. Упростить РКС



Решение. Составим по данной РКС формулу (функцию проводимости) и упростим ее: $(x \wedge \bar{y}) \vee z \vee (x \vee \overline{y}) \wedge z \equiv x \wedge \overline{y} \vee z$.
(к последним двум слагаемым применили закон поглощения).

Тогда упрощенная схема выглядит так:



Пример 4.14. (пример построения РКС по заданным условиям с оценкой числа контактов)

Построить контактную схему для оценки результатов некоторого спортивного соревнования тремя судьями при следующих условиях: судья, засчитывающий результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, должна загореться лампочка положительное решение судей принято простым большинством голосов).

Решение. Ясно, что работа нужной РКС описывается булевой функцией трех переменных $F(x,y,z)$, где переменные высказывания x, y, z означают: x – судья x голосует «за»; y – судья y голосует «за»; z – судья z голосует «за».

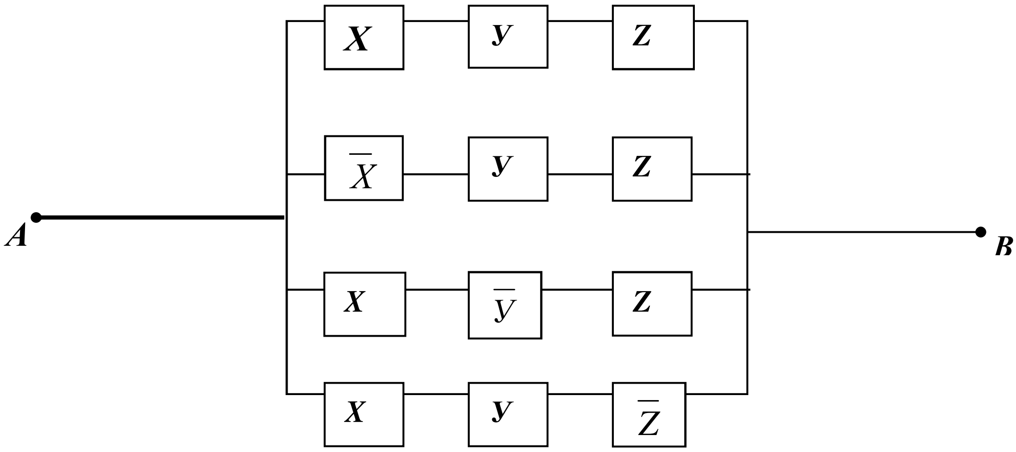
Таблица истинности функции $F(x,y,z)$, очевидно, имеет вид:

x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

СКНФ формулы (функции) $F(x,y,z)$ запишется в виде:

$F(x, y, z) \equiv x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z.$

Этой формуле соответствует РКС с двенадцатью переключателями:



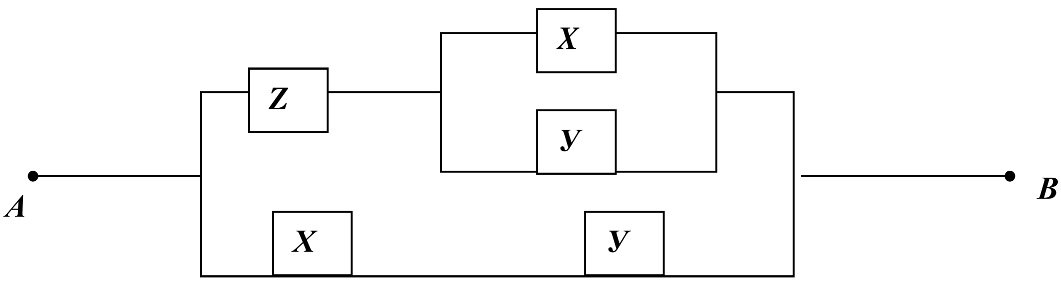
Упростим формулу $F(x, y, z) \equiv x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \equiv$

$\equiv (x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z) \equiv$

$\equiv x \wedge y \wedge (z \vee \bar{z}) \vee x \wedge z \wedge (y \vee \bar{y}) \vee y \wedge z \wedge (x \vee \bar{x}) \equiv x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z \equiv$

$\equiv x \wedge y \vee z \wedge (x \vee y).$

Полученной формуле соответствует схема, содержащая пять переключателей.



Задачи

1. Составьте РКС для формул:

1) $x \to y$;

2) $x \leftrightarrow y$;

3) $x \wedge (\bar{y} \wedge z \vee x \vee y)$;

4) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x \wedge y \wedge z} \vee \bar{x} \wedge y$;

5) $x \wedge (y \wedge z \vee \overline{y \wedge z}) \vee \bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge z \vee y \wedge \bar{z})$;

6) $(\bar{x} \vee y) \wedge (z \wedge y \vee x) \vee u$;

7) $(x \to y) \wedge (y \to z)$;

8) $(x \to y) \to (\bar{x} \wedge (y \vee z))$;

9) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;

10) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

2. Построить РКС для *F* (*x, y, z*), если известно, что:

1) *F* (0,1,0) = F (1,0,1) = *F* (1,1,1) = 1;

2) *F* (1,0,1) = *F* (1,1,0) = 1;

3) *F* (0,0,1) = *F* (0,1,1) = *F* (1,0,1) = *F* (1,1,1) = 1;

