

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Нижний Новгород
2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Сборник задач и упражнений по математике

Учебно-методическое пособие

Нижегород
ННГАСУ
2020

ББК 22.1
С 23
УДК 51(075)

Печатается в авторской редакции

Рецензенты:

Н. А. Мамаева – канд. пед. наук, доцент кафедры прикладной механики, физики и высшей математики ФГБОУ ВО «Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия»

Д. В. Баландин. – д-р физ-мат. наук., профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный ун-т им. Н. И. Лобачевского»

Айнбиндер.Р.М Сборник задач и упражнений по математике. [Текст]: учеб.- метод. пособие / Р.М. Айнбиндер, С.П. Горбиков, В.Н. Неймарк, Г.П. Опалева, В.В. Петров, Л.С. Сенниковская, Л.В. Филатов; Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун - т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2020. – 169 с. ISBN 978-5-528-00404-4

Сборник задач и упражнений включает в себя задачи и упражнения по линейной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислениям функции одной переменной и дифференциальному исчислению функций нескольких переменных, обыкновенным дифференциальным уравнениям, двойным интегралам, числовым и функциональным рядам, теории вероятностей и элементам математической статистики.

Предназначено для подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Математика» по всем направлениям подготовки.

© Р.М. Айнбиндер, С.П. Горбиков,
В.Н. Неймарк, Г.П. Опалева, В.В. Петров,
Л.С. Сенниковская, Л.В. Филатов 2020
© ННГАСУ, 2020.

Содержание

Введение	8
Глава 1. Линейная алгебра	9
§1. Матрицы. Действия с матрицами	9
§2. Определители матриц	11
§3. Обратная матрица. Ранг матрицы	12
§4. Решение систем линейных алгебраических уравнений	13
Глава 2. Векторная алгебра	15
§1. Векторы и действия над ними	15
§2. Скалярное произведение	17
§3. Векторное произведение	19
§4. Смешанное произведение	20
Глава 3. Прямая и плоскость	21
§1. Прямая линия на плоскости	21
§2. Плоскость	24
§3. Прямая в пространстве	27
§4. Прямая в пространстве и плоскость	30
Глава 4. Кривые и поверхности второго порядка	33
§1. Окружность	33
§2. Эллипс	34
§3. Гипербола	36
§4. Парабола	37
§5. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду	39
§6. Кривые в полярной системе координат	40
§7. Поверхности второго порядка. Построение тел	41

Глава 5. Введение в анализ	43
§1. Общие свойства функций	43
§2. Числовые последовательности и их пределы	46
§3. Функции непрерывного аргумента. Предел функции в точке	48
§4. Непрерывность функции. Точки разрыва	51
Глава 6. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	52
§1. Производная функции	52
§2. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях	56
§3. Применение производной в геометрии и физике	57
§4. Правило Лопиталя	59
§5. Исследование функций и построение графиков	60
§6. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке	66
Глава 7. Комплексные числа	67
§1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	67
§2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме	68
§3. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме	69
§4. Извлечение корней из комплексных чисел	70
Глава 8. Неопределённый интеграл	70
§1. Непосредственное интегрирование	70
§2. Интегрирование внесением под знак дифференциала или методом замены переменной	71
§3. Интегрирование по частям	72
§4. Интегрирование рациональных функций	73
§5. Интегрирование тригонометрических функций	73
§6. Интегрирование некоторых иррациональных функций	74

§7. Смешанные примеры	74
Глава 9. Определённый интеграл	76
§1. Непосредственное вычисление определённого интеграла и внесение функции под знак дифференциала	76
§2. Замена переменной в определённом интеграле	76
§3. Интегрирование по частям в определённом интеграле	76
§4. Несобственные интегралы	77
§5. Приложения определённого интеграла	80
Глава 10. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	81
§1. Область определения функции многих переменных	81
§2. Линии уровня функции нескольких переменных	81
§3. Частные производные функции нескольких переменных	81
§4. Производные от функции нескольких переменных, заданных неявно	82
§5. Дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала в приближенных вычислениях	83
§6. Градиент и производная по направлению функции многих переменных	84
§7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	85
§8. Экстремумы функции многих переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области	86
Глава 11. Дифференциальные уравнения	87
§ 1. Основные понятия и определения	87
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	88
§ 3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	90
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	91
§ 5. Дифференциальные уравнения второго и высших	

порядков, допускающие понижение порядка	92
§ 6. Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков с постоянными коэффициентами	94
Глава 12. Двойные интегралы	97
§ 1. Расстановка пределов интегрирования	97
§ 2. Вычисление кратных интегралов	102
§3. Применение двойных интегралов для вычисления площадей и объёмов фигур	106
§4. Применение двойных интегралов для вычисления физических величин	107
Глава 13. Ряды	108
§1. Понятие ряда. Сумма ряда и его сходимость	108
§2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов	110
§3. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость	112
§4. Функциональные ряды	113
§5. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближённым вычислениям	114
Глава 14. Теория вероятностей	115
§ 1. Элементы комбинаторики	115
§ 2. Классическое определение вероятностей	116
§ 3. Геометрические вероятности	118
§ 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события	120

§ 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса	121
§ 6. Формулы Бернулли, Муавра - Лапласа, Пуассона	124
Глава 15. Случайные величины	126
§1. Распределение случайных величин	126
§2. Числовые характеристики случайных величин	128
§3. Нормально распределенная случайная величина	129
Глава 16. Основы математической статистики	131
§1. Выборочный метод. Выборочные представления и выборочные числовые характеристики	131
§2. Статистические оценки неизвестных параметров распределения случайных величин	132
§3. Проверка статистических гипотез	133
Ответы	135
Список литературы	169

Введение

В начале обучения студенты строительных ВУЗов изучают курс высшей математики, который служит фундаментальной базой при изучении дальнейших профильных дисциплин. Для подготовки студентов требуются не только учебники по высшей математике, но и задачки, необходимые для закрепления теоретического материала и при самостоятельной работе студентов.

Предлагаемый сборник задач и упражнений составлен преподавателями кафедры математики Нижегородского государственного архитектурно - строительного университета (ННГАСУ) для студентов технических. В качестве теоретической основы для решения задач студентам предлагается использовать лекционный курс, написанный преподавателями этой же кафедры ННГАСУ «64 лекции по математике», авторы В.П. Важдаев и др.

В задачнике имеется достаточное число упражнений различного уровня сложности. Кроме известных примеров из классических сборников (см. список литературы) в нём содержатся и упражнения, составленные авторами.

Авторы благодарны всем членам кафедры математики ННГАСУ за ряд замечаний, способствовавших улучшению содержания задачника, и будут признательны пользователям за любые пожелания и критические замечания.

Глава 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§1. Матрицы. Действия с матрицами

1.1. Зная матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, найти матрицу X , удовлетворяющую условиям:

1) $X - 2B = 0$; 2) $A + 5X = 0$; 3) $A + B - 3X = 0$; 4) $3A - \frac{1}{2}X = B$.

1.2. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

существуют ли произведения:

- 1) AB ; 2) BA ; 3) AC ; 4) CA ;
5) BC ; 6) CB ; 7) DA ; 8) AD ;
9) ABC ; 10) BAD ; 11) CBA ; 12) ACB ?

1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

- 1) AB ; 2) C^2 ; 3) $(AC)^2$; 4) CA^2 ;
5) $(A+C)^2$; 6) $(A-2C)^2$; 7) $(A+C)^2 B$; 8) ACB .

В задачах 1.4 - 1.7 найти элементы c_{32} и c_{13} матрицы $C = A \cdot B$, если:

1.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$1.7. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.8 - 1.15 вычислить произведения матриц.

$$1.8. \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.11. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. \quad \begin{pmatrix} a & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

$$1.15. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

В нижеследующих задачах 1.16 - 1.23 вычислить произведения матриц $A \cdot A^T$.

$$1.16. \quad A = (3 \ 2 \ 1). \quad 1.17. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1.18. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.19. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 1.20. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.21. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.22. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.23. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§2. Определители матриц

В задачах 1.24 - 1.29 вычислить определители матриц.

$$1.24. \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad 1.25. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad 1.26. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$1.27. \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{pmatrix}, \quad 1.28. \begin{pmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{pmatrix}, \quad 1.29. \begin{pmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Решить следующие уравнения:

$$1.30. \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad 1.31. \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0, \quad 1.32. \begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.33. \begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x-2 \end{vmatrix} = 0, \quad 1.34. \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad 1.35. \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{13} и a_{32} определителей следующих матриц:

$$1.36. \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad 1.37. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1.38. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.39 - 1.44 вычислить определители матриц разложением по элементам какой-нибудь строки (столбца):

$$1.39. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad 1.40. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad 1.41. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.42. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 1.43. \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \sin \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad 1.44. \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Решить следующие уравнения:

$$1.45. \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad 1.46. \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 1.47. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.48. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1. \quad 1.49. \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0. \quad 1.50. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§3. Обратная матрица. Ранг матрицы

В задачах 1.51 - 1.58 найти матрицу, обратную к данной, и сделать проверку:

$$1.51. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1.52. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.53. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.54. \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.55. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.56. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 1.57. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.58. \text{ Дано: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу X , если:

$$\begin{aligned} 1) X &= (A - B^2) \cdot 2C^{-1}; & 2) X &= (B - C^2) \cdot 2A^{-1}; & 3) X &= (C - A^2) \cdot 7B^{-1}; \\ 4) X &= 2C^{-1} + A \cdot B - C; & 5) X &= 2A^{-1} + B \cdot C - A; & 6) X &= 7B^{-1} + C \cdot A - B; \\ 7) X &= C - A^2 + 7B^{-1}; & 8) X &= B^2 - 2C^{-1} + A; & 9) X &= (2C^{-1} + C) \cdot A \cdot B. \end{aligned}$$

Методом окаймляющих миноров в задачах 1.59 - 1.65 вычислить ранг матрицы:

$$1.59. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \quad 1.60. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \quad 1.61. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1.62. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.63. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}. \quad 1.64. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \quad 1.65. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 11 & 5 & 8 \\ 15 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.66 - 1.68 найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$1.66. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}. \quad 1.67. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1.68. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.69. При каких значениях λ матрица $\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный 1?

1.70. При каких значениях λ ранг матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ равен 2?

1.71. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ при различных значениях параметра λ .

§4. Решение систем линейных алгебраических уравнений

По правилу Крамера решить системы уравнений 1.72 - 1.80 и сделать проверку:

$$1.72. \begin{cases} 2x - y - 4z = 3 \\ x + 4y + z = -3 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \end{cases} \quad 1.73. \begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 2z = 6 \\ 3x + 3y - z = 11 \end{cases} \quad 1.74. \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + 7y + z = 10 \end{cases}$$

$$1.75. \begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + y - 2z = -8 \end{cases} \quad 1.76. \begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + 4z = 10 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad 1.77. \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x - 5y + z = 3 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$1.78. \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y - 3z = -2 \\ x - 5y + 2z = 6 \end{cases} \quad 1.79. \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x + 5y - 4z = 7 \end{cases} \quad 1.80. \begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -2 \\ 2x + 3y = 0,5 \end{cases}$$

В задачах 1.81 - 1.89 решить системы уравнений методом обратной матрицы и сделать проверку:

$$1.81. \begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 3z = 7 \\ x - 4y - z = -2 \end{cases} \quad 1.82. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y = 3 \\ 3x - y + 5z = 4 \end{cases} \quad 1.83. \begin{cases} 3x - 3y + z = 1 \\ 2x - 4y + 3z = -1 \\ 3x - y + 5z = 9 \end{cases}$$

$$1.84. \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 2 \\ 5y - 2z = 5 \end{cases} \quad 1.85. \begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ x - y + 5z = 6 \\ 3x + y - 4z = -1 \end{cases} \quad 1.86. \begin{cases} x + y - 4z = -8 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$1.87. \begin{cases} 2x - 2y - z = -3 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 5 \end{cases} \quad 1.88. \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 4 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 5x + 4y + 4z = 4 \end{cases} \quad 1.89. \begin{cases} x + y - z = 5 \\ y - x + z = -1 \\ 4y - x - z = 7 \end{cases}$$

Методом Гаусса решить системы уравнений 1.90 - 1.98 и сделать проверку:

$$1.90. \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ 4x - y - z = 10 \end{cases} \quad 1.91. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 4 \end{cases} \quad 1.92. \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x - 5y + 3z = 4 \\ 2x + 7y - z = 10 \end{cases}$$

$$1.93. \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases} \quad 1.94. \begin{cases} 2x - 2y + z = 6 \\ x - y = 2 \\ 3x + 5z = 13 \end{cases} \quad 1.95. \begin{cases} 3x - y + 4z = 5 \\ 2x + 3y = -3 \\ 4x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$1.96. \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 3z = 5 \\ 3x - y + 4z = 5 \end{cases} \quad 1.97. \begin{cases} x - 3y + 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \\ 5x - y + 3z = 9 \end{cases} \quad 1.98. \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ x + y - 4z = -2 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

В задачах 1.99 - 1.109 исследовать системы линейных уравнений и в случае их совместности найти решения:

$$1.99. \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \quad 1.100. \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases} \quad 1.101. \begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ 4x - 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$1.102. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \quad 1.103. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases} \quad 1.104. \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$$

$$1.105. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad 1.106. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

$$1.107. \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \quad 1.108. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$$

$$1.109. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} .$$

$$1.110. \text{ При каких значениях } a \text{ и } b \text{ система уравнений } \begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

1) имеет единственное решение; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечно много решений?

В задачах 1.111 - 1.116 решить однородные системы уравнений:

$$1.111. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

$$1.112. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} .$$

$$1.113. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

$$1.114. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

$$1.115. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

$$1.116. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

Глава 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§1. Векторы и действия над ними

2.1. Вычислить длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

2.2. Даны две координаты вектора $x = 4$ и $y = -12$. Определить третью координату z при условии, что $|\vec{a}| = 13$.

2.3. Определить координаты точки N , с которой совпадает конечная точка вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, если его начальная точка совпадает с точкой $M(1; 2; -3)$.

2.4. Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найти координаты векторов \overline{AB} и \overline{BA} .

2.5. Даны неколлинеарные векторы \vec{a} и \vec{b} . Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = \vec{a} - 2\sqrt{3}\vec{b}$ и $\vec{d} = -\sqrt{3}\vec{a} + 6\vec{b}$?

2.6. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны и $\vec{AB} = \frac{\alpha}{2}\vec{a}$, $\vec{BC} = 4(\beta \cdot \vec{a} - \vec{b})$, $\vec{CD} = -4\beta \cdot \vec{b}$, $\vec{DA} = \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$. Найти числа α и β и доказать коллинеарность векторов \vec{BC} и \vec{DA} .

2.7. $ABCDEF$ - правильный шестиугольник, причём $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. Выразить через \vec{a} и \vec{b} векторы \vec{CD} , \vec{DE} , \vec{EK} , \vec{KA} , \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{AE} .

2.8. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы \vec{BC} и \vec{DC} через \vec{AK} и \vec{AL} .

2.9. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, которые составляет вектор с осями координат. Вычислить проекции вектора на координатные оси.

2.10. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{12; -15; -16\}$.

2.11. Найти координаты вектора \vec{a} , образующего с векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ равные острые углы, при условии, что $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

2.12. Как должны быть связаны ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы имело место соотношение: 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $a_x / |\vec{a}| = b_x / |\vec{b}|$?

2.13. Построить вектор $\vec{r} = \vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$, определить его длину и направление (проверить по формуле $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

2.14. Радиус-вектор \vec{r} точки M составляет с осью x угол 45° , а с осью y - угол 60° . Длина его $|\vec{r}| = 6$. Определить координаты точки M , если ее координата z отрицательна, и выразить вектор $\vec{OM} = \vec{r}$ через орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

2.15. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Построить вектор $\vec{AB} = \vec{u}$, его проекции на оси координат и определить длину и направление вектора. Определить углы вектора \vec{u} с осями координат.

2.16. Построить параллелограмм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ и определить длины его диагоналей.

2.17. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$. Найти координаты его четвертой вершины D .

2.18. Даны три вершины треугольника: $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$ и $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведённой из вершины A .

2.19. Даны вершины треугольника $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$. Найти длину средней линии треугольника, которая параллельна стороне BC .

2.20. Установить, в каких случаях тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор \bar{c} как линейную комбинацию векторов \bar{a} и \bar{b} :

1) $\bar{a} = \{5; 2; 1\}$, $\bar{b} = \{-1; 4; 2\}$, $\bar{c} = \{-1; -1; 6\}$;

2) $\bar{a} = \{6; 4; 2\}$, $\bar{b} = \{-9; 6; 3\}$, $\bar{c} = \{-3; 6; 3\}$;

3) $\bar{a} = \{6; -18; 12\}$, $\bar{b} = \{-8; 24; -16\}$, $\bar{c} = \{8; 7; 3\}$.

2.21. Даны: $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$ и $|\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Вычислить $|\bar{a} - \bar{b}|$.

2.22. Проверить коллинеарность векторов $\bar{a} = \{2; -1; 3\}$ и $\bar{b} = \{-6; 3; -9\}$. Установить, какой из них длиннее и во сколько раз? Как они направлены - в одну или в противоположные стороны?

2.23. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны.

2.24. Проверить, что четыре точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ служат вершинами трапеции.

2.25. На оси y найти точку M , равноудалённую от точек $A(1; -4; 7)$ и $B(5; 6; -5)$.

2.26. На оси x найти точку M , расстояние от которой до точки $A(3; -3)$ равно 5.

2.27. Три силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Найти величину равнодействующей силы \bar{F} , если известны величины этих сил: $|\bar{F}_1| = 2$, $|\bar{F}_2| = 10$, $|\bar{F}_3| = 11$.

§2. Скалярное произведение

2.28. Векторы \bar{a} и \bar{b} образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 3$ и $|\bar{b}| = 4$,

вычислить: 1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) \bar{a}^2 ; 3) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; 4) $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$.

2.29. Найти длину вектора $\bar{a} = 2\bar{b} - 3\bar{c}$, если $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 5$ и угол между векторами \bar{b} и \bar{c} и равен 60° .

2.30. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{3; 4; 7\}$ и $\bar{b} = \{2; -5; 2\}$.

2.31. Определить угол между векторами $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

2.32. Определить углы треугольника с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.

2.33. Даны векторы $\bar{a} = \{4; -2; -4\}$ и $\bar{b} = \{6; -3; 2\}$. Вычислить скалярное произведение векторов $2\bar{a} - 3\bar{b}$ и $\bar{a} + 2\bar{b}$.

2.34. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 6\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$.

2.35. Найти угол между диагоналями параллелограмма, если заданы три его вершины: $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$ и $C(-3; 3; -3)$.

2.36. Вычислить $(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$.

2.37. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}$, где \bar{m} и \bar{n} – единичные векторы с углом 120° между ними. Найти $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{m}})$ и $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{n}})$.

2.38. Какому условию должны удовлетворять векторы \bar{a} и \bar{b} , чтобы вектор $\bar{a} + \bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a} - \bar{b}$?

2.39. Даны единичные векторы \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} , удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$.

2.40. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $(\bar{a} + \alpha \cdot \bar{b})$ и $(\bar{a} - \alpha \cdot \bar{b})$ будут взаимно перпендикулярны.

2.41. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$. Определить $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$ и $\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}$.

2.42. Даны три вектора: $\bar{a} = \{1; -3; 4\}$, $\bar{b} = \{3; -4; 2\}$ и $\bar{c} = \{-1; 1; 4\}$. Вычислить $\text{пр}_{\bar{b} + \bar{c}} \bar{a}$.

2.43. Найти проекцию вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ на ось, составляющую с осями координат равные острые углы.

2.44. Даны вершины четырёхугольника: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.

2.45. Сила, определяемая вектором $\bar{R} = \bar{i} - 8\bar{j} - 7\bar{k}$, разложена по трём направлениям, одно из которых задано вектором $\bar{a} = \{2; 2; 1\}$. Найти составляющую силы \bar{R} в направлении вектора \bar{a} .

2.46. Найти координаты вектора \bar{x} , если $\bar{x} \cdot \bar{a} = 1$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = 2$, $\bar{x} \cdot \bar{c} = 3$, где $\bar{a} = \{2; 1; 1\}$, $\bar{b} = \{0; 4; 2\}$, $\bar{c} = \{10; 1; 3\}$.

§3. Векторное произведение

2.47. Определить и построить вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , если:

1) $\vec{a} = 3\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{k}$; 2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; 3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

2.48. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.

2.49. Построить параллелограмм на векторах $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ и вычислить его площадь и длины его высот.

2.50. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{j} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$;

2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$;

3) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;

4) $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$.

2.51. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2; -2; 1\}$ и $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$.

2.52. Найти единичный вектор \vec{e} , перпендикулярный вектору $\vec{a} = \{1; 4; 3\}$ и оси абсцисс.

2.53. Вектор \vec{x} , перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ и $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$, образует с осью u тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

2.54. Вектор \vec{m} , перпендикулярный к оси z и к вектору $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$, образует с осью x острый угол. Зная, что $|\vec{m}| = 51$, найти его координаты.

2.55. Найти вектор \vec{x} , зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot \{\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\} = 10$.

2.56. Доказать, что $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$, и выяснить геометрическое значение этого тождества.

2.57. Построить векторы $\vec{a} = 3\vec{k} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Вычислить модуль вектора \vec{c} и площадь треугольника, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

2.58. Дан треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$ и $C(6; 2; 0)$. Вычислить длину его высоты, опущенной на сторону AC .

2.59. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2.60. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где \vec{m} и \vec{n} – единичные векторы, образующие угол 30° .

2.61. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Вычислить $(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

2.62. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Найти координаты вектора $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

2.63. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

2.64. Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы вектора $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

2.65. Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке $O(0; 2; 1)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(-1; 2; 3)$.

2.66. Дана сила $\vec{F} = \{3; 4; -2\}$. Точка её приложения $A(2; -1; 3)$. Найти момент силы относительно точки $O(0; 0; 0)$ и направление момента сил.

2.67. Три силы $\vec{F}_1 = \{2; 4; 6\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -2; 3\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 1; -7\}$ приложены к точке $A(3; -4; 8)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4; -2; 6)$.

§4. Смешанное произведение

2.68. Построить параллелепипед на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

2.69. Построить пирамиду с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$ и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

2.70. Проверить, лежат ли точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(5; 0; 6)$ в одной плоскости.

2.71. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны. Разложить вектор \vec{c} по векторам \vec{a} и \vec{b} .

2.72. Доказать, что для любых заданных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

2.73. При каком значении α векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \alpha \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{c} = \{3; 0; 1\}$ компланарны?

2.74. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

2.75. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

2.76. Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ и $D(-5; -4; 8)$. Найти длину высоты, которая опущена из вершины D .

2.77. Найти объём треугольной призмы построенной на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

2.78. Объём тетраэдра $V = 5$. Три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$ и $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси u .

2.79. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(-2; 4; 1)$, $A_3(7; 6; 3)$, $A_4(4; -3; 1)$.

Найти: 1) длины рёбер A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 ; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3 ; 4) объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

5) длину высоты пирамиды на грань $A_1A_2A_3$.

Глава 3

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§1. Прямая линия на плоскости

3.1. Построить прямые:

1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $4x - 3y + 24 = 0$; 3) $3x - 5y - 2 = 0$; 4) $5x + 2y - 1 = 0$;

5) $2x + 5y = 10$; 6) $3x + 4y = 0$; 7) $5x - 2 = 0$; 8) $2y + 5 = 0$; 9) $-2x = 0$.

3.2. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси y отрезок $b = 3$ и образующей с положительным направлением оси x угол $\alpha = 30^\circ$.

3.3. Уравнения прямых привести к виду в отрезках на осях. Прямые построить.

1) $2x + 3y = 6$; 2) $3x - 2y = 4$; 3) $3y - 4x = 12$; 4) $y = 6 - 4x$.

3.4. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси x отрезок длиной

3 ед., а на оси y отрезок длиной 4 ед. Построить прямую.

3.5. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и через точку $(-2; 3)$. Построить прямую.

3.6. Даны точки $O(0; 0)$ и $A(-3; 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0; 2)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

3.7. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ соответственно в точках A и B . Построить вектор \overline{AB} , определить его длину и проекции на оси координат.

3.8. Прямые $x = -1$ и $x = 3$ пересекают прямую $y = 2x + 1$ соответственно в точках A и B . Определить длину вектора \overline{AB} и его проекции на оси координат.

3.9. Изобразить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

- 1) $y < 2 - x$, $x > -2$, $y > -2$; 2) $y > 2 - x$, $x < 4$, $y < 0$;
3) $x/4 + y/2 \leq 1$, $y \geq x + 2$, $x \geq -4$; 4) $-2 - x < y < 2 + x$, $-2 < x < 4$.

3.10. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$

3.11. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями: $AB: 4x + 3y - 5 = 0$, $BC: x - 3y + 10 = 0$, $AC: x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

Примечание. Здесь и везде в дальнейшем под уравнением сторон мы будем понимать уравнения прямых, на которых лежат стороны.

3.12. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2; 1)$:

- 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.

3.13. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$ и $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.

3.14. Даны середины сторон треугольника $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$. Составить уравнения его сторон.

3.15. Даны вершины треугольника $A(2; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(3; 2)$. Составить уравнения его высот.

3.16. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B .

3.17. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника и второй диагонали.

3.18. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника и его диагоналей.

3.19. Найти проекцию точки $M(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

3.20. Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

3.21. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3; 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7; 3)$ и $B(11; -15)$.

3.22. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

3.23. Найти точку M_1 , симметричную точке $M_2(5; 3)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; 4)$ и $B(-1; -2)$.

3.24. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны.

1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;

3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$; 4) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$.

3.25. Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y - b = 0$:

1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.

3.26. Определить, при каком значении a три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

3.27. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

3.28. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.

3.29. Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

3.30. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ и одна из его вершин $A(-2; 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

3.31. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(-5; 1)$, $M_2(3; 7)$.

3.32. Доказать, что прямая $2x - 3y + 6 = 0$ не пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(-2; -3)$, $M_2(1; -2)$.

3.33. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$; 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;

3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$; 4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

3.34. Доказать, что прямая $5x - 2y - 1 = 0$ параллельна прямым $5x - 2y + 7 = 0$ и $5x - 2y - 9 = 0$ и делит расстояние между ними пополам.

3.35. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$.

3.36. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ и делит пополам отрезок, ограниченный точками $M(5; -6)$ и $N(-1; -4)$.

§2. Плоскость

3.37. Найти точки пересечения плоскости $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ с осями координат. Построить плоскость.

3.38. Построить плоскости:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$; 2) $4x + 3y - z = 0$; 3) $2x + 3z = 6$; 4) $2y - 3z = 12$;

5) $2y - 3x = 4$; 6) $2x - 5z = 0$; 7) $3x + 2y = 0$; 8) $y - z = 0$; 9) $2z - 7 = 0$;

10) $3y + 5 = 0$; 11) $3x + 6 = 0$; 12) $-2z = 0$; 13) $3y = 0$; 14) $x = 0$.

3.39. Дано уравнение плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Написать для нее уравнение в отрезках. Построить плоскость.

3.40. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отрезки одинаковой величины. Построить плоскость.

3.41. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликата отрезки одинаковой длины. Построить плоскость.

3.42. Плоскость проходит через точку $M(6; -10; 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$, а на оси аппликата отрезок $c = 2$. Составить для этой плоскости уравнение в отрезках. Построить плоскость.

3.43. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и перпендикулярной вектору \overline{OM} .

3.44. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ и $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ и $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$ и $2x - 6z - 7 = 0$.

3.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 4; -5)$ параллельно плоскости $2x - 3y + 2z - 10 = 0$.

3.46. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

3.47. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

3.48. Даны две точки $M(3; -1; 2)$ и $N(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору \overline{MN} .

3.49. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.

3.50. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; -1; 3)$ и $N(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

3.51. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(0; 0; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - y - z = 0$ и $2y = x$.

3.52. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

3.53. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

- 2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;
 3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$;
 4) $x + y + z = 1$, $2x - 3y + z - 7 = 0$.

3.54. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

3.55. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -1; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x - z + 1 = 0$ и параллельно вектору $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.

3.56. Установить, что три плоскости $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ и $x - 3y + 2z - 11 = 0$ имеют одну общую точку. Вычислить ее координаты.

3.57. Составить уравнение плоскости, которая проходит через:

- 1) точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$ параллельно оси x ;
 1) точки $M_1(3; 1; 0)$ и $M_2(1; 3; 0)$ параллельно оси z ;
 2) точки $M_1(3; 0; 3)$ и $M_2(5; 0; 0)$ параллельно оси y .

3.58. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку

$M(2; -4; 3)$ и через: 1) ось x ; 2) ось y ; 3) ось z .

3.59. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

- 1) через точку $M(2; -3; 3)$ параллельно плоскости xy ;
 2) через точку $N(1; -2; 4)$ параллельно плоскости xz ;
 3) через точку $P(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости yz .

3.60. Вычислить расстояние d от точки M от плоскости в каждом из следующих случаев:

- 1) $M(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$; 2) $M(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z = 0$;
 3) $M(1; 2; -3)$, $5y + 4 = 0$; 4) $M(3; -6; 7)$, $4x - 3z - 1 = 0$.

3.61. Вычислить расстояние d от точки $P(-1; 1; -2)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$.

3.62. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между двумя параллельными плоскостями:

- 1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$ и $x - 2y - 2z - 6 = 0$;

2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.

3.63. На оси y найти точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстояние $d = 4$.

3.64. На оси z найти точку, равноудаленную от точки $M(1; -2; 0)$ и от плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

65. На оси x найти точку, равноудаленную от двух плоскостей:
 $12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$.

§3. Прямая в пространстве

3.66. Построить прямые: 1) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$. Определить их направляющие векторы.

3.67. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; 3; 0)$ параллельно вектору $\vec{u} = \{-1; 1; 1\}$.

3.68. Построить прямые $\begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и указать их направляющие вектора.

3.69. Составить канонические уравнения прямых, проходящих через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси x ;

4) оси y ; 5) прямой $\begin{cases} 2x - 5y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$; 6) прямой $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 5t + 2 \end{cases}$.

3.70. Составить канонические уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

1) $(1; -2; 1)$ и $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$ и $(1; 0; -3)$;
 3) $(2; -1; -3)$ и $(2; -1; 5)$; 4) $(4; 4; 4)$ и $(-4; 4; -2)$.

3.71. Составить параметрические уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

1) $(3; -1; 2)$ и $(2; 1; 1)$; 2) $(1; 1; -2)$ и $(3; -1; 0)$;
 3) $(2; -1; -3)$ и $(2; -1; 5)$; 4) $(2; -1; -1)$ и $(2; 1; 1)$.

3.72. Написать уравнения траектории точки $M(x; y; z)$, которая, выйдя из точки $A(4; -3; 1)$, движется со скоростью $\vec{V} = (2, 3, 1)$.

3.73. Через точки $M_1(-6; 6; 5)$ и $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

3.74. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$, $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

3.75. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(2; 6; -2)$. Найти направляющие косинусы прямой.

3.76. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 3; -5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

3.77. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 4; -1)$ параллельно прямой $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$.

3.78. Составить канонические уравнения следующих прямых:

$$1) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x = 0 \\ 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}.$$

3.79. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

3.80. Проверить, будут ли данные прямые параллельны:

$$1) \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3z - 9 = 0 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}.$$

3.81. Показать, что прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} y = x + 1 \\ z = 1 - x \end{cases}$.

3.82. Доказать перпендикулярность прямых:

$$1) \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases};$$

$$2) \quad \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases};$$

$$3) \quad \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

3.83. Найти острый угол между прямыми: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

3.84. Найти тупой угол между прямыми $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 0 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t - 3 \end{cases}$.

3.85. Определить косинус угла между прямыми:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}.$$

3.86. Определить угол между прямыми: $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -2z + 1 \end{cases}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$.

3.87. Найти угол между прямыми: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$.

3.88. Доказать, что прямые, заданные уравнениями $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -4t + 6 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x = t + 5 \\ y = -4t - 1 \\ z = t - 4 \end{cases}, \text{ пересекаются.}$$

3.89. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются?

3.90. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M(1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

3.91. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(a; b; c)$:

1) параллельно оси z ; 2) перпендикулярно к оси z .

3.92. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; -8; 4)$ на ось z .

Указание: Искомая прямая проходит ещё через точку $(0; 0; 4)$.

3.93. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; -3; 5)$ на ось y .

3.94. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \text{ и } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

§4. Прямая в пространстве и плоскость

3.95. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

3.96. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; -1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

3.97. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; -3)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

3.98. Найти угол между прямой $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

3.99. Доказать, что прямая $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -4t + 1 \\ z = 4t - 5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

3.100. Показать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{5}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{5}$ лежит в этой плоскости.

3.101. Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

3.102. При каком значении n прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

3.103. При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$?

3.104. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ и точку $M(3, 4, 0)$.

3.105. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

3.106. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

3.107. Найти точку пересечения:

1) прямой $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$ с плоскостью $3x - 2y + z = 3$;

2) прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$;

3) прямой $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = -3y - 3 \end{cases}$ с плоскостью $2x + 3y + z - 1 = 0$.

3.108. Прямая проходит через точки $A(0; 0; 4)$ и $B(2; 2; 0)$. Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью $x + y - z = 0$ и угол между ними.

3.109. Найти проекцию точки $M(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

3.110. Найти проекцию точки $M(2; -1; 3)$ на прямую
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$
.

3.111. Составить уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ на плоскость $x + y + z - 5 = 0$.

3.112. Найти точку M , симметричную точке $N(4; 1; 6)$ относительно прямой
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$
.

3.113. Найти точку P , симметричную точке $Q(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

3.114. Показать, что прямые $\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, в которой они расположены.

3.115. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ и $\begin{cases} x = 3z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases}$ пересекаются, и найти точку их пересечения.

3.116. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(1; 0; -1)$ на прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.

3.117. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой
$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$
.

3.118. Найти проекцию точки $M(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

3.119. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t - 2 \end{cases}$$
 параллельно прямой
$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$$
.

3.120. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

3.121. Вычислить расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих трёх случаев:

1) $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$;

2) $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = -t + 4 \\ z = -2t - 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = -3t + 5 \\ z = -5t + 5 \end{cases}$;

3) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x = 6t + 9 \\ y = -2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$.

Глава 4

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Окружность

4.1. Дана точка $A(-4; 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA .

4.2. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2; 1)$.

4.3. Составить уравнение окружности, зная, что точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из её диаметров.

4.4. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ и $C(1; -1)$.

4.5. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$. Построить кривую.

4.6. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $y = -x$ и через точку $A(4; 4)$.

4.7. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси OY в начале координат и пересекает ось OX в точке $(6; 0)$.

4.8. Построить кривые:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 4y = 0$; 5) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; 6) $x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0$.

4.9. Показать, что точка $A(3; 0)$ лежит внутри окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, и написать уравнение хорды, делящейся в точке A пополам.

4.10. Написать уравнения окружностей радиуса $R = \sqrt{5}$, касающихся прямой $x - 2y - 1 = 0$ в точке $M(3; 1)$.

§2. Эллипс

4.11. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(-2; 0)$ и $F_2(2; 0)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 6.

4.12. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(0; -1)$ и $F_2(0; 1)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 4.

4.13. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его полуоси равны 5 и 2.

4.14. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что его полуоси равны 7 и 2.

4.15. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

4.16. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$.

4.17. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Построить его и найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет.

4.18. Эллипс касается оси абсцисс в точке $(3; 0)$ и оси ординат в точке $(0; -4)$. Написать уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

4.19. Эллипс с центром в начале координат и симметричный относительно осей координат проходит через точку $M(2; 2)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Составить уравнение эллипса.

4.20. Составить уравнение эллипса, если точки $F_1(-1; 0)$ и $F_2(1; 0)$ являются его фокусами, а длина большой оси равна 4.

4.21. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой полуосей.

4.22. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого расстояния от одного из фокусов до концов большой оси равны 5 и 1.

4.23. Определить траекторию точек $M(x; y)$, расстояния которых до точки $A(0; 1)$ в два раза меньше расстояний до прямой $y - 4 = 0$.

4.24. Определить траекторию точки M , которая при своем движении остается втрое ближе к точке $A(1; 0)$ чем к прямой $x = 9$.

4.25. Найти расстояние от левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ до центра окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$.

4.26. Найти общие точки эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его «верхней» вершине.

4.27. Написать уравнение окружности, центр которой находится в правом фокусе эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, а радиус окружности равен расстоянию между фокусами этого эллипса.

4.28. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; 2) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$; 3) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$;

4) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$. Построить кривые.

4.29. Построить кривые:

1) $x^2 + 5y^2 = 15$; 2) $9x^2 + 25y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;

4) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; 5) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

§ 3. Гипербола

4.30. Пользуясь определением гиперболы, составить её уравнение, если известно, что точки $F_1(-2;0)$ и $F_2(2;0)$ являются фокусами гиперболы, а длина действительной оси равна 2.

4.31. Пользуясь определением гиперболы, составить её уравнение, если известно, что точки $F_1(0;-3)$ и $F_2(0;3)$ являются фокусами гиперболы, а длина действительной оси равна 4.

4.32. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

4.33. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

4.34. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

4.35. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \sqrt{2}$. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

4.36. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет $\varepsilon = 1,4$. Найти уравнение гиперболы.

4.37. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно 14, а расстояние между вершинами равно 12.

4.38. Найти эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

4.39. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если дана точка $M(4,5;-1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$.

4.40. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon = 1,5$.

4.41. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

4.42. Определить область расположения кривых и построить их:

1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$; 3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$; 4) $x = \frac{2}{5}\sqrt{y^2 + 25}$.

4.43. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния от одной из ее вершин до фокусов равны 9 и 1.

4.44. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 - 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

4.45. Определить траекторию точки M , которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8;0)$, чем от прямой $x = -2$.

4.46. Найти каноническое уравнение гиперболы, асимптотами которой являются прямые $y = \pm x$, а фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.

4.47. Найти расстояния от центра окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ до асимптот гиперболы $x^2 - y^2 = 9$.

4.48. Найти эксцентриситет равнобочной гиперболы.

§ 4. Парабола

4.49. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси OX , с вершиной в начале координат и проходящей через точку $A(-3; -3)$.

4.50. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через начало координат, если ее директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$.

4.51. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = -12x$.

4.52. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$ и построить кривую.

4.53. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси OY , с вершиной в начале координат и проходящей через точку $A(-2; 4)$.

4.54. Через фокус параболы $y^2 = 12x$ проведена хорда, перпендикулярная к её оси. Найти длину хорды.

- 4.55. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $5x - 3y + 12 = 0$ с осью: 1) ординат; 2) абсцисс.
- 4.56. Составить уравнение множества точек, одинаково удалённых от точки $F(2; 0)$ и от прямой $y = 2$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.
- 4.57. Составить уравнение множества точек, одинаково удалённых от начала координат и от прямой $x = -4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.
- 4.58. Камень, брошенный под углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.
- 4.59. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 16 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 48 м от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 6 м от точки бросания?
- 4.60. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг её оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?
- 4.61. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии 0,5 м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью OX на расстоянии 0,75 м от точки O .
- 4.62. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(7; 2)$ и директриса $x - 5 = 0$.
- 4.63. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(4; 3)$ и директриса $y + 1 = 0$.
- 4.64. Написать уравнение параболы и её директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и симметрична относительно оси абсцисс. Построить прямую, окружность и параболу.
- 4.65. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси абсцисс параболой $y = 3 - 2x - x^2$. Построить обе кривые.
- 4.66. Составить уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = -6x$ и касающейся её директрисы.

4.67. Написать уравнение окружности с центром в фокусе параболы $y^2 = -4x$ и радиусом, равным фокусному расстоянию гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$.

4.68. Построить кривые, найдя дополнительные точки пересечения с осями координат:

1) $3y = 9 - x^2$; 2) $y^2 = 9 - 3x$; 3) $y^2 = 4 + x$; 4) $x^2 = 4 + 2y$.

4.69. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями и построить эти кривые:

1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{-x}$; 3) $y = -3\sqrt{-2x}$; 4) $y = -2\sqrt{x}$; 5) $x = -\sqrt{3y}$;

6) $x = 4\sqrt{-y}$; 7) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$; 8) $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$; 9) $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$.

4.70. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси y . Построить окружность, прямую и параболу.

4.71. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси OX . Построить окружность, прямую и параболу.

§ 5. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

В задачах 4.72 - 4.102 построить кривые. Там, где необходимо, преобразовать уравнения кривых параллельным переносом осей координат. Построить новые и старые оси координат.

4.72. $4x^2 + 3y^2 = 24$.

4.73. $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$.

4.74. $4x^2 - 3y^2 + 60 = 0$.

4.75. $x^2 + 4x + 8y - 12 = 0$.

4.76. $2x^2 + y^2 + 4x + 8 = 0$.

4.77. $2x - 3 - xy + 4y = 0$.

4.78. $8x^2 - 9y + 11 = 0$.

4.79. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$.

4.80. $x + 2xy - 3y = 4$.

4.81. $x^2 + 2x + 3y = 0$.

4.82. $x^2 + 3y^2 + 2x = 0$.

4.83. $x^2 - 2y^2 - 4y - 2 = 0$.

4.84. $x^2 + 2x + 5y - 10 = 0$.

4.85. $3x^2 + 10y^2 + 2 = 0$.

4.86. $3x + xy - 3y - 2 = 0$.

4.87. $x^2 - x - y + 2 = 0$.

4.88. $x^2 + 3y^2 + 2x = 0$.

4.89. $y^2 - x^2 + 6y + 5 = 0$.

4.90. $y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$.

4.91. $3x^2 + 5y^2 = 0$.

4.92. $xy - 0,5y = 2x - 3$.

4.93. $y^2 - 2x + 4y = 0$.

4.94. $x - 2 + 3xy - 3y = 0$.

4.95. $x^2 + 9y + 4 = 0$.

4.96. $x^2 - 4y^2 = 0$.

4.97. $16x^2 + 9y^2 + 90y + 81 = 0$.

4.98. $x^2 - 8x - 2y + 16 = 0$.

4.99. $x^2 - y^2 + 2x - 6y - 8 = 0$.

4.100. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$.

4.101. $36x^2 + 4y^2 - 72x - 40y = 41$.

4.102. $y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$.

В задачах 4.103 - 4.106 преобразовать уравнения кривых поворотом системы координат. Построить новые и старые оси координат и кривые:

4.103. $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$.

4.104. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$.

4.105. $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$.

4.106. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$.

§ 6. Кривые в полярной системе координат

В задачах 4.107 - 4.115 преобразовать к полярным координатам уравнения линий и построить их:

4.107. $x^2 + y^2 = 4$.

4.108. $x^2 - y^2 = 9$.

4.109. $x + y = 4$.

4.110. $x = 2$.

4.111. $y = 3$.

4.112. $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

4.113. $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

4.114. $y^2 = 4x$.

4.115. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

В задачах 4.116 - 4.133 преобразовать уравнения линий к декартовым координатам и построить их:

4.116. $\rho \cos \varphi = 4$.

4.117. $\rho = 8 \sin \varphi$.

4.118. $\rho \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$.

4.119. $\rho = \frac{3}{\sin \varphi}$.

4.120. $\rho = 6(\sin \varphi - \cos \varphi)$.

4.121. $\rho = 2(\sin \varphi + \cos \varphi)$.

4.122. $\rho = 2(1 + \sin \varphi)$.

4.123. $\rho = 3(1 - \sin \varphi)$.

4.124. $\rho = 4 \cos^2 \varphi$.

4.125. $\rho = 4 \cos 2\varphi$.

4.126. $\rho = 4 \sin 2\varphi$.

4.127. $\rho = 4 \sin 3\varphi$.

$$4.128. \rho = 2(1 + \cos \varphi). \quad 4.129. \rho = 2(1 + \sin \varphi).$$

$$4.130. \rho = 2(1 - \sin \varphi). \quad 4.131. \rho = 3 \cos 3\varphi.$$

$$4.132. \rho = 4 \sin \varphi. \quad 4.133. \rho = 4 \cos \varphi.$$

§ 7. Поверхности второго порядка. Построение тел

В задачах 4.134 - 4.156 назвать и построить поверхности:

$$4.134. y = z^2 - 2z. \quad 4.135. z = -9 + y^2. \quad 4.136. y = -\sqrt{2x}.$$

$$4.137. y = \sqrt{1 - x^2}. \quad 4.138. y = -\sqrt{9 - x}. \quad 4.139. x = 1 - y^2. \quad 4.140.$$

$$y = -\sqrt{x^2 - 2x}. \quad 4.141. y^2 + z^2 = -3z. \quad 4.142. x^2 + 3y = 8x - 7.$$

$$4.143. 4x^2 = z^2 - 2z. \quad 4.144. 3z^2 + 4y^2 = 12. \quad 4.145. z^2 = 2y + y^2.$$

$$4.146. z - 3 = x^2 + 5y^2. \quad 4.147. x^2 + y^2 + 4z = 0. \quad 4.148. 4y^2 + 9z^2 - 36x = 0.$$

$$4.149. 36x - y^2 - 9z^2 = 0. \quad 4.150. x + 2 = 3y^2 + z^2. \quad 4.151. \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0.$$

$$4.152. 2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 36. \quad 4.153. 4x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0.$$

$$4.154. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0. \quad 4.155. x^2 + y^2 + 2y + z^2 = 0.$$

$$4.156. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 0.$$

В задачах 4.157 - 4.177 построить тело, ограниченное следующими поверхностями:

$$4.157. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad 4.158. \begin{cases} z = 4 - x^2 \\ 4x + y = 4 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases} \quad 4.159. \begin{cases} z = \frac{y^2}{2} \\ 2x + 3y = 12 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$4.160. \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ y = \frac{x^2}{2} \\ z = 0 \end{cases} \quad 4.161. \begin{cases} y = 2x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0, z = 0 \end{cases} \quad 4.162. \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^2 + y^2 \\ y = 1, z = 0 \end{cases}$$

$$4.163. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2z = y^2 \\ z = 0 \end{cases} . \quad 4.164. \begin{cases} y^2 = \frac{x}{2} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases} . \quad 4.165. \begin{cases} z = 4x^2 + 2y^2 + 1 \\ x + y = 3 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases} .$$

$$4.166. \begin{cases} x + y = 6 \\ y = \sqrt{3x} \\ z = 4y, z = 0 \end{cases} . \quad 4.167. \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x, y = -x \\ x = 1, z = 0 \end{cases} . \quad 4.168. \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x + y = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases} .$$

$$4.169. \begin{cases} z = (x-1)^2 \\ y = \frac{x}{2} \\ y = 0, z = 0 \end{cases} . \quad 4.170. \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ x + y = 2 \\ y = x, z = 0, x = 0 \end{cases} . \quad 4.171. \begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1 \\ y^2 = x \\ z = 0 \end{cases} .$$

$$4.172. \begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ x + y = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases} . \quad 4.173. \begin{cases} y^2 = x \\ z = 1 - x \\ z = 0 \end{cases} . \quad 4.174. \begin{cases} y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x} \\ x + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

$$4.175. \begin{cases} z = \sqrt{y} \\ y = 3x \\ x = 2, z = 0 \end{cases} . \quad 4.176. \begin{cases} z = 4 - x^2 \\ x + y = 2 \\ y = 2x, x = 0, z = 0 \end{cases} . \quad 4.177. \begin{cases} x = 4 + y^2 \\ y = 3z \\ x = 6, z = 0 \end{cases} .$$

Глава 5

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§1. Общие свойства функций

В задачах 5.1 - 5.20 найти область определения функций:

$$5.1. y = \sqrt{9 - x^2}. \quad 5.2. y = \sqrt[3]{4 - x^2}. \quad 5.3. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$5.4. y = \frac{1}{x^3 - x}. \quad 5.5. y = \sqrt{1 - |x|}. \quad 5.6. y = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}.$$

$$5.7. y = \frac{1}{\sqrt{x + |x|}}. \quad 5.8. y = \log_2(4x - 4 - x^2). \quad 5.9. y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}.$$

$$5.10. y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}). \quad 5.11. y = \frac{x-3}{\cos 2x}. \quad 5.12. y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}.$$

$$5.13. y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}. \quad 5.14. y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right). \quad 5.15. y = \operatorname{arctg}(x+1).$$

$$5.16. y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 16)]. \quad 5.17. y = \arcsin \ln x. \quad 5.18. y = \arccos\left(\frac{1-2x}{4}\right).$$

$$5.19. y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}. \quad 5.20. y = \ln \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[4]{x+5}.$$

В задачах 5.21 - 5.26 найти, при каких целых x определены функции:

$$5.21. y = \sqrt{-x} + \frac{x}{\sqrt{2+x}}. \quad 5.22. y = \log_{0,5}(x+6) - \sqrt{-2x-10}.$$

$$5.23. y = \sqrt{16-2x} \cdot \ln(x-5). \quad 5.24. y = 3^{-\sqrt{2x-16}} + \sqrt{9-x}.$$

$$5.25. y = \frac{\sqrt[4]{4+3x-x^2}}{x-3}. \quad 5.26. y = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{\log_3(x-2)}.$$

В задачах 5.27 - 5.37 найти множество значений функций:

$$5.27. y = |x-2| - 3. \quad 5.28. y = \sqrt{5-x^2}. \quad 5.29. y = \frac{1}{x+2}.$$

$$5.30. y = 2 + 2x - x^2. \quad 5.31. y = 4 + 4x + x^2. \quad 5.32. y = |x^2 - x - 6|.$$

$$5.33. \quad y = 2^{x^2 + 4x - 12}. \quad 5.34. \quad y = 4^{-\sqrt{x^2 + x}}. \quad 5.35. \quad y = \log_2(x - 3).$$

$$5.36. \quad y = 2 - 4 \sin x. \quad 5.37. \quad y = \begin{cases} x + 2, & x \in [0, 3] \\ x^2 + 10x - 16, & x \in (3, 8] \end{cases}$$

Определить, какие из функций 5.38 - 5.52 будут чётными, нечётными или функциями общего вида:

$$5.38. \quad y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}. \quad 5.39. \quad y = x^2 + \cos 3x. \quad 5.40. \quad y = x^2 + x \cdot \sin 2x.$$

$$5.41. \quad y = x^2 + x \cdot \cos x. \quad 5.42. \quad y = |x| - 4. \quad 5.43. \quad y = |x - 1| - 4.$$

$$5.44. \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}. \quad 5.45. \quad y = x^3 \cdot \ln(x^2 + 3). \quad 5.46. \quad y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$5.47. \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad 5.48. \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad 5.49. \quad y = |x| + 7e^{x^2}.$$

$$5.50. \quad y = \frac{x}{a^x - 1}. \quad 5.51. \quad y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}. \quad 5.52. \quad y = \ln \frac{1 - x}{1 + x}.$$

5.53. Какова будет функция $f(x)$, если она определена на всей числовой оси и для любых x_1 и x_2 , удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 = 0$, выполняется равенство: 1) $f(x_1) + f(x_2) = 0$; 2) $f(x_1) - f(x_2) = 0$?

В задачах 5.54 - 5.65 найти наименьший положительный период функции:

$$5.54. \quad y = \sin 2x. \quad 5.55. \quad y = \cos \frac{x}{3}. \quad 5.56. \quad y = \sin \frac{3}{2}x.$$

$$5.57. \quad y = \sin x + \cos x. \quad 5.58. \quad y = \operatorname{tg} 4x. \quad 5.59. \quad y = \operatorname{ctg} \frac{2}{5}x.$$

$$5.60. \quad y = |\cos 2x|. \quad 5.61. \quad y = \cos^2 3x. \quad 5.62. \quad y = \sin \left(\frac{4}{3}x - 2\right).$$

$$5.63. \quad y = \sin 2x + \cos 3x. \quad 5.64. \quad y = \sin \frac{5}{3}x + \operatorname{tg} 2x. \quad 5.65. \quad y = \lg \cos 2x.$$

5.66. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Что можно сказать об этой функции, если для любых x_1 и x_2 найдется такое число $\varepsilon > 0$, что из условия $|x_2 - x_1| = \varepsilon$ будет следовать, что $f(x_1) - f(x_2) = 0$?

В задачах 5.67 - 5.81 найти функцию, обратную данной:

$$5.67. \quad y = 3x. \quad 5.68. \quad y = 2 - 3x. \quad 5.69. \quad y = x^2 - 4 \quad (x \geq 0).$$

$$5.70. \quad y = x^2 - 4x \quad (x \leq 2). \quad 5.71. \quad y = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2). \quad 5.72. \quad y = \frac{-3}{x}.$$

$$\begin{array}{lll}
5.73. \quad y = \frac{1}{2-x} & 5.74. \quad y = \sqrt[3]{x^2} \quad (x \leq 0) & 5.75. \quad y = \sqrt[3]{x+4} \\
5.76. \quad y = \sqrt{x^3} & 5.77. \quad y = 5^{x+2} & 5.78. \quad y = 2 + \log_3(x+4) \\
5.79. \quad y = \frac{2^x}{1+2^x} & 5.80. \quad y = 3 \sin 2x, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} & 5.81. \quad y = \log_x 2
\end{array}$$

В задачах 5.82 - 5.126 построить графики функций:

$$\begin{array}{lll}
5.82. \quad y = x^2 & 5.83. \quad y = -2x^2 & 5.84. \quad y = 1 - x^2 \\
5.85. \quad y = x^2 + 2x + 1 & 5.86. \quad y = 3 - 2x - x^2 & 5.87. \quad y = 2x^2 - x \\
5.88. \quad y = 4x - x^2 & 5.89. \quad y = 2x^2 + 3x - 1 & 5.90. \quad y = \sqrt{x} \\
5.91. \quad y = \sqrt{-x} & 5.92. \quad y = \sqrt{x-1} & 5.93. \quad y = \sqrt{x-1} + 2 \\
5.94. \quad y = -|x| & 5.95. \quad y = |x+1| & 5.96. \quad y = 2 + |x+1| \\
5.97. \quad y = \frac{|x|}{x} & 5.98. \quad y = x|x| & 5.99. \quad y = x + 2 + |x| \\
5.100. \quad y = ||x-1| - 2| & 5.101. \quad y = \frac{2}{x} & 5.102. \quad y = \frac{-3}{x} \\
5.103. \quad y = \frac{x+1}{x} & 5.104. \quad y = \frac{1-x}{x} & 5.105. \quad y = \frac{2}{x+1} \\
5.106. \quad y = \frac{2x+3}{x+1} & 5.107. \quad y = \frac{2}{|x|} & 5.108. \quad y = \frac{1}{|x-2|} \\
5.109. \quad y = 2^x & 5.110. \quad y = 2^{-x} & 5.111. \quad y = 2^{-2x} \\
5.112. \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & 5.113. \quad y = 4^{x+1} & 5.114. \quad y = e^{-x^2} \\
5.115. \quad y = a^{x-2} & 5.116. \quad y = 1 - 2^x & 5.117. \quad y = \sin x \\
5.118. \quad y = \sin 2x & 5.119. \quad y = 2 \sin \frac{x}{2} & 5.120. \quad y = 1 + \sin x \\
5.121. \quad y = |\sin x| & 5.122. \quad y = |\sin x| + \sin x & 5.123. \quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
5.124. \quad y = \sin|x| & 5.125. \quad y = \cos \frac{x}{3} & 5.126. \quad y = 4 \cos 3x
\end{array}$$

§2. Числовые последовательности и их пределы

В задачах 5.127 - 5.141 записать вид общего члена a_n последовательности $\{a_n\}$ по виду её первых трёх членов:

$$\begin{array}{lll}
 5.127. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots & 5.128. 1, -1, 1, -1, \dots & 5.129. 3, 5, 7, 9, \dots \\
 5.130. \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots & 5.131. 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots & 5.132. \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \dots \\
 5.133. -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots & 5.134. \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots & 5.135. \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots \\
 5.136. \ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots & 5.137. \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{8}, \dots & 5.138. \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}, \dots \\
 5.139. \frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{7!}, \dots & 5.140. \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{7}\right)^3, \dots & 5.141. \frac{1}{2!}, \frac{3}{4!}, \frac{5}{6!}, \dots
 \end{array}$$

В задачах 5.142 - 5.150 записать общий член последовательностей и выяснить, какие из данных ниже последовательностей являются ограниченными снизу, ограниченными сверху, просто ограниченными или неограниченными:

$$\begin{array}{lll}
 5.142. 2, 4, 6, \dots & 5.143. -1, 2, -3, 4, \dots & 5.144. \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \\
 5.145. 1, -1, 1, -1, \dots & 5.146. \sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots & 5.147. \ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots \\
 5.148. \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \dots & 5.149. 2, \frac{4}{3!}, \frac{6}{5!}, \dots & 5.150. \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots
 \end{array}$$

В задачах 5.151 - 5.159 определить, какие из данных ниже последовательностей являются возрастающими, неубывающими, убывающими, невозрастающими:

$$\begin{array}{lll}
 5.151. 1, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{13}, \dots & 5.152. \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots & 5.153. 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots \\
 5.154. 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots & 5.155. 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots & 5.156. \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 4}, \dots \\
 5.157. \cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \dots & 5.158. \frac{1}{2!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{8!}, \dots & 5.159. \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \dots
 \end{array}$$

5.160. Пользуясь определением предела последовательности, показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots$ имеет пределом число 1.

5.161. Пользуясь определением предела последовательности, показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ имеет пределом число 0.

5.162. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что число 2 не является пределом последовательности с общим членом

$$a_n = \frac{2n+1}{4n+1} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

5.163. Существует ли предел последовательностей $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ (если да, то найти его), где:

$$1) a_n = 1 + (-1)^n; \quad 2) a_n = (-1)^n(2n+1), \quad 3) a_n = n \cdot \sin \frac{\pi n}{2};$$

$$4) a_n = \frac{\cos \pi n}{\ln n}; \quad 5) a_n = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

В задачах 5.164 - 5.194 вычислить пределы числовых последовательностей:

$$5.164. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2}. \quad 5.165. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+99}{n^2}. \quad 5.166. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}.$$

$$5.167. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}. \quad 5.168. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right). \quad 5.169. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 10n^2 + 1}{100n^2 + 2n}.$$

$$5.170. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}. \quad 5.171. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}. \quad 5.172. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}.$$

$$5.173. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+n!}{(n+3)!}. \quad 5.174. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot (1+2+\dots+n). \quad 5.175. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}).$$

$$5.176. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+3} - n. \quad 5.177. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n-n}).$$

$$5.178. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3}{2^n + 3}. \quad 5.179. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} - 3}{\frac{1}{2^n} + 3}. \quad 5.180. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

$$\begin{array}{lll}
5.181. \quad \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\sin 3\alpha_n}{\alpha_n} & 5.182. \quad \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n} & 5.183. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n \\
5.184. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n & 5.185. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^n & 5.186. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \\
5.187. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n & 5.188. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{n}{2}} & 5.189. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n \\
5.190. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n} & 5.191. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} & 5.192. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2} \\
5.193. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+3} & 5.194. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n \cdot (2n+2)}\right) &
\end{array}$$

§3. Функции непрерывного аргумента. Предел функции в точке

Пусть функция определена на всей числовой прямой. Какому условию она удовлетворяет, если:

5.195. для любого числа M найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $|x| > N$, выполняется неравенство $f(x) > M$?

5.196. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $x < N$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$?

5.197. для любого числа M найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $x > N$, выполняется неравенство $f(x) < M$?

5.198. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$?

5.199. для любого числа $M > 0$ найдётся такое число N , что для любого x , удовлетворяющего условию $x > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$?

5.200. для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого числа $\delta > 0$ из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$?

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки a . Какой вывод можно сделать, если:

5.201. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$?

5.202. для любого числа M существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $f(x) < M$?

5.203. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| < \varepsilon$?

5.204. для любого числа M существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $f(x) > M$?

В задачах 5.205 - 5.227 вычислить пределы:

$$5.205. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}. \quad 5.206. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - 5}. \quad 5.207. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^4 + 2x}.$$

$$5.208. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{4 - \frac{3}{x^2}}. \quad 5.209. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x + 2}. \quad 5.210. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right).$$

$$5.211. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}. \quad 5.212. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}. \quad 5.213. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}.$$

$$5.214. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}. \quad 5.215. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}. \quad 5.216. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$5.217. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right). \quad 5.218. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}. \quad 5.219. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}.$$

$$5.220. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}. \quad 5.221. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{16 + x^2} - 4}. \quad 5.222. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$5.223. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2}. \quad 5.224. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}. \quad 5.225. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x}).$$

$$5.226. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x). \quad 5.227. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}).$$

$$5.228. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

В задачах 5.229 - 5.251 вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

$$5.229. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}. \quad 5.230. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 5x}. \quad 5.231. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}.$$

$$\begin{array}{lll}
5.232. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin 4x}}{x} & 5.233. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sin \frac{x}{2}} & 5.234. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \\
5.235. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} & 5.236. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & 5.237. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\
5.238. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} & 5.239. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}} & 5.240. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg}(x - 3)}{x^2 - 9} \\
5.241. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{5x} & 5.242. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} & 5.243. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}} \\
5.244. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} & 5.245. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) & 5.246. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x \\
5.247. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2} & 5.248. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - \cos x} & 5.249. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot (\sqrt{1 + x} - 1)} \\
5.250. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} & 5.251. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x - 1} &
\end{array}$$

Вычислить пределы 5.252 - 5.272, применяя второй замечательный предел:

$$\begin{array}{lll}
5.252. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x & 5.253. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} & 5.254. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} \\
5.255. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{1/x} & 5.256. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1+x} & 5.257. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} \\
5.258. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x} \right)^{2x} & 5.259. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x} \right)^x & 5.260. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x-1} \\
5.261. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} & 5.262. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^x & 5.263. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{x^2} \\
5.264. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} & 5.265. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} & 5.266. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x} \\
5.267. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x} & 5.268. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x + a) - \ln x) & 5.269. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}
\end{array}$$

$$5.270. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}. \quad 5.271. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\frac{x}{2}}}{\sin 2x}. \quad 5.272. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

5.273. Первоначальный вклад в банк - A_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Найти размер вклада через t лет при непрерывном начислении процентов.

Указание: Найти размер вклада A_n через t лет при начислении процентов по вкладу n раз в году и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

5.274. Дан правильный треугольник со стороной a . Из трёх высот этого треугольника строится новый правильный треугольник и так n раз. Найти предел суммы площадей всех треугольников при $n \rightarrow \infty$.

5.275. В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг опять вписан квадрат и так n раз. Найти предел суммы площадей всех кругов и площадей всех квадратов при $n \rightarrow \infty$.

§4. Непрерывность функции. Точки разрыва

Найти точки разрыва и построить графики функций:

$$5.294. y = \frac{3}{x}. \quad 5.295. y = \operatorname{tg} x. \quad 5.296. y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$5.297. y = \frac{x+1}{|x+1|}. \quad 5.298. y = x + \frac{x-1}{|x-1|}. \quad 5.299. y = 2 - \frac{|x|}{x}.$$

$$5.300. y = \frac{x^3 + x}{2|x|}. \quad 5.301. y = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}.$$

В задачах 5.302 - 5.304 найти точки разрыва функций:

$$5.302. y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}. \quad 5.303. y = 2^{\frac{1}{x-2}}. \quad 5.304. y = 3^{\frac{x}{x+3}}.$$

В задачах 5.305 - 5.306 построить графики функций и указать точки разрыва. Какие из условий непрерывности в них выполнены и какие не выполнены?

$$5.305. y = \begin{cases} 2, & x=0, x=\pm 2 \\ 4-x^2, & 0 < |x| < 2 \\ 4, & |x| > 2 \end{cases}. \quad 5.306. y = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{при } x \neq 2 \\ 0, & \text{при } x = 2 \end{cases}.$$

5.307. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x + \frac{\pi}{2}}, & x < -\frac{\pi}{2} \\ e^{\operatorname{ctg} x}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{1 - \ln x}, & x > 0 \end{cases}.$$

При каком значении a функции непрерывны на всей числовой оси:

$$5.308. f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases} \quad 5.309. f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ ax^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$$

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Производная функции

В задачах 6.1 - 6.9 найти производные функций по определению:

$$6.1. y = 3x + 5.$$

$$6.2. y = x^2 - 2x.$$

$$6.3. y = x^3.$$

$$6.4. y = \sqrt{x}.$$

$$6.5. y = \frac{1}{x}.$$

$$6.6. y = \frac{1}{x^2}.$$

$$6.7. y = \sin x.$$

$$6.8. y = \ln x.$$

$$6.9. y = \cos x.$$

В задачах 6.10 - 6.27, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные функций:

$$6.10. y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{x} + 3.$$

$$6.11. y = \frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{\sqrt{x^3}}{x}.$$

$$6.12. y = \frac{1}{3-x}.$$

$$6.13. s = \frac{2t^4}{t^2 + 3t + 1}.$$

$$6.14. y = \frac{5}{\sin x} + \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$6.15. y = \frac{x}{3 - \cos x} - \frac{x^3}{\sqrt{7}}.$$

$$6.16. y = x^2(\sqrt{x} + \operatorname{tg} x).$$

$$6.17. y = x^3 \cdot 3^x + \operatorname{ctg} 3.$$

$$6.18. y = e^x \cdot \arcsin x.$$

$$\begin{array}{lll}
6.19. & y = 10^x \cdot \log_7 x. & 6.20. & y = x \cdot (\log_5 x - 1). & 6.21. & y = \frac{3x^2 + \operatorname{ctg} x}{1 - \sqrt[3]{x}}. \\
6.22. & y = \frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}. & 6.23. & y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x}. & 6.24. & y = \frac{\arccos x}{\ln x}. \\
6.25. & y = \frac{2^x - 2}{\arcsin x}. & 6.26. & y = \frac{\arccos x}{e^x + 3^x}. & 6.27. & y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log_2 x}.
\end{array}$$

В задачах 6.28 - 6.69 найти производные сложных функций:

$$\begin{array}{lll}
6.28. & y = \sin 4x. & 6.29. & y = \operatorname{tg}^4 x. & 6.30. & y = \arcsin \sqrt{x}. \\
6.31. & y = 5 \cdot \sqrt[5]{4x + 3}. & 6.32. & y = \sqrt{1 + 4x - x^2}. & 6.33. & y = \sqrt[4]{(x^2 - 1)^5}. \\
6.34. & y = \sqrt[3]{2x^3 + 1} + \sqrt[4]{3}. & 6.35. & y = x \cdot \sqrt{1 + 5x} + \sqrt{\ln 2}. & 6.36. & y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2}. \\
6.37. & y = \frac{2}{\sqrt{1 + x + x^3}}. & 6.38. & y = 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{6}}. & 6.39. & y = \sqrt[3]{(1 + \sin^2 x)^5}. \\
6.40. & y = \frac{1 - x^3}{\operatorname{arctg} e^{2x}}. & 6.41. & y = \frac{\ln \sin 3x}{\ln \cos 4x}. & 6.42. & y = \frac{x}{\cos^3 e^{2x}}. \\
6.43. & y = \frac{\cos x}{1 + \ln \sin 3x}. & 6.44. & y = e^{\frac{1}{\ln x}}. & 6.45. & y = x^2 \cdot 10^{\frac{1}{x}}. \\
6.46. & y = x^9 \cdot 9^{\ln x}. & 6.47. & y = 2^{x^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{4}{x}. & 6.48. & y = x^3 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2}{3x^2}. \\
6.49. & y = \frac{1}{\cos^6 e^{\frac{x}{2}}}. & 6.50. & y = \frac{1}{\arccos^4 2x}. & 6.51. & y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}. \\
6.52. & y = \sqrt{\arcsin 2^x}. & 6.53. & y = \sqrt{x + \sqrt{x}}. & 6.54. & y = 2 \cdot \sqrt[3]{x^5 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}}. \\
6.55. & y = \ln \left(\frac{2}{x^3} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). & 6.56. & y = \ln \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} \right). & 6.57. & y = \ln^2 (3\sqrt{9 - 5x}). \\
6.58. & y = \arccos \sqrt{1 - x^2}. & 6.59. & y = \operatorname{arctg}^3 2^x. & 6.60. & y = 3^x \operatorname{arctg} \sin x. \\
6.61. & y = e^{x^2 \operatorname{ctg} \frac{4}{3x}}. & 6.62. & y = 2^{x\sqrt{x-1}}. & 6.63. & y = 5^{-x^2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}.
\end{array}$$

$$6.64. y = \arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{2x^2}{3}\right). \quad 6.65. y = \arccos\frac{2x^2}{1+x^4}. \quad 6.66. y = \left(\operatorname{arctg}\frac{3-x}{x-5}\right)^2.$$

$$6.67. y = \operatorname{arctg}^3\frac{1}{\sqrt{x}}. \quad 6.68. y = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}}. \quad 6.69. y = \log_6\frac{1-e^{-x}}{e^x}.$$

В задачах 6.70 - 6.81 найти производные неявно заданных функций:

$$6.70. xy = y^3 - 2x^2. \quad 6.71. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 6.72. x^2 - 5y^2 + 4xy - 1 = 0.$$

$$6.73. y = 1 + xe^y. \quad 6.74. x^2 + e^{xy} = y^2. \quad 6.75. y = \sin x + \cos(x - y).$$

$$6.76. x + y = e^x + e^y. \quad 6.77. \ln y = \arcsin\frac{x}{y}. \quad 6.78. \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 0.$$

$$6.79. 2^{xy} = x^2 - y^2. \quad 6.80. y = \cos(2x + y). \quad 6.81. \sin(x \cdot y) = x.$$

В задачах 6.82 - 6.85 найти производные неявно заданных функций в указанных точках:

$$6.82. x^2 + y^2 = 1 \text{ в точке } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad 6.83. x = y + \sin y \text{ в точке } (0; 0).$$

$$6.84. x^2 + xy + y^2 = 3 \text{ в точке } (0; -\sqrt{3}). \quad 6.85. (x-1)y = ye^y - xe^x \text{ в точке } (1; 1).$$

В задачах 6.86 - 6.94 найти производные функций, используя метод логарифмического дифференцирования:

$$6.86. y = x^x. \quad 6.87. y = (\sin x)^{\cos x}. \quad 6.88. y = x^{\ln x}.$$

$$6.89. y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x. \quad 6.90. y = (x^2 + 1)^{\sin x}. \quad 6.91. y = x^{\arcsin x}.$$

$$6.92. y = \sqrt[x]{\frac{1-x}{1+x}}. \quad 6.93. y = \sqrt[x]{\arcsin\frac{x}{3}}. \quad 6.94. y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

В задачах 6.95 - 6.106 найти производные функций, заданных параметрически:

$$6.95. \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{cases} \quad 6.96. \begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \quad 6.97. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
6.98. \quad \begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases} & 6.99. \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} & 6.100. \quad \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \\
6.101. \quad \begin{cases} x = \frac{1+t^3}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases} & 6.102. \quad \begin{cases} x = \sin \frac{t}{2} \\ y = \cos t \end{cases} & 6.103. \quad \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases} \\
6.104. \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \sqrt{t} + 1 \\ y = \sqrt{t} \cdot e^{\sqrt{t}} \end{cases} & 6.105. \quad \begin{cases} x = \sin t - t \\ y = \cos t - t \end{cases} & 6.106. \quad \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}
\end{array}$$

В задачах 6.107 - 6.122 найти производные указанного порядка от заданных функций:

$$6.107. \quad y = x^3 + 2x^2 - 4x, \quad y''' = ?$$

$$6.108. \quad y = \ln x, \quad y^{(4)} = ?$$

$$6.109. \quad y = x^5, \quad y^{(5)} = ?$$

$$6.110. \quad y = \sin^2 x, \quad y^{(6)} = ?$$

$$6.111. \quad y = e^{x^2}, \quad y''' = ?$$

$$6.112. \quad y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad y'' = ?$$

$$6.113. \quad y = (1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x, \quad y'' = ?$$

$$6.114. \quad x^3 - 3xy + y^3 = 0, \quad y'' = ?$$

$$6.115. \quad y = \operatorname{tg}(x+y), \quad y'' = ?$$

$$6.116. \quad xy = e^{x+y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$6.117. \quad s = 1 + te^s, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = ?$$

$$6.118. \quad \begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}, \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = ?$$

$$6.119. \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = ?$$

$$6.120. \quad \begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$6.121. \quad \begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi) \\ y = a(1 - \cos \varphi) \end{cases}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$6.122. \quad \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}, \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = ?$$

§2. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях

В задачах 6.123 - 6.125 найти приращение функции Δf и её дифференциал df (используя определение дифференциала):

6.123. $f(x) = x^3$ в точке $x = 0$, если $\Delta x = 0,3$.

6.124. $f(x) = 6x^2 + x$ в точке $x = 1$, если $\Delta x = 0,01$.

6.125. $f(x) = x^2 - 2x$ в точке $x = 3$, если $\Delta x = -0,01$.

В задачах 6.126 - 6.127 найти приращение функции и её дифференциал (используя формулу $dy = y'dx$):

6.126. $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$, если $\Delta x = 0,41$.

6.127. $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ в точке $x = 9$, если $\Delta x = -0,01$.

В задачах 6.128 - 6.151 найти дифференциалы следующих функций:

6.128. $y = 2\sin x$. 6.129. $s = \frac{gt^2}{2}$. 6.130. $s = a \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$.

6.131. $v = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. 6.132. $\rho = a \cos^2 2\varphi$. 6.133. $y = x^2 \cdot 10^{\frac{1}{x}}$.

6.134. $y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2}$. 6.135. $y = 2^{\sin x}$. 6.136. $y = 10^{x \cdot \arcsin x}$.

6.137. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$. 6.138. $y = e^{\frac{1}{x}} \cdot \log_5 x$. 6.139. $y = x^9 \cdot 9^{\frac{x}{\ln x}}$.

6.140. $y = 3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2^{2x}}$. 6.141. $y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. 6.142. $y = \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{x}$.

6.143. $y = \frac{1}{\sin^3 2x}$. 6.144. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg}^3 5x}$. 6.145. $y = \log_6 \frac{1 - e^{-x}}{e^x}$.

6.146. $y = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$. 6.147. $y = 4^{\ln \sin 2x}$. 6.148. $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-5}{x+5}$.

6.149. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$. 6.150. $y = x^2 \cdot \sin \sqrt{x}$. 6.151. $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

6.152. Вычислить $f(1,05)$, если $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$.

6.153. Вычислить приближенно:

1) $\sqrt{70}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{17}$; 4) $\sqrt[3]{7,98}$;

- 5) $\sqrt[4]{15,8}$; 6) $(1,01)^9$; 7) $(0,98)^8$; 8) $e^{0,1}$;
 9) $e^{-0,03}$; 10) $\ln 0,984$; 11) $\operatorname{tg} 45^{\circ} 30'$; 12) $\operatorname{tg} 44^{\circ}$;
 13) $\operatorname{tg} 46^{\circ}$; 14) $\sin 1,55$; 15) $\arcsin 0,54$; 16) $\operatorname{arctg} 0,96$.

§3. Применение производной в геометрии и физике

В задачах 6.154 - 6.167 написать уравнения касательной и нормали к кривым в заданной точке:

6.154. $f(x) = x^2 + 4x - 3$, точка $(1; 2)$.

6.155. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, точка $(1; -4)$.

6.156. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

6.157. $y = \sqrt[3]{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 9$.

6.158. $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = e$.

6.159. $y = 2x - \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

6.160. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ в точке пересечения кривой с осью x .

6.161. $y = \arccos 3x$ в точке пересечения кривой с осью y .

6.162. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ в начале координат.

6.163. $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точке пересечения этой кривой с параболой $y = 2x^2$.

6.164. $y^4 = 3x^3$ в точке $(3; 3)$.

6.165. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке $(1; 1)$.

6.166. $x^4 + 2y^3 - 3xy = 0$ в точке $(1; 1)$.

6.167. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ в точке $M(-9; -8)$.

6.168. Написать уравнение касательной к кривой $y = x \ln x$ в точке, в которой нормаль к этой кривой параллельна прямой $2x - 2y + 3 = 0$.

В задачах 6.169 - 6.172 написать уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически:

6.169. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке с координатами $(4; 8)$.

6.170. $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t = 0$.

6.171. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = a^t \end{cases}$ при $t = 0$.

6.172. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{2}$.

6.173. Написать уравнения касательных к кривой $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, которые перпендикулярны прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

6.174. В какой точке касательная к кривой $y^2 = x^3$ перпендикулярна прямой $4x - 3y + 2 = 0$?

6.175. На линии $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

6.176. На кривой $y = x^3$ найти точку, в которой касательная параллельна биссектрисе первого координатного угла.

6.177. Найти углы, под которыми пересекаются данные линии:

1) $y = x^2$ и $y = x^3$; 2) $y = x^2$ и $y = kx$; 3) $x^2 + y^2 = 4$ и $x + 2y = 2$.

6.178. Точка движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 + t - 1$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (s дается в метрах, t - в секундах).

6.179. Точка совершает колебательное движение по оси абсцисс по закону $x = \cos \omega t$. Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x ?

6.180. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t = 0$, определяется формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$. Найти силу тока в конце десятой секунды.