4) *F* (1,1,0) = *F* (1,1,1) = 1;

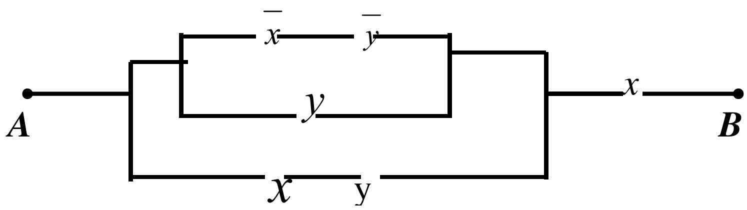
5) *F* (0,0,1) = *F* (1,0,1) = *F* (1,0,0) = 1;

6) *F* (0,0,1) = *F* (0,1,0) = *F* (0,1,1) = *F* (1,0,1) = 1,

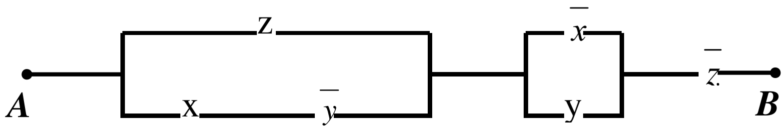
а остальные значения функции *F* равны нулю.

3. Упростить РКС:

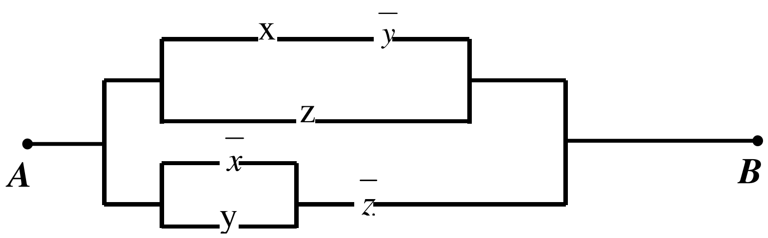
1)



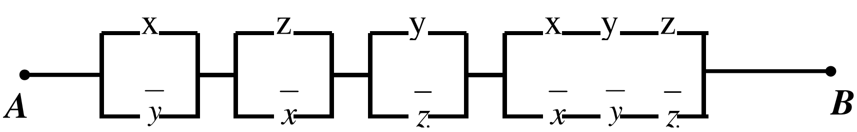
2)



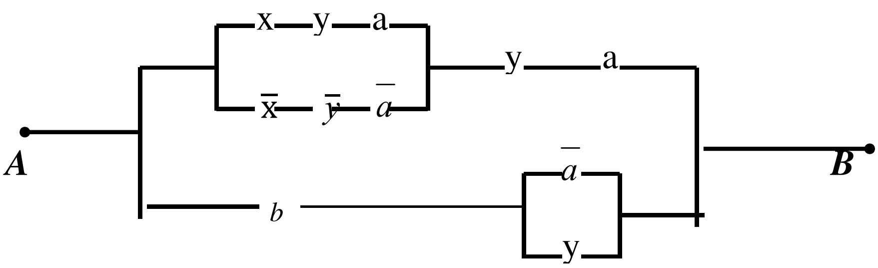
3)



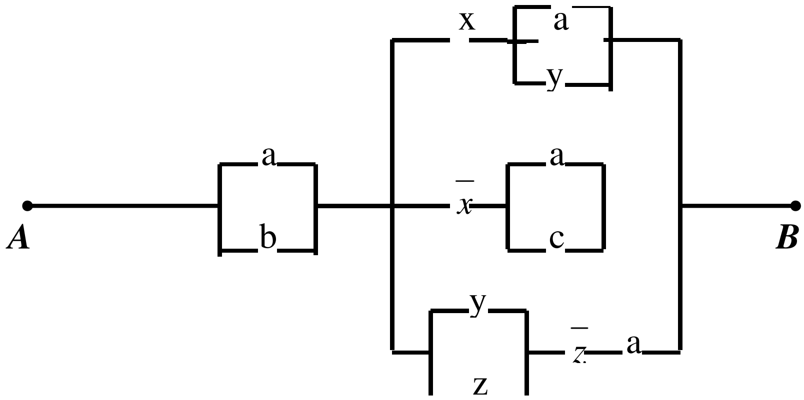
4)



5)

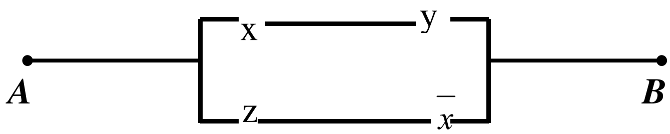


6)

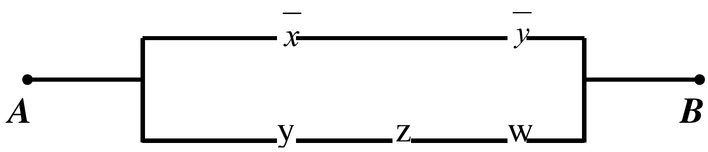


4. По данной схеме найдите функцию проводимости (СДНФ) и условия работы:

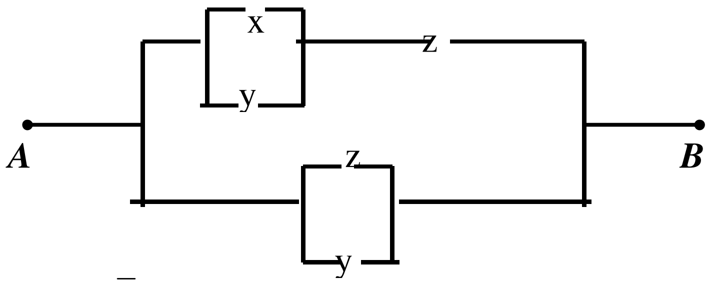
1)



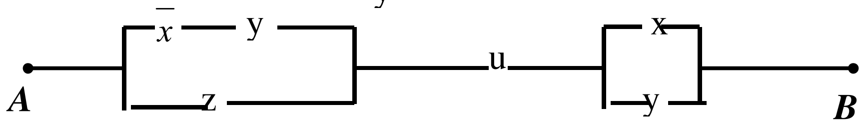
2)



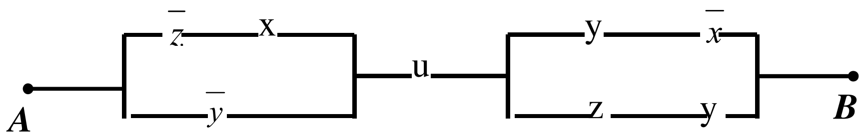
3)



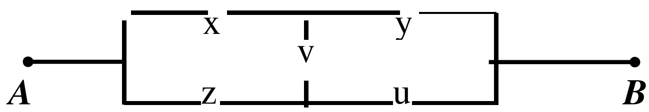
4)



5)

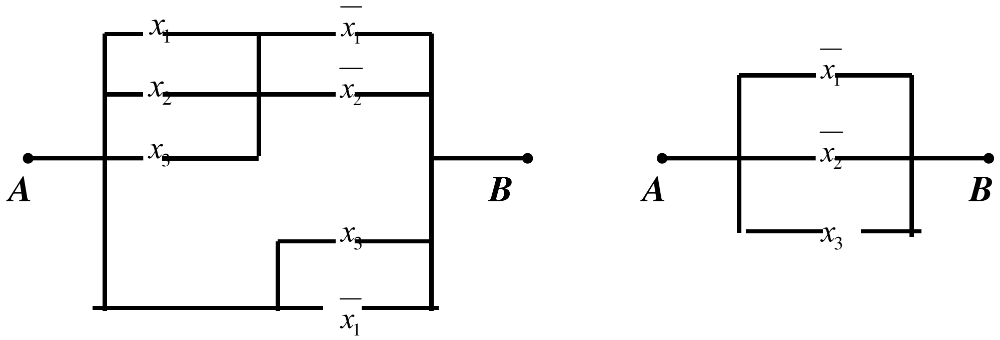


6)

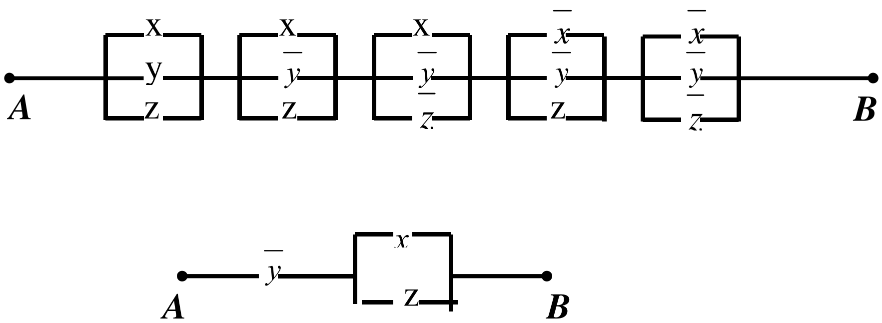


5. Проверьте равносильность схем:

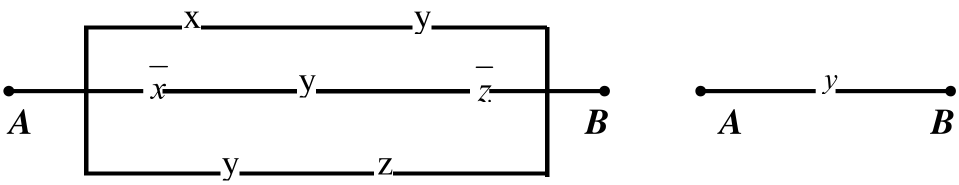
1)



2)



3)



4.5. Суперпозиция функций. Замыкание набора функций. Замкнутые классы функций. Полные наборы. Базисы

Пусть имеется некоторый набор K, состоящий из конечного числа булевых функций. *Суперпозицией* функций из этого набора называется новая функция, полученная с помощью конечного числа применения двух операций: можно переименовать любую переменную, входящую в функцию из K; вместо любой переменной можно поставить функцию из набора K или уже образованную ранее суперпозицию.

Суперпозицию еще иначе называют сложной функцией.

Пример 4.15. Если дана одна функция $x|y$ (штрих Шеффера), то ее суперпозициями, в частности, будут следующие функции $x|x$, $x|(x|y)$, $x|(y|z)$.

Определение 4.12. Класс булевых функций $\Psi = \{f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ называется (***функционально***) ***полным***, если любая функция из P_2 может быть представлена в виде формулы над Ψ, т.е. любая функция получается из функций класса Ψ применением конечного числа операции суперпозиций.