§4. Правило Лопиталя

В задачах 6.181 - 6.198 вычислить пределы, раскрыв неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$:

$$6.181. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$6.182. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}.$$

$$6.183. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^9 - 1}.$$

$$6.184. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

$$6.185. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}.$$

$$6.186. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$6.187. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

$$6.188. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$6.189. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$6.190. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}.$$

$$6.191. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$6.192. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}.$$

$$6.193. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}.$$

$$6.194. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}.$$

$$6.195. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$6.196. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}.$$

$$6.197. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 5x - e^{5x}}{\sin^2 4x}.$$

$$6.198. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}.$$

В задачах 6.199 - 6.209 вычислить пределы, раскрыв неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$:

$$6.199. \text{1) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}, \text{ 2) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}. \quad 6.200. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}. \quad 6.201. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$6.202. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 16}{x^4 + 3x^2 + 8}.$$

$$6.203. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$6.204. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

$$6.205. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 5x}{\ln \sin 2x}.$$

$$6.206. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

$$6.207. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[100]{x}}.$$

$$6.208. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}.$$

$$6.209. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg}(x-1)}{\ln(1-x)}.$$

В задачах 6.210 - 6.224 вычислить пределы, раскрыв неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ сведением их к неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ путем алгебраических преобразований:

$$\begin{aligned}
 &6.210. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad 6.211. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \cdot \operatorname{ctg} x. \quad 6.212. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x. \\
 &6.213. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right). \quad 6.214. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right). \quad 6.215. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right). \\
 &6.216. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right). \quad 6.217. \lim_{x \rightarrow 0} x^x. \quad 6.218. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}. \quad 6.219. \\
 &\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\cos x}. \quad 6.220. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x. \quad 6.221. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\ln x}. \quad 6.222. \\
 &\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}. \quad 6.223. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}. \quad 6.224. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.
 \end{aligned}$$

§5. Исследование функций и построение графиков

В задачах 6.225 - 6.233 определить интервалы монотонности следующих функций:

$$\begin{aligned}
 &6.225. y = x^2. \quad 6.226. y = x^3 + 2x - 5. \quad 6.227. y = 1 - x + 2x^4. \\
 &6.228. y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x. \quad 6.229. y = \frac{1}{x-2}. \quad 6.230. y = x \ln x. \\
 &6.231. y = 2x^2 - \ln x. \quad 6.232. y = x^2 e^{-x}. \quad 6.233. y = x + \cos x.
 \end{aligned}$$

В задачах 6.234 - 6.242 исследовать функцию на экстремум:

$$\begin{aligned}
 &6.234. y = x^3. \quad 6.235. y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3. \quad 6.236. y = \frac{x^2 + 1}{x}. \\
 &6.237. y = \frac{1 - \ln x}{x}. \quad 6.238. y = x\sqrt{2 - x^2}. \quad 6.239. y = x^2 e^{\frac{1}{x}}. \\
 &6.240. y = x^{\frac{2}{3}} - x. \quad 6.241. y = \frac{\ln^2 x}{x}. \quad 6.242. y = x - \operatorname{arctg} x.
 \end{aligned}$$

В задачах 6.243 - 6.251 найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функций:

$$6.243. \quad y = x^3 + 1.$$

$$6.244. \quad y = \sqrt[3]{x^2}.$$

$$6.245. \quad y = \sin x.$$

$$6.246. \quad y = 4 - \sqrt[3]{x+2}.$$

$$6.247. \quad y = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$6.248. \quad y = \frac{(x^2-1) \cdot (x-2)}{x}.$$

$$6.249. \quad y = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$6.250. \quad y = \ln(1+x^2).$$

$$6.251. \quad y = e^{-x^2}.$$

В задачах 6.252 - 6.260 найти асимптоты линий:

$$6.252. \quad y = \frac{1}{x-2}.$$

$$6.253. \quad y = \frac{2x}{x-1}.$$

$$6.254. \quad y = x + \frac{1}{x}.$$

$$6.255. \quad y = \frac{4-x^2}{2x-1}.$$

$$6.256. \quad y = \frac{x^2}{x+1}.$$

$$6.257. \quad y = \frac{x^4}{x^3-2}.$$

$$6.258. \quad y = \ln(x-1).$$

$$6.259. \quad y = -e^{\frac{1}{x}}.$$

$$6.260. \quad y = xe^x.$$

В задачах 6.261 - 6.264 выяснить вид графика функции, если известно, что в интервале $(a; b)$:

$$6.261. \quad y > 0, y' > 0, y'' < 0.$$

$$6.262. \quad y > 0, y' < 0, y'' > 0.$$

$$6.263. \quad y > 0, y' < 0, y'' < 0.$$

$$6.264. \quad y < 0, y' > 0, y'' > 0.$$

В задачах 6.265 - 6.273 построить фрагмент графика функции в окрестности заданной точки x_0 :

$$6.265. \quad x_0 = 2, y(x_0) = 3, y'(x_0) = \frac{1}{2}, y''(x_0) > 0.$$

$$6.266. \quad x_0 = -1, y(x_0) = 2, y'(x_0) = 0, y''(x_0) > 0.$$

$$6.267. \quad x_0 = 2, y(x_0) = 1, y'(x_0) = 3, y''(x_0) < 0.$$

$$6.268. \quad x_0 = 3, y(x_0) = 4, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0, y''(x_0 - 0) > 0, y''(x_0 + 0) < 0.$$

$$6.269. \quad x_0 = 4, y(x_0) = 4, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0, y''(x_0 - 0) < 0, y''(x_0 + 0) < 0.$$

$$6.270. \quad x_0 = 4, y(x_0) = -2, y'(x_0) = \frac{3}{5}, y''(x_0) = 0, y''(x_0 - 0) < 0, y''(x_0 + 0) > 0.$$

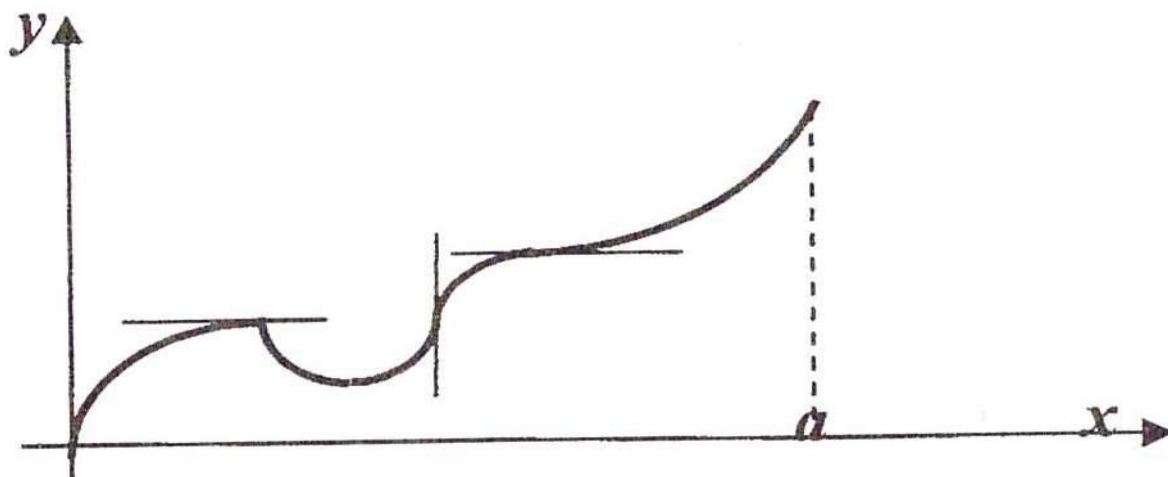
$$6.271. \quad x_0 = 2, y(x_0) = -4, y'(x_0) = 2, y''(x_0) > 0.$$

6.272. $x_0 = 3, y(x_0) = 4, y'(x_0 - 0) = \frac{1}{3}, y'(x_0 + 0) = -\frac{3}{2}, y''(x_0 - 0) < 0, y''(x_0 + 0) > 0.$

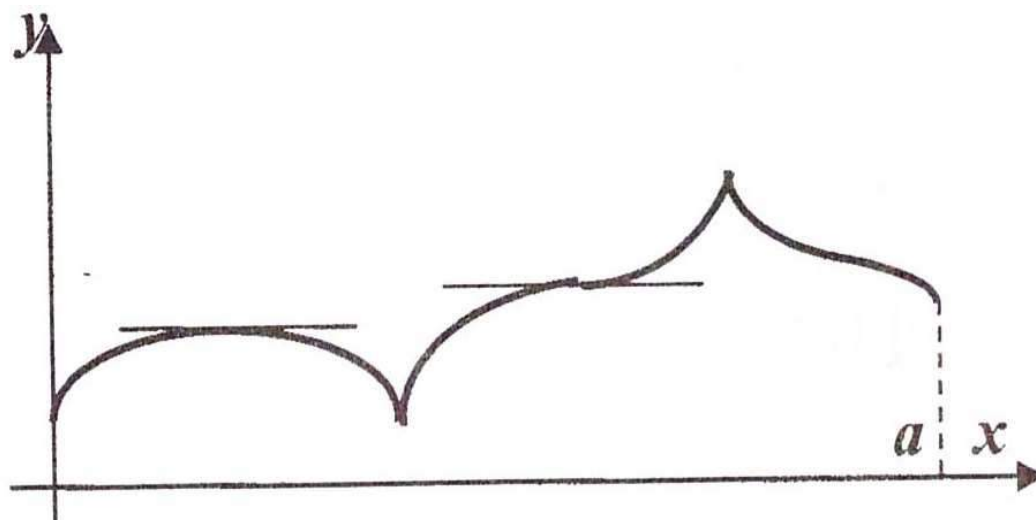
6.273. $x_0 = 2, y(x_0) = 3, y'(x_0 - 0) = -1, y'(x_0 + 0) = 1, y''(x_0 - 0) > 0, y''(x_0 + 0) < 0$

В задачах 6.274 - 6.283 по графику функции построить эскиз возможного графика производной функции:

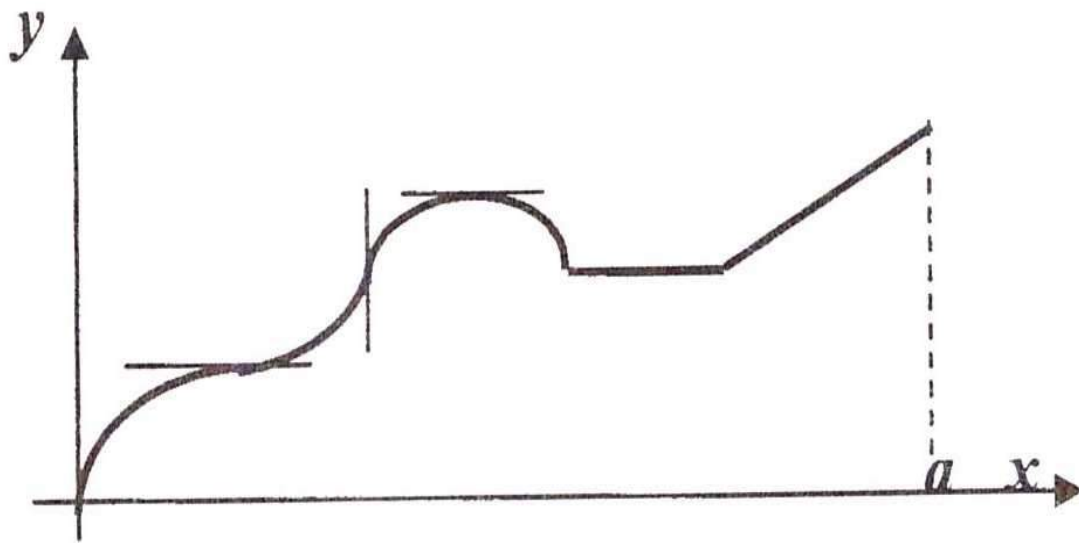
6.274.



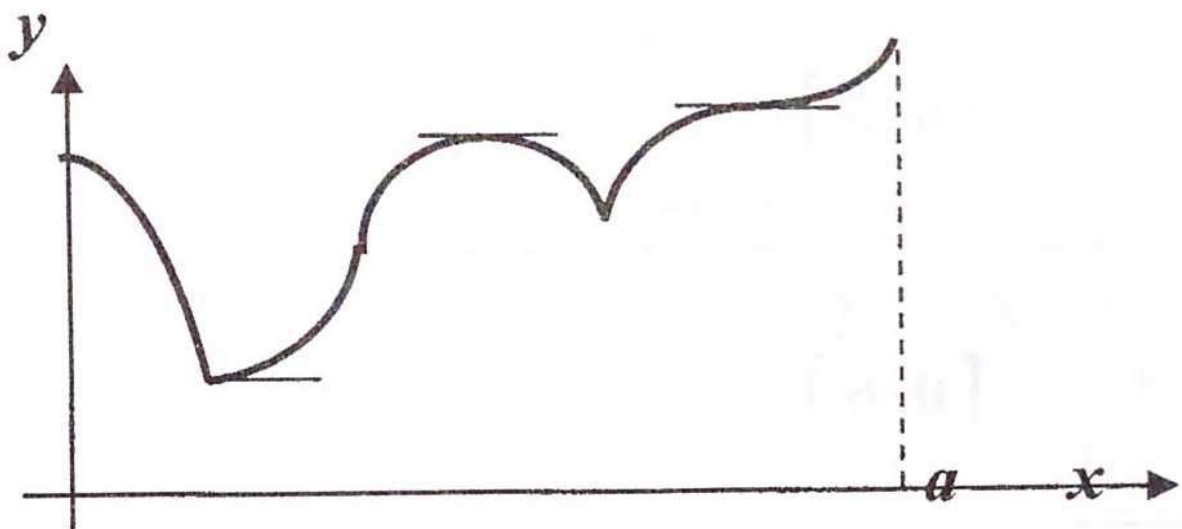
6.275.



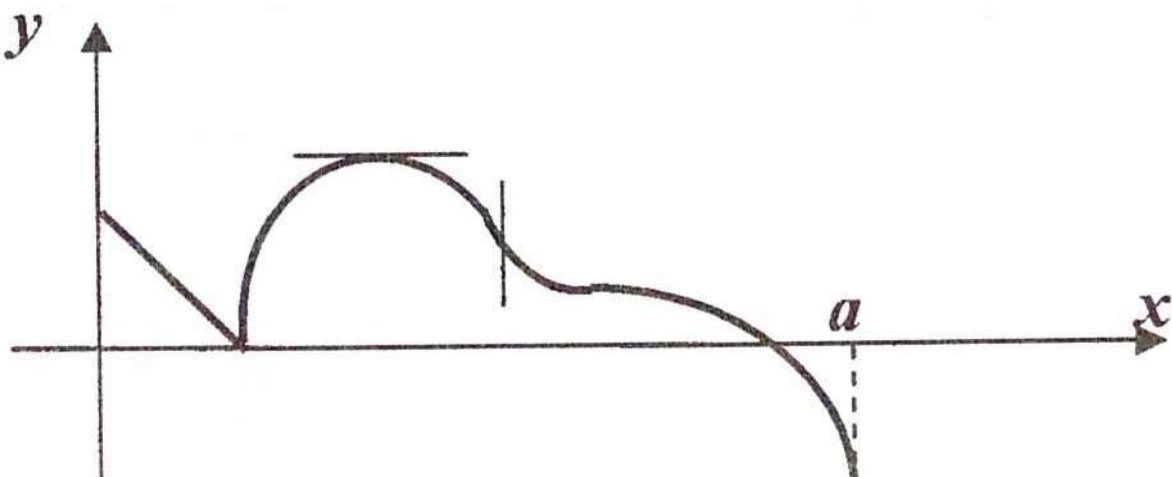
6.276.



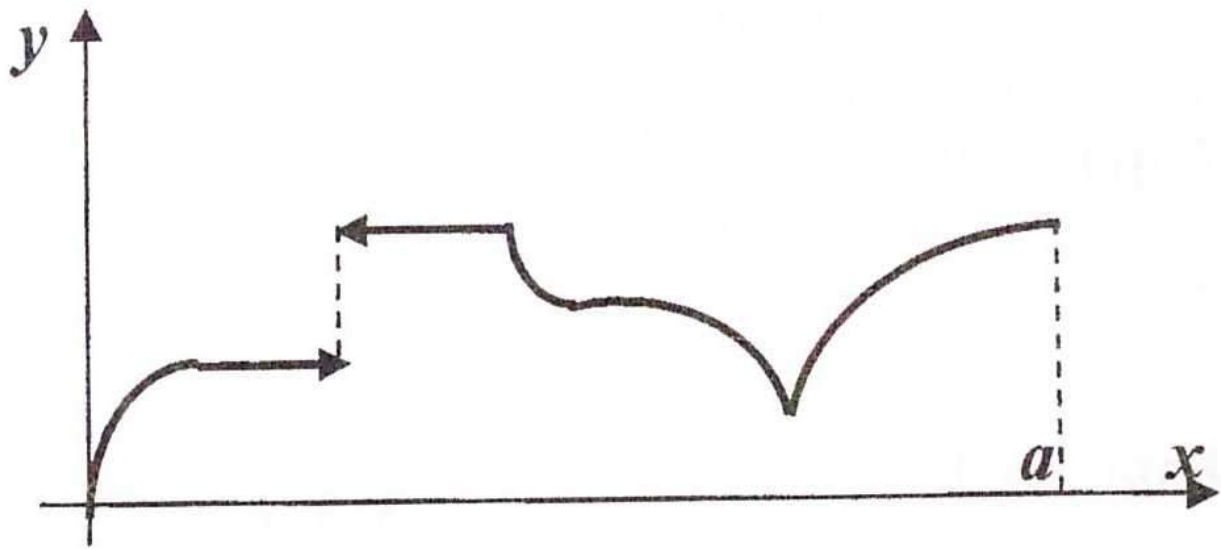
6.277.



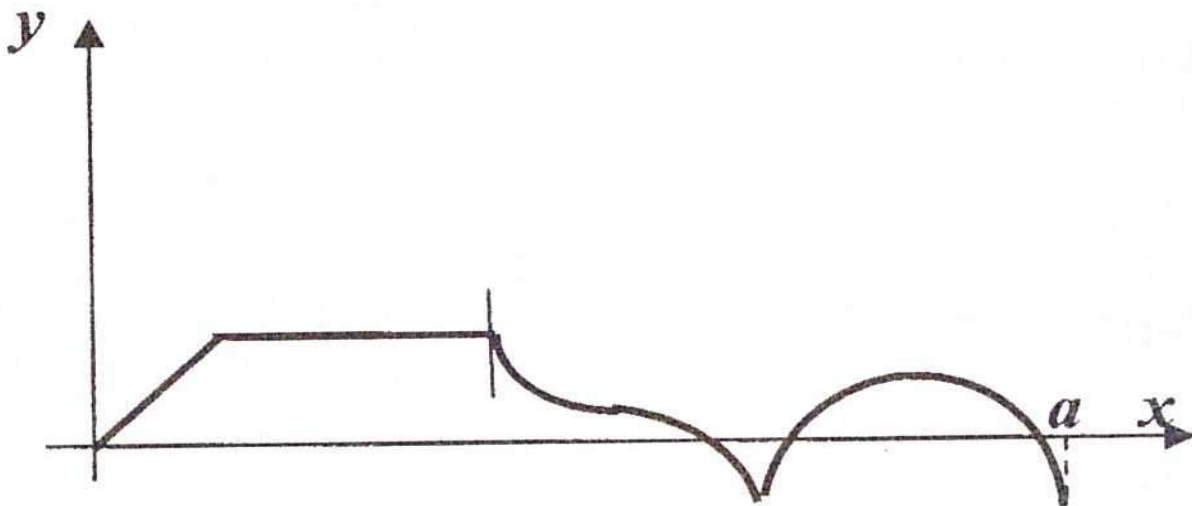
6.278.



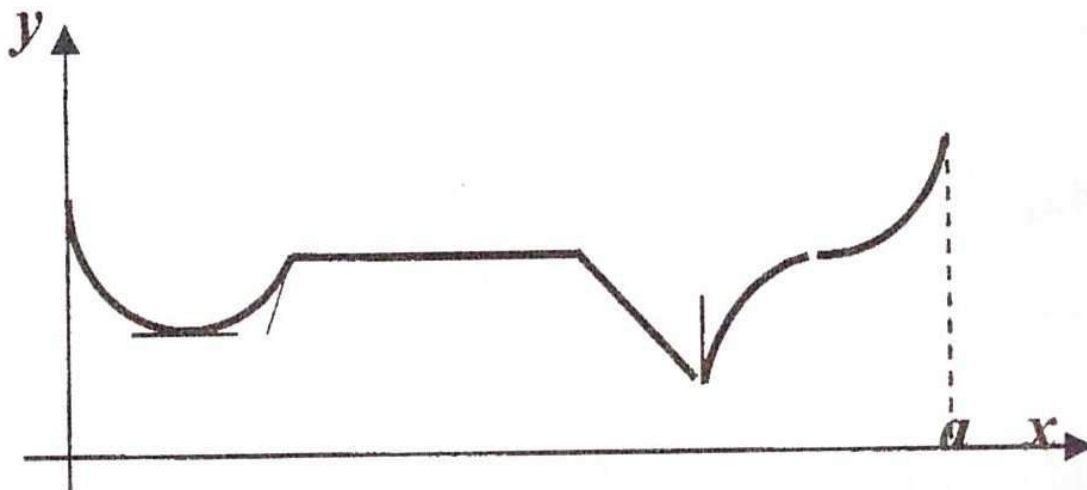
6.279



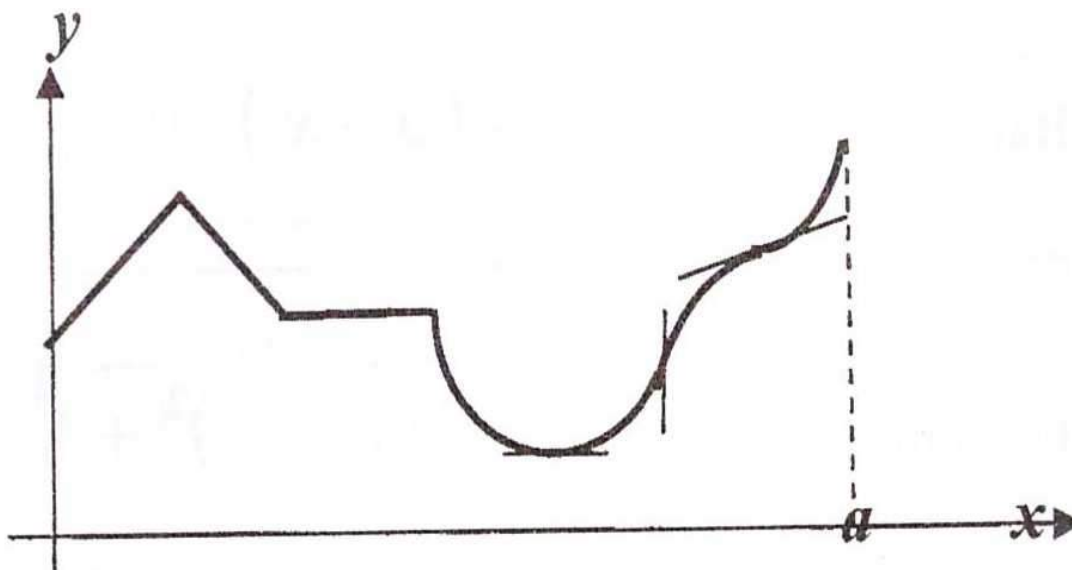
6.280.



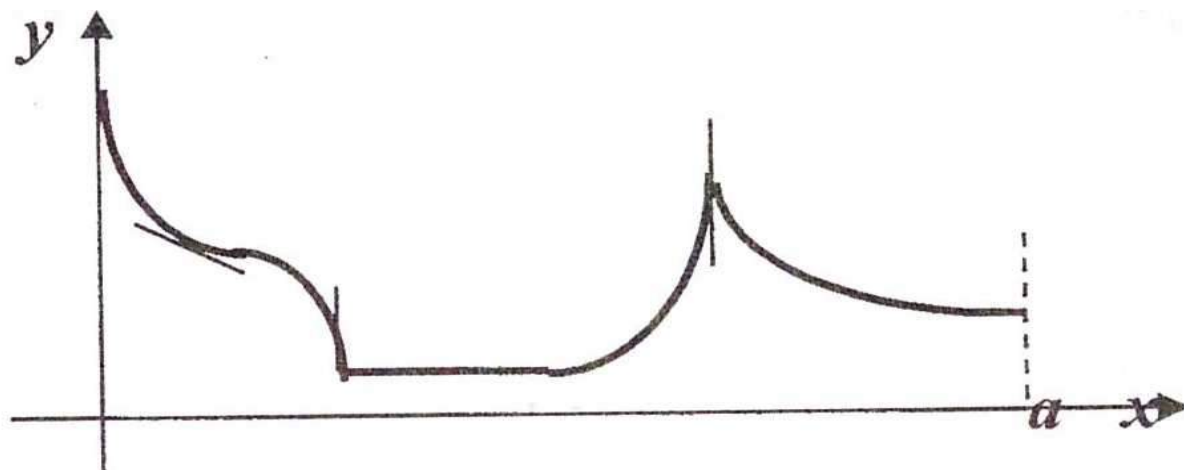
6.281



6.282.



6.283.



В задачах 6.284 - 6.309 исследовать функции и построить их графики:

$$6.284. \quad y = 3x - x^3. \quad 6.285. \quad y = x^4 - 2x^2 + 3. \quad 6.286. \quad y = x \cdot (2 - x^2).$$

$$6.287. \quad y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}. \quad 6.288. \quad y = (x + 1) \cdot (x - 2)^2. \quad 6.289. \quad y = x^3 - \frac{x^4}{4}.$$

$$6.290. \quad y = \frac{2}{1 - x^2}. \quad 6.291. \quad y = \frac{x^2}{x + 1}. \quad 6.292. \quad y = x + \frac{4}{x^2}.$$

$$6.293. \quad y = \frac{4 - x^4}{x^3 - 2}. \quad 6.294. \quad y = \frac{4 - x^2}{2x - 1}. \quad 6.295. \quad y = \frac{x^2}{1 + x^3}.$$

$$6.296. \quad y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}. \quad 6.297. \quad y = \frac{x - 1}{4 - x^2}. \quad 6.298. \quad y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

$$\begin{array}{lll}
6.299. \quad y = \frac{1}{1 - \sqrt{1-x}}. & 6.300. \quad y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x. & 6.301. \quad y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}. \\
6.302. \quad y = \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}. & 6.303. \quad y = x \cdot \sqrt{1-x^2}. & 6.304. \quad y = \sqrt[3]{1-x^3}. \\
6.305. \quad y = \ln(4-x^2). & 6.306. \quad y = x \cdot \ln x. & 6.307. \quad y = x \cdot \ln^3 x. \\
6.308. \quad y = \frac{\ln x}{x}. & 6.309. \quad y = \ln \frac{x}{x-1}. & 6.310. \quad y = \frac{1 - \ln x}{x}. \\
6.311. \quad y = x \cdot e^x. & 6.312. \quad y = \frac{e^x}{x}. & 6.313. \quad y = \frac{e^x}{x^2}. \\
6.314. \quad y = \frac{x^2 + x}{e^x}. & 6.315. \quad y = x^3 e^{-x}. & 6.316. \quad y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \\
6.317. \quad y = 4^{x^2 + 2x}. & 6.318. \quad y = x^x. & 6.319. \quad y = \ln(1 - e^{-x}).
\end{array}$$

§6. Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

В задачах 6.320 - 6.327 найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

$$6.320. \quad y = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}, \quad [-2; 0]. \quad 6.321. \quad y = \frac{(x-1)^3}{2x^2}, \quad [0,25; 3].$$

$$6.322. \quad y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad [-1; 3]. \quad 6.323. \quad y = x + 2\sqrt{-x}, \quad [-4; 0].$$

$$6.324. \quad y = x^2 \ln x, \quad [e^{-2}; e]. \quad 6.325. \quad y = e^{2x-x^2}, \quad [-2; 2].$$

$$6.326. \quad y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x, \quad \left[0; \frac{\pi}{3}\right]. \quad 6.327. \quad y = x - \ln(x+1), \quad \left[-\frac{1}{2}; 2\right].$$

6.328. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Периметр сечения 18м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

6.329. Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трёх сторон она была огорожена провололочной сеткой, а четвертая примыкала к стене. Для этого имеется a погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

6.330. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует повесить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была

наибольшая? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

6.331. Найти такой цилиндр, который бы имел наибольший объем при данной полной поверхности S .

6.332. Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объемом V и с наименьшей полной поверхностью.

6.333. В прямоугольном листе картона длиной 48см. и шириной 30см. вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?

6.334. К реке шириной a метров построен под прямым углом канал шириной b метров. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

6.335. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ часть курса, а забывает $a \cdot t$ -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса :

1) $k = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{49}$; 2) $k = 1$, $a = \frac{1}{36}$; 3) $k = 2$, $a = \frac{1}{18}$.

Глава 7

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

7.1. Построить радиусы - векторы, соответствующие комплексным числам:

1) $z = 2$; 2) $z = -3$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$; 5) $z = 2 + 3i$; 6). $z = 2 - 3i$;
7). $z = -2 + 3i$; 8). $z = -2 - 3i$; 9). $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$; 10). $z = 2 - \sqrt{3}i$.

7.2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: 1) $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$; 2) $9 + 2ix + 4iy = 10i + 5x - 6y$; 3) $2ix + 3iy + 17 = 3x + 2y + 18i$; 4) $5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i$.

7.3. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

- 1) $z = i$; 2) $z = -5i$; 3) $z = 1 + i$; 4) $z = 2 - 2i$; 5) $z = 3$; 6) $z = -3$; 7) $z = 3i$; 8) $z = -3i$; 9) $z = -2 - 2i$; 10) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 11) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 12) $z = -\sqrt{3} + i$.

7.4. Дана точка, изображающая число $-3 + 2i$. Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно: 1) действительной оси; 2) мнимой оси; 3) начала координат?

§2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

- 7.5. Выполнить действия: 1) $(4 + 2i) + (1 + 5i)$; 2) $(3 + 5i) - (6 + 3i)$; 3) $(3 + i) + (-3 - 8i)$; 4) $(5 - 4i) + (7 + 4i)$; 5) $(-6 + 2i) + (-6 - 2i)$; 6) $(0,2 + 0,1i) + (0,8 - 1,1i)$; 7) $(2 - 3i) + (5 + 6i) + (-3 - 4i)$; 8) $(1 - i) - (7 - 3i) - (2 + i) + (6 - 2i)$.

- 7.6. Вычислить: 1) i^{16} ; 2) i^{25} ; 3) i^{15} ; 4) $(-i)^8$; 5) $(-i)^7$; 6) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$; 7) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$; 8) $i + i^{11} + i^{21} + i^{31} + i^{41}$; 9) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$; 10) $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$; 11) $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$.

- 7.7. Выполнить действия: 1) $2i \cdot 3i$; 2) $(2 - 3i)(2 + 3i)$; 3) $(5 - 4i)(3 + 2i)$; 4) $\frac{2}{3i}$; 5) $\frac{1}{1+i}$; 6) $\frac{1+i}{1-i}$; 7) $\frac{2-3i}{4+5i}$; 8) $-i\sqrt{5} \cdot 4i\sqrt{5}$; 9) $(5 - 3i) \cdot 2i$; 10) $(3 + 4i)(3 - 4i)$; 11) $(5 + 3i)(2 - 5i)$; 12) $(-2 - i)(1 + i)$; 13) $4 + 2i + (-1 + 6i)(6 - i)$; 14) $(3 - 2i)(5 + 4i) - 7i + 1$; 15) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i\right)$; 16) $(0,2 - 0,3i)(0,5 + 0,4i)$; 17) $\frac{1}{1-i}$; 18) $\frac{1-i}{1+i}$; 19) $\frac{3-2i}{1+3i}$; 20) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 21) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 22) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 23) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 24) $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$; 25) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 26) $\frac{1-3i}{i-2} + \frac{4i+1}{3i-1}$; 27) $\frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi}$; 28) $(1+i)^8$; 29) $(1-i)^2$; 30) $(1+i)^{17}$; 31) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 32) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2$; 33) $(1+i)^{-2}$; 34) $(1-i)^{-3}$; 35) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$.

- 7.8. Разложите на комплексные множители: 1) $m^2 + n^2$; 2) $4m^2 + 9n^2$; 3) $\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{16}$; 4) $m + n$; 5) $2 + \sqrt{3}$; 6) $1 + \sin^2 \alpha$; 7) 3.

§3. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

7.9. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

- 1) 2; 2) $6i$; 3) $-2+2\sqrt{3}i$; 4) $2-2i$; 5) $-\sqrt{3}-i$; 6) $3i$; 7) $-1+i$; 8) $1-i\sqrt{3}$; 9) $\sqrt{3}-i$;
10) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)i$; 11) $-3+4i$.

7.10. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

- 1) $z=2(\cos 2\pi+i \sin 2\pi)$; 2) $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$; 3) $5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$; 4)
 $4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; 5) $\cos \pi+i \sin \pi$; 6) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$; 7) $3(\cos 0+i \sin 0)$.

7.11. Найти произведения

- 1) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; 2) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)+i \sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right]$;
3) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; 4) $(\cos 5+i \sin 5) \cdot (\cos 2+i \sin 2)$;
5) $\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$; 6) $4(\cos 10^\circ+i \sin 10^\circ) \cdot 2(\cos 35^\circ+i \sin 35^\circ)$;
7) $\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

7.12. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

- 1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$; 2) $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$; 3) $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$; 4) $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$;
5) $(5+5i)(\cos 15^\circ+i \sin 15^\circ)$; 6) $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] \cdot (3+\sqrt{3}i)$.

7.13. Выполнить деление: 1) $10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$; 2)

$3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$; 3) $(\cos 210^\circ+i \sin 210^\circ):(\cos 150^\circ+i \sin 150^\circ)$;

4) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]:\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; 5) $(\cos 150^\circ+i \sin 150^\circ):[\cos(-120^\circ)+i \sin(-120^\circ)]$.

7.14. Возвести в степень: 1) $\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$; 2) $\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right]^{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$; 3)

$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i \sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8$; 4) $(\cos 35^\circ+i \sin 35^\circ)^{-12}$.

§4. Извлечение корней из комплексных чисел

7.15. Представить в показательной форме числа: 1) $z = 2i$; 2) $z = -1+i$; 3) 1; 4) $\sqrt{3}+i$; 5) $3+i\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

7.16. Представив числа $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ в показательной форме, вычислить: 1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^6 ; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

7.16. Извлечь корни из комплексных чисел: 1) \sqrt{i} ; 2) $\sqrt[3]{-1}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{i}$; 5) $\sqrt[4]{4}$; 6) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt[6]{1}$.

7.17. Найти корни многочлена второй степени (с комплексными коэффициентами) на множестве комплексных чисел и разложить его на множители $Q(x) = ix^2 + 2ix + x + 13i + 1$.

7.18. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известен один из его корней $x_1 = 1 - 3i$.

7.19. Решить на множестве комплексных чисел уравнение $4x^2 - 8x + 13 = 0$.

Глава 8

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Непосредственное интегрирование

В задачах 8.1 - 8.24 вычислить интегралы:

$$8.1. \int \frac{x-3}{x^2} dx.$$

$$8.2. \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx.$$

$$8.3. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$8.4. \int \frac{x+4}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$8.5. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$$

$$8.6. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$8.7. \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx.$$

$$8.8. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx.$$

$$8.9. \int \frac{1+2x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx.$$

$$8.10. \int \frac{(1+x)^2}{x \cdot (1+x^2)} dx.$$

$$8.11. \int \frac{1}{x^2+27} dx.$$

$$8.12. \int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

$$8.13. \int \frac{1}{x^2-7} dx.$$

$$8.14. \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$$

$$8.15. \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

$$8.16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}. \quad 8.17. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx. \quad 8.18. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$8.19. \int \operatorname{ctg}^2 x dx. \quad 8.20. \int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 3}{\sin^2 x} dx. \quad 8.21. \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx.$$

$$8.22. \int 3^x e^x dx. \quad 8.23. \int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx. \quad 8.24. \int \frac{x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$$

8.25. Будет ли функция $-\frac{1}{2} \cos(2x+1) + 2$ первообразной для функции $\sin(2x+1)$?

8.26. Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ и $F(1) = \frac{\pi}{2}$.
Найти $F(-2)$.

§2. Интегрирование внесением под знак дифференциала или методом замены переменной

В задачах 8.27 - 8.64 вычислить интегралы:

$$8.27. \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad 8.28. \int (2+3x)^7 dx. \quad 8.29. \int \sqrt{2+3x} dx. \quad 8.30.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x}}. \quad 8.31. \int \sqrt[5]{3+5x} dx. \quad 8.32. \int \frac{x}{x^2-3} dx. \quad 8.33. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx.$$

$$8.34. \int \frac{1-3x}{3+2x} dx. \quad 8.35. \int \frac{2x+3}{2x+1} dx. \quad 8.36. \int \frac{x+1}{x^2+1} dx. \quad 8.37. \int \frac{x^2}{x^3+1} dx$$

$$8.38. \int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+2}} dx. \quad 8.39. \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx. \quad 8.40. \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx. \quad 8.41.$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x}. \quad 8.42. \int e^{3x} dx. \quad 8.43. \int e^{-x} dx. \quad 8.44.$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \quad 8.45. \int \frac{e^x}{e^x+1} dx. \quad 8.46. \int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx. \quad 8.47.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 8.48. \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 8.49. \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx. \quad 8.50.$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx. \quad 8.51. \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx. \quad 8.52. \int \cos^5 x \cdot \sin 2x dx. \quad 8.53.$$

$$\int x \cdot \sin(1-x^2) dx. \quad 8.54. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx. \quad 8.55. \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx. \quad 8.56.$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx . \quad 8.57. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx . \quad 8.58. \int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x+3)^2}} . \quad 8.59.$$

$$\int \frac{dx}{\arccos^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}} . \quad 8.60. \int \frac{3x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx . \quad 8.61. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} . \quad 8.62.$$

$$\int \frac{dx}{4x - 3 - x^2} . \quad 8.63. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} . \quad 8.64. \int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}} .$$

§3. Интегрирование по частям

В задачах 8.65 - 8.92 вычислить интегралы:

$$8.65. \int x \cdot \sin x dx . \quad 8.66. \int x \cdot \cos 2x dx . \quad 8.67. \int (5x + 6) \cdot \sin 3x dx .$$

$$8.68. \int \frac{x}{e^x} dx . \quad 8.69. \int (3-x) \cdot e^{2x} dx . \quad 8.70. \int x \cdot 2^{-x} dx .$$

$$8.71. \int \frac{x}{\sin^2 x} dx . \quad 8.72. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx . \quad 8.73. \int \frac{x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx .$$

$$8.74. \int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x} dx . \quad 8.75. \int \ln x dx . \quad 8.76. \int x \cdot \ln(x-1) dx .$$

$$8.77. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx . \quad 8.78. \int \frac{\ln x}{x^3} dx . \quad 8.79. \int \ln(x^2 + 1) dx .$$

$$8.80. \int \arcsin x dx . \quad 8.81. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx . \quad 8.82. \int \operatorname{arctg} x dx .$$

$$8.83. \int x \operatorname{arctg} x dx . \quad 8.84. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx . \quad 8.85. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx .$$

$$8.86. \int x^2 \sin x dx . \quad 8.87. \int \ln^2 x dx . \quad 8.88. \int x^2 \cdot e^{-x} dx .$$

$$8.89. \int x^2 \cdot 2^x dx . \quad 8.90. \int e^x \sin x dx . \quad 8.91. \int e^x \cos x dx .$$

8.92. Вычислить разность $F(2) - F(1)$, если $F(x)$ - первообразная для функции $x \ln x$.

8.93. Вычислить разность $F(2\pi) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $F(x)$ - первообразная для функции $(x+6)\cos 3x$.

§4. Интегрирование рациональных функций

В задачах 8.94 - 8.113 вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} 8.94. \int \frac{x}{x+2} dx. & 8.95. \int \frac{x^2}{x-3} dx. & 8.96. \int \frac{x^4}{x^2-2} dx. \\ 8.97. \int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}. & 8.98. \int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}. & 8.99. \int \frac{(x-4)dx}{(x-2) \cdot (x-3)}. \\ 8.100. \int \frac{(2x+7)dx}{x^2+x-2}. & 8.101. \int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}. & 8.102. \int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx. \\ 8.103. \int \frac{x^3-1}{x^3-x} dx. & 8.104. \int \frac{dx}{x \cdot (x+1)^2}. & 8.105. \int \frac{x+2}{x^3+x} dx. \\ 8.106. \int \frac{x^3+1}{x^3-x} dx. & 8.107. \int \frac{x^2+x+1}{x^4-x} dx. & 8.108. \int \frac{x+1}{x^4-x^2} dx. \\ 8.109. \int \frac{dx}{x \cdot (x^2+1)}. & 8.110. \int \frac{dx}{x^3-1}. & 8.111. \int \frac{x dx}{x^3-1}. \\ 8.112. \int \frac{x-2}{x^4-1} dx. & 8.113. \int \frac{x-2}{x^3+2x^2+x} dx. & \end{array}$$

§5. Интегрирование тригонометрических функций

В задачах 8.114 - 8.131 вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} 8.114. \int \sin 3x \cdot \sin 7x dx. & 8.115. \int \sin 2x \cdot \cos 6x dx. & 8.116. \int \cos \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{2} dx. \\ 8.117. \int \sin^3 x dx. & 8.118. \int \cos^5 x dx. & 8.119. \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx. \\ 8.120. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx. & 8.121. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx. & 8.122. \int \operatorname{ctg}^3 x dx. \\ 8.123. \int \operatorname{tg}^4 x dx. & 8.124. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx. & 8.125. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx. \\ 8.126. \int \cos^4 x dx. & 8.127. \int \frac{dx}{3 \sin x}. & 8.128. \int \frac{dx}{5 \cos 2x}. \end{array}$$

$$8.129. \int \frac{dx}{5 \cos x + 3}. \quad 8.130. \int \frac{dx}{1 + \sin x}. \quad 8.131. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

§6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

В задачах 8.132 - 8.148 вычислить интегралы

$$8.132. \int x \cdot \sqrt{x+5} dx. \quad 8.133. \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx. \quad 8.134. \int \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx.$$

$$8.135. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx. \quad 8.136. \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx. \quad 8.137. \int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx.$$

$$8.138. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx. \quad 8.139. \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x-1}} dx. \quad 8.140. \int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$8.141. \int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} dx. \quad 8.142. \int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x^2}} dx. \quad 8.143. \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x-2}} dx.$$

$$8.144. \int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} dx. \quad 8.145. \int \sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x})^3 dx. \quad 8.146. \int \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$8.147. \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} dx. \quad 8.148. \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} dx.$$

§7. Смешанные примеры

8.149. Найти ту первообразную от функции $\frac{1}{2}x$, которая принимает значение 3 при $x = 2$.

8.150. График первообразной $F(x)$ для функции $\frac{x+3}{(x-4) \cdot \sqrt{x-4}}$ проходит через точку $A(5; 0)$. Найти $F(8)$.