Примеры полных классов: а) $\Psi = P_2$; б) $\Psi = \{\bar{x},\ x_1\&x_2,\ x_1 \vee x_2\}$ (любая булева функция выражается формулой в виде конъюнкции, дизъюнкции и инверсии); в) $\Psi = \{0,\ 1,\ x_1\&x_2,\ x_1 \oplus x_2\}$ −любую булеву функцию можно представить в виде полинома Жегалкина.

Определение 4.13. Пусть $K -$ некоторый класс булевых функций. ***Замыканием*** K называется множество всех булевых функций, получающихся в виде формул (как суперпозиция) над K (обозначается $[K]$).

Класс функций K называется *замкнутым*, если его замыкание совпадает с ним самим.

Свойства замыкания:

1. $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow [K_1] \subseteq [K_2]$.

2. $K \subseteq [K]$.

3. $[[K]] = [K]$.

Класс K называется:

– ***замкнутым***, если $[K] = K$;

– ***полным***, если $[K] = P_2$ (см. определение выше);

– ***предполным***, если K не полный, но для любой функции $f \notin K$ класс $K_1 = K \cup \{f\} -$ полный.

Определение 4.14. Неизбыточный полный набор функций называется *базисом* («неизбыточный» означает, что если какую-то функцию удалить из набора, то этот набор перестанет быть полным).

Пример 4.16. Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание являются полным набором, но не являются базисом, так как это набор избыточен, поскольку с помощью правил де Моргана можно удалить конъюнкцию или дизъюнкцию.

Любую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина. Ясно, что функции конъюнкция, сложение по модулю 2 и константы 0 и 1 являются полным набором, но эти четыре функции также не являются базисом, поскольку 1+1=0, и поэтому константу 0 можно исключить из полного набора (для построения полиномов Жегалкина константа 0 необходима, поскольку выражение “1+1” не является полиномом Жегалкина).

Легко видеть, что одним из способов проверки полноты какого-то набора *K* является проверка того, что через функции из этого набора выражаются функции другого полного набора (можно проверить, что через функции из *K* можно выразить конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание).

Существуют такие функции, что одна такая функция сама является базисом (здесь достаточно проверить только полноту, неизбыточность очевидна). Такие функции называются шефферовскими функциями. Это название связано с тем, что штрих Шеффера является базисом. Напомним, что штрих Шеффера определяется следующей таблицей истинности:

$\mathrm{x}|y = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \overline{x \wedge y}$ («не и»), так как $x|x = \bar{x}$, т.е. отрицание является суперпозицией штриха Шеффера, а дизъюнкция $x \vee y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y)$, штрих

Шеффера сам является базисом. Аналогично, стрелка Пирса является шефферовской функцией. Для функций 3-х или более переменных шефферовских функций очень много (конечно, выражение других булевых функций через шефферовскую функцию большого числа переменных сложно, поэтому в технике они редко используются).

Заметим, что вычислительное устройство чаще всего базируется на полном наборе функций (часто на базисах). Если в основе устройства лежат конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, то для этих устройств важна проблема минимизации ДНФ; если в основе устройства лежат другие функции, то полезно уметь алгоритмически минимизировать выражения через эти функции.

Перейдем теперь к выяснению полноты конкретных наборов функций. Для этого перечислим 5 важнейших классов функций (классов Поста):

- $T_0 = \{f \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}$ – это набор всех тех логических функций, которые на нулевом наборе принимают значение 0 (T_0 – это класс функций, *сохраняющих 0*).
- $T_1 = \{f \mid f(1, \ldots, 1) = 1\}$ – это набор всех логических функций, которые на единичном наборе принимают значение 1 (T_1 – это класс функций, *сохраняющих единицу*) (заметим, что число функций от *n* переменных, принадлежащих классам T_0 и T_1 равно 2^{2n-1}).
- L – класс *линейных* функций, т.е. функций, для которых полином Жегалкина содержит только первые степени переменных (число линейных функций *n* переменных равно 2^{n+1}).

Замечание. *Если* $n \geq 2$, *то линейная функция* в *таблице истинности может содержать только четное число единиц*. Действительно, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, то легко видеть, что такая функция в таблице истинности содержит одинаковое число нулей и единиц, а именно $2^n/2$ единиц и нулей. Добавление фиктивной переменной приводит к увеличению числа единиц (и нулей) в два раза. Разумеется, нелинейная функция может иметь в таблице истинности как четное, так и нечетное число единиц.

Замечание. Для того чтобы определить, является ли функция $f(\tilde{x}^n)$, заданная своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f$, самодвойственной, следует проверить, получается ли вторая половина вектора $\tilde{\alpha}_f$из первой отражением и последующим инвертированием его координат.

- Класс $S = \{f |\ f = f *\} -$ класс *самодвойственных* функций. Функция n переменных называется самодвойственной, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения, т.е. самодвойственная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$ ***Замечание:*** таблица истинности самодвойственной функции не должна быть симметрична ни для одного набора значений переменных.

- $M = \{f |\ \forall\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta}\colon\ \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})\} -$ класс *монотонных* функций. (функция $f \in M$ называется ***монотонной***);

Опишем класс этих функций более подробно.