В задачах 8.151 - 8.198 вычислить интегралы:

$$8.151. \int (x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x} dx. \quad 8.152. \int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-6x^5} dx. \quad 8.153. \int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}} dx.$$

$$8.154. \int \frac{(2x+3)dx}{x^2-4}. \quad 8.155. \int \frac{dx}{1+9x^2}. \quad 8.156. \int \frac{dx}{2x^2+9}.$$

$$8.157. \int \frac{x dx}{x^4+1}. \quad 8.158. \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}. \quad 8.159. \int e^x \cdot \sqrt{1-e^x} dx.$$

$$\begin{array}{lll}
8.160. \int \frac{dx}{e^x \cdot \sqrt{1 - e^{-2x}}} & 8.161. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{3 - \ln^2 x}} & 8.162. \int \frac{\ln x \, dx}{x \cdot (1 - \ln^2 x)} \\
8.163. \int \frac{\sqrt{1 - x} \, dx}{x} & 8.164. \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1 - x)}} & 8.165. \int x^3 \cdot \sqrt[5]{1 - 5x^4} \, dx \\
8.166. \int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x}} \, dx & 8.167. \int \sqrt{\frac{\arccos x}{1 - x^2}} \, dx & 8.168. \int \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \, dx}{x^3} \\
8.169. \int x \cdot \sin^2 x \, dx & 8.170. \int x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx & 8.171. \int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{x^2} \\
8.172. \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} \, dx & 8.173. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} \, dx & 8.174. \int \frac{\sin 2x}{5 - \cos 2x} \, dx \\
8.175. \int \sin x \cdot \cos 3x \, dx & 8.176. \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx & 8.177. \int \cos 5x \cdot \cos x \, dx \\
8.178. \int \frac{\ln x}{x^3} \, dx & 8.179. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}} \, dx & 8.180. \int \sqrt{\frac{\ln x}{x^2}} \, dx \\
8.181. \int \frac{2^x}{\sqrt{1 + 2^x}} \, dx & 8.182. \int \frac{1 + \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \, dx & 8.183. \int \frac{2^x}{1 + 4^x} \, dx \\
8.184. \int \frac{x^2}{\sqrt{8x^3 + 27}} \, dx & 8.185. \int \frac{x}{(2 + x^2)^3} \, dx & 8.186. \int \frac{\ln^2 x + 2}{x} \, dx \\
8.1887 \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1 + x)}} & 8.188. \int \frac{x}{\cos^2 x^2} \, dx & 8.189. \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
8.190. \int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \, dx & 8.191. \int \operatorname{tg}^2 4x \, dx & 8.192. \int \frac{\sin 5x}{5 + \cos 5x} \, dx \\
8.193. \int \frac{dx}{e^x \cdot (3 + e^{-x})} & 8.194. \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}} & 8.1965 \int \frac{x - 1}{\sqrt{2x - 1}} \, dx \\
8.196. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} & 8.197. \int \frac{x - 2}{\sqrt{2x - x^2}} \, dx & 8.198. \int \operatorname{tg}^7 x \, dx
\end{array}$$

Глава 9

Определенный интеграл

§1. Непосредственное вычисление определённого интеграла и внесение функции под знак дифференциала

В задачах 9.1 - 9.12 вычислить интегралы:

$$\begin{array}{llll} 9.1. \int_2^3 5x^2 dx. & 9.2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\pi \cos^2 x}. & 9.3. \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx. & 9.4. \int_0^4 x e^{-x^2} dx. \\ 9.5. \int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}. & 9.6. \int_1^5 \frac{dx}{3x-2}. & 9.7. \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}. & 9.8. \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}. \\ 9.9. \int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}. & 9.10. \int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx. & 9.11. \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x}. & 9.12. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}. \end{array}$$

§2. Замена переменной в определённом интеграле

В задачах 9.13 - 9.24 вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} 9.13. \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx. & 9.14. \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx. & 9.15. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}. \\ 9.16. \int_0^{13} \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{2x+1}} dx. & 9.17. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}. & 9.18. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx. \\ 9.19. \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}. & 9.20. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx. & 9.21. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}. \\ 9.22. \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx. & 9.23. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 \operatorname{tg} x - 7) dx}{\cos^2 x - 9 \sin^2 x}. & 9.24. \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx. \end{array}$$

§3. Интегрирование по частям в определённом интеграле

В задачах 9.25 - 9.36 вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} 9.25. \int_0^1 x e^{-x} dx. & 9.26. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx. & 9.27. \int_0^{\pi} (\pi-x) \sin x dx. \end{array}$$

$$9.28. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx .$$

$$9.29. \int_1^e \frac{\ln x dx}{x^3} .$$

$$9.30. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x} .$$

$$9.31. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 3x} .$$

$$9.32. \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx .$$

$$9.33. \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx .$$

$$9.34. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} .$$

$$9.35. \int_1^2 x^2 2^{-x} dx .$$

$$9.36. \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx .$$

§4. Несобственные интегралы

В задачах 9.37 - 9.54 вычислить интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода) или установить их расходимость:

$$9.37. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} .$$

$$9.38. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} .$$

$$9.39. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

$$9.40. \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^5} .$$

$$9.41. \int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{x^5} dx .$$

$$9.42. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1} .$$

$$9.43. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} .$$

$$9.44. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3} .$$

$$9.45. \int_2^{\infty} \frac{\ln x dx}{x} .$$

$$9.46. \int_0^{\infty} e^{-4x} dx .$$

$$9.47. \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$$

$$9.48. \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx .$$

$$9.49. \int_0^{\infty} e^{-x^3} x^2 dx .$$

$$9.50. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{x^2+1} .$$

$$9.51. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}} .$$

$$9.52. \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} .$$

$$9.53. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} .$$

$$9.54. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} .$$

В задачах 9.55 - 9.63 вычислить интегралы от разрывных функций (2 рода) или установить их расходимость:

$$9.55. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} .$$

$$9.56. \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} .$$

$$9.57. \int_0^1 \ln x dx .$$

$$9.58. \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln x} .$$

$$9.59. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x} .$$

$$9.60. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} .$$

$$9.61. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$9.62. \int_{-1}^0 \frac{1}{e^x x^3} dx.$$

$$9.63. \int_0^1 \frac{1}{x^2} e^x dx.$$

§5. Приложения определённого интеграла

В задачах 9.64 - 9.81 вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$9.64. \begin{cases} y = x^2 + x \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

$$9.65. \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y - x = 0 \end{cases}.$$

$$9.66. \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}.$$

$$9.67. \begin{cases} y - \sin x = 0 \\ y = \frac{2}{\pi} x \end{cases}.$$

$$9.68. \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

$$9.69. \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2\sqrt{2x} \end{cases}.$$

$$9.70. \begin{cases} y = x^2 \\ y + x^2 = 2x \end{cases}.$$

$$9.71. \begin{cases} y = \cos x \\ x + \frac{\pi}{2} y = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$9.72. \begin{cases} y = \sqrt{x^3} \\ x = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$9.73. \begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

$$9.74. \begin{cases} y = x^3 \\ y = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$9.75. \begin{cases} y = 2^{-x} \\ x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}.$$

$$9.76. \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt{4-3x} \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$9.77. \begin{cases} y + x^2 = 3x \\ y = 6 - 2x \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$9.78. \begin{cases} y = e^{2x} \\ y = e^{-2x} \\ x - 3 = 0 \end{cases}.$$

$$9.79. \begin{cases} y = x^2 \\ \lg x + \lg y = 0 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$9.80. \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ x = 5 \end{cases}.$$

$$9.81. \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ x = 0 \\ y = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

В задачах 9.82 - 9.93 вычислить площади фигур, ограниченных линиями в полярных координатах:

$$9.82. \rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$9.83. \rho = 2 \cos \varphi.$$

$$9.84. \rho = 2 \sin \varphi.$$

$$9.85. \rho = \cos 2\varphi.$$

$$9.86. \rho = 2 \sin 2\varphi.$$

$$9.87. \rho = 4 \cos 3\varphi.$$

$$9.88. \rho = 1 + \sin \varphi.$$

$$9.89. \rho = 2(1 - \sin \varphi).$$

$$9.90. \rho = \sqrt{2}(1 + \cos \varphi).$$

$$9.91. \rho = \sqrt{2}(1 + \sin \varphi). \quad 9.92. \rho^2 = 2 \cos \varphi. \quad 9.93. \rho^2 = 2 \sin \varphi.$$

В задачах 9.94 - 9.102 вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$9.94. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad 9.95. \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 3 + 2 \sin t \end{cases} \quad 9.96. \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

$$9.97. \begin{cases} x = 2 + 3 \cos t \\ y = 3 + 2 \sin t \end{cases} \quad 9.98. \text{ астроидой } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$9.99. \text{ Одной аркой циклоиды } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases} \text{ и осью } x.$$

$$9.100. \text{ Первой аркой циклоиды } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases} \text{ и прямой } y = \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

$$9.101. \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}, \quad y = 3 \quad (y \geq 3). \quad 9.102. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, \quad x = 1 \quad (x \geq 1).$$

В задачах 9.103 - 9.111 вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси x фигур, ограниченных линиями:

$$9.103. \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad 9.104. \begin{cases} y - \sin x = 0 \\ y = \frac{2}{\pi} x \end{cases} \quad 9.105. \begin{cases} y = \cos x \\ y = \frac{9}{2\pi^2} x^2 \end{cases}$$

$$9.106. \begin{cases} y^2 = \frac{3x}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad 9.107. \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 4x - 2x^2 \end{cases} \quad 9.108. \begin{cases} y = ax - x^2, \quad a > 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad 9.109.$$

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \quad 9.110. \begin{cases} xy = 4 \\ x = 1 \\ x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad 9.111. \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x = \sqrt{y - 2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

В задачах 9.112 - 9.123 вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси y фигур, ограниченных линиями:

$$9.112. \begin{cases} y^2 = 4 - x \\ x = 0 \end{cases} \quad 9.113. \begin{cases} y = x^3 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad 9.114. \begin{cases} y^2 = x^3 \quad (y > 0) \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$9.115. \begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad 9.116. \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 2 - x \\ x = 0 \end{cases} \quad 9.117. \begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$9.118. \begin{cases} y = \sin x \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases} .$$

$$9.119. \begin{cases} x + y = 2 \\ y = x \\ y = 0 \end{cases} .$$

$$9.120. \begin{cases} x + y = 2 \\ y = x \\ x = 0 \end{cases} .$$

$$9.121. \begin{cases} y = e^x \\ y = 0 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases} .$$

$$9.122. \begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = 0 \\ y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

$$9.123. \begin{cases} y^2 = x - 2 \\ y = 0 \\ y = 1 \\ y = x^3 \end{cases} .$$

В задачах 9.124 - 9.132 вычислить длины дуг кривых:

$$9.124. y = \sqrt{2-x^2} \text{ от точки } B(-1;1) \text{ до точки } A(1;1).$$

$$9.125. y = x^2 - 2 \text{ между точками пересечения кривой с осью } x.$$

$$9.126. y = e^x \text{ между точками с абсциссами } x = 0 \text{ и } x = 1.$$

$$9.127. y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ (цепная линия) между точками с абсциссами } x = -1 \text{ и } x = 0.$$

$$9.128. \text{ Циклоиды } \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$9.129. \text{ Астроиды } \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$9.130. \text{ Эвольвенты окружности } \begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t) \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases} \text{ от } t_1 = 0 \text{ до } t_2 = \pi.$$

$$9.131. \text{ Кардиоиды } \rho = 3(1 + \cos \varphi).$$

$$9.132. \text{ Окружности } \rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi \text{ между точками, для которых } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Глава 10

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

§1. Область определения функции нескольких переменных

В задачах 10.1 - 10.12 найти и изобразить на координатной плоскости xy области определения функций:

$$10.1. z = \frac{x+2y}{x-y}. \quad 10.2. z = \frac{1}{x^2-y^2}. \quad 10.3. z = \frac{1}{x^2+4y^2-4}.$$

$$10.4. z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y}. \quad 10.5. z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}.$$

$$10.6. z = \ln x + \sqrt{y}. \quad 10.7. z = \frac{1}{x-2} - \ln(x \cdot y). \quad 10.8. z = \frac{\ln(x^2 \cdot y)}{\sqrt{y-x}}.$$

$$10.9. z = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{y}. \quad 10.10. z = y + \arcsin(x+2). \quad 10.11. z = \frac{1+y^2}{\sin x}.$$

$$10.12. z = \ln(y^2 - 4x + 8).$$

§2. Линии уровня функции нескольких переменных

В задачах 10.13 - 10.24 написать уравнения линий уровня функции $z = f(x; y)$ и построить их:

$$10.13. z = \sqrt{y-x^2}. \quad 10.14. z = \frac{x}{y}. \quad 10.15. z = \frac{y-x^2}{x^2}. \quad 10.16. z = x^2 \cdot y + y.$$

$$10.17. z = \frac{y}{x}. \quad 10.18. z = x \cdot \sqrt{y-1}. \quad 10.19. z = x \cdot y + y. \quad 10.20. z = \sqrt{x} - y.$$

$$10.21. z = y^2 - x. \quad 10.22. z = \frac{y}{x^3}. \quad 10.23. z = \frac{x^2}{y^2}. \quad 10.24.$$

$$z = \frac{2y}{x}.$$

§3. Частные производные функции нескольких переменных

В задачах 10.25 - 10.42 найти частные производные первого порядка:

$$10.25. z = x - y. \quad 10.26. z = x^2 + 3x \cdot y - y^3. \quad 10.27. z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}.$$

$$10.28. z = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}. \quad 10.29. z = x \cdot \operatorname{tg}(y+1). \quad 10.30. z = \frac{2y}{\sin x}.$$

$$\begin{array}{lll}
10.31. \quad z = x \cdot \ln y + \arcsin y. & 10.32. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. & 10.33. \quad z = x^y. \\
10.34. \quad z = y^{\sin x}. & 10.35. \quad z = (5x^3 \cdot y^2 + 1)^4. & 10.36. \quad z = e^{\frac{y}{x}}. \\
10.37. \quad z = x \cdot \ln \frac{y}{x}. & 10.38. \quad z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}). & 10.39. \quad u = x \cdot y \cdot z \\
10.40. \quad u = x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z. & 10.41. \quad u = x^{\frac{y}{z}}. & 10.42. \quad u = x^{y^z}.
\end{array}$$

В задачах 10.43 - 10.48 найти производные второго порядка z''_{xx} , z''_{yy} , z''_{xy} :

$$10.43. \quad z = x^3 + x \cdot y^2 - 5x \cdot y^3. \quad 10.44. \quad z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}.$$

$$10.45. \quad z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}). \quad 10.46. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

$$10.47. \quad z = y^{\ln x}. \quad 10.48. \quad z = \arcsin(xy).$$

В задачах 10.49 - 10.52 найти смешанные производные указанного порядка от следующих функций:

$$10.49. \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \quad \text{от} \quad z = \sin(x \cdot y). \quad 10.50. \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{от} \quad z = e^{xy^2}.$$

$$10.51. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \quad \text{от} \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}. \quad 10.52. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{от} \quad u = e^{xyz}.$$

§4. Производные от функций нескольких переменных, заданных неявно

В задачах 10.53 - 10.58 найти производные $\frac{dy}{dx}$ от следующих функций:

$$10.53. \quad x^3 \cdot y - y^3 \cdot x = a^4. \quad 10.54. \quad x \cdot e^y + y \cdot e^x - e^{yx} = 0.$$

$$10.55. \quad x \cdot y - \ln y = a. \quad 10.56. \quad \cos(x + y) + x^3 \cdot y^2 = 1.$$

$$10.57. \quad \sqrt[3]{x^3 + y^3} = y^2. \quad 10.58. \quad x^y = y^x.$$

В задачах 10.59 - 10.66 найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от следующих функций:

$$10.59. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad 10.60. \quad x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4z = 0.$$

$$10.61. \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x \cdot z = 1. \quad 10.62. \quad z^3 + 3x \cdot y \cdot z = a^3.$$

10.63. $e^z - x \cdot y \cdot z = 0$.

10.64. $e^z = \cos x \cdot \cos y$.

10.65. $\sin(x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$.

10.66. $\sqrt{x \cdot z} = \ln(x \cdot y \cdot z)$.

§5. Дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

10.67. Найти частные дифференциалы первого порядка и полный дифференциал для функций:

1) $z = \frac{x}{y}$;

2) $z = e^{yx}$;

3) $z = x \cdot \sin xy$;

4) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

5) $u = x^{yz}$;

6) $u = x - \frac{yz}{x} + \sqrt{x + y + z}$.

10.68. Для функции $z = \sqrt[3]{x + y^2}$ вычислить частный дифференциал $d_y z$ при $x = 2$, $y = 5$, $\Delta y = 0,01$.

10.69. Для функции $z = \sqrt{\ln(x \cdot y)}$ вычислить частный дифференциал $d_x z$ при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,016$.

10.70. Для функции $z = e^{yx}$ найти значение полного дифференциала dz при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0,15$, $\Delta y = 0,1$.

10.71. С помощью дифференциала найти приближенное значение приращения функции в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1) $z = x^2 + 11y^2 - 20xy$, $M_0(11; 1)$, если $\Delta x = 0,11$, $\Delta y = -0,02$;

2) $z = 2x^2 + 3y^2 - 5xy$ при переходе от точки $M_0(9; 3)$ к точке $M_1(9,02; 2,96)$.

10.72. С помощью дифференциала найти приближенное значение числового выражения:

1) $(1,08)^{3,96}$;

2) $\sqrt{3,98} \cdot (1,03)^{3,98}$;

3) $\sqrt{\cos^2 0,05 + 8e^{0,015}}$;

4) $\sqrt{1,04^{1,99} + 3,02}$;

5) $22 \cdot (2,94)^2 + 9 \cdot 2,94 \cdot 1,07$;

6) $\sqrt{3,02^2 + 3,98^2}$;

7) $\sqrt[3]{4,97^2 + 1,06^2 + 1}$;

8) $\ln(0,11^3 + 1,03^3)$;

9) $\frac{2,03^2}{\sqrt{2,03^3 + 1,05^3 + 7}}$;

10) $\operatorname{arccctg}\left(\frac{5,01}{4,98}\right)$;

11) $(2,95^3 + 2,03^2 + 1)^{1/5}$.

10.73. Высота конуса $H = 10$ см, радиус основания $R = 5$ см. Как изменится объём конуса при увеличении высоты на 2 мм и уменьшении радиуса на 2 мм?

10.74. Одна сторона прямоугольника $a = 6$ дм, другая $b = 8$ дм. Как изменится диагональ прямоугольника, если a уменьшить на 4 см, а b укоротить на 1 см?

§6. Градиент и производная по направлению функции многих переменных.

10.75. Для функции $z = x^2 - 2x \cdot y + 3y - 1$ найти проекции градиента в точке $(1; 2)$. Вектор $\overline{\text{grad } z}$ построить.

10.76. Для функции $z = 4 - x^2 - y^2$ построить линию уровня и градиент в точке $A(1; 2)$.

10.77. Для функции $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$ построить линию уровня, градиент функции в точке $A(1; 2)$ и найти модуль градиента.

10.78. Для функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ найти $\overline{\text{grad } u}$ и $|\overline{\text{grad } u}|$.

10.79. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $A(1; 1; 1)$ в направлении $\bar{l} = \{\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ\}$.

10.80. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2 \cdot y + 3x \cdot y^2 + 1$ в точке $N(3; 1)$ в направлении, идущим от этой точки к точке $M(6; 5)$.

10.81. Для функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ найти градиент и производную по направлению вектора \bar{a} :

1) $z = -3x^2 + 2y$, $M_0(1; -3)$, $\bar{a} = \{6; 8\}$;

2) $z = \ln(3x + 2y)$, $M_0(-1; 2)$, $\bar{a} = \{-3; -4\}$;

3) $z = \arctg \frac{y}{x}$, $M_0(1; 1)$, $\bar{a} = \{-5; 12\}$;

4) $z = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$, $M_0(1; -2)$, $\bar{a} = \{1; 2\}$;

5) $z = x \cdot y^3 + x^3 \cdot y$, $M_0(1; 3)$, $\bar{a} = \{2; -1\}$;

6) $z = x^2 \cdot \cos y$, $M_0\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$, $\bar{a} = \{5; -12\}$;

7) $z = \sin(\pi \cdot x \cdot y)$, $M_0(1; 1)$, $\bar{a} = \{1; -1\}$;

8) $z = \ln(x + y^2)$, $M_0(3; 4)$, $\bar{a} = \{6; -8\}$;

9) $z = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 1}$, $M_0(0; 1)$, $\bar{a} = \{-1; -1\}$.

10.82. Найти производную по направлению наиболее быстрого роста функции в точке $M_0(x_0, y_0)$:

1) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(1;1)$; 2) $z = \ln(5x - 4y)$, $M_0(2;1)$;

3) $z = \arctg(x \cdot y)$, $M_0(1;1)$; 4) $z = \sqrt[3]{x + 7y}$, $M_0(1;1)$;

5) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $M_0(1;2)$; 6) $z = e^{x^2 + y^2}$, $M_0(2;1)$.

10.83. Найти наибольшую крутизну подъёма поверхности:

1) $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $(6;4;\ln 100)$; 2) $z = x^y$ в точке $(2;2;4)$.

10.84. Каково направление наибольшего изменения функции $u = x \cdot \sin z - y \cdot \cos z$ в начале координат?

10.85. Найти точку, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен

$$\vec{i} - \frac{16}{9} \vec{j}.$$

10.86. Найти производную функции $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в направлении её градиента.

§7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

10.87. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ (или $z = f(x; y)$) в точке $M_0(x, y, z)$:

1) $x^2 + y^2 + z - 8 = 0$, $M_0(1;2;3)$; 2) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2;2;3)$;

3) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1;0;0)$; 4) $z = 3x^2 + y + 1$, $M_0(1; y_0; 3)$;

5) $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$, $M_0(1;0;2)$; 6) $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $M_0(1;2;4)$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$, $M_0(1;2;2)$.

10.88. Составить уравнение нормальной прямой к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ (или $z = f(x; y)$) в точке $M_0(x, y, z)$:

1) $y^2 + z - 3 = 0$, $M_0(-2;1;2)$; 2) $z = 1 + x^2 + 2y^2$, $M_0(1;1;4)$;

3) $x^2 + 5y^2 + z^2 = 10$, $M_0(1;-1;2)$; 4) $z = x^2 + y^2 - 6$, $M_0(2;1;-1)$;

5) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$, $M_0(1;-1;1)$; 6) $z = 3x^4 - xy + y^3$, $M_0(1;2;9)$;

$$7) \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + yx + yz - 2xz + 16 = 0, \quad M_0(1; 2; 3).$$

§8. Экстремумы функции многих переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

В задачах 10.89 - 10.102 найти экстремумы функции:

$$10.89. \quad z = -x^2 - 4y^2 - 8y - 4.$$

$$10.90. \quad z = e^{-7x^2 - 12y^2}.$$

$$10.91. \quad z = x^2 + 3y^2 + 2x + 1.$$

$$10.92. \quad z = x^2 + 2y^2 - 4y + 4x + 2.$$

$$10.93. \quad z = x^2 - xy + y^2 - y - 2x.$$

$$10.94. \quad z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

$$10.95. \quad z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$10.96. \quad z = e^{\frac{y}{2}}(y + x^2).$$

$$10.97. \quad z = x^2 - y^2 - xy + 9x - 6y + 20.$$

$$10.98. \quad z = 1 - x^2 - y^2 - xy + 6x.$$

$$10.99. \quad z = 9 - 9x^2 - 20y^2 + 162x + 2y.$$

$$10.100. \quad z = x^3 - 6x \cdot y + 8y^3 + 1.$$

$$10.101. \quad z = x^3 - 3x \cdot y + y^3.$$

$$10.102. \quad z = 2x^3 + x \cdot y^2 + 5x^2 + y^2.$$

В задачах 10.103 - 10.111 найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D :

$$10.103. \quad z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}.$$

$$10.104. \quad z = xy + x^2 - 2,$$

$$D: \begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq 4x^2 - 4 \end{cases}.$$

$$10.105. \quad z = 4xy + 4x^2 - y^2 - 8y,$$

$$D: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2x \\ y \leq 2 \end{cases}.$$

$$10.106. \quad z = 2xy + x^2 - y^2 + 4x,$$

$$D: \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ y \geq -x - 2 \end{cases}.$$

$$10.107. \quad z = -3xy + 5x^2 + y^2,$$

$$D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

$$10.108. \quad z = -xy + 0.5x^2,$$

$$D: \begin{cases} y \leq 8 \\ y \geq 2x^2 \end{cases}.$$

$$10.109. \quad z = -xy + 3x + y,$$

$$D: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 4 \\ y \geq x \end{cases}.$$

$$10.110. \quad z = xy - 3x - 2y, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}.$$

$$10.111. \quad z = xy + x^2 - 3x - y, \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}.$$

Глава 11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Основные понятия и определения

В задачах 11.1 – 11.11 проверить, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции (C – произвольная постоянная).

$$11.1. \quad y = 5x^2 \text{ для } xy' = 2y. \quad 11.2. \quad y = -\frac{2}{x^2} \text{ для } xy^2 dx - dy = 0.$$

$$11.3. \quad y = \ln \cos x \text{ для } y' = \operatorname{tg} x. \quad 11.4. \quad y = Ce^{-4x} \text{ для } y' + 4y = 0.$$

$$11.5. \quad y = Cx^3 \text{ для } 3y = xy'. \quad 11.6. \quad y = (x + C) \cdot e^x \text{ для } y' - y = e^x.$$

$$11.7. \quad y = Ce^{3x} \text{ для } y' - 3y = 0. \quad 11.8. \quad y = \frac{1}{x} \text{ для } y'' = x^2 + y^2.$$

$$11.9. \quad y = \frac{C^2 - x^2}{2x} \text{ для } (x + y)dx + xdy = 0. \quad 11.10. \quad x^2 - xy + y^2 = C \text{ для}$$

$$(x - 2y) \cdot y' - 2x + y = 0. \quad 11.11. \quad y = \operatorname{arctg}(x + y) + C \text{ для } (x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1.$$

11.12. Функция $y = \varphi(x)$ задана параметрически: $x = te^t$, $y = e^{-t}$. Докажите, что эта функция является решением уравнения

$$(1 + xy) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

В задачах 11.13 – 11.18 составить дифференциальные уравнения заданных семейств кривых (C, C_1, C_2 – произвольные постоянные).

$$11.13. \quad y = Cx^3. \quad 11.14. \quad x^2 + y^2 = C^2. \quad 11.15. \quad x^2 + y^2 - Cx = 0.$$

$$11.16. \quad y = \sin x + C \cos x. \quad 11.17. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad 11.18. \quad y = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

11.19. Составить дифференциальное уравнение для семейства парабол, с вершиной в начале координат и осью, совпадающей: а) с осью абсцисс, б) с осью ординат.

11.20. Составить дифференциальное уравнение семейства эллипсов, имеющих постоянную большую ось, равную $2a$.

11.21. Составить дифференциальное уравнение семейства линий, у которых отрезок касательной между точками касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

В задачах 11.22 – 11.24 в семействе кривых найти ту, которая удовлетворяет заданным начальным условиям.

11.22. $x^2 - y^2 = C$, $y(0) = 3$. 11.23. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

11.24. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

В задачах 11.25 – 11.27 для данного дифференциального уравнения построить поле направлений. Методом изоклин построить приближённо графики интегральных кривых.

11.25. $y' = x^2$. 11.26. $y' = -x + y$. 11.27. $y' = x - 1$.

В задачах 11.28 – 11.32 для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через заданную точку M .

11.28. $y' = y - x^2$, $M(1; 2)$. 11.29. $y' = 2 + y^2$, $M(1; 2)$. 11.30. $y' = xy$,

$M(0; -1)$. 11.31. $y' = x + 2y$, $M(3; 0)$. 11.32. $y' = y - x$, $M(4; 2)$.

§2. Уравнения с разделяющимися переменными

В задачах 11.33 – 11.55 найти общее решение (общий интеграл) данных дифференциальных уравнений.

11.33. $y' = \frac{x}{y}$. 11.34. $y' = \frac{y}{x}$. 11.35. $y' + \frac{x}{y} = 0$. 11.36. $y' + \frac{y}{x} = 0$.

11.37. $y' - xy^2 = 0$. 11.38. $yy' = \frac{1}{2x+1}$. 11.39. $xy' = 2y + 1$.

11.40. $x^2 y' - x + 1 = 0$. 11.41. $xyy' = 1 - x^2$. 11.42. $y' = (2y - 1)\operatorname{ctg} x$.

11.43. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$. 11.44. $\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = xydy$. 11.45. $\sqrt{3 + y^2} dx -$

$$-ydy = x^2 y dy. \quad 11.46. (\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0. \quad 11.47. y = y' \ln y.$$

$$11.48. y \ln y + xy' = 0. \quad 11.49. y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0. \quad 11.50. dy - y^2 \operatorname{tg} x dx = 0.$$

$$11.51. 6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx. \quad 11.52. y'(1 + y) = xy \sin x.$$

$$11.53. 2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2} y' = 0. \quad 11.54. e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0.$$

$$11.55. y' \cos x - (y + 1) \sin x = 0.$$

В задачах 11.56 – 11.70 найти частное решение дифференциального уравнения (задача Коши) удовлетворяющее данным начальным условиям.

$$11.56. x^2 dy - y^2 dx = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}. \quad 11.57. x dy - (1 + y^2) dx = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$11.58. (x + xy^2) dx - (x^2 y - y) dy = 0, \quad y(0) = 1. \quad 11.59. y dx + \sin^2 x dy = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad 11.60. \cos^2 x dy - \cos^2 y dx = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}. \quad 11.61. \sqrt{y} \cdot \sin x dx = dy,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad 11.62. \cos x \cdot \sin y dy = \cos y \cdot \sin x dx, \quad y(\pi) = \pi.$$

$$11.63. \sqrt{1 - x^2} dy + y dx = 0, \quad y(0) = e.$$

$$11.64. \sqrt{1 - x^2} dy - \sqrt{1 - y^2} dx = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$11.65. e^x dy + 2^y dx = 0, \quad y(0) = 0. \quad 11.66. \ln y^x dy = y dx, \quad y(1) = 1.$$

$$11.67. e^x dy + (2x + 1) dx = 0, \quad y(0) = 0. \quad 11.68. \frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$11.69. y' = xe^{x-y}, \quad y(2) = 2. \quad 11.70. x(y^6 + 1) dx - y^2(x^4 + 1) dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

11.71. Определить и построить кривую, проходящую через точку $(-2; 2)$, если отрезок любой касательной к кривой, заключённый между осями координат, делится точкой касания пополам.

11.72. Определить и построить кривую, проходящую через точку $(-1; -1)$, для которой отрезок, отсекаемый на оси Ox касательной к кривой в любой её точке, равен квадрату абсциссы точки касания.

11.73. В благоприятных для размножения условиях находится некоторое количество N_0 бактерий. Из эксперимента известно, что скорость размножения

бактерий пропорциональна их количеству (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Найти зависимость роста числа бактерий $N(t)$ с течением времени.

11.74. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдёт тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 метров, а за 3 секунды – 40 метров?

11.75. Тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила вязкого трения, действующая на тело, пропорциональна величине скорости $F_{тр} = -\alpha V$, где $\alpha > 0$ – коэффициент трения. Определить зависимость скорости от времени, если тело начинает движение с нулевой скоростью.

11.76. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчёта пути и имела скорость $V_0 = 20 \text{ м/с}$. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с. после начала движения.

§3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В задачах 11.77–11.94 найти общее решение (общий интеграл) данных дифференциальных уравнений.

$$11.77. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2. \quad 11.78. \quad y' = -\frac{x+y}{x}. \quad 11.79. \quad (x+2y)dx - xdy = 0.$$

$$11.80. \quad ydx - (x+y)dy = 0. \quad 11.81. \quad y^2 + x^2 y' = xy y'. \quad 11.82. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$11.83. \quad y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}. \quad 11.84. \quad xy' = \frac{2yx^2 + 3y^3}{x^2 + 2y^2}.$$

$$11.85. \quad xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y. \quad 11.86. \quad y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

$$11.87. \quad xy' = y + \frac{y^2}{x}. \quad 11.88. \quad xy' = y + \frac{x}{\sin \frac{y}{x}}. \quad 11.89. \quad y' = \frac{y}{x} - \sin^2 \frac{y}{x}.$$

$$11.90. \quad y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}. \quad 11.91. \quad xy' = y + xe^{y/x}. \quad 11.92. \quad xy' = y + x \cdot 2^{y/x}.$$

$$11.93. \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}. \quad 11.94. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 \cdot e^{-x/y}}{x^2}.$$

В задачах 11.95 – 11.102 найти частное решение дифференциальных уравнений (задача Коши).

$$11.95. y' - 1 = e^{y/x} + \frac{y}{x}, y(1) = 0. \quad 11.96. xy' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{6}.$$

$$11.97. y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}, y(1) = 0. \quad 11.98. y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$11.99. (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0, y(4) = 0. \quad 11.100. (\sqrt{xy} + x)dy = ydx, y(0) = 1.$$

$$11.101. (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1. \quad 11.102. 2xy + 2y^2 = (x^2 + xy) \cdot y', y(1) = 2.$$

11.103. Найти кривую, проходящую через точку $A(3; 0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной равен $\frac{x+y}{x}$.

11.104. Кривая проходит через точку $(-1; 1)$. Расстояние любой касательной к этой кривой от начала координат равно абсциссе точки касания. Написать уравнение указанной кривой.

11.105. Найти кривую, проходящую через точку $A(1; 2)$, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, равен абсциссе точки касания.

§4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

В задачах 11.106 – 11.117 найти общее решение данных дифференциальных уравнений.

$$11.106. y' + xy = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}. \quad 11.107. y' - xy = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}. \quad 11.108. y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

$$11.109. y' + \frac{y}{x^2} = x \cdot e^{\frac{1}{x}}. \quad 11.110. y' - \frac{y}{x} = xe^{3x}. \quad 11.111. y' + \frac{y}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

$$11.112. y' + y \cdot \operatorname{tg} x = x^2 \cdot \cos x. \quad 11.113. y' - xy = \cos x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$11.114. y' + \frac{y}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^x}{\sin x}. \quad 11.115. y' - \frac{y}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x. \quad 11.116. y' = \frac{y}{x + y^2}.$$

$$11.117. y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$$

11.118. Сила тока I в электрической цепи с сопротивлением R , коэффициентом индуктивности L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению $L \frac{dI}{dt} + RI = E$. Найти зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени, если $E = A \sin \omega t$ (L, R, A - постоянные).

В задачах 11.119 – 11.130 найти частное решение дифференциальных уравнений (задача Коши).

11.119. $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0$. 11.120. $y' + \frac{xy}{x^2 + 1} = 1, y(0) = 0$.

11.121. $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(-1) = 2$. 11.122. $y' + xy = x^3, y(0) = 0$.

11.123. $y' - y = x^3 e^x, y(0) = 6$. 11.124. $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x(x+1), y(0) = 1$.

11.125. $y' + y = e^{-x}, y(0) = -1$. 11.126. $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \cdot \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

11.127. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 1$. 11.128. $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0$.

11.129. $xy' + y = e^x, y(a) = b$. 11.130. $y' - y \cdot \sin x = \sin x \cdot \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

11.131. Сила тока I в электрической цепи с сопротивлением R , коэффициентом индуктивности L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению $L \frac{dI}{dt} + RI = E$. Найти зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени, если E меняется по закону $E = kt$ и $I(0) = 0$ (L, R, k - постоянные), k – коэффициент пропорциональности.

§5. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков, допускающие понижение порядка

В задачах 11.132 – 11.156 найти общее решение данных дифференциальных уравнений.

11.132. $xy'' = 1$. 11.133. $y'' = \cos 3x$. 11.134. $y'' = \frac{1}{\sin^2 x}$. 11.135. $y'''' = \frac{1}{x^5}$.

11.136. $y''' = e^{4x}$. 11.137. $y'' = \ln x$. 11.138. $xy'' = y'$. 11.139. $x^2 y'' = (y')^2$.

11.140. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$. 11.141. $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$. 11.142. $y'' = y' + x$.

$$11.143. y'' = \frac{y'}{x} + x. \quad 11.144. x^2 y'' + xy' = 1. \quad 11.145. xy''' + y'' = 1 + x.$$

$$10.146. xy'''' - y''' = 0. \quad 11.147. yy'' = (y')^2. \quad 11.148. y^3 y'' = 1.$$

$$11.149. yy'' - (y')^2 - 1 = 0. \quad 11.150. 1 + (y')^2 - 2yy'' = 0. \quad 11.151. 2yy'' = (y')^2.$$

$$11.152. y'' = y'(1 + (y')^2). \quad 11.153. y'' = \sqrt{1 - (y')^2}. \quad 11.154. 3y'y'' = 2y.$$

$$11.155. y'' = y' \ln y'. \quad 11.156. y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0.$$

В задачах 11.157 – 11.173 найти соответствующие частные решения дифференциальных уравнений.

$$11.157. y'' = \operatorname{tg}^2 x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad 11.158. y''' = \frac{6}{x^3}, \quad y(1) = 2,$$

$$y'(1) = 1, \quad y''(1) = 1. \quad 11.159. y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$11.160. y''' = e^{2x}, \quad y(0) = \frac{1}{8}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}, \quad y''(0) = \frac{1}{2}. \quad 11.161. (1 + x^2)y'' - 2xy' = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3. \quad 11.162. xy'' - y' = x^3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

$$11.163. y''(e^x + 1) + y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2. \quad 11.164. y''x \ln x = y',$$

$$y(e) = 2, \quad y'(e) = 4. \quad 11.165. xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 0.$$

$$11.166. \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad 11.167. y'' - y' \operatorname{ctg} x =$$

$$= \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad 11.168. y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$$

$$11.169. y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3. \quad 11.170. y''y^3 = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2},$$

$$y'(0) = \sqrt{2}. \quad 11.171. 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \quad 11.172. y'' +$$

$$+ 18 \sin y \cos y^3 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

$$11.173. y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 1.$$

§6. Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков с постоянными коэффициентами

В задачах 11.174 – 11.186 составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений которого имеет вид.

11.174. e^x, e^{-2x} . 11.175. e^x, e^{-x} . 11.176.1, x . 11.177. e^x, xe^x .

11.178. $\sin 3x, \cos 3x$. 11.179. $\sin x, \cos x, e^x$. 11.180. e^x, xe^{2x}, e^{2x} .

11.181. $e^x, e^{3x}, 1$. 11.182. $\sin 2x, \cos 2x, 1$. 11.183. $1, x, x^2$. 11.184. $e^{-x}, e^x, \sin 2x, \cos 2x$. 11.185. $e^{-x}, xe^{-x}, \sin x, \cos x$. 11.186. $\sin 3x, \cos 3x, 1, x$.

В задачах 11.187 – 11.206 решить однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

11.187. $y'' - 5y' + 6y = 0$. 11.188. $y'' - 6y' + 5y = 0$. 11.189. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

11.190. $y'' - 6y' = 0$. 11.191. $y'' - 9y = 0$. 11.192. $y'' + 9y = 0$.

11.193. $y'' - 6y' + 10y = 0$. 11.194. $y'' + y' + y = 0$. 11.195. $4y'' + y = 0$.

11.196. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$. 11.197. $y''' + 2y'' + y' = 0$. 11.198. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$. 11.199. $y''' + y'' = 0$. 11.200. $y''' + y' = 0$. 11.201. $y''' + y = 0$.

11.202. $y''' + y'' - 2y = 0$. 11.203. $y'''' + y''' = 0$. 11.204. $y'''' + y'' = 0$.

11.205. $y'''' + y' = 0$. 11.206. $y'''' + y = 0$.

В задачах 11.207 – 11.215 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

11.207. $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$. 11.208. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$. 11.209. $y'' + 2y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

11.210. $y'' - 3y' = 0, y(0) = 3, y'(0) = -2$. 11.211. $y'' - 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -3$. 11.212. $y'' + 25y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -1$. 11.213. $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 4, y'(0) = -3$. 11.214. $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -5$. 11.215. $y'' + 2y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

В задачах 11.216 – 11.235 найти общее решение неоднородного линейного уравнения, находя частное решение методом неопределённых коэффициентов.

11.216. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$. 11.217. $y'' - 2y' + 2y = 2x$. 11.218. $y'' + 4y' - 5y = -5$. 11.219. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$. 11.220. $y'' + 2y' + y = \cos x$.

11.221. $y'' + 3y' = 2e^{-3x}$. 11.222. $y'' - 2y' = 2\sin 3x$. 11.223. $y'' - 4y' = 2\cos 3x$. 11.224. $y'' + 3y' = 18x + 9$. 11.225. $y'' + 4y = x^2 - 1$.

11.226. $y'' + y = \cos x$. 11.227. $y'' + y = \sin 2x$. 11.228. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. 11.229. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$. 11.230. $y''' - y' = -2x$.

11.231. $y'''' - y = 8e^x$. 11.232. $y''' + y'' = e^{-x}$. 11.233. $y''' + y'' = 6x$.

11.234. $y'' - y = 2xe^{-x}$. 11.235. $y'''' - y = \cos x$.

В задачах 11.236 – 11.248 найти частное решение неоднородного линейного уравнения, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

11.236. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. 11.237. $y'' - 4y' + 3y = 1 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. 11.238. $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

11.239. $y'' - y' - 6y = x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. 11.240. $y'' + 3y' = x + 3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$. 11.241. $y'' - 2y' = x^2 - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$.

11.242. $y'' + y = 4xe^x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. 11.243. $y'' + y = 4\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. 11.244. $y'' + y' = -\sin 2x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

11.245. $y'' + 9y = 6\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. 11.246. $y'' + 2y' - 3y = 48x^2 e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$. 11.247. $y''' + y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$. 11.248. $y'''' - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

В задачах 11.249 – 11.260 найти общее решение методом вариации произвольных постоянных.

11.249. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$. 11.250. $y'' + y = \operatorname{tg} x$. 11.251. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

$$11.252. y'' + 9y = \frac{2}{\cos 3x}. \quad 11.253. y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad 11.254. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

$$11.255. y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}. \quad 11.256. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}. \quad 11.257. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

$$11.258. y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}. \quad 11.259. y'' + 6y' + 9y = \frac{\ln x}{e^{3x}}.$$

$$11.260. y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

В задачах 11.261 – 11.270 решить дифференциальные уравнения, применяя принцип суперпозиции решений.

$$11.261. y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}. \quad 11.262. y'' - y = 2e^{-x} - x^2.$$

$$11.263. y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} x + \sin x. \quad 11.264. y'' - 4y' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x.$$

$$11.265. y'''' + y'' = 6x + e^{-x}. \quad 11.266. y'''' - y = xe^x + \cos x.$$

$$11.267. y'' + 25y = 3e^x + \frac{4}{\cos 5x}. \quad 11.268. y'' - 4y' + 13y = x - 2 + \frac{e^{2x}}{\cos 3x}.$$

$$11.269. y'' + y' = \cos^2 x + x^2. \quad 11.270. y'' + 4y = x \sin^2 x.$$

В задачах 11.271 – 11.279 найти общие (частные) решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$11.271. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad 11.272. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}. \end{cases} \quad 11.273. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

$$11.274. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases} \quad 11.275. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

$$11.276. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 18x + y. \end{cases} \quad 11.277. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 8y. \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 5.$$

$$11.278. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases} \quad 11.279. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t, \\ \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t \end{cases} \quad \text{при условии}$$

$$x(\pi) = 1, y(\pi) = 2.$$

Глава 12

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Расстановка пределов интегрирования

В задачах 12.1 – 12.17 найти пределы двойных интегралов $\iint_D f(x, y) dx dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D , представив интегралы в виде одного из повторных интегралов.

12.1. D – прямоугольник со сторонами $x = 1, x = 4, y = 0, y = 2$.

12.2. D – прямоугольник: $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 5$.

12.3. D – треугольник со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 2$.

12.4. D – треугольник: $x - 3y = 0, y - 2x = 0, x \leq 3$.

12.5. D – ограничена линиями $x + y = 2, 4x + 4 = y^2$.

12.6. $D: \begin{cases} x = 0, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ x + y^2 = 4. \end{cases}$ 12.7. $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ y \leq x, \\ xy \geq 1. \end{cases}$ 12.8. $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$

12.9. $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y + x \leq 3, \\ x \leq 2y^2. \end{cases}$ 12.10. D – ограничена линиями $y = x + 3, y = 2x^2, (x \leq 0)$

12.11. D – ограничена парабололами $y = x^2, x = y^2$. 12.12. $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

12.13. $D: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$.

12.14. $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ 4y \geq 3x, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$ 12.15. $D: \begin{cases} x \geq 0,5, \\ y \geq x, \\ xy \leq 1. \end{cases}$

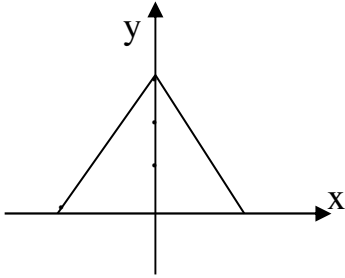
12.16. D – треугольник со сторонами $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

12.17. D – параллелограмм: $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.

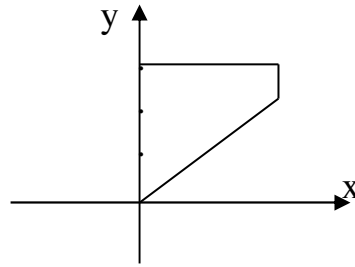
В задачах 12.18 – 12.25 представить двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$, где

D – заданные ниже треугольники, в виде одного повторного интеграла, выбрав соответствующим образом порядок интегрирования.

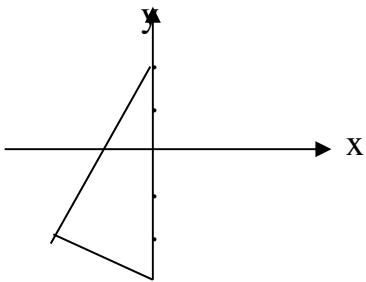
12.18.



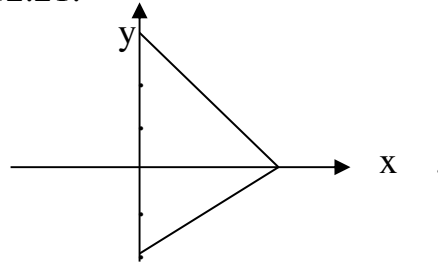
12.19.



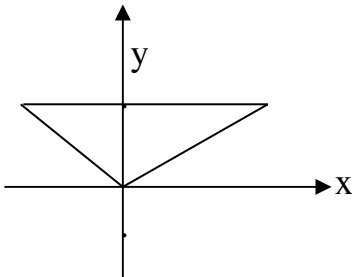
12.20.



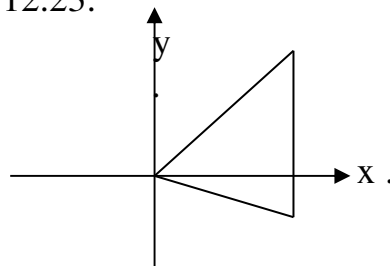
12.21.



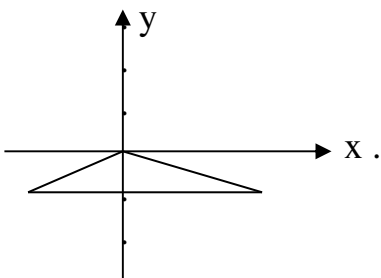
12.22.



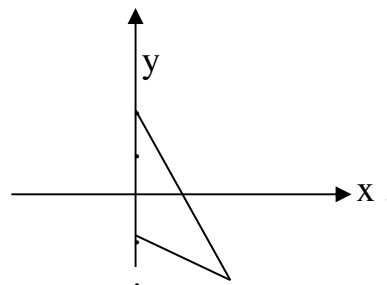
12.23.



12.24.



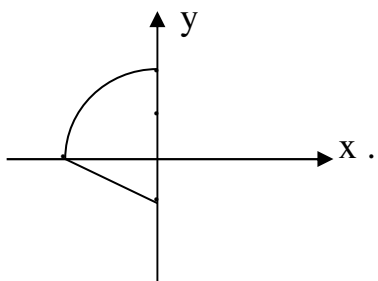
12.25.



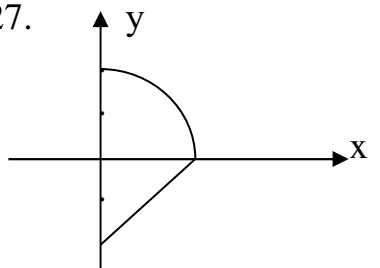
В задачах 12.26 – 12.35 представить двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$,

где D - заданные ниже области, границы которых составлены из отрезков прямых и дуги окружности, в виде одного повторного интеграла, выбрав соответствующим образом порядок интегрирования.

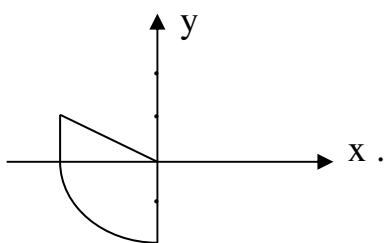
12.26.



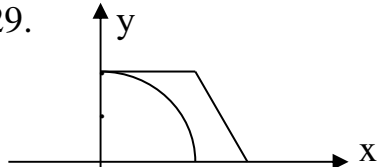
12.27.



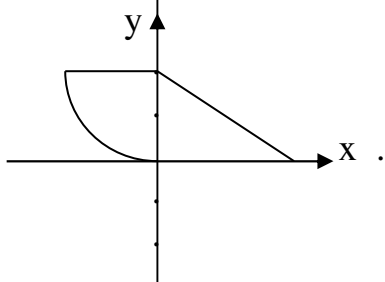
12.28.



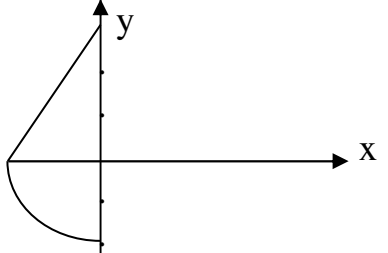
12.29.



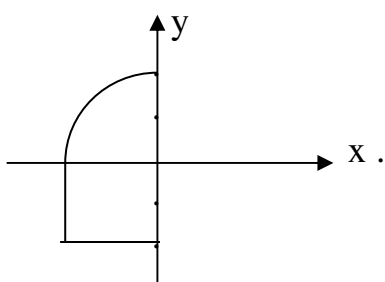
12.30.



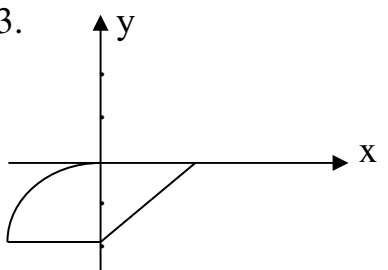
12.31.



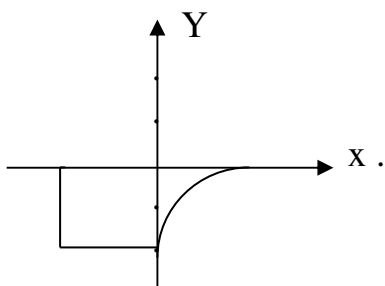
12.32.



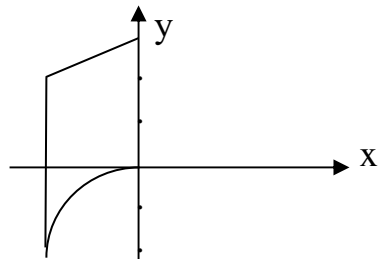
12.33.



12.34.

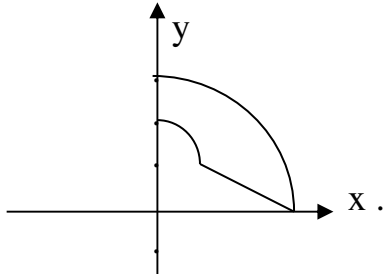


12.35.

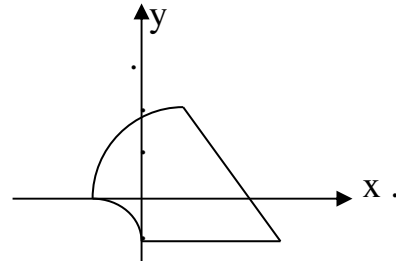


В задачах 12.36 – 12.43 представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде суммы повторных интегралов (с наименьшим числом слагаемых), если граница области D составлена из отрезков прямых линий и дуг окружностей.

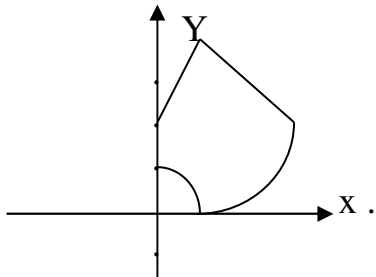
12.36.



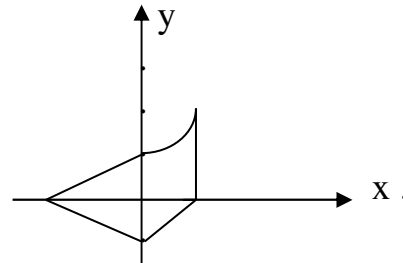
12.37.



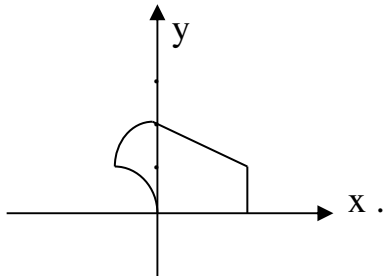
12.38.



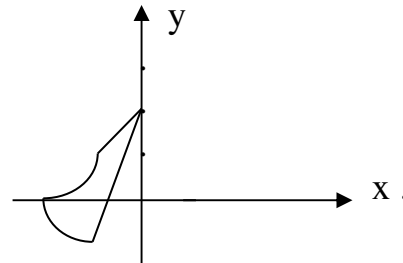
12.39.



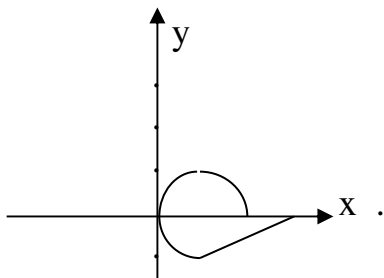
12.40.



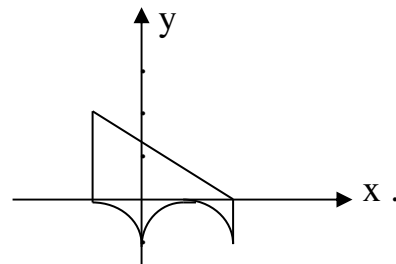
12.41.



12.42.



12.43.



В задачах 12.44 – 12.75 изменить порядок интегрирования.

12.44. $\int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$. 12.45. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy$. 12.46. $\int_{-1}^0 dy \int_{-y-1}^0 f(x, y) dx$.

$$\begin{aligned}
12.47. & \int_{-1}^0 dy \int_0^{2y+2} f(x, y) dx. & 12.48. & \int_0^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx. & 12.49. & \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy. \\
12.50. & \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy. & 12.51. & \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx. & 12.52. & \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy. \\
12.53. & \int_0^2 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx. & 12.54. & \int_0^2 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx. & 12.55. & \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{2-2x} f(x, y) dy. \\
12.56. & \int_{-1}^0 dy \int_{-2y-2}^{3y+3} f(x, y) dx. & 12.57. & \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy. & 12.58. & \int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{x}} f(x, y) dy. \\
12.59. & \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{1-x}^{\cos x} f(x, y) dy. & 12.60. & \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy. & 12.61. & \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy & 12.62. \\
12.63. & \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy. & 12.63. & \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx. & 12.64. & \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{1}{4}y^2-1}^{2-y} f(x, y) dx. \\
12.65. & \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy. & 12.66. & \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx. & 12.67. & \int_{-1}^0 dy \int_y^{2+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \\
12.68. & \int_0^4 dx \int_{\frac{3-x}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy. & 12.69. & \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx. & 12.70. & \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx. \\
12.71. & \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy. & 12.72. & \int_0^3 dy \int_{\frac{3}{4}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx. & 12.73. & \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy. \\
12.74. & \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy. & 12.75. & \int_0^1 dy \int_{y^2}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx.
\end{aligned}$$

В задачах 12.76 – 12.77, изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного повторного интеграла.

$$12.76. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$12.77. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

§2. Вычисление кратных интегралов

В задачах 12.78 – 12.95 вычислить повторные интегралы.

$$12.78. \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{2}} x^2 y dy. \quad 12.79. \int_0^4 dx \int_0^{x^2} (x+y) dy. \quad 12.80. \int_{-2}^2 dx \int_0^{2-x} x^2 dy.$$

$$12.81. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x+y) dy. \quad 12.82. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2y^2+1} (1-y^2) dx. \quad 12.83. \int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx.$$

$$12.84. \int_0^1 dy \int_y^{y+3} xy^2 dx. \quad 12.85. \int_0^2 dy \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx. \quad 12.86. \int_0^{0,5} dy \int_y^{\sqrt{y}} (4xy + x) dx. \quad 12.87.$$

$$\int_0^2 dy \int_0^{y^2} \frac{e^{y^2}}{y} dx. \quad 12.88. \int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} xe^y dy. \quad 12.89. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{2y} \sin(2x-3y) dx.$$

$$12.90. \int_0^1 dx \int_0^{4-x^2} xe^{3y} dy. \quad 12.91. \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{0,5}^1 4ye^{2xy} dx. \quad 12.92. \int_0^1 dy \int_0^y 2y^2 e^{xy} dx.$$

$$12.93. \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int_1^2 4y^3 \sin(xy^2) dx. \quad 12.94. \int_{-1}^0 dy \int_{2y}^0 y^2 \cos \frac{\pi xy}{4} dx. \quad 12.95. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy \int_1^2 y \cos xy dx.$$

В задачах 12.96 – 12.115 вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ по заданной области D в прямоугольных координатах, рационально выбрав порядок интегрирования.

$$12.96. \iint_D x dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x + y \geq 2. \end{cases} \quad 12.97. \iint_D xy dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

$$12.98. \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y \leq 2, \\ xy \geq 1, \\ y \geq x. \end{cases} \quad 12.99. \iint_D \cos(y^2) dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} x = 0, \\ x = y, \\ y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

$$12.100. \iint_D e^{x^2} dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y = 0, \\ x = 1, \\ y = x. \end{cases} \quad 12.101. \iint_D \frac{dx dy}{x}, \text{ где } D: \begin{cases} y = 12x, \\ y = 3x^2. \end{cases}$$

$$12.102. \iint_D (x+y) dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y=0, \\ x=0, \\ y=-\sqrt{x+4}. \end{cases} \quad 12.103. \iint_D (x+2y) dx dy, \text{ где } D:$$

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=\sqrt{x}. \end{cases} \quad 12.104. \iint_D xy dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y=x, \\ x \geq 0, \\ y=2-x^2. \end{cases} \quad 12.105. \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \text{ где } D:$$

$$\begin{cases} y=x, \\ x=2, \\ y=\frac{1}{x}. \end{cases} \quad 12.106. \iint_D y dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ x+y \geq 2. \end{cases}$$

$$12.107. \iint_D 15y^2 dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y=-x^3, \\ x=1, \\ y=\sqrt[3]{x}. \end{cases} \quad 12.108. \iint_D y \cos(xy) dx dy, \text{ где } D:$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad 12.109. \iint_D (x^2+4y^2) dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y=x^2, \\ x=y^2. \end{cases}$$

$$12.110. \iint_D x dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ y-x \geq 2. \end{cases} \quad 12.111. \iint_D \sin(y^2) dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} y=2x, \\ x=0, \\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

$$12.112. \iint_D x \sin(xy) dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad 12.113. \iint_D e^x dx dy, \text{ где } D:$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y=e, \\ y=2, \\ y=e^x. \end{cases} \quad 12.114. \iint_D y dx dy, \text{ где } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ x+y \leq -2. \end{cases} \quad 12.115. \iint_D (x+y) dx dy, \text{ где } D:$$

$$\begin{cases} y=x, \\ x=1, \\ 2x+y=6. \end{cases}$$

В задачах 12.116 – 12.137 вычислить двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$ по заданной области D , перейдя к полярным координатам.

$$12.116. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$12.117. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$12.118. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ x \geq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

$$12.119. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3, \\ x \leq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

$$12.120. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y = x, \\ y = -x, \\ x = \sqrt{1 - y^2}. \end{cases}$$

$$12.121. \iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2y. \end{cases}$$

$$12.122. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 3y, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

$$12.123. \iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy, \quad \text{где } D: x^2 + y^2 \leq \pi^2.$$

$$12.124. \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ -x \leq y \leq x. \end{cases}$$

$$12.125. \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ x^2 + y^2 \leq e^2. \end{cases}$$

$$12.126. \iint_D (4 - x) dx dy, \quad \text{где } D: x^2 + y^2 \leq 4x.$$

$$12.127. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \text{где } D: \begin{cases} y \leq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

$$12.128. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq -3x, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

$$12.129. \iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy, \quad \text{где } D: x^2 + y^2 + 2x \leq 0.$$

$$12.130. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq -2x, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

$$12.131. \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

$$12.132. \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad \text{где } D: x^2 + y^2 \leq Rx.$$

$$12.133. \iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

$$12.134. \iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}, \quad \text{где } D: \begin{cases} y = x, \\ y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, \\ x = -\sqrt{1-y^2}. \end{cases}$$

$$12.135. \iint_D \frac{x}{y} dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2y. \end{cases}$$

$$12.136. \iint_D \frac{y dx dy}{x}, \quad \text{где } D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$$

$$12.137. \iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy, \quad \text{где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \pi^2, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

§3. Применение двойных интегралов для вычисления площадей и объёмов фигур

В задачах 12.138 – 12.151 вычислить площади фигур, ограниченных кривыми.

12.138. $xy=4, x+y-5=0$. 12.139. $x=4y-y^2, x+y=6$.

12.140. $y=\frac{3}{2}x, y=4-(x-1)^2, (x \geq 0)$. 12.141. $x=4, y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$.

12.142. $xy=1, x=y, x=2$. 12.143. $y=x^2, 4y=x^2, y=4$.

12.144. $xy=1, x=4, y=2$. 12.145. $x+y=1, y^2=x+1$.

12.146. $4x=y^2+4, 16x=y^2+64$. 12.147. $x=y^2-2y, x-y=0$.

12.148. $2y=x^2, y=0, xy=4, x=4$. 12.149. $x=y^2, y=2+x, y=2, y=-2$.

12.150. $y=\sin x, y=\cos x, x=0, (x > 0)$. 12.151. $y=2x, x+y-2=0, y=0$.

В задачах 12.152 – 12.158 вычислить площади фигур, ограниченных заданными кривыми или удовлетворяющих данным неравенствам (от декартовых координат целесообразно перейти к полярным координатам).

12.152. $x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x, (y \geq 0)$. 12.153. $x^2+y^2 \leq \sqrt{3}x,$

$x^2+y^2 \leq 3y$. 12.154. $x^2+y^2=3y, y=\sqrt{3}x, x=0$. 12.155. $x^2+y^2=4x,$

$(y \geq x)$. 12.156. $x=0, x=\sqrt{4y-y^2}, (y \geq 2)$. 12.157. $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

12.158. $\rho=2(1+\cos\varphi), \rho=2\cos\varphi$.

12.159. Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho=2$ из кардиоиды $\rho=2(1+\sin\varphi)$ и расположенную вне круга.

В задачах 12.160 – 12.172 вычислить объёмы тел, ограниченных данными поверхностями.

12.160. $x+y+2z=4, x=0, y=0, z=0$.

12.161. $z=x^2+3y^2, x+y=1, x=0, y=0, z=0$.

12.162. $z=4-x^2, y=0, y=5, z=0$.

12.163. $z=y^2, x+y=2, x=0, y=0, z=0$.

12.164. $z=0, x+z=6, y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$.

12.165. $z=9-y^2, x+2y=6, x=0, y \geq 0, z=0$.

11.166. $z=\frac{x^2}{2}, 2x+y-6=0, x=0, y=0, z=0$.

12.167. $z=x^2+y^2+2, x+y \geq 3, x=0, y=0, z=0, x=3, y=3$.

12.168. $z=x^2+y^2+1, y=6-x, z=0, y=1, y=2x$.

12.169. $z=\frac{x^3}{3}, x^2+y^2=9, x \geq 0, z=0$

12.170. $x^2+y^2=16, y=0, z=y, z=0$.

12.171. $x+y+z=4, x^2+y^2=4, z=0$.

12.172. $x+y+z=10, 2x+y=4, x+2y=8, z=0$.

§4. Применение двойных интегралов для вычисления физических величин

12.173. Найти массу фигуры, ограниченной прямыми: $x=-1, x=2, \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1, y=0$, если плотность $\rho(x, y)$ в каждой точке равна квадрату абсциссы, умноженному на ординату этой точки.

12.174. Найти массу однородной пластинки ($\rho=1$), ограниченной линиями: $y=x^2, y=3x^2, y=3x$.

12.175. Найти массу пластины, ограниченной кривыми $y=x^2, y=\sqrt{x}$, если плотность её в каждой точке (x, y) равна $\rho(x, y)=x+2y$.

12.176. Найти массу круглой пластинки радиуса R , если плотность её $\rho(x, y)$ в каждой точке равна расстоянию от этой точки до центра окружности.

12.177. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho=1$), ограниченной линиями: $y=x^2-1, y=2$.

12.178. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho=1$), ограниченной линиями: $y=\sqrt{4-x}, y=0, (x \geq 0)$.

12.179. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho=1$), ограниченной линиями: $y=x^2, y+x=2, y=0$.

12.180. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $x = y^2$, $4x = y^2$, $x = 4$, $y \geq 0$.

12.181. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y = 2x^2$, $y = 4x^2$, $x = 4$.

12.182. Найти статический момент относительно оси OX однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $xy = 4$, $xy = 1$, $x = 2$, $x = 4$.

12.183. Найти статические моменты относительно осей координат меньшей части эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, отсекаемой прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ($\rho = 1$).

12.184. Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной прямыми: $y = 2 - x$, $y = 1$, $x = 2$.

12.185. Найти момент инерции однородной пластинки ($\rho = 1$) относительно оси OX , ограниченной линиями: $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y = 1$, $y = 3$.

12.186. Найти момент инерции относительно оси OY однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y = 1$, $y = 3$.

12.187. Найти момент инерции относительно оси OX однородной пластинки ($\rho = 1$), ограниченной линиями: $x^2 = 4 - y$, $y = 0$.

Глава 13

РЯДЫ

§1. Понятие ряда. Сумма ряда и его сходимость

В задачах 13.1 - 13.20 написать общий член ряда.

13.1. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$. 13.2. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots$. 13.3. $2 + \frac{4}{2!} + \frac{6}{3!} + \dots$.

13.4. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$. 13.5. $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$.

13.6. $\frac{1}{2} + \frac{3!}{2 \cdot 4} + \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$. 13.7. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$. 13.8. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$

13.9. $1 - 1 + 1 - \dots$. 12.10. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots$. 13.11. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \dots$. 13.12.

$-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \dots$. 13.13. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \dots$.

$$\begin{aligned}
 &13.14. \ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad 13.15. \ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad 13.16. \ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
 &13.17. \ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^3+9} + \dots \quad 13.18. \ x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots \\
 &13.19. \ 1 - 3^2x + 5^2x^2 - 7^2x^3 + \dots \quad 13.20. \ (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \dots
 \end{aligned}$$

В задачах 13.21 - 13.26 выписать три первых члена ряда.

$$\begin{aligned}
 13.21. \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}. & 13.22. \quad &\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 2(-1)^n). & 13.23. \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^3+1}}. \\
 13.24. \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. & 13.25. \quad &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}. & 13.26. \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{\sqrt{n}}.
 \end{aligned}$$

В задачах 13.27 - 13.34 написать формулу частичной суммы S_n , и вычислить её предел при $n \rightarrow \infty$. Сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

$$\begin{aligned}
 13.27. \quad &\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \quad 13.28. \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots \quad 13.29. \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots \\
 13.30. \quad &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad 13.31. \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots \quad 13.32. \quad 2 + \frac{4}{2!} + \frac{6}{3!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$13.31. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots \quad 13.32. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} \quad 13.33. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$13.34. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

В задачах 13.35 - 13.45 проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда.

$$13.35. \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots \quad 13.36. \quad 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots \quad 13.37. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2}.$$

$$13.38. \quad 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots \quad 13.39. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad 13.40. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n-1)^4}.$$

$$13.41. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \quad 13.42. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^9+1}} \quad 13.43. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+4)}.$$

$$13.44. \quad 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots \quad 13.44. \quad e + \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \dots \quad 13.45. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}.$$

§2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов

В задачах 13.46 - 13.61 исследовать ряды на сходимость, применяя признаки сравнения (при необходимости использовать эквивалентность

следующих бесконечно малых последовательностей: $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right\}$,
 $\left\{ \arcsin \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}$, $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ (при $n \rightarrow \infty$)).

$$13.46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}. \quad 13.47. \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} + \frac{\ln 4}{\sqrt{4}} + \dots \quad 13.48. \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$$

$$13.49. \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \dots \quad 13.50. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$13.51. \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{4} + \sin \frac{1}{8} + \dots \quad 13.52. \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \dots$$

$$13.53. \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \dots \quad 13.54. \frac{1}{\sqrt[4]{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3 \cdot 4}} + \dots$$

$$13.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} \quad 13.56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5} \quad 13.57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1}}{n^2 + 1}$$

$$13.58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n^6 + 2n - 2}} \quad 13.59. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) \quad 13.60. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$13.61. \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{n^3}$$

В задачах 13.62 - 13.71 исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера.

$$13.62. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots \quad 13.63. 2 + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \dots$$

$$13.64. 2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad 13.65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{5^n} \quad 13.66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$13.67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{3})^n} \quad 13.68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{\sqrt{(n+1) \cdot 3^n}} \quad 13.69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$13.70. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)! \cdot 2^n} \quad 13.71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} \cdot \sqrt{n^2 + 3}}{(n-1)!}$$

В задачах 13.72 - 13.83 исследовать ряды на сходимость, применяя радикальный признак Коши.

$$\begin{aligned}
 13.72. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n-1} \right)^n & \quad 13.73. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n} & \quad 13.74. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1} \\
 13.75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{-n} & \quad 13.76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^n} & \quad 13.77. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{8n+4} \right)^{n^2} \\
 13.78. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{4n^2+1} \right)^{3n} & \quad 13.79. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+10}{3n-1} \right)^{\frac{n}{3}} & \quad 13.80. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n \cdot 7^{n+1}} \right)^{-n} \\
 13.81. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{\pi}{5n} & \quad 13.82. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\arcsin^n \frac{1}{n}} & \quad 13.83. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n}
 \end{aligned}$$

В задачах 13.84 - 13.91 исследовать ряды на сходимость, применяя интегральный признак Коши.

$$\begin{aligned}
 13.84. \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots & \quad 13.85. \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots & \quad 13.86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \\
 13.87. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} & \quad 13.88. \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} + \frac{\sqrt{\ln 3}}{3} + \frac{\sqrt{\ln 4}}{4} + \dots & \quad 13.89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \\
 13.90. \frac{3}{6} + \frac{12}{13} + \dots + \frac{3n^2}{n^3+5} + \dots & \quad 13.91. \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2+1} + \dots
 \end{aligned}$$

В задачах 13.92– 13.106 исследовать ряды на сходимость и указать применяемые признаки.

$$\begin{aligned}
 13.92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3+n^2} & \quad 13.93. \frac{1 \cdot 2}{9} + \frac{2 \cdot 4}{27} + \frac{3 \cdot 8}{81} + \dots & \quad 13.94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n \cdot 2^{n+1}} \\
 13.95. \frac{1}{5} + \frac{4}{9} + \frac{7}{13} + \dots & \quad 13.96. \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{4}{27} + \dots & \quad 13.97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \\
 13.98. \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{9} \right)^1 + \left(\frac{5}{10} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots & \quad 13.99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{2^n} & \quad 13.100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} \\
 13.101. \frac{6}{4} + \frac{7}{16} + \frac{8}{64} + \dots & \quad 13.102. \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$13.103. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+2)}{5^n}. \quad 13.104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \quad 13.105. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n.$$

$$13.106. \frac{1}{1+\sin^2\alpha} + \frac{1}{4+\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{9+\sin^2 3\alpha} + \dots$$

§3. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость

В задачах 13.107 - 13.112 доказать, что ряд сходится условно.

$$13.107. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots \quad 13.108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad 13.109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

$$13.110. \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \dots \quad 13.111. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad 13.112. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n-1}.$$

В задачах 13.113 - 13.120 доказать, что ряд сходится абсолютно.

$$13.113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}. \quad 13.114. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+n^2)}. \quad 13.115. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^n.$$

$$13.116. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{4} - \dots \quad 13.117. \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{7}{9 \cdot 4} - \dots$$

$$13.118. \frac{1}{2!} - \frac{8}{3!} + \frac{27}{4!} - \dots \quad 13.119. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}. \quad 13.120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n(n+1)}.$$

В задачах 13.121 - 13.132 исследовать ряд на сходимость.

$$13.121. -\frac{1}{1+2} + \frac{1}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \dots \quad 13.122. -\ln 2 + \ln 3 - \ln 4 + \dots$$

$$13.123. -\ln \frac{4}{3} + \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{6}{7} + \dots \quad 13.124. \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{4\ln^2 4} - \dots$$

$$13.125. -\frac{1}{2-\sqrt{1}} + \frac{1}{4-\sqrt{2}} - \frac{1}{6-\sqrt{3}} + \dots \quad 13.126. \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

$$13.127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n-1) \cdot 5^n}. \quad 13.128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{3n^2 \sqrt{n}}. \quad 13.129. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{5^{n^2}}{n^n}.$$

$$13.130. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}. \quad 13.131. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\cos 2n}{5^n}. \quad 13.132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n \cdot (n+1)}.$$

§4. Функциональные ряды.

В задачах 13.133 - 13.150 определить область сходимости степенного ряда, используя признак Даламбера.

$$13.133. \dots 1 + x + x^2 + \dots \quad 13.134. x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots \quad 13.135. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$13.136. 1 + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{\sqrt{4}} + \dots \quad 13.137. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$$

$$13.138. 1 + \frac{3x}{2^2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{9x^2}{4^2 \cdot \sqrt{4}} + \frac{27x^3}{6^2 \cdot \sqrt{6}} + \dots \quad 13.139. x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$13.140. 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots \quad 13.141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^{2n-2}}{n}$$

$$13.142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!} \quad 13.143. \frac{(x+4)}{3} + \frac{(x+4)^3}{9} + \frac{(x+4)^5}{27} + \dots$$

$$13.144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2\sqrt{n}+3) \cdot 4^n} \quad 13.145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1} \cdot \left(\frac{4x-1}{7}\right)^n \quad 13.146. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3n+1}$$

$$13.147. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}} \quad 13.148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{n^n} \quad 13.149. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$$

$$13.150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$$

В задачах 13.151 - 13.162 определить интервал сходимости степенного ряда (используя формулу радиуса сходимости) и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

$$13.151. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-1}} \quad 13.152. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot x^n \quad 13.153. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

$$13.154. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n^2} \quad 13.155. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{3n-1} \quad 13.156. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot \ln n}$$

$$13.157. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}} \quad 13.158. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n \cdot 2^{n+1}} \quad 13.159. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

$$13.160. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad 13.161. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n \quad 13.162. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

§5. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближённым вычислениям

В задачах 13.163 - 13.174 разложить данные функции в ряд Маклорена, пользуясь разложениями в ряд функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

13.163. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. 13.164. $\ln(5+x)$. 13.165. $x \ln(1+x)$. 13.166. $\sin^2 x$.

13.167. $\cos(x-\alpha)$. 13.168. $\sin\left(mx + \frac{\pi}{4}\right)$. 13.169. $\cos^2 3x$. 13.170. $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

13.171. $\sqrt{1+x^2}$. 13.172. $\sqrt[5]{x+32}$. 13.173. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 13.174. $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

В задачах 13.175 - 13.188 разложить данные функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности заданной точки x_0 .

13.175. $f(x) = x^4 - 4x^2$, $x_0 = -2$. 13.176. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$.

13.177. $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $x_0 = 1$. 13.178. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$.

13.179. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = -1$. 13.180. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 1$.

13.181. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. 13.182. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$, $x_0 = 1$.

13.183. $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. 13.184. $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

13.185. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x_0 = 1$. 13.186. $f(x) = \ln(x-3)$, $x_0 = 4$.

13.187. $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 4$. 13.188. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x_0 = 2$.

В задачах 13.189 - 13.198 вычислить значение функции с указанной точностью δ .

13.189. $\cos 12^0$, $\delta = 0,01$. 13.190. $\sin 10^0$, $\delta = 0,001$. 13.191. $\cos 1^0$,

$\delta = 0,001$. 13.192. $\sin 1$, $\delta = 0,0001$. 13.193. $\operatorname{tg} 9^0$, $\delta = 0,001$.

13.194. $\sqrt[3]{70}$, $\delta = 0,001$. 13.195. $\sqrt[5]{40}$, $\delta = 0,01$. 13.196. $\sqrt[3]{500}$, $\delta = 0,001$.
 13.197. $\frac{1}{e}$, $\delta = 0,0001$. 13.198. $e^{-\frac{1}{4}}$, $\delta = 0,0001$.

В задачах 13.199 - 13.206 вычислить значение определённого интеграла с указанной точностью δ .

13.199. $\int_0^{0,5} x \cos x^3 dx$, $\delta = 0,001$. 13.200. $\int_0^{0,5} \cos 4x^2 dx$, $\delta = 0,001$.

13.201. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$, $\delta = 0,01$. 13.202. $\int_0^{0,4} \frac{1 - e^{\frac{x}{4}}}{x} dx$, $\delta = 0,001$.

13.203. $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$, $\delta = 0,001$. 13.204. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$, $\delta = 0,001$.

13.205. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$, $\delta = 0,001$. 13.206. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx$, $\delta = 0,001$.

Глава 14

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Элементы комбинаторики

14.1. Сколькими способами можно расставить на книжной полке пяти -томник С. Есенина, располагая их в произвольном порядке?

14.2. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так чтобы они не могли взять друг друга?

14.3. Сколькими способами три награды (за 1, 2 и 3 места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований?

14.4. Правление банка выбирает из 8 кандидатов трех человек на разные должности (все кандидаты имеют равные шансы). Сколько возможных групп по три человека можно составить?

14.5. Правление коммерческого банка выбирает из 8 кандидатов 3 человека на одинаковые должности (все кандидаты имеют равные шансы). Сколько возможных групп по три человека можно составить? (Сравните с предыдущей задачей).

14.6. Код дверного замка состоит из трех цифр, причем дверь открывается только в том случае, если верные три кнопки нажать одновременно. Сколько существует способов создания такого кода?

14.7. Из трех юристов и восьми экономистов должна быть создана комиссия в составе шести человек. Скольким числом способов это можно сделать, если в комиссию должен входить хотя бы один юрист?

14.8. Сколькими способами можно разделить 12 различных учебников между четверью студентами так, чтобы каждому досталось по 3 учебника?

14.9. Сколькими способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы гласные буквы остались на своих местах?

14.10. Сколькими способами можно раскрасить диаграмму из четырёх столбцов четырёхцветной ручкой так, чтобы каждый столбец был окрашен в свой цвет?

14.11. Сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5, 7, чтобы все цифры в числе были разные?

14.12. Сколько можно составить четырехзначных чисел из пяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, чтобы все цифры в числе были разные?

14.13. У одного человека 7 разных книг, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом двумя книгами?

§ 2. Классическое определение вероятностей.

14.14. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) сумма выпавших очков равна 7; 2) сумма выпавших очков равна 8, а разность равна 4; 3) сумма выпавших очков равна 8, если известно, что разность равна 4; 4) сумма выпавших очков равна 5, а произведение равно 4.

14.15. Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

14.16. В коробке 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают 3 кубика. Найти вероятность того, что номера всех извлечённых кубиков появятся в порядке правильного возрастания, т.е. через единицу. $(1/30)$

14.17. В первом ящике находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5, во втором – с номерами 8, 7, 8, 9, 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: 1) не меньше 7; 2) равна 11; 3) не больше 11?

14.18. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков, одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти

вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенных граней: 1) одну; 2) две; 3) три; 4) ни одной окрашенной грани.

14.19. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманное двузначное число окажется: 1) случайно названным двузначным числом; 2) случайно названным двузначным числом, цифры которого различны.

14.20. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

14.21. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны наудачу вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

14.22. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны наудачу вынимают один шар и, не глядя, откладывают в сторону. После этого из урны берут ещё один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже белый.

14.23. Абонент забыл две последние цифры номера телефона, помнил лишь, что одна из них ноль, а другая – нечётная и набрал их наугад. Найти вероятность, что набраны верные цифры

14.24. В лифт 20-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека и поехали. Найти вероятность того, что: 1) они выйдут на разных этажах; 2) двое выйдут на одном этаже; 3) все выйдут на одном этаже.

14.25. Какова вероятность, что в 4 - х сданных картах будет 1 туз и 1 валет?

14.26. Шесть шаров случайным образом раскладывают в 3 ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

14.27. При игре в русское лото из мешка поочерёдно извлекают все 90 бочонков (с различной нумерацией). Найти вероятность того, что бочонки извлекут в порядке убывания нумерации.

14.28. При игре в русское лото из мешка поочерёдно извлекают 86 бочонков (с различной нумерацией). Найти вероятность того, что бочонки появятся в строго убывающем порядке, начиная с бочонка под номером 90 (точнее, появятся в таком порядке: 90, 89, 88, ..., 6, 5).

14.29. Найти вероятность угадать в лотереи «6 из 49» (когда извлекают 6 чисел из различных 49 чисел) при заполнении одного варианта: 1) все шесть номеров; 2) три номера.

14.30. У экзаменатора имеется 15 вопросов, среди которых 10 выучены студентом. Экзаменатор наудачу задаёт три вопроса. Какова вероятность того, что: 1) студент получит 5, т.е. все три заданных вопроса были выучены студентом; 2) студент получит 4, т.е. два из заданных вопросов были выучены

студентом; 3) студент получит 3, т.е. только один из заданных вопросов был выучен студентом; 4) студент получит 2, т.е. ни один из заданных вопросов не были выучены студентом?

14.31. Студент знает 20 вопросов из 25. В экзаменационном билете три вопроса. Взяв билет, студент увидел, что первый вопрос он знает. Чтобы сдать экзамен нужно ответить на все вопроса билета. Какова вероятность того, что студент: а) сдаст экзамен; б) не сдаст экзамена?

14.32. В конверте 100 фотокарточек. Одну ищут. Из конверта достают 10 фотокарточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

14.33. В лотерее 1000 билетов: 500 выигрышных и 500 невыигрышных. Куплено два билета. Какова вероятность того, что: 1) оба билета выигрышные; 2) один билет выигрышный, а другой – невыигрышный?

14.34. В партии из 50 деталей имеется 28 стандартных. Наудачу отобрано 15 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 7 стандартных (указать только формулу).

14.35. В коробке 5 одинаковых изделий, причём три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлечённых изделий окажется: 1) одно окрашенное изделие; 2) два окрашенных изделия; 3) хотя бы одно окрашенное изделие.

14.36. Группа из 8 человек занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что 2 определённых лица кажутся рядом, если: 1) число мест равно 8; 2) число мест равно 12.

14.37. Игроку в покер сдаётся 5 карт (в колоде 52 карты). Найти вероятность того, что: 1) будут сданы две десятки и два валета; 2) сдан флеш – 5 карт одной масти; 3) сдано каре – 4 карты одного номинала.

14.38. Восемь команд случайным образом разбиваются на две полуфинальные группы по четыре команды. Какова вероятность того, что две сильнейшие команды окажутся в одной группе?

§ 3. Геометрические вероятности

14.39. На отрезок OA длины L числовой оси x наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

14.40. В круг радиуса R помещён круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадёт также и малый.

Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

14.41. На плоскости 2 concentric окружности ($R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см). В большой круг брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадёт и в кольцо, образованное соответствующими окружностями? Предполагается, что вероятность попадания в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры.

14.42. Круглый диск радиуса R разбит на два сектора. Длина дуги одного из них равна радиусу R . По быстро вращающемуся диску произведён выстрел. Цель поражена. Найти вероятность того, что попали в меньший сектор.

14.43. Быстро вращающийся диск разделён на чётное число секторов равной площади, попеременно окрашенных в чёрный и белый цвет. По диску произведён выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадёт в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

14.44. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из прямых.

14.45. На плоскость с нанесённой сеткой квадратов со стороной $2a$ наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от её расположения.

14.46. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена игла длиной $2l < 2a$. Найти вероятность того, что игла не пересечёт ни одной из прямых. (Задача Бюффона).

14.47. Двое задумали по действительному числу от 0 до 10. Какова вероятность того, что кто-то задумает число большее, чем квадрат другого?

14.48. Два студента условились о встрече в определённом месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждёт второго в течение $1/4$ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

14.49. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

§4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события

14.50. Безотказная работа прибора определяется работой двух узлов, соединенных последовательно. Вероятность безотказной работы i -ого узла равна: $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,8$. Узлы работают независимо друг от друга. Какова вероятность безотказной работы всего прибора?