Пусть имеются 2 набора из n переменных: s_1= (x_1, x_2,…, x_n) и s_2 = (y_1, y_2,…, y_n). Будем говорить, что набор s_1 меньше набора s_2, если все $x_i \le y_i$. Очевидно, что не все наборы из n переменных сравнимы между собой (например, при n=2 наборы (0,1) и (1,0) не сравнимы между собой).

Функция от n переменных называется *монотонной*, если на меньшем наборе она принимает меньшее или равное значение. Разумеется, эти неравенства должны проверяться только на сравнимых наборах.

Замечание. Для проверки на монотонность функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f$, нужно сначала разделить его две равные части $\tilde{\alpha}_{f0} = (\alpha_0,\ \alpha_1, \dots\ ,\ \alpha_{2^{n-1}-1})$ и $\tilde{\alpha}_{f1} = (\alpha_{2^{n-1}},\ \dots\ ,\ \alpha_{2^n-1})$. Если соотношение $\tilde{\alpha}_{f0} \preceq \tilde{\alpha}_{f1}$ не выполнено, то $f(\tilde{x}^n)$ немонотонная. В противном случае разделим каждый из полученных векторов опять пополам $\tilde{\alpha}_{f0,0}$, $\tilde{\alpha}_{f0,1}$ и $\tilde{\alpha}_{f1,0}$, $\tilde{\alpha}_{f1,1}$. Проверим сначала первую пару на выполнение соотношения $\tilde{\alpha}_{f0,0} \preceq\ \tilde{\alpha}_{f0,1}$, и в случае положительного результата вторую. Если хотя бы для одной пары соотношение не выполняется, то функция немонотонная. В противном случае этот алгоритм продолжаем дальше.

Пример 4.17. В нижеследующей таблице функции f_1, f_2 являются монотонными функциями, а функции f_3, f_4 – нет. Функции f_1 , f_2 являются самодвойственными, а функции f_3, f_4 не являются.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Замечание. Естественный порядок переменных обеспечивает тот факт, что если какой-то набор меньше другого набора, то он обязательно расположен в таблице истинности *выше* “большего” набора. Поэтому если в таблице истинности (при естественном порядке набора переменных) вверху стоят нули, а затем единицы, то эта функция точно является монотонной. Однако возможны инверсии, т.е. единица стоит до каких-то нулей, но функция является все равно монотонной. В этом случае наборы, соответствующие “верхней” единице и “нижнему” нулю должны быть *несравнимы*. Можно проверить, что функция, задаваемая таблицей истинности при естественном порядке набора переменных (00010101), является монотонной.

Теорема. *Классы функций T_0, T_1, L, M, S замкнуты*.

Это утверждение следует непосредственно из определения самих этих классов, а также из определения замкнутости.

Доказательство. а) Рассмотрим функцию $F = f(f_1, \ldots, f_k)$, где $f, f_1, \ldots, f_k \in T_0$. Покажем, что $F \in T_0$. Действительно,

$$F(0,\ldots,0) = f(f_1(0,\ldots,0),\ldots,f_k(0,\ldots,0)) = f(0,\ldots,0) = 0.$$

Следовательно, класс T_0 замкнут.

б) Аналогично предыдущему доказывается замкнутость класса T_1.

в) Пусть $F = f(f_1, \dots, f_k)$, где $f, f_1, \dots, f_k -$ самодвойственные функции. Тогда $F^* = f^*(f_1^*, \dots, f_k^*) = f(f_1, \dots, f_k) = F$, т. е. $F \in S$. Следовательно, класс S замкнут.

г) Пусть $F = f(f_1, \dots, f_k)$, где $f, f_1, \dots, f_k \in M$. Покажем, что $F \in M$. Пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1p_1})$, …, $\tilde{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kp_k})$ Наборы переменных состоят из переменных, встречающихся у функций $F, f_1, \dots, f_k$ соответственно.

Возьмем два набора $\tilde{\alpha}^n$ и $\rightleftharpoons \tilde{\beta}^n$ значений переменных $\tilde{x}$. Они определяют наборы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k$ значений переменных $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$, причем $\tilde{\alpha}_1 \preceq \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k \preceq \tilde{\beta}_k$. Так как $f_1, \dots, f_k \in M$, то

$f_1(\tilde{\alpha}_1) \le f_1(\tilde{\beta}_1), \dots, f_k(\tilde{\alpha}_k) \le f_k(\tilde{\beta}_k)$.

Тогда $(f_1(\tilde{\alpha}_1), \dots, f_k(\tilde{\alpha}_k)) \preceq (f_1(\tilde{\beta}_1), \dots, f_k(\tilde{\beta}_k))$. Функция $f \in M$, поэтому $f(f_1(\tilde{\alpha}_1), \dots, f_k(\tilde{\alpha}_k)) \le f(f_1(\tilde{\beta}_1), \dots, f_k(\tilde{\beta}_k))$. Отсюда

$F(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\tilde{\alpha}_1), \dots, f_k(\tilde{\alpha}_k)) \le f(f_1(\tilde{\beta}_1), \dots, f_k(\tilde{\beta}_k)) = F(\tilde{\beta})$.

Следовательно, класс S замкнут.

д) Класс L замкнут, так как линейное выражение, составленное из линейных выражений, является линейным.