14.51. Внутри круга радиуса R вписан правильный треугольник. Внутри круга наудачу одновременно брошены 4 точки. Найти вероятность того, что: а) все 4 точки попадут внутрь треугольника; б) только одна точка попадет внутрь треугольника; в) хотя бы одна точка попадет внутрь треугольника.

14.52. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий лишь одно стандартно.

14.53. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

14.54. В ящике 10 деталей, из них 4 окрашены. Сборщик взял наудачу три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

14.55. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном выстреле лишь один стрелок попадет в мишень.

14.56. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,6, третьим – 0,3. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другие промахнутся?

14.57. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение 4 дней подряд не будет ни одной неполадки?

14.58. В два банка положены деньги. Банки работают независимо друг от друга. Вероятность разорения первого банка равна 0,15, а второго – 0,3. Какова вероятность того, что деньги сохранятся хотя бы в одном из банков?

14.59. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3, 0,4, 0,6, 0,7.

14.60. Три исследователя, независимо друг от друга, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показания прибора, равна 0,1. Для второго и

третьего исследователя эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один исследователь допустит ошибку.

14.61. В магазине имеются 10 мужских и 6 женских пальто. Для проверки качества отобрали 3 пальто случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных пальто окажутся:

- 1) только мужские пальто;
- 2) только мужские пальто или только женские.

14.62. В порт приходят корабли только из трёх пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6. Какова вероятность прибытия корабля из третьего пункта?

14.63. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх накладных только две оформлены правильно.

14.64. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные.

14.65. На предприятие поступают заявки от нескольких торговых пунктов. Вероятности поступления заявок от пунктов A и B равны соответственно 0,5 и 0,4. Найти вероятность поступления заявок от пункта A или B , считая события поступления заявок независимыми, но совместными.

14.66. В районе находятся 100 посёлков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два посёлка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

14.67. В урне два белых и три чёрных шара. Два игрока поочерёдно вынимают без возвращения по одному шару. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. У кого из игроков больше шансов выиграть?

14.68. Студент знает 40 вопросов программы из 50. Экзаменатор задаёт ему вопросы до тех пор, пока не обнаруживает пробел в знаниях студента. Найти вероятность того, что будут заданы: 1) один вопрос; 2) два вопроса; 3) три вопроса; 4) более трёх вопросов.

§ 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

14.69. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну с 5 дорогами. Вероятности выхода из леса в течение часа по этим дорогам равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность выхода из леса в течение часа?

14.70. В вычислительной лаборатории 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что время выполнения расчёта автомат не

выйдет из строя, равна 0,95, а полуавтомат – 0,8. Студент производит расчёт на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчёта машина не выйдет из строя.

14.71. В урне находятся 2 шара. В неё опущен белый шар, затем наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что извлекли белый шар (все предположения о первоначальном наборе шаров в урне равновозможные).

14.72. В пирамиде 5 винтовок, причём 3 винтовки снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом – 0,95, а из винтовки без оптического прицела – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведёт один выстрел из наудачу взятой винтовки.

14.73. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

14.74. В городе 10 банков, шесть из них разорятся с вероятностью $p_1 = 0,1$, четыре – с вероятностью $p_2 = 0,4$. Найти вероятность сохранения вклада, если деньги доверены наудачу одному из банков.

14.75. В пирамиде 10 винтовок, причём четыре с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень с первого выстрела из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

14.76. 45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на 1 - м заводе, 15% - на 2 - м, остальные – на 3 - м заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,90 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

14.77. Прибор состоит из двух дублирующих узлов и может функционировать в одном из режимов – благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме, вероятность которого равна 0,7, надёжность (вероятность безотказной работы) каждого узла равна 0,92, а в неблагоприятном их надёжность всего 0,65. Найти полную надёжность прибора.

14.78. Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. При одном попадании в мишень вероятность поражения цели равна 0,2, при двух – равна 0,6, а при трёх – цель заведомо поражается. Найти вероятность поражения цели.

14.79. При переливании крови надо учитывать группу крови и резус-фактор донора и пациента. Ограничимся только случаем положительного резус-фактора. Совместимость групп крови донора и больного представлена следующим образом: 1 - ю группу можно вливать во все группы, 2 - ю – во 2 - ю и 4 – ю , 3 - ю – в 3 - ю и 4 - ю группы, 4 - ю – только в 4 – ю группу крови. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью и 7,9% – четвёртую группу крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

14.80. В инвестиционном портфеле фирмы имеются акции трёх компаний 1 - ой, 2 - ой, и 3 - ей в соотношении 4:3:2. Рискованность акций первой компании составляет 4% (т.е. вероятность потерять вложенный капитал равна 0,04), акций второй – 7%, акций третьей – 9%. Каков общий средний риск данного инвестиционного портфеля (вероятность потери капитала у неудачу взятой акции из портфеля)?

14.81. В студенческой группе 70% - юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал 1) юноше, 2) девушке.

14.82. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

14.83. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, легковая – 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

14.84. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому набору перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, вторая – 0,1. При сверке перфокарт обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица (перфораторы – исправны).

14.85. В пирамиде 10 винтовок, причём четыре с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень с первого выстрела из неудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

14.86. В городе находится 5 банков. Вероятность того, что деньги сохранятся в 2 - х банках («хороших») равна 0,9, а в остальных банках («плохих») равна 0,5. Вкладчик сохранил деньги в неудачу взятом банке. Что вероятнее: вкладчик держал деньги в «хорошем» банке или в «плохом»?

14.87. Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек: 1) мужчина, 2) женщина.

14.88. Датчик системы безопасности срабатывает в 97% случаев несанкционированного проникновения в помещение. При отсутствии такого проникновения он реагирует на изменение физических параметров среды (т.е. ложно срабатывает) в 6% случаев. Зафиксировано срабатывание датчика. Какова вероятность того, что кто-то несанкционированно проник в охраняемое помещение, если априорные вероятности наличия и отсутствия посторонних одинаковы?

14.89. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили цель. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил цель, если вероятности поражения цели стрелками соответственно равны 0.6, 0.5 и 0.4.

§ 6. Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона

14.90. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) два раза; б) менее двух раз; в) не менее двух раз.

14.91. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти (ничьи во внимание не принимаются).

14.92. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:
а) выиграть одну партию из 2-х или 2 партии из 4-х;
б) выиграть не менее 2-х партии из 4-х или не менее 3-х партии из 5-ти?
Ничьи во внимание не принимаются.

14.93. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми автомашин, на автобазе всего десять машин. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0.1. Найти вероятность нормальной работы автобазы.

14.94. а) Найти вероятность того, что событие A появится не менее 3 - х раз в 4 - х независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4. б) Событие B появится в случае, если событие A наступит не менее 4 - х раз. Найти вероятность наступления события B , если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8.

- 14.95. Отрезок AB разделён точкой C в отношении $2:1$. На отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что 2 точки окажутся слева от точки C , две точки – справа (вероятность попадания на отрезок пропорциональна длине отрезка).
- 14.96. Лампа электрического освещения перегорает в месяц с вероятностью $0,4$. Какова вероятность того, что из 5 ламп в помещении за месяц придется заменить хотя бы одну?
- 14.97. Найти вероятность того, при 600 выстрелах мишень будет поражена ровно 250 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $0,4$.
- 14.98. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна $0,6$.
- 14.99. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $0,8$. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.
- 14.100. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна $0,8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.
- 14.101. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна $0,7$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 раз; б) не менее 1470 раз и не более 1500 раз; в) не более 1470 раз.
- 14.102. При вытачивании болтов наблюдается в среднем 10% брака. Какова вероятность того, что в партии из 400 болтов окажутся пригодными более 349?
- 14.103. В радиоаппаратуре за 10000 часов непрерывной работы происходит замена десяти ламп. Требуется подсчитать вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 100 часов непрерывной работы.
- 14.104. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна $0,004$. Производится выборка в количестве 50 изделий. Найти вероятность того, что в выборке не окажется бракованных изделий.
- 14.105. На телефонной станции в течении одного часа возникает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что в течение одной минуты возникнет ровно 2 вызова?
- 14.106. За год (365 дней) станцией наблюдения было зафиксировано 720 событий на солнце. Какова вероятность того, что 30 июня были события, было более 2-х событий?

14.107. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытание.

14.108. В некоторой лотерее из каждой тысячи выпущенных билетов выигрывают 10. Какова вероятность того, что из 60 приобретённых билетов этой лотереи выиграют 3 билета?

14.109. В некоторых условиях вероятность попасть в цель при каждом выстреле равна 0,01. Найти вероятность того, что при 500 выстрелах в таких же условиях не менее двух попаданий в цель.

14.110. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Глава 15

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§1. Распределение случайных величин

15.1. Вероятности работы каждого из пяти независимых станков на участке равны 0,7. Найти ряд распределения и функцию распределения для величины L – количества работающих станков на участке. Построить график функции распределения.

15.2. Вероятности работы трех независимых станков на участке равны 0,4, 0,7, 0,8 соответственно. Построить закон распределения для величины L – количества работающих станков на участке.

15.3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Вынимается наудачу 3 шара. Составить закон распределения числа белых шаров среди вынутых трех шаров.

15.4. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания, или до окончания патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7, а при каждом последующем выстреле она уменьшается на 0,1. Составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником.

15.5. Два спортсмена бросают мяч в корзину с вероятностями попадания при каждом броске 0,8 для первого и 0,7 для второго спортсмена. Всего мяч бросается 5 раз. Составить закон распределения для числа попаданий в корзину, если мяч начинает бросать первый спортсмен.

15.6. Случайная величина $X = \Delta(a; b; c)$ задается на интервале $(a; b)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \frac{x-a}{c-a}, & x \leq c \\ A \cdot \frac{b-x}{b-c}, & x \geq c \end{cases}$$

Вычислить значение величины A , и функцию распределения случайной величины. Построить график функции распределения.

15.7. Случайная величина $X = \Delta(-1; +1; 0)$ задается на интервале $(-1; +1)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot (1+x), & x \leq 0, \\ A \cdot (1-x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислить значение величины A и функцию распределения случайной величины. Построить график функции распределения.

15.8. Случайная величина X задается на интервале $(0; \pi)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = A \sin x$. Определить значение постоянной A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$ и вычислить вероятность нахождения величины X в интервале $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

15.9. Случайная величина X задается на интервале $(0; 2)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = Ax$. Определить значение постоянной A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$ и вычислить вероятность нахождения величины X в интервале $(0,5; 1,5)$.

15.10. Случайная величина X задается на интервале $(0; \infty)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. Определить функцию распределения $F(x)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$. При $\lambda = 1$ вычислить вероятность нахождения величины X в интервале $(0; 2)$. Определить обратную функцию распределения и правостороннюю квантиль по уровню $0,1$.

15.11. Двое студентов независимо задумали наудачу по действительному числу в интервале $(0; 10)$. Какова вероятность того, что их сумма будет меньше чем величина $Z = 15$? Построить график функции распределения величины Z в интервале $(0; 20)$.

15.12. Поезда метрополитена идут регулярно с периодом 5 минут. Пассажир приходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ему придется ждать поезд более 3-х минут?

15.13. Время ремонта телевизора в мастерской есть случайная величина, распределенная по показательному закону $X = E(\lambda)$, а среднее время ремонта

15 дней. Какова вероятность того, что ремонт телевизора продлится более 20 дней.

15.14. Вычислить функции распределения и плотности распределения вероятности для случайной величины $Y = X^2$, где $X = Rn(0;1)$ – равномерная непрерывная случайная величина, определенная на интервале $(0,1)$.

§2. Числовые характеристики случайных величин

15.15. В урне 5 белых и 3 черных шаров. Вынимается наудачу 4 шара. Составить закон распределения числа белых шаров среди вынутых четырех шаров. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

15.16. Вероятность отказа в работе каждого из пяти независимо работающих лифтов в здании определяется вероятностью $p=0,2$. Построить закон распределения для величины L – количества работающих станков на участке. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

15.17. При каждой стрельбе по мишени в тире клиент делает успешный выстрел с вероятностью p . Клиент не покидает тир до 1 - го удачного выстрела. Построить закон распределения для величины L – количества произведенных клиентом выстрелов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

15.18. Непрерывная случайная величина $X = Rn(a;b)$ является равномерной и задается на интервале $(a;b)$. Вычислить значения математического ожидания и дисперсии случайной величины.

15.19. Случайная величина X задается на интервале $(-1;+1)$ следующей функцией плотности распределения вероятности $f(x) = A \cdot (1 - x^2)$. Вычислить значения величины A , математического ожидания и дисперсии случайной величины.

15.20. Случайная величина X задается на интервале $(-1;+1)$ следующей функцией плотности распределения вероятности $f(x) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Вычислить значения величины A , математического ожидания и дисперсии случайной величины.

15.21. Треугольная случайная величина $X = \Delta(a;b;c)$ задается на интервале $(a;b)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \frac{x-a}{c-a}, & x \leq c \\ A \cdot \frac{b-x}{b-c}, & x \geq c \end{cases}$$

Вычислить значение величины A , математическое ожидание случайной величины и её дисперсию.

15.22. Показательная случайная величина $X = E(\lambda)$ задается на интервале $(0; \infty)$ распределением с плотностью вероятности $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. Вычислить значения математического ожидания и дисперсии случайной величины, а так же ее медиану.

15.23. Случайная величина $X = \Delta(0; 3; 1)$ задается на интервале $(0; 3)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{при } x \leq 1 \\ A \frac{3-x}{2} & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

Вычислить значения величины A , математического ожидания, дисперсии и медианы случайной величины.

15.24. Случайная величина $X = \Delta(-3; +3; 0)$ задается на интервале $(-3; +3)$ следующей функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} A \frac{x+3}{3} & \text{при } x \leq 0, \\ A \frac{3-x}{2} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислить значения величины A и границы центральной квантили, где случайная величина находится с вероятностью 0.9?

15.25. Случайная величина Вигнера имеет полукруговое распределение

$f(x) = A \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$. Вычислить значения величины A , математического ожидания, дисперсии и медианы случайной величины.

§3. Нормально распределенная случайная величина

15.26. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

вероятностей $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{50}}$. Чему равны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины?

15.27. Измерение скорости автомашин на определенном участке дороги показало, что она распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 60 км/час и среднеквадратичным отклонением 10 км/час. Найти

вероятность того, что скорость машин не превысит 80 км/час. Вычислить вероятность нахождения скорости машины в интервале от 50 км/час до 70 км/час.

15.28. Размер детали, выпускаемой цехом, есть нормально распределенная случайная величина со средним значением 15см и дисперсией 1,44см². Найти вероятность того, что размер наудачу взятой детали отличается от среднего не более чем на 2см.

15.29. Рассеивание снарядов по дальности при стрельбе подчинено нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 20 м. Определить вероятность разрушения цели, если перелет и недолет должны составить не более 15 м.

15.30. Время выполнения определенной работы РСУ колеблется от 6 до 9 часов. Какова вероятность выполнения этой работы менее чем за 8 часов? Считать время выполнения работы распределенным по нормальному закону.

15.31. Размер пятой фракции щебня есть нормально распределенная случайная величина со средним значением 5см и дисперсией 0,81 см². Какой максимальный размер щебня во фракции можно гарантировать с вероятностью 0,99.

15.32. Ошибка при изготовлении детали размера 15см есть нормально распределенная случайная величина с дисперсией 0,04 см². Какую точность размера можно гарантировать с вероятностью 0,99.

15.33. Цена хорошего автомобиля заданного класса на вторичном рынке есть нормальная случайная величина $X = N(350\text{т.р.}, 50\text{т.р.})$. Вам предлагают купить такой автомобиль менее чем за 250т.р. и уверяют в том, что это автомобиль «хороший». Какова вероятность вашей ошибки, если вы, не поверив продавцу, откажетесь от покупки этого автомобиля.

15.34. Вычислить функции распределения и плотности распределения вероятности для случайной величины $Y = X^2$, где $X = N(0;1)$ стандартная случайная нормальная величина.

15.35 Даны законы распределения двух случайных величин:

x_i	-1	0	1
p_i	0.3	0.2	0.5

y_i	0	1	3
p_i	0.1	0.3	0.6

Составить закон распределения их произведения. Проверить выполнение формулы $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$

15.36. Даны законы распределения двух случайных величин:

x_i	-4	0	4
p_i	0.25	0.5	0.25

y_i	2	4	6
p_i	0.2	0.3	0.5

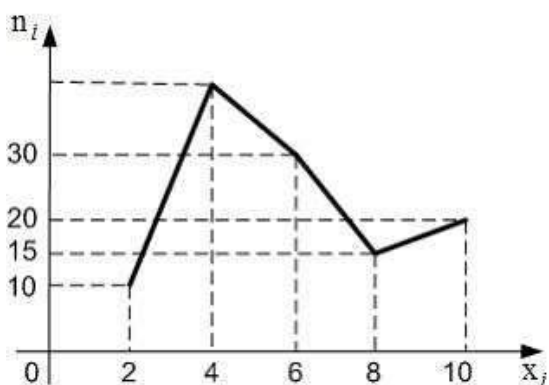
Составить закон распределения их суммы. Проверить выполнение формулы $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Глава 16

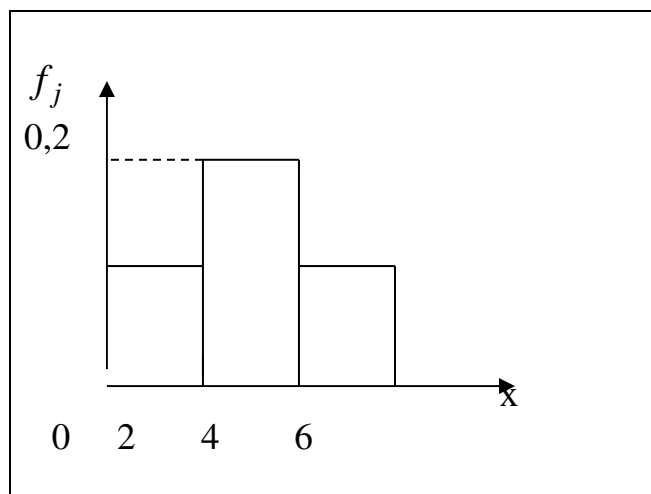
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§1. Выборочный метод. Выборочные представления и выборочные числовые характеристики

16.1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=120$, полигон частот которой имеет вид, изображенный на рисунке. Чему равна относительная частота варианты $x_2=4$ в выборке?



16.2. На рисунке приведена гистограмма плотности относительных частот f_j выборки x_B объемом $n=20$. Сколько значений выборки находятся в третьем интервале значений от 4 до 6.



16.3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 110$:

x_i	4	6	8	10	12	14
n_i	10	15	20	25	30	n_6

Чему равно значение n_6 ?

16.4. Статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	1	4	7	10	13
w_i	0,32	w_2	0,24	0,16	0,08

Чему равно значение относительной частоты w_2 ?

§2. Статистические оценки неизвестных параметров распределения случайных величин

16.5. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна несмещенная оценка математического ожидания?

16.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна несмещенная оценка среднеквадратического отклонения?

16.7. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна интервальная оценка математического ожидания m_x при надежности 0,95?

16.8. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

Чему равна интервальная оценка для среднеквадратического отклонения σ_x при надежности 0,99?

16.9. Глубина моря измеряется прибором без систематических ошибок, а случайная ошибка имеет нормальное распределение со среднеквадратическим отклонением 15 м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более 5 м при надежности оценки равной 0,9.

16.10. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 31; 33; 35; 36; 37. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна ...

16.11. Дан доверительный интервал (32,6; 41,1) для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Чему равна точечная оценка математического ожидания равна?

16.12. Дан доверительный интервал (22,15; 23,65) для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна ...

16.13. По выборке 16 наблюдений вычислена дисперсия наблюдаемой величины равная 64 м^2 . По уровню надежности 0,99 построить доверительный интервал для среднеквадратического отклонения.

16.14. Для полученной в наблюдениях выборки вычислена дисперсия в 14 ед^2 . и стандартное отклонение в 4 ед. Каков объем полученной выборки?

§3. Проверка статистических гипотез.

16.15. Цена автомобиля заданного класса в хорошем состоянии на вторичном рынке есть нормальная случайная величина $X = N(350 \text{ т.р.}, 50 \text{ т.р.})$. Вам нужно купить такой автомобиль желательно дешевле. Какова для вас нижняя критическая цена на предлагаемые автомобили, если вы, не желая рисковать, готовы отказаться от хорошего автомобиля с вероятностью не более 0,05?

16.16. По выборке 16 наблюдений за нормальной случайной величиной вычислено ее среднее выборочное равное 5,7 м и дисперсия 64 м^2 . По уровню значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что значение математического ожидания наблюдаемой величины равно 8 м.

16.17. По выборке 16 наблюдений за нормальной случайной величиной вычислено ее среднее выборочное равное 5,7 м и выборочная дисперсия 72 м^2 . По уровню значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что значение дисперсии наблюдаемой величины равно 64 м^2 .

16.18. Имеются две выборки наблюдений объема 15 и 25 измерений. По ним вычислены средние значения в 15 и 16,3 соответственно, а соответствующие

выборочные дисперсии равны 20 и 18. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий и математических ожиданий y наблюдаемых в выборках случайных величин при уровне значимости гипотез 0,05.

16.19. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 20$

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	2	1	5	5

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности с математическим ожиданием равным выборочному среднему и дисперсии равной выборочной дисперсии. Количество интервалов в критерии Пирсона взять равным 4.

16.20. При наблюдении за пятью признаками, по 16 измерениям была построена регрессионная зависимость с коэффициентом детерминации равным 0,5. Что можно сказать о его значимости по уровню 0,05?

16.21. В эксперименте получены выборки одновременно наблюдаемых случайных величин x и y , с выборочными дисперсиями $D_x = 0,81$; $D_y = 0,64$. уравнение линейной среднеквадратической регрессии имеет вид: $y + 0,28x = 1$. Определить выборочный коэффициент корреляции ρ_{xy} .

16.22. При построении тренда двух переменных с выборочными дисперсиями 25 и 36, полученными по 15 измерениям, был получен коэффициент наклона тренда для второй переменной равным 0,75. Что можно сказать о значимости тренда по уровню 0,01?

16.23. В четырех студенческих группах проведена контрольная работа, в первой верно решено 60 из 105 задач, во второй 69 из 140, в третьей 63 из 125 и в четвертой 105 из 160. По уровню значимости 0,05 проверить гипотезу о несущественном различии в усвоении материала учебными группами.

Ответы

Глава 1

1.4. 5 и 8. 1.6. 4 и 7. 1.8. $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 47 & -8 \end{pmatrix}$. 1.9. $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. 1.13. $\begin{pmatrix} 17 & 37 \\ -19 & -16 \end{pmatrix}$.

1.16. (14). 1.19. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$. 1.22. $\begin{pmatrix} 14 & -10 & -13 \\ -10 & 25 & 0 \\ -13 & 0 & 53 \end{pmatrix}$. 1.30. $x = 12$.

1.31. $x = 2$. 1.32. Нет решений. 1.33. $x_1 = 2; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = -\sqrt{3}$. 1.36. 29 и 0. 1.37. -1 и 6. 1.40. 3. 1.41. -2. 1.43. $\sin 2\alpha$. 1.46. $x_1 = -10, x_2 = 2$.

1.56. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 1.58. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; 8)

$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} -16 & -13 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. 1.61. 2. 1.62. 2. 1.63. 2. 1.64. 3. 1.65.

3. 1.66. 3. 1.67. 2. 1.68. 2. 1.69. $-\frac{1}{2}$. 1.70. $\frac{7}{9}$. 1.71. 1.72. $(1; -1; 0)$. 1.73. $(3, 1, 1)$. 1.74. $(1; 1; 0)$. 1.77. $(1; 0; 0)$. 1.78. $(2; 0; 2)$. 1.79. $(1; 2; 1)$. 1.80. $(1,75; -1; 1,75)$. 1.81. $(2; 1; 0)$. 1.82. $(0; 1; 1)$. 1.83. $(2; 2; 1)$. 1.84. $(2; 1; 0)$. 1.85. $(1; 0; 1)$. 1.86. $(1; -1; 2)$. 1.87. $(-1; 2; -3)$. 1.88. $(0; 0; 1)$. 1.89. $(3; 2; 0)$. 1.90. $(2; 2; -1)$. 1.91. $(0; 0; 1)$. 1.92. $(2; 1; 1)$. 1.93. $(-1; 0; 2)$. 1.94. $(1; -1; 2)$. 1.95. $(0; -1; 1)$. 1.96. $(-1; 0; 2)$. 1.97. $(1; 2; 2)$. 1.98. $(1; 1; 1)$. 1.99. $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$.

1.100. Несовместная. 1.102. $\begin{cases} x = \frac{5}{3}z + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{3}z + \frac{5}{3} \end{cases}$. 1.103. Несовместная. 1.105.

$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_3 \\ x_2 = 7 + 5x_3 \end{cases}$. 1.106. $\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 5 + 2x_3 + x_4 \end{cases}$. 1.107. $(-2; 3)$. 1.109. $(1; 1; 1)$.

1.110. 1) $a \neq -3$; 2) $a = -3, b \neq \frac{1}{3}$; 3) $a = -3, b = \frac{1}{3}$. 1.111. $(0; 0; 0)$.

1.112. $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$. 1.113. $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_3 \end{cases}$. 1.114. $\begin{cases} x_2 = -x_1 + x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

$$1.115. \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{4}x_3 + x_4 \end{cases} . \quad 1.116. \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} .$$

Глава 2

2.1. $|\bar{a}|=7$. 2.2. $z = \pm 3$. 2.3. $(4;1;1)$. 2.5. Да. 2.6. $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$.

2.8. $\overline{BC} = \frac{4}{3}\overline{AL} - \frac{2}{3}\overline{AK}$, $\overline{DC} = \frac{4}{3}\overline{AK} - \frac{2}{3}\overline{AL}$. 2.9. $x = \sqrt{2}$, $y = 1$, $z = -1$.

2.10. $\cos \alpha = \frac{12}{25}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, $\cos \gamma = -\frac{16}{25}$. 2.11. $\{2;2;2\}$. 2.12. 1) $\bar{a} \perp \bar{b}$;

2) $\bar{a} \parallel \bar{b}$. 2.13. $|\bar{r}|=7$, $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{3}{7}$, $\cos \gamma = \frac{6}{7}$. 2.14. $M(3\sqrt{2};3;-3)$,

$\bar{r} = 3(\sqrt{2}\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$. 2.15. $\bar{u} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}$, $|\bar{u}|=7$, $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{-6}{7}$,

$\cos \gamma = \frac{3}{7}$. 2.16. $\sqrt{6}$ и $3\sqrt{2}$. 2.17. $(9;-5;6)$. 2.18. 7 . 2.19. $\sqrt{\frac{19}{2}}$. 2.20.

1) Линейно независимые; 2) $\bar{c} = \frac{\bar{a}}{2} + \frac{2}{3}\bar{b}$; 3) Линейно зависимые, но вектор

\bar{c} неколлинеарен коллинеарным векторам \bar{a} и \bar{b} . 2.21. 22 . 2.22.

$\bar{b} = -3\bar{a}$. 2.23. $\alpha = 4, \beta = -1$; 2.25. $M(0;1;0)$. 2.26. $M_1(7;0)$ и

$M_2(-1;0)$. 2.27. $|\bar{F}|=15$. 2.28. 1) - 6; 2) 9; 3) 13; 4) -61. 2.30. 0 .

2.31. $\alpha = 135^\circ$. 2.32. $\angle B = \angle C = 45^\circ$. 2.33. -200 . 2.34. -1/2. 2.35.

$\arccos \frac{43}{25\sqrt{13}}$. 2.36. 2. 2.37. $\cos(\bar{a}\bar{m}) = \frac{5}{2\sqrt{7}}$; $\cos(\bar{a}\bar{n}) = -\frac{2}{\sqrt{7}}$. 2.38.

$|\bar{a}| = |\bar{b}|$. 2.39. $-\frac{3}{2}$. 2.40. $\alpha = \pm \frac{3}{5}$. 2.41. $np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$; $np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

. 2.42. $np_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a} = 5$. 2.43. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2.45. -7. 2.46. $\{1;2;-3\}$. 2.47. 1)

$-6\bar{j}$, $S = 6$; 2) $-2\bar{k}$, $S = 2$; 3) $6\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}$, $S = 2\sqrt{22}$. 2.48.

$S = 24,5$. 2.49. $S = \sqrt{21}$, $h = \sqrt{4,2}$. 2.50. 1) $\bar{k} - 2\bar{i}$; 2) $2\bar{a} \times \bar{c}$; 3)

$\bar{a} \times \bar{c}$; 4) 3. 2.51. $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. 2.52. $\left\{0; \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right\}$, $\left\{0; -\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\}$.

2.53. $\{-6;-24;8\}$. 2.54. $\{45;24;0\}$. 2.55. $\{7;5;1\}$. 2.57. $|\bar{a}| = 3\sqrt{17}$;

$S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$. 2.58. $h = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. 2.59. $S = \sqrt{6}$, $d_1 = d_2 = \sqrt{5}$. 2.60. $S = 1,5$.

2.61. 30 . 2.62. $\{20;4;28\}$. 2.63. 16 . 2.64. $\bar{a} \parallel \bar{b}$. 2.65. $\{-8;-9;-4\}$.
 2.66. $\{-10;13;11\}$, $\cos \alpha = \frac{-10}{\sqrt{390}}$, $\cos \beta = \frac{13}{\sqrt{390}}$, $\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{390}}$. 2.67. 15,
 $\cos \alpha = \frac{-2}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$. 2.68. $V = 51$, тройка левая. 2.69. $V = 14$,
 $S = 6\sqrt{3}$, $h = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. 2.71. $\bar{c} = 5\bar{a} + \bar{b}$ 2.72. $(\bar{b} + \bar{c}) - (\bar{c} - \bar{a}) = \bar{a} + \bar{b}$. 2.73.
 $\alpha = \frac{1}{3}$. 2.74. 24. 2.75. -7. 2.76. 11. 2.77. $V = 12,5$. 2.78.
 $(0; 8; 0)$ и $(0; -7; 0)$. 2.79. 1) $\sqrt{17}$, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{38}$; 2) 14; 3)
 $\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{221}}\right)$; 4) $V = 22$; 5) $\frac{33}{7}$.

Глава 3

3.2. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$. 3.5. $y = -\frac{3}{2}x$. 3.6. $y = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$, $y = 4$, $4x - 3y = 0$,
 $x = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$. 3.7. $|\overline{AB}| = 10$; $\text{Пр}_x \overline{AB} = 8$; $\text{Пр}_y \overline{AB} = 6$. 3.8.
 $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$; $\text{Пр}_x \overline{AB} = 4$; $\text{Пр}_y \overline{AB} = 8$. 3.10. $(3; -5)$. 3.12. 1) $2x + 3y - 7 = 0$;
 2) $3x - 2y - 4 = 0$. 3.11. $A(-2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(2, 4)$. 3.13. $7x + 6y + 33 = 0$;
 $5x - 2y - 33 = 0$; $x + 4y - 11 = 0$. 3.14. $2x - 3y - 18 = 0$;
 $7x - 2y - 12 = 0$; $5x + y - 28 = 0$. 3.15. $4x + 3y - 11 = 0$; $x + y + 2 = 0$;
 $3x + 2y - 13 = 0$. 3.16. $4x + y - 3 = 0$. 3.17. $2x - 5y + 3 = 0$; $2x - 5y - 26 = 0$;
 $7x - 3y - 33 = 0$. 3.19. $(-2; -1)$. 3.18. $2x - 3y - 13 = 0$, $3x + 2y = 0$, $68x + 15y - 91 = 0$,
 $40x + 57y - 35 = 0$. 3.20. $(11; -11)$. 3.21. $11x - y - 28 = 0$;
 $x + y - 8 = 0$. 3.22. $(-12; 5)$. 3.23. $(-3; -1)$. 3.24. 1) параллельны 2) не
 параллельны 3) параллельны 4) параллельны. 3.25. 1) $a \neq 3$; 2) $a = 3, b \neq 2$;
 3) $a = 3, b = 2$. 3.26. $a = -7$. 3.27. $S = 6e\delta^2$. 3.28. $3x - 2y - 12 = 0$;
 $3x - 8y + 24 = 0$. 3.29. $S = 5e\delta^2$. 3.30. $S = 6e\delta^2$. 3.33. 1) $d = 2,5$ 2) $d = 3$ 3) d
 $= 0,5$ 4) $d = 3,5$. 3.35. $74x + 13y + 39 = 0$. 3.36. $x - y - 7 = 0$.
 3.37. $(12; 0; 0)$; $(0; -8; 0)$; $(0; 0; -6)$. 3.39. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$.
 3.40. $x + y + z + 5 = 0$. 3.41. $2x - 21y + 2z + 88 = 0$; $2x - 3y - 2z + 12 = 0$.

3.42. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$. 3.43. $x - 2y + 3z - 14 = 0$. 3.44. 1) параллельны; 2) не параллельны; 3) параллельны. 3.45. $2x - 3y + 2z + 16 = 0$. 3.46. $5x - 3y + 2z = 0$.

3.47. $2x - 3z - 27 = 0$. 3.48. $x - y - 3z + 2 = 0$.

3.49. $x + 4y + 7z + 16 = 0$. 3.50. $x - y - z = 0$. 3.51. $2x + y + z = 0$.

3.52. $3x + 3y + z - 8 = 0$. 3.53. 1) перпендикулярны; 2) перпендикулярны; 3) не перпендикулярны; 4) перпендикулярны. 3.54. $7x - y - 5z = 0$. 3.55.

$2x + 3y + 4z - 5 = 0$. 3.56. $(1; -2; 2)$. 3.57. 1) $2y - 3z + 7 = 0$; 2) $x + y - 4 = 0$; 3) $3x + 2x - 15 = 0$. 3.58. 1) $3y + 4z = 0$; 2) $3x - 2z = 0$; 3) $2x + y = 0$.

3.59. 1) $z - 3 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $x + 5 = 0$. 3.60. 1) $d = 3$; 2) $d = \frac{29}{25}$; 3)

$d = \frac{14}{5}$; 4) $d = 2$. 3.61. $d = 4$. 3.62. 1) $d = 2$; 2) $d = 3,5$.

3.63. $(0; 7; 0)$, $(0; -5; 0)$. 3.64. $(0; 0; -2)$, $\left(0; 0; -6\frac{4}{13}\right)$. 3.65. $(2; 0; 0)$

и $\left(\frac{11}{43}; 0; 0\right)$. 3.66. 1) $\vec{s} = \vec{i}$ 2) $\vec{s} = \vec{i} + \vec{k}$ 3) $\vec{s} = -\vec{j} - \vec{k}$. 3.67. $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$.

3.69. 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4)

$\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{3}$; 6) $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{5}$. 3.70. 1)

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$; 3) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{8}$. 3.71. 1)

1) $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 8t - 3 \end{cases}$ 4)

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$. 3.72. $\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = 3t - 3 \\ z = t + 1 \end{cases}$. 3.73. $A(33/2, -9, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(0, 2, 11/3)$.

3.74. $\begin{cases} x = -5t + 4 \\ y = 11t - 7 \\ z = -2 \end{cases}$. 3.76. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. 3.77. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{1}$.

3.78. 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$; 3) $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+1}{0}$.

$$3.79. 1) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -7t \\ z = -19t - 2 \end{cases}; 2) \begin{cases} x = t \\ y = -3t + 5 \\ z = -5t + 4 \end{cases}. 3.80. 1) \text{ параллельны}; 2) \text{ параллельны}; 3)$$

параллельны. 3.83. 60° . 3.84. 135° . 3.85. $\pm \frac{4}{21}$. 3.87. $\arccos \frac{11}{26}$.

$$3.89. l = 3. 3.90. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}. 3.91. 1) \frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{p} 2)$$

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{0}. 3.93. \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ z = 4 \end{cases}. 3.95. \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}.$$

$$3.96. 2x - 3y + 4z - 1 = 0. 3.97. y + z + 1 = 0. 3.98. \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}. 3.102. n = -3.$$

$$3.103. C = -2. 3.104. x - z - 3 = 0. 3.105. 8x - 5y + z - 11 = 0.$$

$$3.106. x + 2y - 2z = 1. 3.107. 1) (5; 5; -2); 2) (60/7; 37/7; 23/7); 3) (2; -3; 6)$$

$$. 3.108. (1, 1, 2); \sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}. 3.109. (1; 4; -7). 3.110. (3; -2; 4).$$

$$3.111. \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}. 3.112. (2; -3; 2). 3.113. (2; -3; 2).$$

$$3.114. x + 2y - 5z = 0. 3.115. (-1; 3; 1). 3.116. \frac{x-1}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{1}. 3.117.$$

$$x + 2y + 3z = 0. 3.118. (2; -3; -5). 3.119. 13x - 14y + 11z + 51 = 0. 3.120.$$

$$x - 8y - 13z + 9 = 0. 3.121. 1) 13; 2) 3; 3) 7.$$

Глава 4

$$4.1. (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13. 4.2. (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1; (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

$$4.3. (x-1)^2 + (y-4)^2 = 8. 4.4. (x+4)^2 + (y+1)^2 = 25. 4.6. x^2 + y^2 - 8y = 0.$$

$$4.7. (x-3)^2 + y^2 = 9. 4.9. x + y = 3. 4.10. n(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5;$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5. 4.11. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1. 4.12. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$4.13. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1. 4.14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1. 4.15. \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$4.16. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1. 4.18. \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1. 4.19. \frac{7x^2}{92} + \frac{16y^2}{92} = 1 \text{ и}$$

$$\frac{16x^2}{92} + \frac{7y^2}{92} = 1. 4.20. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. 4.21. \frac{\sqrt{10}}{5}. 4.23. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$4.25. \sqrt{41}. 4.26. (0; -1); \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3} \right); \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3} \right).$$

4.27. $(x-3)^2 + y^2 = 36$. 4.30. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. 4.31. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$.
4.34. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$. 4.35. $x^2 - y^2 = 1$. 4.37. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$. 4.39. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.
4.40. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 4.41. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 4.43. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 4.44. $(0; 0)$;
 $(6; 2\sqrt{3})$; $(6; -2\sqrt{3})$. 4.45. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. 4.46. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$. 4.47.
 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.48. $\sqrt{2}$. 4.49. $y^2 = -3x$. 4.50. $y^2 = 60x$. 4.53. $y = x^2$. 4.54.
12. 4.55. 1) $x^2 = 16y$ 2) $y^2 = -\frac{48}{5}x$. 4.56. $y = x - \frac{x^2}{4}$. 4.58. $p = -\frac{8}{3}$. 4.59.
7м. 4.60. 40см. 4.61. 3 м. 4.62. $(y-2)^2 = 4(x-6)$. 4.63.
 $(x-4)^2 = 8(y-1)$. 4.64. $y^2 = -3x$; $x = \frac{3}{4}$. 4.65. $(x+1)^2 + y^2 = 4$. 4.66.
 $(x+1,5)^2 + y^2 = 9$. 4.67. $(x+1)^2 + y^2 = 64$. 4.70. $x^2 = -2y, y = 1/2$. 4.71.
 $y^2 = 2x, x = -1/2$.

Глава 5

5.1 $x \in [-3, 3]$. 5.2. $x \in (-\infty; \infty)$. 5.3. $x \neq 1; x \neq 2$.
5.4. $x \neq 0; x \neq \pm 1$. 5.5. $x \in [-1, 1]$. 5.6. Пустое множество.
5.7. $x \in (0; \infty)$. 5.8. Пустое множество. 5.9. $x \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$.
5.10. $x \in (4, 6)$. 5.11. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; n \in Z$. 5.12. $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n); n \in Z$.
5.13. $x \in [-2, 0) \cup (0, 1)$. 5.14. $x \in [0, 4]$. 5.15. $x \in (-\infty; \infty)$.
5.16. $x \in (2; 3)$. 5.17. $x \in \left[\frac{1}{e}; e \right]$. 5.18. $x \in [-1.5; 2.5]$.
5.19. $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$. 5.20. $x \in (4; 5) \cup (6; \infty)$. 5.21. $\{-1; 0\}$.
5.22. $x = -5$. 5.23. $\{6; 7; 8\}$. 5.24. $\{8; 9\}$.
5.25. $\{-1; 0; 1; 2; 4\}$. 5.26. $\{4\}$. 5.27. $y \in [-3; \infty)$.
5.28. $y \in [0; \sqrt{5}]$. 5.29. $y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. 5.30. $y \in (-\infty; 3]$.