Лемма. Классы Поста $T_0, T_1\ S, M, L$ попарно различны.

Доказательство. Для доказательства леммы приведем функции, лежащие в классах, но так, чтобы классы взаимно не поглощались. Рассмотрим функции $0, 1, \overline{x}$ и построим таблицу принадлежности классам. В таблице будем ставить «+», если функция принадлежит классу, и «–» в противном случае.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$\overline{x}$	–	–	+	–	+

Если бы какие-нибудь два класса совпадали, то совпадали бы и соответствующие столбцы таблицы. Так как они не совпадают, делаем вывод о попарном различии классов.

В теории булевых функций очень большое значение имеет следующая теорема Поста.

Теорема Поста. *Для того, чтобы некоторый набор функций K был полным, необходимо и достаточно, чтобы в него входили функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, M, S.*

Заметим, что необходимость этого утверждения очевидна, так как, если бы все функции из набора K входили в один из перечисленных классов, то и все суперпозиции, а значит, и замыкание набора входило бы в этот класс, и класс K не мог быть полным.

Достаточность этого утверждения доказывается довольно сложно, поэтому здесь не приводится.

Следствие 1. Из всякой полной системы можно выделить полную подсистему, содержащую не более пяти функций.

Это утверждение можно усилить, а именно, имеет место.

Лемма. Из всякой полной системы можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырех функций.

Доказательство. Так как $f_1 \notin T_0$, то либо $f_1 \notin S$ либо $f_1 \notin M$. Тогда полная система будет состоять из функций $\{f_1,\ f_2,\ f_4, f_5\}$ либо $\{f_1,\ f_2,\ f_3 f_5\}$.

Пример 4.18. Определить количество функций классов T_0 и T_1, зависящих от переменных $x_1,\ \dots\ ,\ x_n$.

Решение. Вектор значений функции $f \in T_0$ имеет вид $\tilde{\alpha}_f = (0,\ \alpha_1,\ \dots\ ,\ \alpha_{2^n-1})$, т.е. определено только значение на нулевом

наборе переменных, свободных же $2^n - 1$. Следовательно, $|T_0| = 2^{2^n-1}$. Аналогично вычисляется количество функций класса T_1.

Пример 4.19. Определить количество самодвойственных функций, зависящих от n переменных.

Решение. Функция $f \in S$ принимают противоположные значения на противоположных наборах переменных. Поэтому для ее задания достаточно задать первую половину ее вектора значений $\tilde{\alpha}_f = (\underbrace{\alpha_0,\ \alpha_1, \dots ,\ \alpha_{2^{n-1}-1}}_{2^{n-1}},\ \overline{\alpha_{2^{n-1}-1}},\ \dots ,\ \overline{\alpha_0})$. Следовательно, количество самодвойственных функций, зависящих от n переменных, равно $2^{2^{n-1}}$.

Пример 4.20. Определить количество линейных функций, зависящих от переменных $x_1,\ \dots ,\ x_n$.

Решение. Различных линейных функций от переменных $x_1,\ \dots ,\ x_n$ столько же, сколько различных векторов $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots ,\ \alpha_n)$, т.е. 2^{n+1}.

Из теоремы Поста следует довольно простой способ выяснения полноты некоторого набора функций. Для каждой из этих функций выясняется принадлежность к перечисленным выше классам. Результаты заносятся в так называемую *критериальную таблицу Поста*, где знак “+” означает принадлежность функции соответствующему классу, знак “–” означает, что функция в него не входит.

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	+
f_3	–	+	–	–	–
f_4	+	+	–	+	–

В соответствии с теоремой Поста набор функций будет полным тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста имеется хотя бы один минус. Таким образом, из приведенной таблицы следует, что данные 4 функции образуют полный набор, но эти функции не являются базисом. Из этих функций можно образовать 2 базиса: f_3, f_1 и f_3, f_2. Полными наборами будут любые наборы, содержащие какой-либо базис.

Пример 4.21. Исследовать полноту системы А $= \{f_1 = xy \oplus z, f_2 = x \oplus y \oplus 1\}$.

Критериальная таблица имеет вид:

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	–	–	–	–
f_2	–	+	+	–	–

В каждом столбце имеется не менее одного минуса. Система полна.

Пример 4.22. Из полной в P_2 системы $A = \{f_1 = x \oplus y, f_2 = xy \oplus z, f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1, f_4 = xy \oplus yz \oplus zx\}$ выделить всевозможные базисы.

Критериальная таблица имеет вид:

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	–
f_3	–	–	+	+	–
f_4	+	+	–	+	+

По таблице составим КНФ, в которой элементарные дизъюнкции соответствуют столбцам таблицы и включают в качестве слагаемых символы тех функций, которые не входят в класс, соответствующий столбцу.

В данном случае имеем $K = f_3(f_1 \vee f_2 \vee f_3)(f_2 \vee f_4)(f_1 \vee f_2)(f_1 \vee f_2 \vee f_3)$.

Перемножая скобки и используя для упрощения равенства вида $A \wedge A \equiv A$, $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $A \vee A \wedge B \equiv A$, приведем КНФ к виду ДНФ, в которой упрощения невозможны. В нашем случае имеем $K = f_3(f_2 \vee f_4)(f_1 \vee f_2) \equiv f_3 f_2 \vee f_3 f_4 f_1$.

По полученной ДНФ выпишем подмножества функций, соответствующие слагаемым ДНФ. Это и будут искомые базисы. В нашем случае имеется два базиса: $Б_1 = \{f_2, f_3\}$, $Б_2 = \{f_1, f_3, f_4\}$.

Полноту систем функций в P_2 можно доказывать путем сведения исследуемой системы к известным полным системам таким как

$\{ xy, x \vee y , \bar{x}\}, \{ xy, x\oplus y , 1\}, \{ \bar{x} \vee \bar{y} \}, \{ \bar{x} \wedge \bar{y} \}$.

Пример 4.23. Исследовать полноту в P_2 системы

$$A = \{ f_1 = xy \vee yz \vee zx , f_2 = 0, f_3 = 1, f_4 = x\oplus y\oplus z \}$$

Имеем $f_1(x, y, 0) = xy$, $f_4(x, y, 0) = x\oplus y$. Таким образом, из функций системы А получаются функции $xy, x\oplus y , 1$ одной из вышеуказанных полных систем. Это и означает, что система А полна в P_2.

Задачи

1. Проверьте свойства булевой функции (линейность, самодвойственность, монотонность) и построить соответствующую РКС:

a) $f(x, y, z) = (x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \wedge \overline{z} \vee y \wedge z$

b) $f(x, y, z) = \bar{x} \wedge (\overline{y} \wedge z \vee y \wedge \overline{z}) \vee (y \oplus z \oplus 1) \wedge x$.

2. Выясните, полны ли системы функций:

a) $A=\{xy,\ x \vee \mathrm{y},\ xy \vee \mathrm{yz} \vee zx\}$

b) $A=\{xy,\ x \vee \mathrm{y},\ x \oplus \mathrm{y} \oplus z \oplus 1\}$;

c) $A=\{1,\ \bar{x},\ x(y \leftrightarrow z) \oplus\ \bar{x}(y \oplus z),\ x \leftrightarrow y\}$;

d) $A=\{0,\ \bar{x},\ x(y \oplus z) \oplus\ \mathrm{yz}\}$;

e) $A=\{ \bar{x},\ x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z),\ x \oplus y \oplus z\}$;

f) $A=\{ \bar{x},\ x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow yz,\ x \oplus y \oplus z\}$;

g) $A=\{xy(x \oplus \mathrm{y}),\ xy \oplus x \oplus \mathrm{y},\ 1,\ xy \oplus yz \oplus zx)\}$;

h) $A=\{(y \leftrightarrow x) \oplus z,\ x \wedge \mathrm{y} \oplus z,\ 0\}$;

i) $A=\{ x \rightarrow y,\ \bar{x} \rightarrow \bar{y}x,\ x \oplus y \oplus z,\ 1\}$.

3. Выясните, полны ли системы функций:

a) $\mathrm{B}=\{f_1 = (10),\ f_2 = (00110111)\}$

b) $B=\{f_1 = (0110),\ f_2 = (1100\ 0011),\ f_3 = (1001\ 0110)\}$

c) $B=\{f_1 = (0111),\ f_2 = (0101\ 1010),\ f_3 = (0111\ 1110)\}$

d) $B=\{f_1 = (0111),\ f_2 = (1001\ 0110)\}$

e) $B=\{f_1 = (0101),\ f_2 = (1110\ 1000),\ f_3 = (0110\ 1001)\}$

f) $\mathrm{B}=\{f_1 = (1001),\ f_2 = (1110\ 1000)\}$

g) B={$f_1 = (11),\ f_2 = (0111),\ f_3 = (00110\ 111)$}

h) B={$f_1 = (11),\ f_2 = (00),\ f_3 = (00110\ 101)$}

4. Выделите всевозможные базисы из полной в P_2 системы

a) C={$1,\ \bar{x},\ xy(x \oplus y),\ x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx$}

b) C={$0,\ x \oplus y,\ x \to y,\ xy \leftrightarrow zx$}

c) C={$0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z,\ xy \oplus yz \oplus zx,\ xy \oplus z,\ x \vee y$}

d) C={$xy,\ x \vee y,\ xy \vee z,\ \ x \oplus y,\ x \to y$}

e) C={$xy \oplus z,\ x \oplus y \oplus 1,\ x\bar{y},\ \ \bar{x}$}

f) C={$xy \vee \bar{z},\ \ \bar{x},\ x \to y,\ 0,\ x \oplus zy$}

g) C={$xy,\ xy \vee z,\ \ \bar{x},\ x \oplus y,\ x \to y,\ \bar{x}$}

h) C={$x \oplus y,\ x \leftrightarrow y,\ 0,\ x \oplus y \oplus z,\ xy,\ x \to y$}

5. Перечислить все самодвойственные функции от двух переменных.

6. Выяснить, является ли самодвойственной функция f:

а) $f = xy \vee yz \vee zx$;

б) $f = x \oplus y \oplus z \oplus 1$;

в) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee x \cdot \overline{y} \cdot z$.

7. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная векторно:

а) $\tilde{\alpha}_f = (1010)$; б) $\tilde{\alpha}_f = (10010110)$;

в) $\tilde{\alpha}_f = (10110101)$;

г) $\tilde{\alpha}_f = (1100100101101100)$.