- 5.31. $y \in [0; \infty)$. 5.32. $y \in [0, \infty)$. 5.33. $y \in [2^{-16}, \infty]$.
- 5.34. $y \in (0, 1]$. 5.35. $y \in (-\infty; \infty)$. 5.36. $y \in [-2, 6]$.
- 5.37. $y \in [2, 5] \cup (23, 128]$. 5.38. Нечётная. 5.39. Чётная.
- 5.40 Чётная. 5.41. Общего вида. 5.42. Чётная.
- 5.43. Общего вида. 5.44. Чётная. 5.45. Нечётная.
- 5.46. Чётная. 5.47. Чётная. 5.48. Нечётная.
- 5.49. Чётная. 5.50. Общего вида. 5.51. Общего вида.
- 5.52. Нечётная. 5.53(1) Нечётная. 5.53(2) Чётная.
- 5.54. π . 5.55. 6π . 5.56. $\frac{4}{3}\pi$. 5.57. 2π . 5.58. $\frac{\pi}{4}$. 5.59. $\frac{5}{2}\pi$.
- 5.60. $\frac{\pi}{2}$. 5.61. $\frac{\pi}{3}$. 5.62. $\frac{3}{2}\pi$. 5.63. 2π . 5.64. 6π . 5.65. π .
- 5.66. Периодическая. 5.67. $y = \frac{x}{3}$. 5.68. $y = \frac{x-2}{-3}$. 5.69. $y = \sqrt{x+4}$.
- 5.71. $y = 2 + \sqrt{x-1}$. 5.73. $y = 2 - \frac{1}{x}$. 5.74. $y = -x\sqrt{x}$. 5.75.
- $y = x^3 - 4$. 5.77. $y = -2 + \log_5 x$. 5.78. $y = -4 + 3^{x-2}$. 5.79. $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$
- . 5.80. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3}$. 5.81. $y = 2^{1/x}$. 5.127. $\frac{1}{n+1}$,
- $n \in N$. 5.128. $(-1)^{n+1}$, $n \in N$. 5.131. $\frac{1}{n^2}$, $n \in N$. 5.132.
- $\frac{2n+1}{2^n}$, $n \in N$. 5.137. $\sin \frac{\pi}{2^n}$, $n \in N$. 5.140. $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, $n \in N$.
- 5.142. $2n$, $n \in N$, ограничена снизу. 5.143. $(-1)^{n+1}n$, $n \in N$,
неограничена. 5.144. $\frac{n}{n+1}$, $n \in N$, ограничена. 5.145. $(-1)^{n+1}$, $n \in N$,
ограничена. 5.146. $\sin n$, $n \in N$, ограничена. 5.147. $\ln(n+1)$, $n \in N$,
ограничена снизу. 5.148. $\frac{n}{3^n}$, $n \in N$, ограничена. 5.149. $\frac{2n}{(2n-1)!}$, $n \in N$,
ограничена. 5.150. $\frac{1}{2^n}$, $n \in N$, ограничена. 5.151. Убывающая. 5.152.
- Возрастающая. 5.153. Невозрастающая. 5.154. Убывающая. 5.155.
- Неубывающая. 5.156. Убывающая. 5.157. Возрастающая. 5.158.
- Убывающая. 5.159. Возрастающая. 5.163. 1) Предел не

существует; 2) предел не существует; 3) предел не существует; 4) 0; 5) 1.

5.164. 1. 5.165. 0. 5.166. Предел не существует. 5.167. 1. 5.168. 1. 5.169. ∞ . 5.170. 0. 5.171. 1. 5.172. 0. 5.173. 0. 5.174. 0,5. 5.175. 0. 5.176. -3. 5.177. 1,5. 5.178. 1. 5.179. -0,5. 5.180. -1. 5.181. 3. 5.182. 0,5. 5.183. e^{-5} . 5.184. e^2 . 5.185. $e^{-\frac{1}{4}}$. 5.186. e^{-2} . 5.187. e^{-2} . 5.188. $e^{\frac{3}{2}}$. 5.189. e^{-1} . 5.190. e^{-2} . 5.191. 1. 5.192. 0. 5.193. e^{-1} . 5.194. 0,25. 5.195. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. 5.196. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. 5.197. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. 5.198. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. 5.199. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. 5.200. $f(x) = A$. 5.201. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. 5.202. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. 5.203. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. 5.204. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. 5.205. 1. 5.206. ∞ . 5.207. 0. 5.208. 0,25. 5.209. -0,5. 5.210. 0,75. 5.211. 1. 5.212. 1,5. 5.213. -0,5. 5.214. $\frac{4}{3}$. 5.215. $\frac{1}{6}$. 5.216. ∞ . 5.217. -1. 5.218. 0. 5.219. ∞ . 5.220. $\frac{1}{4}$. 5.221. 4. 5.222. 3. 5.223. $\frac{1}{3}$. 5.224. $\frac{3}{2}$. 5.225. 0. 5.226. ∞ при $x \rightarrow -\infty$ и 2 при $x \rightarrow +\infty$. 5.227. $\frac{5}{2}$. 5.228. 0. 5.229. 4. 5.230. $\frac{2}{5}$. 5.231. 9. 5.232. ∞ . 5.233. ∞ . 5.234. 2. 5.235. 3. 5.236. 0,5. 5.237. 0,25. 5.238. $\frac{2}{3}$. 5.239. ∞ . 5.240. $\frac{1}{6}$. 5.241. $\frac{2}{5}$. 5.242. 1. 5.243. $8\sqrt{2}$. 5.244. $-\frac{3}{2}$. 5.245. 0. 5.246. 1. 5.247. $\frac{1}{2}$. 5.248. 2. 5.249. 1. 5.250. $\frac{2}{\pi}$. 5.251. 0. 5.252. $\frac{1}{e}$. 5.253. 1. 5.254. e . 5.255. $\frac{1}{e}$. 5.256. e . 5.257. e^6 . 5.258. e^6 . 5.259. \sqrt{e} . 5.260. e^6 . 5.261. e^2 . 5.262. 1. 5.263. ∞ . 5.264. e . 5.265. \sqrt{e} . 5.266. a . 5.267. $\frac{1}{a}$. 5.268. a . 5.269. $\frac{1}{e}$. 5.270. 2. 5.271. $\frac{3}{4}$. 5.272. -0,5. 5.273. $A_0 e^{pt}$. 5.274. $2a^2$. 5.275. $2\pi R^2$ и $4R^2$. 5.294. $x=0$, точка разрыва 2 рода. 5.295. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, точки разрыва 2 рода. 5.296. $x = \pm 1$, точки разрыва 2 рода. 5.297. $x = -1$, точка разрыва 1 рода. 5.298. $x = 1$, точка разрыва 1 рода. 5.299. $x = 0$, точка разрыва 1 рода. 5.300. $x = 0$, точка разрыва 1 рода. 5.301. $x = 0$, разрыв 2 рода, $x = \pm 2$,

разрывы 1 рода. 5.302. $x=0$. 5.303. $x=2$. 5.304. $x=-2$. 5.308. $a=0$.
5.309. $a=2$.

Глава 6

$$6.34. \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}} \cdot \quad 6.35. \frac{1+7,5x}{\sqrt{1+5x}} \cdot \quad 6.36. \frac{24,5-x^2}{\sqrt{49-x^2}} \cdot \quad 6.37. -\frac{1+3x^2}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} \cdot$$

$$6.44. -\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \cdot \ln^2 x} \cdot \quad 6.53. \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \quad 6.58. \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot$$

$$6.66. -\frac{2 \operatorname{arctg} \frac{3-x}{x-5}}{x^2-8x+17} \cdot \quad 6.70. \frac{4x+y}{3y^2-x} \cdot \quad 6.73. \frac{e^y}{2-y} \cdot \quad 6.78. \frac{y}{x} \cdot \quad 6.83. \frac{1}{2} \cdot$$

$$6.85. \frac{1+2e}{2e} \cdot \quad 6.88. 2x^{\ln x-1} \cdot \ln x \cdot \quad 6.92. -x^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left[\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \frac{2}{x(1-x^2)} \right] \cdot$$

$$6.97. \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \quad 6.100. \frac{1-\sin 2t}{\cos 2t} \cdot \quad 6.104. \frac{3}{2} e^{\sqrt{t}} (1+\sqrt{t}) \cdot \quad 6.110. 32 \cos 2x \cdot$$

$$6.112. -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot \quad 6.120. 4t^2 \cdot \quad 6.122. -\frac{\sqrt{1-t^2}}{4t^3} \cdot \quad 6.124. \Delta y = 0,1306;$$

$$d = 0,13, \quad 6.129. dS = gtdt \cdot \quad 6.140. dy = -\left(\frac{\frac{1}{3^x} \ln 3}{x^2} + \frac{2 \ln 2}{2^{2x}} \right) dx \cdot$$

$$6.145. dy = \frac{(2-e^x)dx}{(e^x-1)\ln 6} \cdot \quad 6.155. 3x-y-7=0; \quad x+3y+11=0 \cdot 6.160.$$

$$x-2y-1=0; \quad 2x+y-2=0 \cdot \quad 6.161. y-\frac{\pi}{2} = -3x. \quad 6.162. y-\frac{\pi}{2} = \frac{x}{3} \cdot \quad 6.163. 7x-y-5=0; \quad x+7y-15=0 \cdot 6.164. 3x-4y+3=0; \quad 4x+3y+21=0 \cdot \quad 6.167.$$

$$x-y+1=0; \quad x+y+17=0 \cdot \quad 6.168. x+y+\frac{1}{e^2}=0 \cdot \quad 6.170.$$

$$x+2y-4=0; \quad 2x-y-3=0 \cdot \quad 6.172. x+y-\frac{\pi}{2}=0, \quad x-y+2-\frac{\pi}{2}=0 \cdot$$

$$6.173. 2x-y \pm 1=0 \cdot \quad 6.174. (1/4, -1/8) \cdot 6.175. (0, 1) \cdot 6.176.$$

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \cdot 6.177. 1) 0, \operatorname{arctg} \frac{1}{7}; \quad 2) \operatorname{arctg} k, \operatorname{arctg} \frac{k}{1+2k^2}; \quad 3) \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{arctg} 2 \cdot \quad 6.178. \quad v_0 = 1 \frac{M}{c}, v_0 = 7 \frac{M}{c}, v_0 = 13 \frac{M}{c}; \quad a_1 = a_2 = a_3 = 6 \frac{M}{c^2} \cdot \quad 6.179.$$

$t = \frac{\pi k}{\omega}$; $x = \pm 1$. 6.180. 43 A. 6.183. $\frac{7}{9}$. 6.184. $\frac{3}{2}$. 6.185. 0. 6.186. $\frac{1}{2}$.
 6.190. 3. 6.191. $\frac{1}{3}$. 6.192. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 6.193. $a - b$. 6.195. $8/3$. 6.196. -32. 6.197. $-\frac{25}{32}$.
 6.198. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$. 6.199. 1) ∞ ; 2) 0. 6.200. 0. 6.202. 0. 6.201. 0. 6.203. 3. 6.205.
 1. 6.206. 1. 6.204. ∞ . 6.207. 0. 6.208. 0. 6.209. ∞ . 6.210. 2.
 6.213. 1. 6.216. $\frac{1}{6}$. 6.219. 1. 6.222. 1. 6.225. На $(-\infty, 0)$ функция
 убывает, на $(0, \infty)$ - возрастает. 6.226. Функция возрастает на всей области
 определения. 6.227. На $(-\infty, 1/2)$ функция убывает, на $(1/2, \infty)$ - возрастает.
 6.228. На $(-\infty, -1)$ и $(0, \infty)$ функция возрастает, на $(-1; 0)$ - убывает. 6.229.
 Функция убывает на всей области определения. 6.230. На $(0, 1/e)$ функция
 убывает, на $(1/e, \infty)$ - возрастает. 6.231. На $(0, 1/2)$ функция убывает, на
 $(1/2, \infty)$ - возрастает. 6.232. На $(-\infty, 0)$ и $(2, \infty)$ функция убывает, на
 $(0; 2)$ - возрастает. 6.233. Функция возрастает на всей области определения.
 6.235. $(0, 3)$ - точка максимума, $(\pm 2, -1)$ - точка минимума. 6.236. $(-1, -2)$ - точка
 максимума, $(1, 2)$ - точка минимума. 6.237. $y_{\min} = -\frac{1}{e^2}$ при $x = e^2$. 6.238.
 $y_{\min} = -1$ при $x = -1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 1$. 6.239. $(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4})$ - точка минимума. 6.240.
 $(0, 0)$ - точка минимума, $(8/27, 4/27)$ - точка максимума. 6.241. $(1, 0)$ - точка
 минимума, $(e^2, 4/e^2)$ - точка максимума. 6.242. Точек экстремума нет.
 6.243. На $(-\infty, 0)$ функция выпукла вверх, на $(0, \infty)$ - выпукла вниз, $(0, 1)$ - точка
 перегиба. 6.244. Функция выпукла вверх. 6.246. На $(-\infty, -2)$ функция
 выпукла вверх, на $(-2, \infty)$ - выпукла вниз, $(-2, 4)$ - точка перегиба. 6.247. На
 $(-\infty, -1)$ функция выпукла вниз, на $(-1, \infty)$ - выпукла вверх, точек перегиба
 нет. 6.248. На $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ и $(0, \infty)$ функция выпукла вниз, на $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ -
 выпукла вверх, $P(-\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{2} - 1)$ - точка перегиба. 6.249. На $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ и
 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ функция выпукла вниз, на
 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ - выпукла вверх, $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ - точки перегиба. 6.250. На
 $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ - выпукла вверх, на $(-1, 1)$ - выпукла вниз, $P(\pm 1; \ln 2)$ -
 точки перегиба. 6.253. На $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ функция выпукла вниз, на
 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ - выпукла вверх, $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2})$ - точки перегиба. 6.252. $x = 2, y = 0$.
 6.253. $x = 1, y = 2$. 6.254. $x = 0, y = x$. 6.255. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. 6.256. $x = -1,$

- $y = x - 1$. 6.257. $x = \sqrt[3]{2}, y = x$. 6.258. $x = 1$. 6.259. $x = 0, y = -1$. 6.260. $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. 6.287. Функция определена на всей числовой оси, чётная; $y_{\min} = -1$ при $x = 0$; точки перегиба - $P_{1,2}\left(\pm 1; -\frac{64}{125}\right), P_{3,4}(\pm \sqrt{5}; 0)$; асимптот нет. 6.288. Функция определена на всей числовой оси; $y_{\min} = 0$ при $x = 2, y_{\max} = 4$ при $x = 0$; $P(1; 2)$ - точка перегиба; асимптот нет. 6.291. Функция определена на всей числовой оси, кроме $x = -1$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0, y_{\max} = -4$ при $x = -2$; точек перегиба нет; асимптоты $x = -1, y = x - 1$. 6.292. Функция определена на всей числовой оси, кроме $x = 0$; $y_{\min} = 3$ при $x = 2$; точек перегиба нет; асимптоты: $x = 0, y = 0$. 6.296. Функция определена на всей числовой оси, кроме $x = \pm 2$, нечётная; $y_{\min} = 6\sqrt{3}$ при $x = 2\sqrt{3}, y_{\max} = -6\sqrt{3}$ при $x = -2\sqrt{3}$; $P(0; 0)$ - точка перегиба; асимптоты: $x = \pm 2, y = 2x$. 2.298. Функция определена на всей числовой оси, кроме $x = 0$; $y_{\min} = 3$ при $x = -1$; $P(-\sqrt[3]{2,5} \approx -1,35; -2,7)$ - точка перегиба; асимптоты: $x = 0, y = 0$. 6.300. Функция определена на всей числовой оси; $y_{\min} = 0$ при $x = 0, y_{\max} = 1$ при $x = -1$; точек перегиба нет; асимптот нет. 6.303. Область определения - промежуток $-1 \leq x \leq 1$, нечётная; $y_{\min} = -0,5$ при $x = -0,7, y_{\max} = 0,5$ при $x = 0,7$; $P(0; 0)$ - точка перегиба; асимптот нет. 6.304. Функция определена на всей числовой оси; экстремумов нет; $P_1(0; 1), P_2(1; 0)$ - точки перегиба; асимптота: $y = -x$. 6.306. Функция определена при $x > 0$; $y_{\min} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$ при $x = e$; точек перегиба нет; асимптот нет. 6.308. Функция определена при $x > 0$; $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0,37$ при $x = e$; $P\left(e^{3/2} \approx 4,48; \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0,33\right)$ - точка перегиба; асимптоты: $x = 0, y = 0$. 6.312. Функция определена всюду, кроме $x = 0$; $y_{\min} = e$ при $x = 1$; точек перегиба нет; асимптоты $x = 0, y = 0$. 6.320. $y_{\text{наим.}} = \frac{1}{4}$ при $x = -1, y_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = 0$.
- 6.321. $y_{\text{наиб.}} = \frac{4}{9}$ при $x = 3, y_{\text{наим.}} = -\frac{27}{8}$ при $x = \frac{1}{4}$ и $x = -2$.
- 6.322. $y_{\text{наиб.}} = 4\sqrt[3]{9}$ при $x = 3, y_{\text{наим.}} = 0$ при $x = -1$ и $x = 0$.
- 6.323. $y_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = -1, y_{\text{наим.}} = 0$ при $x = -4$ и $x = 0$.
- 6.324. $y_{\text{наиб.}} = e^2$ при $x = e, y_{\text{наим.}} = -\frac{1}{2}e^{-1}$ при $x = e^{-1/2}$.
- 6.235. $y_{\text{наиб.}} = e$ при $x = 1, y_{\text{наим.}} = e^{-8}$ при $x = -2$.

6.326. $y_{\text{наим.}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = \frac{\pi}{4}$. 6.327. $y_{\text{наим.}} = 0$ при $x = 0$,
 $y_{\text{наиб.}} = 2 - \ln 3$ при $x = 2$. 6.328. $\frac{18}{\pi + 4}$. 6.329. Отношение длины к ширине
равно 2. 6.330. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 6.331. $\frac{S}{3} \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. 6.332. $h = 2R$, где h - высота, R -
радиус основания. 6.333. 6 см. 6.334. $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. 6.335. 3) 4 дня.

Глава 7

7.2. 1) $x = 3$, $y = 2$. 7.3. 1) $r = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 2) $r = 5$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. 7.5. 1) $5 + 7i$; 2) $-3 + 2i$.
7.6. 1) 1 2). i 3). $-i$. 7.7. 1) -6 2) 13 3) $23 - 2i$. 7.9. 1) $2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$; 2)
 $6i = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$; 3) $-2 + 2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$. 7.10. 1) 2; 2) $-1 + i$.
7.13. 1) $5i$. 7.17. $Q(x) = i(x - (-1 - 3i))(x - (-1 + 4i)) = i(x + 1 + 3i)(x + 1 - 4i)$. 7.19.
 $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Глава 8

8.1. $\ln|x| + \frac{3}{x} + C$. 8.2. $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$. 8.3. $\frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + C$.
8.4. $\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$. 8.5. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$. 8.6. $\frac{6x \cdot \sqrt[6]{x}}{7} - \frac{4x \cdot \sqrt[3]{x}}{3} + C$.
8.7. $\frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C$ 8.8. $-\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + C$. 8.9. $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$.
8.10. $\ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + C$. 8.11. $\frac{1}{\sqrt{27}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{27}} + C$.
8.12. $x - \operatorname{arctg} x + C$. 8.13. $\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} + C$. 8.14. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$.
8.15. $\ln|x + \sqrt{4 + x^2}| + C$. 8.16. $\ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$. 8.17. $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$.
8.18. $\operatorname{tg} x - x + C$. 8.19. $-\operatorname{ctg} x - x + C$. 8.20. $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + C$.

$$\begin{array}{lll}
8.21. e^x + \operatorname{tg} x + C. & 8.22. \frac{3^x \cdot e^x}{\ln 3 + 1} + C. & 8.23. -\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C. \\
8.24. e^x + \ln|x| + C. & 8.27. 2\sqrt{x^2 + 1} + C. & 8.28. \frac{1}{24}(2 + 3x)^8 + C. \\
8.29. \frac{2}{9}(2 + 3x)^{3/2} + C. & 8.30. \frac{2}{3}\sqrt{2 + 3x} + C. & 8.31. \frac{1}{6}(3 + 5x)^{6/5} + C. \\
8.32. \frac{1}{2}\ln|x^2 - 3| + C. & 8.33. \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C. & 8.34. \frac{11}{4}\ln|3 + 2x| - \frac{3}{2}x + C. \\
8.35. x + \ln|2x + 1| + C. & 8.36. \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + \operatorname{arctg} x + C. & 8.37. \frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C. \\
8.38. \sqrt{3x^2 - 5x + 2} + C. & 8.39. 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x + C. & 8.40. \frac{2\ln x \cdot \sqrt{\ln x}}{3} + C. \\
8.41. \ln|\ln x| + C. & 8.42. \frac{1}{3}e^{3x} + C. & 8.43. -e^{-x} + C. & 8.44. 2e^{\sqrt{x}} + C. \\
8.45. \ln(e^x + 1) + C. & 8.46. \arcsin \frac{e^x}{3} + C. & 8.47. \frac{1}{\cos x} + C. & 8.48. \\
\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C. & 8.49. e^{\sin x} + C. & 8.50. -\ln(\cos^2 x) + C. & 8.51. \\
\sqrt[3]{\sin x} + C. & 8.52. -\frac{2\cos^7 x}{7} + C. & 8.53. \frac{1}{2}\cos(1 - x^2) + C. & 8.54. \\
\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C. & 8.55. -\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} x} + C. & 8.56. \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + C. & 8.57. \\
\frac{3}{4}\arcsin x \cdot \sqrt[3]{\arcsin x} + C. & 8.58. \frac{1}{2}\arcsin \frac{2x + 3}{2} + C. & 8.59. \frac{1}{\arccos x} + C. \\
8.60. -3\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C. & 8.61. \operatorname{arctg}(x + 1) + C. & 8.62. \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 1}{x - 3}\right| + C. \\
8.63. \arcsin \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C. & 8.64. \ln|x + 2 + \sqrt{4x + x^2}| + C. & 8.65. \sin x - x \cos x + C. \\
8.66. \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. & 8.67. \frac{5}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}(5x + 6) \cdot \cos 3x + C. \\
8.68. C - e^{-x} \cdot (x + 1). & 8.69. e^{2x} \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{2}x\right) + C. & 8.70. -\frac{x \ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2} + C. \\
8.71. -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C. & 8.72. x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C. \\
8.73. -\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C. & 8.74. \frac{x}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. & 8.75. x \cdot \ln x - x + C.
\end{array}$$

$$8.76. \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) \right) + C. \quad 8.77. 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

$$8.78. -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \quad 8.79. x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

$$8.80. x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad 8.81. 2\sqrt{1+x} \cdot \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$$

$$8.82. x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \quad 8.83. \frac{1}{2}(x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} + C.$$

$$8.84. 2\sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln|x+1| + C. \quad 8.85. 2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}) + C.$$

$$8.86. -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \quad 8.87. x \cdot (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C.$$

$$8.88. C - e^{-x}(2 + 2x + x^2). \quad 8.89. 2^x \left(\frac{x^2}{\ln 2} - \frac{2x}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2} \right) + C.$$

$$8.90. \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \quad 8.91. \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C. \quad 8.92. 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

$$8.93. \frac{2}{9}. \quad 8.94. x - 2 \ln|x+2| + C. \quad 8.95. \frac{x^2}{2} + 3x + 9 \ln|x-3| + C.$$

$$8.96. \frac{x^3}{3} + 2x + \sqrt{2} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + C. \quad 8.97. \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C. \quad 8.98. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x-3}{x+1} \right| + C.$$

$$8.99. \ln \left| \frac{(x-2)^2}{x-3} \right| + C. \quad 8.100. \ln \left| \frac{(x-1)^3}{x+2} \right| + C. \quad 8.101. \frac{1}{10} \ln|2x+1| + \frac{2}{5} \ln|x-2| + C.$$

$$8.102. \ln \left| \frac{x^3(x-1)}{x+1} \right| + C. \quad 8.103. x + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C. \quad 8.104. \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$$

$$8.105. \ln \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) + \operatorname{arctg} x + C. \quad 8.106. x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C. \quad 8.107. \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

$$8.108. \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C. \quad 8.109. \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C.$$

$$8.110. \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$8.112. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x-1) \cdot (x^2+1)} + \frac{5}{4} \operatorname{arctg} x \right| + C. \quad 8.113. \quad 2 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{3}{x+1} + C.$$

$$8.114. \quad \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{20} \sin 10x + C. \quad 8.115. \quad \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

$$8.116. \quad 3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5}{6} x + C. \quad 8.117. \quad -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

$$8.118. \quad \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \sin x + C. \quad 8.119. \quad \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$$8.120. \quad C - \frac{1}{\sin x} - \sin x. \quad 8.121. \quad -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5} \cos^2 x \cdot \sqrt{\cos x} + C.$$

$$8.122. \quad C - \frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln |\sin x|. \quad 8.123. \quad \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C. \quad 8.124.$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C. \quad 8.127. \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + C. \quad 8.126. \quad \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + C.$$

$$8.127. \quad \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad 8.128. \quad \frac{1}{10} \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad 8.129. \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C.$$

$$8.130. \quad -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C. \quad 8.131. \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C. \quad 8.132. \quad (x+5) \cdot \sqrt{x+5} \cdot \left(\frac{2}{5} x - \frac{4}{3} \right) + C.$$

$$8.133. \quad 2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1)) + C. \quad 8.135. \quad x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C. \quad 8.137.$$

$$2\sqrt{x+2} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right| + C. \quad 8.138. \quad \frac{\sqrt{2x-1}}{3} (x-2) + C.$$

$$8.140. \quad \frac{2}{15} (3x^2 + 4x + 8) \cdot \sqrt{x-1} + C. \quad 8.141. \quad 2(\sqrt[4]{x} + 1)^2 + 4 \ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.$$

$$8.142. \quad 3 \ln \left| \sqrt[3]{x} + 1 \right| + C. \quad 8.144. \quad -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5} + C.$$

$$8.145. \quad 2 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3\sqrt{x^5}}{5} + \frac{x^3}{6} \right) + C.$$

$$8.146. \quad \frac{9}{2} \left(\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{9} \cdot \sqrt{9-x^2} \right) + C. \quad 8.147. \quad \arccos \frac{1}{x} + C. \quad 8.148.$$

$$-\ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) + C. \quad 8.149. \quad y = \frac{1}{4} x^2 + 2. \quad 8.150. \quad \ln 2 + \frac{21}{8}.$$

$$8.151. \quad \frac{1}{3} (x^2 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x} + C. \quad 8.152. \quad -\frac{2}{75} (1 - 6x^5) \cdot \sqrt[4]{1 - 6x^5} + C.$$

$$\begin{aligned}
8.154. & \ln|x^2 - 4| + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C. & 8.155. & \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C. \\
8.157. & \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C. & 8.158. & \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C. & 8.159. & -\frac{2}{3} (1 - e^x) \cdot \sqrt{1 - e^x} + C. \\
8.160. & -\arcsin e^{-x} + C. & 8.161. & \arcsin \frac{\ln x}{\sqrt{3}} + C. & 8.162. & -\frac{1}{2} \ln|1 - \ln^2 x| + C. \\
8.163. & 2\sqrt{1-x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x} + 1} \right| + C. & 8.164. & \arcsin(2x - 1) + C. \\
8.165. & -\frac{1}{24} (1 - 5x^4) \cdot \sqrt[5]{1 - 5x^4} + C. & 8.166. & \frac{2}{3} (1 - x) \cdot \sqrt{1 - x} + C. \\
8.167. & \frac{2}{3} \arccos x \cdot \sqrt{\arccos x} + C. & 8.168. & \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x^2} + C. \\
8.169. & \frac{1}{8} (2x^2 - 2x \sin 2x - \cos 2x) + C. & 8.170. & x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C. \\
8.171. & -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + C. & 8.172. & \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| + C. \\
8.173. & \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| + C. & 8.174. & \frac{1}{2} \ln(5 - \cos 2x) + C. \\
8.175. & \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C. & 8.176. & \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C. \\
8.177. & \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{12} \sin 6x + C. & 8.178. & C - \frac{2 \ln x + 1}{4x^2}. & 8.179. & \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C. \\
8.180. & \frac{2}{3} \ln x \cdot \sqrt{\ln x} + C. & 8.181. & \frac{2\sqrt{1+2^x}}{\ln 2} + C. & 8.182. & \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C. \\
8.183. & \frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arctg} 2^x + C. & 8.184. & \frac{1}{12} \sqrt{8x^3 + 27} + C. & 8.185. & -\frac{1}{4(2+x^2)^2} + C. \\
8.186. & \frac{\ln^3 x}{3} + 2 \ln x + C. & 8.187. & \ln|2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}| + C. & 8.188. & \frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + C. \\
8.189. & 2 \sin \sqrt{x} + C. & 8.190. & \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C. & 8.191. & \frac{\operatorname{tg} 4x}{4} - x + C. \\
8.192. & -\frac{1}{5} \ln(5 + \cos 5x) + C. & 8.193. & -\ln(3 + e^{-x}) + C. & 8.194. & \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C. \\
8.197. & \frac{1}{3} \sqrt{2x-1}(x-2) + C. & 8.196. & \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \\
8.197. & \sqrt{2x-x^2} - \arcsin(x-1) + C.
\end{aligned}$$

$$8.198. \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3}{4\cos^4 x} + \frac{3}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.$$

Глава 9

- 9.3. $4e$. 9.4. $-\frac{1}{2}(e^{-16} - 1)$. 9.5. $\frac{8}{3}$. 9.6. $\frac{1}{3}\ln 13$. 9.7. $\frac{2}{9}$. 9.8. $\ln \frac{4}{3}$.
- 9.9. $\frac{1}{3}\ln \frac{5}{4}$. 9.10. $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{8}$. 9.11. $\frac{1}{3}$. 9.12. 2 . 9.13. $4 - 2\ln 3$. 9.14. $2 - \ln 2$. 9.15. $1/6$. 9.16. $39,3$. 9.17. $3\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$. 9.18. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 9.19. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$.
- 9.20. $2 - \frac{\pi}{2}$. 9.21. $\ln 1,5$. 9.22. $\frac{4}{5}(2^{\sqrt{2}} - 1)$. 9.23. $-\frac{3}{2}\ln 2$.
- 9.25. $1 - 2e^{-1}$. 9.26. $\frac{\pi}{2} - 2$. 9.27. π . 9.28. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. 9.29. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$.
- 9.30. $\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. 9.31. $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{9}\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. 9.32. $\frac{e^2 - 5}{4e^2}$. 9.34. $1/2$. 9.36. $2e - 1$.
- 9.37. 1 . 9.38. Расходится. 9.39. Расходится. 9.40. $\frac{1}{4}$. 9.41. $\frac{3}{4}$.
- 9.42. Расходится. 9.43. π . 9.44. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. 9.45. Расходится.
- 9.46. $\frac{1}{4}$. 9.47. $\frac{1}{4}$. 9.48. $\frac{2}{e}$. 9.49. $\frac{1}{3}$. 9.50. $\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{6}$. 9.51. 2 . 9.52. 1 .
- 9.53. 1 . 9.54. π . 9.55. $\frac{\pi}{2}$. 9.56. $\frac{8}{3}$. 9.57. -1 . 9.58. Расходится.
- 9.59. Расходится. 9.60. Расходится. 9.61. 6 . 9.62. $-\frac{2}{e}$. 9.63. Расходится.
- 9.64. $\frac{4}{3}$. 9.65. $4,5$. 9.66. $\frac{8}{3}$. 9.67. $2 - \frac{\pi}{2}$. 9.68. $4,5$. 9.69. $\frac{8}{3}$. 9.70. $\frac{1}{3}$. 9.71. $2 - \frac{\pi}{2}$. 9.72. $18\sqrt[3]{5}$. 9.73. $\ln 2$. 9.74. $3,75 - \ln 2$. 9.75. $3\left(1 - \frac{1}{4\ln 2}\right)$. 9.76. $\frac{8}{9}$. 9.77. $\frac{14}{3}$. 9.78. $\frac{1}{2}(e^6 + e^{-6} - 2)$. 9.79. $\frac{1}{3} + \ln 2$. 9.80. $\frac{65}{3}$. 9.81. $\frac{14}{3} - 2\sqrt{3}$. 9.82. $12\pi^3$. 9.83. π . 9.84. π . 9.85. $\frac{\pi}{4}$. 9.86. 2π . 9.87. 4π . 9.88. $\frac{3\pi}{2}$. 9.89. 6π . 9.90. 3π . 9.91. 3π . 9.92. 2 . 9.93. 2 . 9.94. 9π .

9.95. 4π . 9.96. 8π . 9.97. 6π . 9.98. $\frac{3}{8}\pi$. 9.99. 3π . 9.100. $4\pi - 3\sqrt{3}$.

9.101. $\frac{4}{3}\pi + \frac{5\sqrt{3}}{4}$. 9.102. 8π . 9.103. $\frac{16\pi}{15}$. 9.104. $\frac{\pi^2}{6}$. 9.105.

$\frac{\pi}{20}(6\pi + 5\sqrt{3})$. 9.106. $\frac{19\pi}{24}$. 9.107. $\frac{16\pi}{5}$. 9.108. $\frac{\pi a^5}{30}$. 9.109.

$2\pi((\ln 2 - 1)^2 + e^2 - 1)$. 9.110. 12π . 9.111. 5π . 9.112. $\frac{512\pi}{15}$. 9.113. $\frac{64\pi}{5}$.

9.114. $\frac{4\pi}{7}$. 9.115. $\frac{7\pi}{6}$. 9.116. $\frac{\pi}{2}$. 9.117. $\frac{\pi}{2}$. 9.118. $\frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8)$.

9.119. 2π . 9.120. π . 9.121. $\pi(e - 2)$. 9.122. $\frac{97\pi}{60}$.

9.123. $\frac{74\pi}{15}$. 9.124. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. 9.125. $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. 9.126.

$\sqrt{1+e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sqrt{1+e^2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{1+e^2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} \right)$. 9.127. $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$.

9.128. 12. 9.129. 3. 9.130. $\frac{R \cdot \pi^2}{2}$. 9.131. 24. 9.132. $\frac{3}{2}\pi$.

Глава 10

10.1. Вся плоскость, за исключением точек на прямой $y = x$ ($D: y \neq x$).

10.4. Часть плоскости, находящаяся в треугольнике $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$. 10.10. Часть

плоскости, лежащая в полосе $-3 \leq x \leq -1$. 10.12. $y^2 > 4x - 8$. 10.13.

$y = x^2 + c^2$. 10.15. $y = x^2(c + 1)$, $x \neq 0$. 10.23. $y = \pm \frac{x}{c}$, $c > 0$, $y \neq 0$.

10.32. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 10.33. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. 10.34.

$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{\sin x} \ln y \cdot \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot y^{\sin x - 1}$. 10.41. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z} - 1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{1}{z}$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right)$. 10.46. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. 10.50. $2y^3(2 + xy^2)e^{xy^2}$. 10.52. $(x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1) \cdot e^{xyz}$. 10.53.

$$\frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}} \cdot 10.58. \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}} \cdot 10.61. \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x+z}.$$

$$10.62. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yx}{z^2 + xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{zx}{z^2 + xy}. \quad 10.65.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(xy + xz + yz)(y+z) - yz}{\cos(xy + xz + yz)(x+y) - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(xy + xz + yz)(x+z) - xz}{\cos(xy + xz + yz)(x+y) - xy}. \quad 10.67.$$

$$1) \quad d_x z = \frac{dx}{y}, \quad d_y z = -\frac{xdy}{y^2}, \quad dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}; \quad 5) \quad d_x u = y \cdot z \cdot x^{yz-1} dx,$$

$$d_y u = z \cdot x^{yz} \cdot \ln x dy, \quad d_z u = y \cdot x^{yz} \cdot \ln x dz,$$

$$du = y \cdot z \cdot x^{yz-1} dx + z \cdot x^{yz} \cdot \ln x dy + x^{yz} \cdot y \cdot \ln x dz. \quad 10.68. \frac{1}{270}. \quad 10.71. \quad 1) 4, 18.$$

$$10.75. \{-2; 1\}. \quad 10.77. \overline{\text{grad } z} = -0.32\bar{i} - 0.64\bar{j}, \quad |\overline{\text{grad } z}| = 0.32\sqrt{5}. \quad 10.78.$$

$$|\overline{\text{grad } u}| = 1. \quad 10.79. \frac{\partial u}{\partial l} = 2 + \sqrt{2}. \quad 10.80. 0. \quad 10.81. \quad 1) \overline{\text{grad } z} = -6\bar{i} + 2\bar{j},$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = -2; \quad 2) \overline{\text{grad } z} = 3\bar{i} + 2\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{17}{5}; \quad 4) \overline{\text{grad } z} = \frac{7}{25}\bar{i} + \frac{1}{25}\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{9}{25\sqrt{5}}; \quad 5)$$

$$\overline{\text{grad } z} = 36\bar{i} + 28\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{44}{\sqrt{5}}; \quad 6) \overline{\text{grad } z} = -\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{12}{13}; \quad 7) \overline{\text{grad } z} = -\pi(\bar{i} + \bar{j}), \quad \frac{\partial z}{\partial l} = 0;$$

$$8) \overline{\text{grad } z} = \frac{1}{19}\bar{i} + \frac{8}{19}\bar{j}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{29}{95}; \quad 9) \overline{\text{grad } z} = \frac{1}{2}\bar{i}, \quad \frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \quad 10.82. \quad 1) \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{\sqrt{41}}{6}; \quad 3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) \frac{5\sqrt{2}}{12}; \quad 5) \sqrt{\frac{5}{12}} \quad 6) \sqrt{20}e^5. \quad 10.83. \quad 1) \text{tg } \varphi \approx 0.342, \quad \varphi \approx 18^{\circ}52'; \quad 2)$$

$$\text{tg } \varphi \approx 4.87, \quad \varphi \approx 78^{\circ}24'. \quad 10.84. \quad -\bar{j}. \quad 10.85. \quad \left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right).$$

$$10.86. \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad 10.87. \quad 1) 2x + 4y + z - 13 = 0; \quad 2) 2x + 2y - 3z + 1 =$$

$$0; \quad 3) 2x - z - 2 = 0; \quad 4) 6x + y - z - 2 = 0; \quad 5) 5x + y - z - 3 = 0; \quad 6)$$

$$x + 2y - 5 = 0 \quad 7) -x + 5y - 2z - 5 = 0. \quad 10.88. \quad 1) \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}; \quad 2)$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-1}; \quad 3) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{2}; \quad 4) \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1};$$

$$5) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}; \quad 6) \frac{x-1}{10} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-9}{-1}; \quad 7)$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-9}. \quad 10.89. \quad z_{\max} = 0 \quad \text{в точке} \quad (0; -1). \quad 10.90.$$

$$z_{\max} = 1 \quad \text{в точке} \quad (0; 0). \quad 10.91. \quad z_{\min} = 0 \quad \text{в точке} \quad (-1; 0). \quad 10.92.$$

$z_{\min} = -4$ в точке $(-2; 1)$. 10.93. $z_{\min} = -\frac{7}{3}$ в точке $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$. 10.94.
 $z_{\max} = 12$ в точке $(4; 4)$. 10.95. $z_{\max} = 8$ в точке $(2; -2)$. 10.96.
 $z_{\min} = -\frac{2}{e}$ в точке $(0; -2)$. 10.97. Экстремумов нет. 10.98. $z_{\max} = 13$ в
 точке $(4; -2)$. 10.99. $z_{\max} = 738.05$ в точке $(9; 0.05)$. 10.100. $z_{\min} = 0$ в
 точке $(1; 0.5)$. 10.101. $z_{\min} = -1$ в точке $(1; 1)$. 10.102. $z_{\min} = 0$ в точке
 $(0; 0)$, $z_{\max} = \frac{125}{27}$ в точке $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$. 10.103. $z_{\text{наим.}} = -28$ в точке $(0; 2)$,
 $z_{\text{наиб.}} = \frac{4}{3}$ в точке $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. 10.104. $z_{\text{наим.}} = -\frac{13}{4}$ в точке $(0.5; -3)$,
 $z_{\text{наиб.}} = -\frac{2}{27}$ в точке $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right)$. 10.105. $z_{\text{наим.}} = -20$ в точке $(0; -2)$,
 $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точке $(0; 0)$. 10.106. $z_{\text{наим.}} = -4$ в точках $(0; -2)$ и $(-2; 0)$,
 $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точке $(0; 0)$. 10.107. $z_{\text{наиб.}} = 9$ в точках $(-1; 1)$ и $(1; -1)$,
 $z_{\text{наим.}} = 0$ в точке $(0; 0)$. 10.108. $z_{\text{наим.}} = -14$ в точке $(2; 8)$, $z_{\text{наиб.}} = 18$ в
 точке $(-2; 8)$. 10.109. $z_{\text{наим.}} = 0$ в точках $(0; 0)$ и $(4; 4)$, $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точках
 $(2; 2)$ и $(0; 4)$. 10.110. $z_{\text{наим.}} = -12$ в точке $(4; 0)$, $z_{\text{наиб.}} = 0$ в точке
 $(0; 0)$. 10.111. $z_{\text{наим.}} = -3$ в точке $(0; 3)$, $z_{\text{наиб.}} = 1$ в точке $(2; 3)$.