8. Определить, какие из переменных функций $f(\tilde{x}^n)$ следует заменить на x, а какие на $\overline{x}$ с тем, чтобы получить константу:

а) $\tilde{\alpha}_f = (10110110)$; б) $\tilde{\alpha}_f = (11011000)$;

в) $\tilde{\alpha}_f = (11001110)$; г) $\tilde{\alpha}_f = (1000110100010110 0)$.

9. Выяснить при каких $n \geq 2$ функция $f(\tilde{x}^n) \in S$:

а) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus\ \dots\ \oplus x_n$;

б) $f(\tilde{x}^n) = \vee_{1 \le i < j \le n}\ \ x_i x_j$;

в) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{1 \le i < j \le n}\ \ x_i x_j$.

10. Перечислить все линейные функции от двух переменных.

11. Представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной:

а) $f = \overline{x \to y} \oplus \overline{x} \cdot y$;

б) $f = xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \vee z$;

в) $f = (x \to y) \cdot (y \to x)) \sim z$.

12. Выяснить, является ли линейной функция f, заданная векторно:

а) $\tilde{\alpha}_f = (1001)$; б) $\tilde{\alpha}_f = (1101)$;

в) $\tilde{\alpha}_f = (10110101)$; г) $\tilde{\alpha}_f = (0110100101101001)$.

13. Подставляя на места переменных нелинейной функции $f(\tilde{x}^n)$ функции из множества $\{0,\ 1,\ x,\ y\}$, получить хотя бы одну из функций $x\&y,\ x\&\overline{y},\ \overline{x}\&y$:

а) $\tilde{\alpha}_f = (01100111)$;

б) $\tilde{\alpha}_f = (11010101)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_3} \cdot x_1$;

г) $\tilde{\alpha}_f = (1101111111001111)$.

14. Найти число линейных функций $f(\tilde{x}^n)$,

а) существенно зависящих в точности от k переменных;

б) удовлетворяющих условию $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = 1$.

15. Выяснить, принадлежит множеству $T_0 \backslash T_1$ функция $f(\tilde{x}^n)$:

а) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_1)$;

б) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \vee x_1$.

16. Выяснить, при каких n функция $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \backslash T_1$:

а) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ \dots \ \oplus x_n$;

б) $f(\tilde{x}^n) = \vee_{1 \le i < j \le n} \quad x_i x_j$.

17. Приведите все монотонные функции от двух переменных.

18. Выяснить, является ли монотонной функция f:

а) $f = (x \oplus y) \cdot (x \sim y)$;

б) $f = xy \oplus xz \oplus zy$;

в) $f = x_1 \to (x_2 \to x_3)$;

г) $f = x_1 \oplus (x_2 \to x_3) \oplus x_4$.

19. Выяснить, является ли монотонной функция f, заданная векторно:

а) $\tilde{\alpha}_f = (0110)$; б) $\tilde{\alpha}_f = (10110111)$;

в) $\tilde{\alpha}_f = (00010111)$; г) $\tilde{\alpha}_f = (001000110111111)$.

20. Для немонотонной функции $f(\tilde{x}^n)$ указать два соседних набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ значений переменных таких, что $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$:

а) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2$;

б) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus$;

в) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_3 \oplus x_2x_4$.

21. Выяснить при каких $n \geq 2$ функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна:

а) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; б) $f(\tilde{x}^n) = \vee_{1 \leq i < j \leq n} \; x_ix_j$.

22. Подсчитать число функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и принадлежащих множеству A:

а) $A = T_0 \cup T_1$; б) $A = T_0 \cap L$; в) $A = T_1 \cap S$;

г) $A = T_0 \cup L$; д) $A = L \cup S \cup T_0$; е) $A = (L \backslash T_0) \cap S$.

23. Выяснить, полна ли система функций A:

а) $A = \{f_1 = (0110),\ f_2 = (11000011),\ f_3 = (10010110)\}$;

б) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (01011010),\ f_3 = (01111110)\}$;

в) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y,\ xy \vee yz \vee zx\}$;

г) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

д) $A = (S \cap M) \cup (L \backslash M)$;

е) $A = (L \cap T_1 \cap T_0) \cup S \backslash (T_1 \cup T_0)$.

Литература

1. Прокопенко, Н. Ю. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Н.Ю. Прокопенко – Нижегор. гос. архит.-строит. ун-т. - Нижний Новгород : ННГАСУ, 2016. – 252 с. – ISBN 978-5-528-00127-2. – Текст : электронный. – URL: http://www.iprbookshop.ru/80893.html.

2. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие/ В.И. Игошин. – Москва : Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с. – ISBN 5-7695-1363-2. – Текст : непосредственный.

3. Игошин, В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие/ В.И. Игошин. – Москва : КУРС: ИНФРА-М, 2017. – 392 с. – ISBN 978-5-16-103684-6. – Текст : электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/524332 (дата обращения: 12.12.2020).

4. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов : учебник / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – 5-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с. – ISBN 5-9221-0026-2. – Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/2242 (дата обращения: 12.12.2020).

Прокопенко Н.Ю.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И
БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Редактор
Н.В.Викулова

для обучающихся по дисциплине
«Дискретная математика»
по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика и
09.03.04 Программная инженерия

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
http://www. nngasu.ru, srec@nngasu.ru