Глава 11

11.20. $(a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0$. 11.33. $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$. 11.34. $y = Cx$.
 11.35. $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$. 11.36. $y = \frac{C}{x}$. 11.37. $y = -\frac{2}{x^2 + 2C}$.
 11.38. $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \ln|2x + 1| + C$. 11.39. $\sqrt{2y + 1} = Cx$. 11.40. $y = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.
 11.41. $\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$. 11.42. $\sqrt{2y - 1} = C \sin x$. 11.43. $y = \frac{C}{1 - x} - 1$.
 11.44. $\sqrt{y^2 + 1} = \ln|Cx|$. 11.45. $\text{arctg } x = \sqrt{y^2 + 3} + C$.
 11.46. $2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \ln|Cy|$. 11.47. $\frac{\ln^2 y}{2} = x + C$. 11.48. $y = e^{\frac{C}{x}}$.
 11.49. $\frac{y^2}{2} = \ln|4 + e^x| + C$. 11.50. $y = -\frac{1}{\ln|C \cos x|}$.

$$\begin{aligned}
11.51. \quad & \sqrt{(x^2 + 3)^3} = C(y^2 + 2). & 11.52. \quad & \ln|y| + y = C - x \cos x + \sin x. \\
11.53. \quad & \operatorname{arctg} y = 2\sqrt{2 - x^2} + C. & 11.54. \quad & \ln|\sin y| = C + \frac{1}{2}e^{(x-1)^2}. \\
11.55. \quad & y = \frac{C}{\cos x} - 1. & 11.56. \quad & y = \frac{x+1}{x}. & 11.57. \quad & \operatorname{arctg} y = \ln|x| + 1. \\
11.58. \quad & y = \sqrt{1 - 2x^2}. & 11.59. \quad & y = e^{\operatorname{ctg} x}. & 11.60. \quad & \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + C. \\
11.61. \quad & 2(\sqrt{y} - 1) = \cos x. & 11.62. \quad & \cos y = \cos x. & 11.63. \quad & y = e^{\arccos x}. \\
11.64. \quad & y = x. & 11.65. \quad & \frac{1-2^{-y}}{\ln 2} = e^{-x} - 1. & 11.66. \quad & \ln^2 y = 2\ln|x|. & 11.67. \quad & y = 3 - \\
& -e^{-x}(2x+3). & 11.68. \quad & e^{-y}(y+1) = \frac{x^2+1}{2}. & 11.69. \quad & e^{y-x} = x - 1. \\
11.70. \quad & \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y^3 - \frac{\pi}{12}. & 11.71. \quad & xy = -4. & 11.72. \quad & y = \frac{2x}{1-x}. \\
11.73. \quad & N(t) = N_0 \cdot e^{kt}. & 11.74. \quad & 200\text{M}. & 11.75. \quad & v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right). \\
11.76. \quad & S = 40 \text{ м}, \quad v = \frac{20}{9} \text{ м/с}. & 11.77. \quad & Cx = \frac{x+y}{2x+y}. & 11.78. \quad & \sqrt{x(x+2y)} = C. \\
11.79. \quad & x+y = Cx^2. & 11.80. \quad & \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}} = Cx. & 11.81. \quad & y = C \cdot e^{\frac{y}{x}}. \\
11.82. \quad & y = x \cdot \operatorname{tg}(\ln C \sqrt{x^2 + y^2}). & 11.83. \quad & \frac{y}{x} + \ln \left| \frac{y^2}{Cx} \right| = 0. \\
11.84. \quad & y\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^3. & 11.85. \quad & y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^3. \\
11.86. \quad & 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{C(x^2 + y^2)^3}{x^5}. \\
11.87. \quad & y = -\frac{x}{\ln|Cx|}. & 11.88. \quad & Cx = e^{-\cos \frac{y}{x}}. & 11.89. \quad & y = x \operatorname{arctg}(\ln x - C). \\
11.90. \quad & y = x \operatorname{arctg}(\ln x + C). & 11.91. \quad & \ln Cx = -e^{\frac{y}{x}}. & 11.92. \quad & -\ln 2 \ln Cx = 2^{-\frac{y}{x}}. \\
11.93. \quad & y = x \sin(\ln x C). & 11.94. \quad & \ln x = C - e^{\frac{x}{y}}. & 11.95. \quad & 2^{y/x}(2-x) = x. \\
11.96. \quad & y = x \arcsin \frac{x}{2}. & 11.97. \quad & \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4} \right) = x. & 11.98. \quad & \operatorname{tg} \frac{y}{2x} = x. \\
11.99. \quad & x(x^2 - y^2) = 4x^2. & 11.100. \quad & x = \frac{1}{4} y \ln^2 y. & 11.101. \quad & y^2 - x^2 = y^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
11.102. & y = 2x^2. & 11.103. (x-1)^2 + y^2 = 1. & 11.104. & y = 2x - x \ln x. \\
11.105. & y = 2x - x \ln x. & 11.106. & y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right). & \\
11.107. & y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). & 11.108. & y = \frac{1}{x} (e^x + C). & 11.109. & y = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \\
11.110. & y = x \left(\frac{1}{3} e^{3x} + C \right). & 11.111. & y = \frac{1}{x+1} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). & 11.112. & \\
& y = \cos x \cdot \left(\frac{x^3}{3} + C \right). & 11.113. & y = e^{\frac{x^2}{2}} (\sin x + C). & \\
11.114. & y = \frac{1}{\sin x} (e^x + C). & 11.115. & y = \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sin x} + C \right). & \\
11.116. & x = y(y + C). & 11.117. & x = y \ln y + \frac{C}{y}. & \\
11.119. & y = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right). & 11.120. & y = \frac{x}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2\sqrt{x^2 + 1}}. & 11.121. & y = \frac{1}{x} (x^3 - 1). \\
11.122. & y = 2e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2. & 11.123. & y = e^x \left(\frac{x^4}{4} + 6 \right). & 11.124. & y = e^x (x + 1). \\
11.125. & y = e^{-x} (x - 1). & 11.126. & y = \sin x \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right). & \\
11.127. & y = \frac{1}{\cos x} (x + 1). & 11.128. & y = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. & \\
11.129. & y = \frac{1}{x} (e^x + ab - e^a). & 11.130. & y = 1 - \cos x - e^{-\cos x}. & \\
11.132. & y = x \ln x - x + C_1 x + C_2. & 11.133. & y = -\frac{1}{9} \cos 3x + C_1 x + C_2. & \\
11.134. & y = -\ln|\sin x| + C_1 x + C_2. & 11.135. & y = \frac{1}{24x} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. & \\
11.136. & y = \frac{1}{64} e^{4x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. & & & \\
11.137. & y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2. & 11.138. & y = C_1 x^2 + C_2. &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
11.139. \quad y &= C_1 x - C_1^2 \ln|C_1 + x| + C_2. & 11.140. \quad y &= \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2. \\
11.141. \quad y &= e^{C_1 x} \left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \right) + C_2. & 11.142. \quad y &= C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}. \\
11.143. \quad y &= \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2. & 11.144. \quad y &= \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \ln x + C_2. & 11.145. \quad y &= \frac{x^2}{2} + \\
& + \frac{x^3}{12} + C_1(x \ln x - x) + C_2 x + C_3. & 11.146. \quad y &= C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \\
11.147. \quad y &= C_1 e^{C_2 x}. & 11.148. \quad C_1 y^2 &= 1 + (C_1 x + C_2)^2. & 11.149. \quad \frac{1}{C_1} \ln|y + \\
& + \sqrt{y^2 - \frac{1}{C_1^2}} &= \pm x + C_2. & 11.150. \quad 4(C_1 y - 1) &= (C_1 x + C_2)^2. & 11.151. \quad y &= C; \\
2\sqrt{y} &= C_1 x + C_2. & 11.152. \quad y &= \arcsin(e^{x+C_2} - C_1). & 11.153. \quad y &= C_2 - \cos(x + C_1). \\
11.154. \quad y &= C_1 \sec C_1(x + C_2). & 11.156. \quad \frac{1}{1-y} &+ C_1 x + C_2. & 11.157. \quad y &= -\ln|\cos x| - \\
& - \frac{x^2}{2}. & 11.158. \quad y &= 3 \ln|x| + 2x^2 + 6x + 7. & 11.159. \quad y &= -\ln|\cos x| - x + \frac{\pi}{4}. \\
11.160. \quad y &= \frac{1}{8} e^{2x}. & 11.161. \quad y &= 3x + x^3. & 11.162. \quad y &= \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}. \\
11.163. \quad y &= x - e^{-x} + 4. & 11.164. \quad y &= 2 + 4(x \ln x - x). & 11.165. \quad y &= 4\sqrt{x} - 2 \ln|x|. \\
11.166. \quad y &= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. & 11.167. \quad y &= x - \frac{1}{2} \sin 2x + 2 \cos x. & 11.168. \quad y &= -\frac{1}{3x-4}. \\
11.169. \quad \frac{y^2}{2} &= 3x - 2,5. & 11.170. \quad y^2 &= 4 + 4e^{2x}. & 11.171. \quad y - 1 &= \frac{1}{1-x}. \\
11.172. \quad \operatorname{tg} y &= 3x. & 11.173. \quad \operatorname{ctg} y &= -x. & 11.187. \quad y &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}. \\
11.188. \quad y &= C_1 e^{5x} + C_2 e^x. & 11.189. \quad y &= e^{3x}(C_1 + C_2 x). & 11.190. \quad y &= C_1 + C_2 e^{6x}. \\
11.191. \quad y &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}. & 11.192. \quad y &= C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x. \\
11.193. \quad y &= e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x). & 11.194. \quad y &= e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right. \\
& + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \left. \right). & 11.195. \quad y &= C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}. & 11.196. \quad y &= C_1 + C_2 e^{3x} +
\end{aligned}$$

$+ C_3 e^{-x}$. 11.197. $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3 x)$. 11.198. $y = C_1 + e^{-2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$. 11.199. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$. 11.200. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$.
 11.201. $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$. 11.202. $y = C_1 e^x + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3} x + C_3 \sin \sqrt{3} x)$. 11.203. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x}$.
 11.204. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$. 11.205. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$. 11.206. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$. 11.207. $y = -3e^{-3x} + 5e^{-2x}$. 11.208. $y = 2xe^{-2x}$.
 11.209. $y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$. 11.210. $y = \frac{11}{3} - \frac{2}{3} e^{3x}$. 11.211. $y = e^{3x} + 2e^{-3x}$.
 11.212. $y = -\frac{1}{5} \sin 5x$. 11.213. $y = 19e^{3x} - 15e^{4x}$. 11.214. $y = -5xe^{4x}$.
 11.215. $y = e^{-x} \left(\cos \sqrt{3} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3} x \right)$. 11.216. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{5}{3} e^{-x}$.
 11.217. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$. 11.218. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x + 1$.
 11.219. $y = e^{-2x} (C_1 x + C_2) + e^{2x} \frac{1}{32} (2x - 1)$. 11.220. $y = e^{-x} (C_1 x + C_2) + \frac{1}{2} \sin x$. 11.221. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \frac{2}{3} x e^{-3x}$. 11.222. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{4}{39} \cos 3x - \frac{2}{13} \sin 3x$. 11.223. $y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{2}{25} \cos 3x - \frac{8}{75} \sin 3x$.
 11.224. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + 3x^2 + x$. 11.225. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{8}$.
 11.226. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$. 11.227. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - e^{-x} \left(\frac{5}{41} \cos x - \frac{4}{41} \sin x \right)$. 11.228. $y = e^x (C_1 \cos \sqrt{2} x + C_2 \sin \sqrt{2} x) + e^{-x} \left(\frac{5}{41} \cos x - \frac{4}{41} \sin x \right)$.
 11.229. $y = e^{2x} (C_1 x + C_2) + C_3 + e^{2x} \frac{1}{2} x^2$. 11.230. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + x^2$.
 11.231. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + 2xe^x$. 11.232. $y = C_1 + C_2 x +$

$$+ C_3 e^{-x} + x e^{-x}. \quad 11.233. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + x^2(x-3).$$

$$11.234. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{x}{2}(x+1)e^{-x}.$$

$$11.235. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{1}{2} x \sin x.$$

$$11.236. \quad y = 2e^{2x} - 4e^x + x + 2.$$

$$11.237. \quad y = -e^x + \frac{10}{9} e^{3x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{9}.$$

$$11.238. \quad y = \frac{128}{27} e^{3x} - \frac{21}{4} e^{2x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{55}{108}. \quad 11.239. \quad y = \frac{34}{45} e^{3x} - \frac{9}{20} e^{-2x} -$$

$$-\frac{1}{6} x - \frac{11}{36}. \quad 11.240. \quad y = -\frac{35}{27} + \frac{35}{27} e^{-3x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{8}{9} x. \quad 11.241. \quad y = \frac{17}{8} - \frac{17}{8} e^{2x} -$$

$$-\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x. \quad 11.242. \quad y = 2(x-1)e^x. \quad 11.243. \quad y = \cos x + 4 \sin x - 2x \cos x.$$

$$11.244. \quad y = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} e^{\pi-x} + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x. \quad 11.245. \quad y = \cos 3x + \sin 3x + x \sin 3x.$$

$$11.246. \quad y = e^{-3x} + x e^x (4x^2 - 3x + 1,5).$$

$$11.247. \quad y = 4 - 4 \cos x + \sin x - x^2.$$

$$11.248. \quad y = -3e^x + e^{-x} + \cos x + 2 \sin x + 2x e^x. \quad 11.249. \quad y = \left(C_1 - \frac{1}{2} x \right) \cos 2x +$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + C_2 \right) \sin 2x. \quad 11.250. \quad y = \left(-\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C_1 \right) \cos x + C_2 \sin x.$$

$$11.251. \quad y = \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + C_1 \right) \cos x + \left(C_2 - \sin x - \frac{1}{\sin x} \right) \sin x.$$

$$11.252. \quad y = \left(\frac{2}{9} \ln |\cos 3x| + C_1 \right) \cos 3x + \left(C_2 + \frac{2}{3} x \right) \sin 3x.$$

$$11.253. \quad y = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + \left(C_2 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - x \right) \sin 2x.$$

$$11.254. \quad y = e^x (C_1 + C_2 x - \ln |x|). \quad 10.255. \quad y = x - \ln(e^x + 1) + C_1 + (C_2 - \ln(e^x + 1)) \cdot$$

$$e^{-x}. \quad 11.256. \quad y = e^{-x} (C_1 - x) + (\ln |x| + C_2) x e^{-x}. \quad 11.257. \quad y = (C_1 + \operatorname{arctg} x) x e^x +$$

$$+ \left(C_2 - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \right) e^x. \quad 11.258. \quad y = \left(C_1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln |e^x + 1| \right) e^x + \left(C_2 + \frac{1}{2} e^x +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln |e^x - 1| \right) e^{-x}. \quad 11.259. \quad y = \left(C_1 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{x^2}{2} \ln |x| \right) e^{-3x} + (C_2 - x + x \ln |x|) x e^{-3x}.$$

$$11.260. \quad y = \frac{(1 - e^{2x})^{3/2}}{3} + C_1 + \left(C_2 - \frac{1}{2} e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2} \arcsin(e^x) \right) e^x.$$

11.261. $y = e^{-x}(C_1x + C_2) + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}.$ 11.262. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - xe^{-x} +$
 $+ x^2 - 2.$ 11.263. $y = e^{2x}(C_1x + C_2) + \frac{5}{9}\operatorname{sh}x + \frac{4}{9}\operatorname{ch}x + \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x.$

11.264. $y = e^{2x}(C_1x + C_2) + \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x - \frac{1}{8}\sin 2x.$ 11.265. $y = C_1 +$
 $+ C_2x + C_3e^{-x} + (x-3)x^2 + \frac{1}{3}xe^{-x}.$ 11.266. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x +$
 $+ C_4\sin x + \left(\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}\right)xe^x - \frac{1}{4}x\sin x.$ 11.267. $y = \left(\frac{4}{25}\ln|\cos 5x| + C_1\right)\cos 5x +$
 $+ \left(\frac{4}{5}x + C_2\right)\sin 5x + \frac{3}{26}e^x.$ 11.268. $y = \left(\left(\frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + C_1\right)\cos 3x + +$
 $\left(\frac{1}{3}x + C_2\right)\sin 3x\right)e^{2x} + \frac{1}{13}x - \frac{22}{169}.$ 11.269. $y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{1}{10}\cos 2x +$
 $+ \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x.$ 11.270. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x -$
 $- \frac{1}{32}x\cos 2x - \frac{1}{16}x^2\sin 2x.$ 11.272. $\begin{cases} C_1x^2 = 2t + C_2, \\ y^2 = C_1(2t + C_2). \end{cases}$

11.273. $\begin{cases} x^2 = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}, \\ y^2 = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}. \end{cases}$ 11.274. $\begin{cases} x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t). \end{cases}$

11.277. $\begin{cases} x = 5e^{2t} - 3e^{-7t}, \\ y = -e^{2t} + 6e^{-7t}. \end{cases}$ 11.278. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + t \cdot \operatorname{sh}t, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} + \operatorname{sh}t + t \cdot \operatorname{ch}t. \end{cases}$

11.279. $\begin{cases} x = 1 - 2(t - \pi) + 2\sin t, \\ y = 4(t - \pi) - 2\cos t + 3\sin t. \end{cases}$

Глава 12

12.3. $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$ 12.5. $\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} f(x, y) dx.$ 12.6. $\int_0^1 dy \int_0^{4-y^2} f(x, y) dy.$

12.10. $\int_{-1}^0 dx \int_{2x^2}^{x+3} f(x, y) dy.$ 12.11. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dy.$ 12.12. $\int_{-2}^2 dx \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{+3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x, y) dy.$

12.13. $\int_1^5 dy \int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x, y) dx.$ 12.16. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x, y) dy$ 12.18.

$$\int_0^3 dy \int_{\frac{2}{3}y-2}^{2-\frac{2}{3}y} f(x, y) dx. \quad 12.23. \quad \int_0^3 dx \int_{-\frac{x}{3}}^x f(x, y) dy. \quad 12.26. \quad \int_{-2}^0 dx \int_{-1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \quad 12.29.$$

$$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{3-\frac{y}{2}} f(x, y) dx. \quad 12.31. \quad \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\frac{3(y-2)}{2}} f(x, y) dx. \quad 12.34. \quad \int_{-2}^0 dx \int_{1+\frac{x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \quad 12.36.$$

$$\int_0^1 dx \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{3-x}{2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy. \quad 12.38. \quad \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2+3x} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_{2-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\frac{13-3x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$12.41. \quad \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{1-\sqrt{1-(x+2)^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{3x+2}^{x+2} f(x, y) dy. \quad 12.42. \quad \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2y+3} f(x, y) dx +$$

$$\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \quad 12.45. \quad \int_0^1 dy \int_{y-1}^0 f(x, y) dx. \quad 12.49. \quad \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$12.50. \quad \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad 12.51. \quad \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

$$12.53. \quad \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy. \quad 12.57. \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$12.59. \quad \int_{1-\frac{\pi}{2}}^0 dy \int_{1-y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\arccos y} f(x, y) dx. \quad 12.63. \quad \int_0^3 dx \int_0^4 f(x, y) dy +$$

$$\int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy. \quad 12.64. \quad \int_{-1}^0 dx \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x, y) dy +$$

$$+ \int_0^8 dx \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f(x, y) dy. \quad 12.67. \quad \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^x f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{-1}^0 f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$12.70. \quad \int_0^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy + \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) dy. \quad 12.74. \quad \int_0^1 dy \int_0^3 f(x, y) dx +$$

$$+ \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x, y) dx. \quad 12.76. \quad \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx. \quad 12.77. \quad \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$$

- 12.78. 21. 12.79. 166,4. 12.80. $\frac{32}{3}$. 12.81. 18. 12.82. $\frac{4}{5}$. 12.83. 50,4.
12.84. $\frac{9}{4}$. 12.85. $\frac{8}{3}$. 12.86. $\frac{3}{32}$. 12.87. $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$. 12.88. $\frac{1}{2}(e^2 - e - 1)$.
12.89. $-\frac{2}{3}$. 12.90. $\frac{e^{12} - e^9 - 3}{18}$. 12.91. 5. 12.92. $e - 2$. 12.93. $3 - \sqrt{2}$.
12.94. $\frac{4}{\pi^2}$. 12.95. -2. 12.96. $\frac{4}{3}$. 12.97. $\frac{1}{12}$. 12.98. $\frac{9}{4}$. 12.99. $\frac{1}{2}$.
12.100. $\frac{1}{2}(e - 1)$. 12.101. 24. 12.102. $-\frac{188}{15}$. 12.103. $\frac{9}{20}$. 12.104. $\frac{11}{24}$.
12.105. $\frac{9}{4}$. 12.106. $\frac{4}{3}$. 12.107. 3. 12.108. 1. 12.109. $\frac{3}{7}$. 12.110. $-\frac{4}{3}$.
12.111. $\frac{1}{4}$. 12.112. $\frac{\pi}{2}$. 12.113. $\frac{e^2}{2} - e$. 12.114. $-\frac{4}{3}$. 12.115. $\frac{11}{2}$. 12.116. $\frac{8}{3}\pi$.
12.117. $\frac{\pi}{3}$. 12.118. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. 12.119. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 12.120. $\frac{1}{6}\pi$. 12.121. $\sqrt{2} + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.
12.122. $18\pi - 27$. 12.123. $2\pi^3$. 12.124. $\frac{3\pi}{2}$. 12.125. $2\pi(1 - \ln^2 2)$. 12.126. 8π .
12.127. $\frac{\pi}{2}$. 12.128. $18\pi - 12$. 12.129. 4. 12.130. $\frac{13\pi}{2}$. 12.131. $\frac{\pi}{6}(\sqrt{8} - 1)$.
12.132. $\frac{\pi R^3}{3}$. 12.133. $2\sqrt{2} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{8}}$. 12.134. $\frac{5\pi \ln 2}{24}$. 12.135. 0,75.
12.136. $\frac{3}{4} \ln 2$. 12.137. $\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$. 12.138. $\frac{15}{2} - 8 \ln 2$. 12.139. $\frac{1}{6}$.
12.140. $\frac{13}{3}$. 12.141. $\frac{16}{3}$. 12.142. $\frac{3}{2} - \ln 2$. 12.143. $\frac{32}{3}$. 12.144. $7 - 3 \ln 2$.
12.145. 4,5. 12.146. 16. 12.147. 4,5. 12.148. $\frac{4}{3} + \ln 2$. 12.149. $\frac{40}{3}$.
12.150. $\sqrt{2} - 1$. 12.151. $\frac{4}{3}$. 12.152. $\frac{3\pi}{8}$. 12.153. $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{8}$. 12.154. $\frac{3}{8}(\pi +$
 $+\frac{3\sqrt{3}}{2})$. 12.155. $\pi - 2$. 12.156. π . 12.157. 6π . 12.158. 5π . 12.159. $\pi + 8$.
12.160. $\frac{32}{3}$. 12.161. $\frac{2}{3}$. 12.162. $\frac{160}{3}$. 12.163. $\frac{4}{3}$. 12.164. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$.

12.165. $\frac{135}{2}$. 12.166. 27. 12.168. $85\frac{7}{32}$. 12.169. 9. 12.170. $\frac{128}{3}$.
 12.171. 16π . 12.172. 64. 12.173. $\frac{81}{20}$. 12.174. 4. 12.175. $\frac{9}{20}$.
 12.176. $\frac{2\pi R^3}{3}$ 12.177. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$. 12.178. $\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{4}\right)$. 12.179. $\left(1\frac{1}{10}; \frac{8}{25}\right)$.
 12.180. $\left(\frac{12}{5}; \frac{9}{4}\right)$. 12.181. $\left(3; 28\frac{4}{5}\right)$. 12.182. $\frac{15}{8}$. 12.183. $M_x = 3, M_y = 2$.
 12.184. $I_x = \frac{1}{4}, I_y = \frac{17}{12}$. 12.185. 36,3. 12.186. $51\frac{15}{64}$. 12.187. $39\frac{1}{105}$.

Глава 13

13.1. $u_n = \frac{2n}{2n+1}$. 13.2. $u_n = \frac{2n}{3^n}$. 13.3. $u_n = \frac{2n}{n!}$. 13.4. $u_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.
 13.5. $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$. 13.6. $u_n = \frac{(2n-1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$. 13.7. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
 13.8. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. 13.9. $u_n = (-1)^{n+1}$. 13.10. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$.
 13.11. $u_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{5^n}$. 13.12. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$. 13.13. $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.
 13.14. $u_n = \frac{x^{n+1}}{(n-1)!}$. 13.15. $u_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. 13.16. $u_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!}$.
 13.17. $u_n = \frac{1}{x^n + n^2}$. 13.18. $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$. 13.19. $u_n = (-1)^{n-1} (2n-1)^2 x^{n-1}$. 13.20.
 $u_n = \frac{(x+1)^n}{n4^{n-1}}$. 13.21. $u_1 = 3^2, u_2 = \frac{3^3}{\sqrt[3]{2}}, u_3 = \frac{3^4}{\sqrt[3]{3}}$. 13.22. $u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 0$.
 13.23. $u_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, u_2 = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}, u_3 = \frac{5}{\sqrt[3]{28}}$. 13.24. $u_1 = x, u_2 = \frac{x^2}{2^2}, u_3 = \frac{x^3}{3^2}$. 13.25.
 $u_1 = x-2, u_2 = \frac{(x-2)^2}{2!}, u_3 = \frac{(x-2)^3}{3!}$. 13.26. $u_1 = 1, u_2 = \frac{x+2}{\sqrt{2}}, u_3 = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}}$.
 13.27. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, ряд сходится.

13.28. $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$, ряд сходится. 13.29. $S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \right.$

$\left. + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{11}{18}$, ряд сходится. 13.30. $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$, ряд сходится. 13.31. $S_n = \frac{1 - (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$, ряд сходится.

13.32. $S_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$, ряд сходится. 13.33.

$S_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4}{3}$, ряд сходится. 13.34. $S_n = \ln(n+1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$,

ряд расходится. 13.35. Да. 13.36. Да. 13.37. Нет. 13.38. Нет. 13.39. Нет. 13.40. Нет. 13.41. Нет. 13.42. Да. 13.43. Да. 13.44. Нет. 13.45. Нет. 13.46. Сходится. 13.47. Расходится. 13.48. Сходится. 13.49. Расходится. 13.50. Сходится. 13.51. Сходится. 13.52. Расходится. 13.53. Расходится. 13.54. Расходится. 13.55. Сходится. 13.56. Сходится. 13.57. Расходится. 13.58. Сходится. 13.59. Сходится. 13.60. Расходится. 13.61. Расходится. 13.62. Сходится. 13.63. Расходится. 13.64. Сходится. 13.65. Сходится. 13.66. Сходится. 13.67. Сходится. 13.68. Сходится. 13.69. Расходится. 13.70. Сходится. 13.71. Сходится. 13.72. Сходится. 13.73. Расходится. 13.74. Сходится. 13.75. Сходится. 13.76. Сходится. 13.77. Сходится. 13.78. Сходится. 13.79. Сходится. 13.80. Расходится. 13.81. Сходится. 13.82. Сходится. 13.83. Сходится. 13.84. Расходится. 13.85. Расходится. 13.86. Сходится. 13.87. Сходится. 13.88. Расходится. 13.89. Расходится. 13.90. Расходится. 13.91. Сходится. 13.92. Расходится. 13.93. Сходится. 13.94. Расходится. 13.95. Расходится. 13.96. Расходится. 13.97. Сходится. 13.98. Расходится. 13.99. Сходится. 13.100. Расходится. 13.101. Сходится. 13.102. Сходится. 13.103. Сходится. 13.104. Расходится. 13.105. Сходится. 13.106. Сходится. 13.121. Сходится условно. 13.122. Расходится. 13.123. Расходится. 13.124. Сходится абсолютно. 13.125. Сходится условно. 13.126. Сходится абсолютно. 13.127. Сходится абсолютно. 13.128. Сходится абсолютно. 13.129. Расходится.

13.130. Сходится абсолютно. 13.131. Сходится абсолютно. 13.132. Схо -

дится абсолютно. 13.133. $-1 < x < 1$. 13.134. $-1 < x < 1$. 13.135. $-1 < x < 1$.

13.136. $-1 < x < 1$. 123137. $-3 < x < 3$. 13.138. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

13.139. $-\infty < x < \infty$. 13.140. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 13.141. $-1 < x < 1$.

13.142. $-\infty < x < \infty$. 13.143. $-\sqrt{3} - 4 < x < \sqrt{3} - 4$. 13.144. $-\frac{5}{3} < x < 1$. 13.145.
 $-\frac{3}{2} < x < 2$. 13.146. $1 < x < 2$. 13.147. $-1 < x < 0$. 13.148. $-e - 1 < x < e - 1$.

13.150. $-1 < x < 1$. 13.151. $-1 < x < 1$. 13.152. $-1 < x < 1$.

13.153. $2 \leq x < 4$. 13.154. $-3 \leq x \leq 1$. 13.155. $-1 < x \leq 1$.

13.156. $-3 \leq x \leq -1$. 13.157. $-5 \leq x < 3$. 13.158. $-3 < x \leq 1$.

13.159. $x = 0$. 13.160. $-\infty < x < \infty$. 13.161. $-1 < x < 1$. 13.162. $x = 0$.

13.163. $2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$. 13.163. $\ln 5 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{5^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 3} - \dots$.

13.165. $-x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$. 13.166. $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots$.

13.167. $\cos \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \sin \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

13.168. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(mx)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(mx)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

13.169. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(6x)^{2n}}{(2n)!}$. 13.170. $x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$.

13.171. $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^{2n}$.

13.172. $2 + \frac{x}{5 \cdot 16} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (5n-1)}{5^{n+1} (n+1)!} \left(\frac{x}{32}\right)^{n+1}$.

13.173. $1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3} x^6 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! 2^n} x^{2n} + \dots$.

13.174. $x^2 \left(1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1 \cdot 4}{2! 3^2} x^4 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3! 3^3} x^6 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n! 3^n} x^{2n} + \dots \right)$.

13.175. $(x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 20(x+2)^2 - 16(x+2)$.

13.176. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} (x-3) + \frac{1}{3^3} (x-3)^2 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} (x-3)^{n-1} + \dots$.

$$13.177. 1 - 2(x-1) + 2^2(x-1)^2 - \dots + (-1)^{n+1}2^n(x-1)^{n-1} + \dots .$$

$$13.178. 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - \dots + (-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1} + \dots .$$

$$13.179. -1 + \frac{x+1}{3 \cdot 1!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!} (x+1)^{n+1}.$$

$$13.180. 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{3^n n!} (x+1)^n.$$

$$13.181. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi}{4}}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{n-1} . \quad 13.182. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{2}\right)}{3^n n!} \cdot \pi^n (x-1)^n .$$

$$13.183. \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1} .$$

$$13.184. \frac{2-\sqrt{2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1} \sqrt{2}}{(n+1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^{n+1} .$$

$$13.185. 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3^n n!} (x-1)^n.$$

$$13.186. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-4)^n}{n} . \quad 13.187. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^8 (x-4)^n}{n!} .$$

$$13.188. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-2)^n}{2^n n!} .$$

$$13.189. 0,98. \quad 13.190. 0,174. \quad 13.191. 0,999.$$

$$13.192. 0,0175. \quad 13.193. 0,158. \quad 13.194. 4,125. \quad 13.195. 2,09. \quad 13.196. 7,937.$$

$$13.198. 0,7788. \quad 13.199. 0,125. \quad 13.200. 0,452. \quad 13.201. 0,192. \quad 13.202. 0,097.$$

$$13.203. 0,118. \quad 13.204. 0,498. \quad 13.205. 0,098. \quad 13.206. 0,499.$$

Глава 14

$$14.1. 120. \quad 14.2. 40320. \quad 14.3. 720. \quad 14.4. 336. \quad 14.5. 56. \quad 14.6. 120.$$

$$14.7. 83. \quad 14.8. C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3. \quad 14.9. 120. \quad 14.10. 24. \quad 14.11. 6. \quad 14.12. 96.$$

$$14.13. 756. \quad 14.14. 1) 1/6; \quad 2) 1/18; \quad 3) 0,5; \quad 4) 1/18. \quad 14.15. 0,75.$$

$$14.16. 1/30. \quad 14.17. 1) 1; \quad 2) 0,2; \quad 3) 0,6. \quad 14.18. 1) 0,008; \quad 2) 0,096;$$

$$3) 0,384; \quad 4) 0,512. \quad 14.19. 1) 1/90; \quad 2) 1/81. \quad 14.20. 4/9. \quad 14.21. 0,375.$$

14.22. $1/6$. 14.23. 0,1. 14.24. $p = \frac{m}{n}$, где $n = (A_{19}^1)^3$, 1) $m = A_{19}^3$;
 2) $m = (A_{19}^1)^3 - A_{19}^3 - A_{19}^1$; 3) $m = A_{19}^1$. 14.25. $n = C_{36}^4$, $m = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2$.
 14.26. 0,6. 14.27. $1/90!$. 14.28. $\frac{4!}{90!}$. 14.29. 1) $\frac{1}{C_{49}^6}$; 2) $\frac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0,01765$.
 14.30. 1) $24/91$; 2) $45/91$; 3) $20/91$; 4) $2/91$. 14.31. а) 0,62; б) 0,38.
 14.32. 0,1. 14.33. 1) $499/1998$; 2) $500/999$. 14.34. $C_{28}^7 C_{22}^8 / C_{50}^{15}$. 14.35.
 1) 0,6; 2) 0,3; 3) 0,9. 14.36. 1) 0,25; 2) $1/6$. 14.37. $p = \frac{m}{n}$, где
 $n = C_{52}^5$, 1) $m = 2C_4^2 \cdot C_{44}^1$; 2) $m = 4 \cdot C_{13}^5$; 3) $m = 13 \cdot C_{48}^1 = 624$. 14.38. $3/7$.
 14.39. $1/3$. 14.40. r^2 / R^2 . 14.41. 0,75. 14.42. $\frac{1}{2\pi}$. 14.43. 0,5. 14.44.
 $(a-r)/a$. 14.45. $\left(\frac{a-2r}{a}\right)^2$. 14.46. $2l/\pi a$. 14.47. $5/9$. 14.48. $7/16$. 14.49. $\frac{1 + \ln 8}{4}$.
 . 14.50. 0,72. 14.51. а) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; б) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^3$; в) $1 - \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$.
 14.52. 0,18. 14.53. $\approx 0,5$. 14.54. $5/6$. 14.55. $P=0,38$. 14.56. 0,306. 14.57.
 $\approx 0,88$. 14.58. 0,955. 14.59. 0,95. 14.60. 0,388. 14.61. 1) $3/14$; 2) $1/4$. 14.62.
 0,2. 14.63. 0,384. 14.64. 0,009. 14.65. 0,7. 14.66. 0,002. 14.67. $P_1 = 0,6$;
 $P_2 = 0,4$. 14.68. 1) 0,2; 2) 0,327; 3) 0,393; 4) 0,43. 14.69. 0,36. 14.70.
 0,89. 14.71. $2/3$. 14.72. 0,85. 14.73. 0,5. 14.74. $1/3$. 14.75. Без
 оптического прицела. 14.76. 0,918. 14.77. 0,95877. 14.78. 0,6448.
 14.79. 0,574. 14.80. $6\frac{1}{9}\%$. 14.81. 1) $7/13$, 2) $6/13$. 14.82. $10/17$.
 14.83. $3/7$. 14.84. $1/3$. 14.85. Без оптического прицела. 14.86. Вероятнее, что
 вкладчик держал деньги в «хорошем» банке. 14.87. 1) $20/21$; 2) $1/21$. 14.88.
 0,942. 14.89. $10/19$. 14.90. а) $5/16$; б) $3/16$; в) $13/16$. 14.91. 2 партии из 4.
 14.92. а) одну из двух; б) не менее 2 партий из 4. 14.93. $\approx 0,93$. 14.94. а)
 0,18; б) 0,74. 14.95. $8/27$. 14.96. 0,922. 14.97. 0,024. 14.98. 0,004. 14.99.
 0,046. 14.100. а) 0,889; б) 0,894; в) 0,106. 14.101. а) $\approx 0,5$; б) $\approx 0,4236$
 ; в) $\approx 0,5$. 14.102. $\approx 0,952$. 14.103. 0,0905. 14.104. 0,819. 14.105. 0,814.
 14.106. 0,14; 0,32. 14.107. 0,96. 14.108. 0,0308. 14.109. 0,96. 14.110. 0,5.

Глава 15

15.6. $A = \frac{2}{b-a}$. 15.7. $A = 1$. 15.8. $A = 0,5$; $F(x) = 0,5(1 - \cos x)$.

15.10. $x_{0,1} = \ln 1,11$. 15.11. 0,875. 15.12. 0,4. 15.14. $F(y) = 2\sqrt{y}$; $f(y) = 1/\sqrt{y}$.

15.15. $m_x = 2,5$; $D_x = 6,784$; $\sigma_x = 0,731$. 15.16. $m_x = 5p$; $D_x = 5p(1-p)$.

15.17. $m_x = \frac{1}{p}$; $D_x = \frac{1-p}{p^2}$. 15.18. $m_x = \frac{a+b}{2}$; $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$. 15.19. $A = 0,5$;

$m_x = 0$; $D_x = 0,133$. 15.20. $A = 0,5$; $m_x = 0$; $D_x = 0,133$. 15.21. $A = \frac{2}{b-a}$;

$m_x = \frac{a+b+c}{3}$; $D_x = \frac{1}{3} \left(\frac{(b-a)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}{12} \right)$. 15.22. $m_x = \frac{1}{\lambda}$;

$D_x = \frac{1}{\lambda^2}$; $x_{0,5} = \ln \frac{2}{\lambda}$. 15.23. $A = 0,667$; $m_x = 1,333$; $D_x = 0,389$; $x_{0,5} = 1,268$.

15.24. $A = 0,333$; $x_{0,9} = 2,051$. 15.25. $A = \frac{2}{\pi R^2}$; $x_{0,5} = 0$; $D_x = \frac{R^2}{4}$.

15.26. $a = 4$, $\sigma = 5$. 15.27. 0,977; 0,683. 15.28. 0,905. 15.29. 0,547.

15.30. 0,62. 15.31. 7,097. 15.32. 0,516см. 15.33. 0,023.

15.34. $F(y) = 0,5 + \Phi(\sqrt{y})$; $f(y) = 1/\sqrt{2\pi y} \cdot \exp(-y/2)$.

Глава 16

16.1. $\nu_2 = 0,375$. 16.2. $n_3 = 6$. 16.3. $n_6 = 10$. 16.4. $w_2 = 0,2$. 16.5. 5,1.

16.6. 2,808. 16.7. $-0,777 < m_x < 10,977$. 16.8. $1,97 < \sigma_x < 4,8$. 16.9. Не менее 27. 16.10. 34,4. 16.13. $5,59 < \sigma_x < 14,92$. 16.14. 8. 16.15. 267,76.

16.16. Верна, с t – жесткостью $2,471 < 1,114 < 2,471$. 16.17. Верна, с χ^2 - жесткостью $4,6 < 18 < 32,8$. 16.18. Дисперсии равны с F - жесткостью $0,359 < 1,143 < 2,468$. Математические ожидания равны с t - жесткостью $2,02 < 0,87 < 2,02$. 16.20. Значим с F - жесткостью $0,151 < 2 < 4,236$. 16.21. 0,315. 16.22. Не значим с t - жесткостью $2,995 < 3,01$. 16.23. Различие значимо с χ^2 - жесткостью $9,87 > 7,82$.

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике. - Ростов на Дону: Феникс, 2007. - 350 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – Санкт-Петербург: Профессия, 2003. 200 с.
3. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 336 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика 1. Упражнения и задачи. – М. Оникс 21 век. 2003,– 720 с.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М. Изд. ф. - мат. лит - ры: 2004. – 336 с.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – 2-е изд., испр. - М.: ИНФРА-М,2008. – 575 с.
7. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3 - е изд., испр. и доп. - М.: Айрис – пресс, 2003. – 576 с.
8. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высш. Шк., 2003. -304 с.
9. Берман Г.С. Сборник задач по курсу математического анализа. – С - П, 2003. – 432 с.
10. Нейман Ю.М., Королёва Т.М., Кувекина Н.А., Лисеев И.А., Маркарян Е.Г., Панов А.А. Основы дифференциального исчисления. М.: Центр тестирования МО РФ. 2002. – 23 с.
11. Нейман Ю.М., Королёва Т.М., Кувекина Н.А., Лисеев И.А., Маркарян Е.Г., Панов А.А. Основы интегрального исчисления. М.: Центр тестирования МО РФ. 2002. – 23 с.
12. Мазова Р.Х., Неймарк В.Н. Аналитическая геометрия для технических ВУЗов. Учебное пособие. – Н.Новгород. Нижегород. гос. техн. ун - т, 2014. – 127 с.
13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 2001. - 400с.
14. Филатов Л.В. Проверка статистических гипотез. Нижний Новгород ННГАСУ, 2003. – 41 с.
15. Важдаев В.П., Коган М.М., Лиогонький М.И., Протасова Л.А. 64 лекции по математике, книга 1. Нижний Новгород, ННГАСУ, 2012. -284 с.
16. Важдаев В.П., Коган М.М., Лиогонький М.И., Протасова Л.А. 64 лекции по математике, книга 2. Нижний Новгород, ННГАСУ,2012. – 200 с.

Айнбиндер Роман Михайлович
Горбиков Сергей Петрович
Неймарк Валерия Николаевна
Опалева Галина Павловна
Петров Владислав Викторович
Сенниковская Людмила Семеновна
Филатов Леонид Владимирович

Сборник задач и упражнений по математике

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 20.12.19. Формат 60x90 1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная. Уч. изд. л. 15,2. Усл. печ. л. 15,6. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru