Н. Ю. Прокопенко

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Нижний Новгород
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Н. Ю. Прокопенко

Дискретная математика

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2016

ББК 22.17я73
П 78
УДК 519(075)

Публикуется в авторской редакции

Рецензенты:

Цветкова И.Н. – к.ф.-м.н., доцент, начальник управления информационного обеспечения учебного процесса, зав. кафедрой информатики и ИТ Нижегородского института управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (НИУ РАНХиГС)

Елесин А.В. – к.ф.-м.н., ведущий сотрудник ННИМ ННГУ

Прокопенко Н.Ю. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Н. Ю. Прокопенко; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2016. – 251с. 1 электрон. опт. диск (DVD-R) ISBN 978-5-528-00127-2

Пособие предназначено для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика» для подготовки студентов бакалавриата направления 230700 «Прикладная информатика», а также может быть использовано в учебном процессе направления 230400 «Информационные системы и технологии». Содержание пособия охватывает программу разделов: «Теория множеств и отношений», «Комбинаторика», «Элементы теории графов», «Математическая логика и булевы функции».

В каждом разделе освещены необходимые теоретические сведения, представлены типовые задачи с решениями, а также задачи, адресованные студентам для самостоятельной работы.

ББК 22.17я73

ISBN 978-5-528-00127-2

Содержание

Введение……………………………………………………………………...…5
Глава 1. Теория множеств и отношений……………………………….…..…6
1.1. Множества. Операции над множествами……………………………...…6
Задачи………………………………………………………………………….17
1.2. Отношения и их свойства…………………………………………….....23
Задачи………………………………………………………………………….45
1.3. Функциональные отношения…………………………………………….50
Задачи………………………………………………………………………….58
Глава 2. Комбинаторика……………..…………………………….……….…61
2.1. Общие правила комбинаторики…………………………………………61
2.2. Комбинаторные конфигурации………………………………………….66
2.3. Формула бинома Ньютона……………………………………………….76
2.4. Комбинаторика разбиений……………………………………………….82
Задачи…………………………………………………………….……...…88
Глава 3. Элементы теории графов………………..……..…………………..93
3.1. Начальные понятия теории графов. Способы задания графов…………….93
Задачи………………………………………………………………..….…115
3.2. Операции над графами…………………………………………………122
Задачи…………………………………………………………………...…134
3.3.Маршруты, цепи и циклы в графах. Связные графы. Метрические соотношения в графах…………………………………………………………138
Задачи…………………………………………………………………....…154
3.4. Обходы графа (эйлеровы и гамильтоновы графы)………………………160
Задачи………………………………………………………………………...168
3.5.Деревья…………………………………………………………………......172
Задачи………………………………………………………………………...180
3.6. Типовые задачи теории графов……………………………………...183
3.6.1 Построение остова минимального веса: алгоритмы Прима и Краскала183

3.6.2 Минимальные пути в нагруженных орграфах: алгоритм Дейкстры……188
3.6.3. Раскраска графов. Проблема четырех красок……………………………190
3.6.4. Сети. Потоки в сетях…………………………………..……………..193
Задачи…………………………………………………………………………..196
Глава 4.Математическая логика…………………………………………..…..200
4.1.Алгебра высказываний…………………………………….………..…..200
4.1.1. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы алгебры логики……..…………………………………………..…...200
Задачи………..………………………………………………………………....203
4.1.2. Равносильные формулы….………………………………………………..207
Задачи………..…………………………………………………………….…...211
4.1.3. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам (РКС)……………………………………………………………………….....213
Задачи………..…………………………………………………………...….216
4.1.4. Логическое следствие…….……………………………………………..220
Задачи………..……………………………………………...............................224
4.1.5. Решение логических задач с помощью алгебры логики.………………226
Задачи………..……………………………………………...............................229
4.2. Функции алгебры логики.…………………………….…………………..233
4.2.1. Совершенные нормальные формы. Полином Жегалкина..……………...233
4.2.2. Проблема разрешимости.…………………………………………………..241
Задачи………..…………………………………………….……………..….243
4.2.3. Суперпозиция функций. Замыкание набора функций. Замкнутые классы функций. Полные наборы. Базисы……………………………………….….244
Задачи………..………………………………………………………….......249
Список литературы……………………………………………………........251

Введение

В настоящее время дискретная математика является интенсивно развивающимся разделом математики. Это связано с повсеместным распространением кибернетических систем, языком описания которых она является. Кроме того, дискретная математика является теоретической базой информатики, которая всё глубже и глубже проникает не только в науку и технику, но и в повседневную жизнь.

Методы дискретной математики пригодны для описания и последующего конструктивного анализа многих проблемных ситуаций, в том числе не поддающихся описанию традиционными средствами классической математики, и позволяют при необходимости активно использовать современную вычислительную технику, новые информационные технологии.

Дискретная математика предлагает универсальные средства (языки) формализованного представления, способы корректной обработки информации, представленной на этих языках, а также возможности и условия перехода с одного языка описания явлений на другой с сохранением содержательной ценности моделей.

Важность владения методами дискретной математики обусловлена ещё и тем, что современная информационная техника обработки информации базируется на дискретных представлениях. Не случайно за рубежом дискретную математику называют компьютерной математикой. Современный бакалавр, специалист, магистр не может обойтись без использования компьютерной техники. Сегодня это не только специальные текстовые и иные редакторы, системы документационного обеспечения, но и более сложные системы поддержки принятия решений, экспертные и другие интеллектуальные системы.

Цель данного учебного пособия – дать необходимый теоретический минимум информации по дискретной математике и рассмотреть всевозможные задачи данной дисциплины для её более быстрого и прочного усвоения.

Глава 1. Теория множеств и отношений.

1.1. Множества. Операции над множествами.

Множеством называется совокупность объектов любой природы, которые объединены в одну группу (систему, совокупность) по тем или иным признакам (множество городов, множество положительных чисел, множество студентов, множество действительных чисел и т.д.).

Элементы множества – это объекты, которые образуют данное множество, могут обладать некоторыми свойствами и находиться в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств.

Множества обозначают заглавными, а элементы множеств – строчными латинскими буквами или строчными латинскими буквами с индексами.

Множество можно задавать перечислением его элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ или характеристическим свойством $X = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ означает, что элемент x обладает свойством $P(x)$.

Способы записи множеств: $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $A = \{a \in \mathrm{R} \mid |a| \geq 1\}$.

Принадлежность элемента x множеству A записывается, как $x \in A$ (читают: элемент x принадлежит множеству A). В противном случае, обозначают $x \notin A$ (читают: элемент x не принадлежит множеству A).

Множества могут быть *конечными* и *бесконечными*.

Множество $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ цифр в десятичной системе счисления конечно. Множество точек окружности бесконечно.

Число элементов в конечном множестве M называется ***мощностью*** M и обозначается $|M|$. Пусть задано множество $A=\{x \mid 5 \leq x \leq 10, x \in N\}$, тогда $|A|=6$, $B=\{1,5,8,0,1,1,5\}$, тогда $|B|=4$.

Элементами множеств могут быть другие множества. Запись $A=\{\{x,y\},z\}$ означает, что множество A содержит два элемента: множество $\{x,y\}$ и элемент z, $|A|=2$.

Пример 1.1.

$A = \{D, C\}$, $D=\{a, b\}$, $C=\{c, d, e\}$. При этом $D \in A$, $C \in A$, но $a \notin A$ и $c \notin A$.

Множество A, все элементы которого принадлежат множеству B, называется ***подмножеством*** множества B.

Обозначение: $A \subset B$; $A \subseteq B$, при этом говорят, что A включено в B.

Нестрогое включение обозначается $A \subseteq B$, означает, что A–*подмножество* множества B, возможно совпадающее с B. ***Строгое включение*** обозначается $A \subset B$, и означает, что A – подмножество множества B, не совпадающее с B.

Равенство множеств $A = B$ означает, по определению, что верны оба включения в ту и другую сторону: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Совокупность объектов, которая не является множеством, называется *классом*. Неформально говоря, называя совокупность элементов классом, а не множеством, мы берем на себя сравнительно меньшую ответственность за определенность, отличимость и бесповторность элементов.

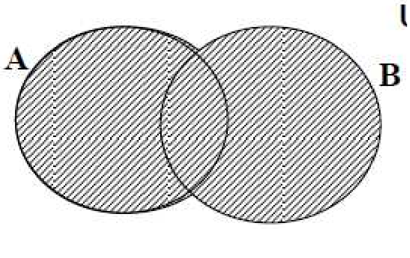
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством и обозначается Ø.

Пустое множество – это множество, поэтому, если некоторое множество A не содержит ни одного элемента, то $A=\varnothing$; $|A|=0$. Запись $A=\{\varnothing\}$ означает, что A содержит один элемент – $\varnothing$, $|A|=1$.

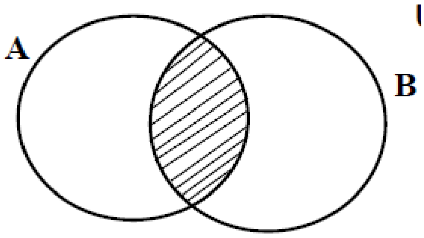
Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество.

Обычно в конкретных рассуждениях элементы всех рассматриваемых множеств (и семейств) берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества U (своего для каждого случая), которое называется ***универсальным множеством*** (или ***универсумом***).

Геометрическая интерпретация множеств – диаграммы Венна



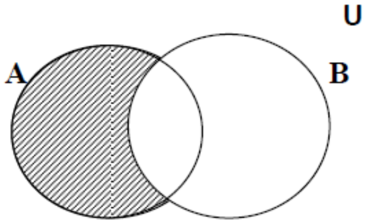
Определение. Объединением множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В. $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$



Определение. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B.

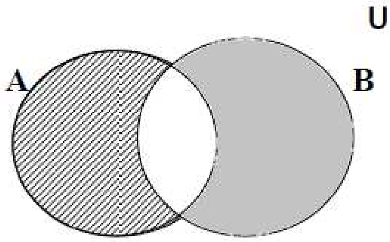
$A \bigcap B = \{x | \, x \in A \, и \, x \in B\}$

Пример 1.2. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Тогда $A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \bigcap B = \{3\}$.



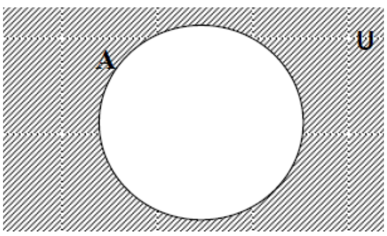
Определение. Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

$A \setminus B = \{ \, x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \, \}$.



Определение. Симметрической разностью множеств A и B называется множество, содержащее либо элементы множества A, либо элементы множества B, но не те и другие одновременно.

$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x | \, x \in A \text{ или } x \in A, \text{ но } x \notin A \cap B\}$



Определение. Дополнением множества A (до универсального множества) называется множество всех тех элементов из U, которые не принадлежат данному множеству A. $\overline{A} = U \setminus A$, где U – универсальное множество.

Приоритет операций в алгебре множеств следующий:

1. $\overline{A}$ 2. $A \cap B$ 3. $A \cup B$ 4. $A \backslash B$

Пример 1.3. Для заданных множеств $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $C = \{3, 4, 9\}$ проверим правильность следующих утверждений:

a) $A \setminus B \subset A \cap C$

b) $A \div C \subset B \div C$

c) $A \cup C \subseteq B \setminus C$

d) $A \cap B \subseteq A \setminus C$

e) $C \setminus A \subseteq A \cup B$

f) $A \div B \subset B \cup C$

Решение: значения операций в приведенных утверждениях представим списками и сравним их:

a) $A \setminus B \subset A \cap C$ ложно, так как $A \setminus B = \{4\}$ и $A \cap C = \{4\}$

b) $A \div C \subset B \div C$ ложно, так как $A \div C = \{1,2,3,9\}$ и $B \div C = \{1,2,4,5,6,9\}$

c) $A \cup C \subseteq B \setminus C$ ложно, так как $A \cup C = \{1,2,3,4,9\}$ и $B \setminus C = \{1,2,5,6\}$

d) $A \cap B \subseteq A \setminus C$ истинно, так как $A \cap B = \{1,2\}$ и $A \setminus C = \{1,2\}$

e) $C \setminus A \subseteq A \cup B$ ложно, так как $C \setminus A = \{3,9\}$ и $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

f) $A \div B \subset B \cup C$ истинно, так как $A \div B = \{3,4,5,6\}$ и $B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,9\}$

Свойства операций пересечения, объединения и дополнения над множествами:

1. Коммутативные законы:

$A \bigcup B = B \bigcup A$

$A \bigcap B = B \bigcap A$

$A \div B = B \div A$

2. Ассоциативные законы

$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$

$A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$

$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$

3. Дистрибутивные законы:

$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

$A \bigcap (B \div C) = (A \bigcap B) \div (A \bigcap C)$

$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$

4. Законы идемпотентности

$A \bigcup A = A$

$A \bigcap A = A$

5. Свойства пустого и универсального множеств:

$A \bigcup \varnothing = A$

$A \div \varnothing = A$

$A \div A = \varnothing$

$A \bigcup U = U$

$A \bigcap \varnothing = \varnothing$

$A \bigcap U = A$

6. Закон инволюции (двойного отрицания): $\overline{\overline{A}} = A$

7. Закон противоречия:

   $A \cap \overline{A} = \varnothing$

8. Закон исключенного третьего:

   $A \cup \overline{A} = U$

9. Законы де Моргана.

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

10. Законы элиминации (поглощения)

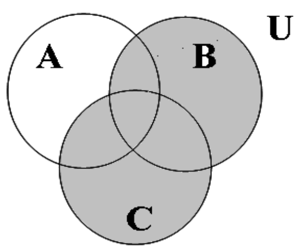
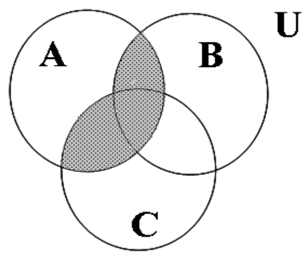
   $A \cup (A \cap B) = A$

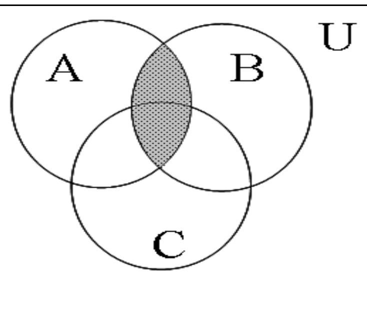
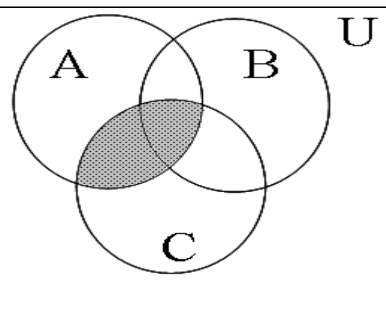
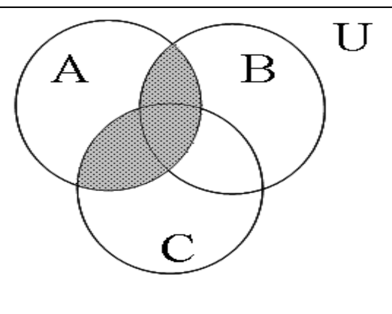
   $A \cap (A \cup B) = B$

Один из основных типов примеров данного раздела – «доказать равенство множеств, заданных формулами алгебры множеств». Решение таких примеров следует начинать с построения диаграмм Венна для левой и правой части. Если картинки не совпали, то вы уже решили пример и доказали, что равенство не имеет места. В противном случае вам рекомендуется перейти к формулам алгебры предикатов, определяющим эти множества, и определить, равносильны ли они, или воспользоваться основными свойствами операций над множествами.

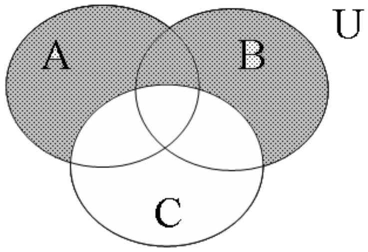
Пример 1.4. Проверить с помощью диаграмм Венна дистрибутивный закон.

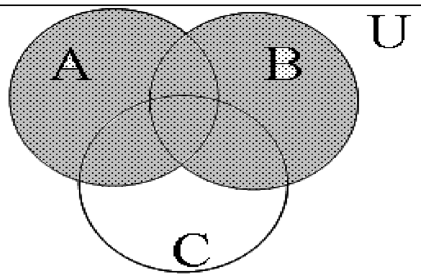
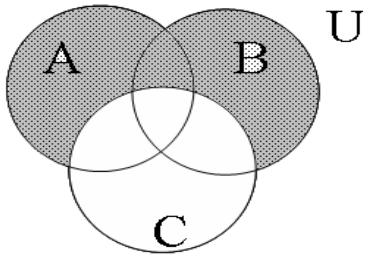
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
	

$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
		

Пример 1.5. Записать формулу, соответствующую заштрихованной части диаграммы Венна



$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus C$
	

В результате получили формулу $(A \cup B) \setminus C$.

Пример 1.6. Выполнить операции над множествами, заданными формулой: $\overline{M \div \mathrm{U}}$, где M – произвольное множество, U – универсум.

Решение. Вначале выражаем симметрическую разность через объединение двух разностей: $A \div \mathrm{U} = (M \setminus \mathrm{U}) \cup (\mathrm{U} \setminus M)$.

Анализируем содержимое первой круглой скобки: если из произвольного множества *M* вычесть универсум *U*, то очевидно, что останется $\varnothing$.

Если из универсума *U* вычесть произвольное множество *M*, то будет получено дополнение $\overline{M}$. Выполняя дополнение дополнения, получим $\overline{\overline{M}} = M$.

$$\overline{A \div U} = \overline{(M \setminus U) \cup (U \setminus M)} = \overline{\varnothing \cup \overline{M}} = \overline{\overline{M}} = M .$$

Пример 1.7. Упростить выражение

$$\overline{(\overline{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} = = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} =$$
$$= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A \cap \overline{B} \cap (B \cup \overline{C}) = = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap (B \cup \overline{C}) = = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

Пример 1.8. Доказать, что $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Решение:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Пример 1.9. Доказать, что $A\bigcap\left(\bigcup\limits_{i\in\chi}B_i\right)=\bigcup\limits_{i\in\chi}(A\cap B_i)$.

Доказательство:

$$x\in A\cap\left(\bigcup_{i\in\chi}B_i\right)\equiv(x\in A)\wedge\left(x\in\bigcup_{i\in\chi}B_i\right)\equiv$$
$$\equiv(x\in A)\wedge(\exists i(x\in B_i))\equiv\exists i((x\in A)\wedge(x\in B_i))\equiv\exists i(x\in(A\cap B_i))\equiv x\in\bigcup_{i\in\chi}(A\cap B_i).$$

Множество всех подмножеств множества *X* назовем **булеаном** или **множеством-степенью** *X* и обозначим *B(X)*.

Для произвольного множества *X* из *n* элементов его булеан содержит 2^n элементов: $|B(X)|=\left|2^X\right|=2^{|X|}=2^n$.

Пример 1.10. Дано множество $A=\{a, b, c\}$.

Тогда $2^{|A|}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$.

Пустое множество имеет только одно подмножество – само пустое множество, поэтому $B(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

Основной характеристикой конечных множеств является число его элементов. Теория конечных множеств изучает правила: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых с помощью операций над множествами.

Основная формула, которой пользуются при нахождении числа элементов суммы двух множеств, называется ***формулой «включения-исключения»***: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Действительно, $|A|+|B|$ есть число которое мы получим, перечислив все элементы множества A, а затем все элементы множества B. Но в этом случае общие элементы (их число $|A\cap B|$) будут перечислены дважды, т.е. $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$. Отсюда и следует основная формула суммы элементов двух множеств.

С помощью этой формулы можем получить формулу для числа элементов суммы любого числа множеств. Например, для трех множеств имеем $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$.

Установим теперь общую формулу для нахождения числа элементов суммы $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|$ подмножеств множества A, где A – множество всех m предметов, а A_i – подмножество всех тех предметов, каждый из которых обладает i- м свойством.

Теорема. $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - \ldots - |A_{n-1}\cap A_n| + |A_1\cap A_2\cap A_3| + \ldots + |A_{n-2}\cup A_{n-1}\cap A_n| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_n|$ (1).

<u>*Замечание.*</u> Правая часть этого равенства является суммой n слагаемых, k-е слагаемое имеет вид $(-1)^{k-1}S_k(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$, где $S_k(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$ – есть сумма чисел $N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})$ по всем возможным пересечениям ровно k разных множеств из множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$. Если мы пересекаем нечетное количество множеств, то мощность этого пересечения берется со знаком «плюс», а если четное, то со знаком «минус», причем учитываются всевозможные пересечения заданных n множеств.

При выводе формулы (1) подсчитывают для каждого элемента, сколько раз он включается и сколько раз он исключается, поэтому ее называют *формулой включений и исключений*. С помощью формулы включений и исключений можно решать задачи.

Пример 1.11. Каждый ученик класса – либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика-блондина, математику из них 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

Решение. Если A – множество девочек, B – множество блондинов, C – учеников, которые любят математику, то $|A\cup B\cup C|$ – искомое число. $A\cap B$ – множество блондинок, $A\cap C$ – множество девочек, которые любят математику,

$B \cap C$ – множество всех блондинов (мальчиков и девочек), которые любят математику, $A \cap B \cap C$ – множество блондинок, которые любят математику.

Тогда $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$ $=20+24+17-(12+6+12)+1=32$.

Пример 1.12. В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 – немецкий язык, 20 – французский язык, 23 знают английский и немецкий, 12 – английский и французский, 11 – немецкий и французский, 5 – все три языка. Сколько человек в институте не знают ни одного языка?

Решение. Применим формулу (1): 67-47-20-35+23+12+11-5=46-40=6.

Итак, сначала из общего числа сотрудников вычитают число тех, кто знает один из языков (и может быть другие). При этом некоторые оказываются «вычтенными» дважды, поскольку знают два языка, поэтому прибавляют числа 23, 12, 11, показывающие, сколько человек владеют двумя языками (и может быть еще и третьим). Но лица, владеющие тремя языками, оказываются сначала трижды «вычтенными», а потом трижды «прибавленными». Так как их надо все-таки вычесть, то приходится еще отнять число 5.■

Пример 1.13. Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C соответственно. Система формирует запросы, представленные в таблице:

Множество	**Запрос**
A	(A=«monitor») и (C=2003)
B	(A=«monitor») и (C=2010)
C	(A=«monitor») и (C=2012)
D	(A=«printer») и (C=2003)
E	(A=«printer») и (C=2010)
F	(A=«printer») и (C=2010)

На момент проведения анализа в таблице базы данных было 38 записей. Поле «Оборудование» содержало только два типа значений: «printer» и «monitor», а поле «Год выпуска» – три типа значений: 2003, 2010, 2012. Запросу (A=«monitor») или (C=2003), удовлетворяло 23 записи. Найдем количество записей таблицы, отвечающих запросу (A=«printer») и (C≠2003).

Решение. Запросу (A=«printer») и (C≠2003) удовлетворяет множество записей $X = E \cup F$ мощностью $|X| = |E| + |F|$, следовательно в задаче требуется найти мощность множества X. Запросу (A=«monitor») или (C=2003), удовлетворяет множество записей, равное объединению множеств $P = A \cup B \cup C$ и $Q = A \cap D$. Мощность объединения этих множеств равна:

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q| = |A| + |B| + |C| + |A| + |D| - |A| = |A| + |B| + |C| + |D| = 23.$$

Мощность всех записей в базе данных равна $|A| + |B| + |C| + |D| + |E| + |F| = 38$.

Учитывая, что $|X| = |E| + |F|$ и $|A| + |B| + |C| + |D| = 23$, получаем $23 + |X| = 38$, отсюда $|X| = 15$.

Ответ: В таблице 15 записей, отвечающих запросу (A=«printer») и (C≠2003).

Пример 1.14. Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C соответственно.

На момент проведения анализа в таблице поле «Оборудование» содержало только два типа значений: «printer» и «monitor», а поле «Год выпуска» – три типа значений: 2003, 2010, 2012. Количество записей N, удовлетворяющих различным запросам системы, приведено в таблице:

Запрос	**N**
(A≠«printer») или (C≠2012)	37
(C≠2010) и (C≠2003)	11
Неверно, что ((A=«monitor») и (C=2012))	34

Нужно найти общее количество записей в таблице «Оборудование».

Решение:

Двумя полями и возможными их значениями множество записей в базе данных разбивается на шесть непересекающихся подмножеств: A, B, C, D, E, F. Запросы, удовлетворяющие этим множествам, представлены в таблице:

Множество	**Запрос**
A	(A=«monitor») и (C=2003)
B	(A=«monitor») и (C=2010)
C	(A=«monitor») и (C=2012)
D	(A=«printer») и (C=2003)
E	(A=«printer») и (C=2010)
F	(A=«printer») и (C=2010)

Запросу (A≠«printer») или (C≠2012) удовлетворяет множество записей, равное объединению множеств $P = A \cup B \cup C$ и $Q = A \cup B \cup D \cup E$, отвечающих запросам (A≠«printer») и (C≠2012) соответственно. Мощность объединения этих множеств равна:

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q| = |A| + |B| + |C| + |A| + |B| + |D| + |E| - (|A| + |B|) =$$

$$= |A| + |B| + |C| + |D| + |E| = 37$$

Запросу (C≠2010) и (C≠2003) удовлетворяет множество записей $C \cup F$, мощность которого равна $|C| + |F| = 11$.

Запросу «неверно, что ((A=«monitor») и (C=2012))» удовлетворяет множество записей $A \cup B \cup D \cup E \cup F$, мощность которого равна $= |A| + |B| + |D| + |E| + |F| = 34$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} |A| + |B| + |C| + |D| + |E| = 37 \\ |C| + |F| = 11 \\ |A| + |B| + |D| + |E| + |F| = 34 \end{cases}$$

В задаче требуется найти количество всех записей в таблице, т.е. $|A| + |B| + |C| + |D| + |E| + |F|$. Суммируя правые и левые части уравнений системы, получим $|A|+|B|+|C|+|D|+|E|+|C|+|F|+|A|+|B|+|D|+|E|+|F|=37+11+34$

$2\cdot(|A|+|B|+|C|+|D|+|E|+|F|)=82$

Ответ: $|A|+|B|+|C|+|D|+|E|+|F|=41$

Задачи.

1. Сколько элементов в каждом из множеств:
   1) $\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$
   2) $\{\{1,2,3\},1,2,3\}$
   3) $\{1,\{1,2,3\},1,2,3\}$
   4) $\{1,\{1\},2,\{1,2,3\},1,2,3\}$
   5) $\{1,\{1\},2,\{1,\{2,3\}\},\varnothing\}$
   6) $\varnothing$
   7) $\{\varnothing\}$
   8) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
   9) $\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
2. Какие из следующих утверждений верны:
   1) $\{1,2\}\in\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$
   2) $b\subset\{a,b\}$
   3) $b\in\{a,b\}$
   4) $\{b\}\subset\{a,b\}$
   5) $\{b\}\in\{a,b\}$
   6) $\{b\}\subset\{a,\{b\}\}$
   7) $\{b\}\in\{a,\{b\}\}$
   8) $b\subset\{a,\{b\}\}$
   9) $b\in\{a,\{b\}\}$
   10) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
   11) $\varnothing\in\{\varnothing\}$
   12) $\varnothing\subseteq\varnothing$
   13) $\varnothing\in\varnothing$
3. Известно, что $A\subseteq B$ и $a\in A$. Какие из следующих утверждений верны:
   1) $a\notin B$
   2) $a\in B$
   3) $A\in B$
   4) $a\in A\cup B$
   5) $a\in A\cap B$
   6) $a\in A\setminus B$
   7) $a\in A\div B$
   8) $a\subseteq A$
   9) $\{a\}\subseteq A$

4. Известно, что $\{a\} \subseteq B$. Является ли число 2 элементом множеств:

$A = \{1,3,5,6\}, B = \{-3,0,1,2,4\},\ C = \{x | x^2 = 4x - 4\}$

5. Перечислите все элементы следующих множеств:

1) $\{x \in R | x^2 - 3x + 2 = 0\}$; 2) $\{x \in R | x^2 + 1 = 0\}$;

3) множество всех двузначных натуральных чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 10.

6. Перечислить все элементы множества: а) $\{x | x \subseteq \{1\}\}$; б) $\{x | x \subseteq \{1,2,3\}\}$.
7. Перечислите все подмножества множества $\{\{1,2\},\{3\},1\}$, $\{\{1\},\{2\},1,2\}$.
8. Докажите, что $\{\{1,2\},\{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$.
9. Проверьте, что A и 2^A имеют общий элемент, если $A = \{1,2,\{1,2\}\}$.
10. Пусть $A = \{1,4,5\}$, $B = \{2,4,6\}$. Найдите $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \div B,\ 2^A$.
11. Соедините знаком включения следующие пары множеств:

1) $A = \{x \in R | \quad \lg x = 2 - \lg 5\}$, $B = \{20,30\}$;

2) $A = \{x \in R |\ x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $B = \{x \in R |\ x^3 - 7x^2 + 12x = 0\}$.

12. Пусть U – множество сотрудников некоторой фирмы. A – множество всех сотрудников старше 35 лет. B – множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет, C – множество менеджеров фирмы каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

   а) $\overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $A \cup B \cap \overline{C}$; г) $B \setminus C$; д) $C \setminus B$.

13. В результате поиска в Интернете выданы адреса Web-страниц www.cont1, www.cont2, www.cont3, www.st1, www.st2, www.st3, www.inf.ru, www.inf.au, содержащих комбинацию ключевых слов «electronic_libraries». Известно, что страницы с адресами www.cont1, www.cont3, www.st1, www.st2, www.inf.au содержат информацию о книгах по техническим наукам, страницы www.st1, www.st2, www.st3, www.inf.ru, www.inf.au – сведения о периодических изданиях, адрес www.inf.au

указывает на страницу с информацией об электронных библиотеках Австралии. Используя операции над множествами, найти множество всех адресов, указывающих на страницы, содержащие информацию о периодических изданиях по техническим наукам, исключая издания в Австралии.

14. Докажите следующие утверждения для произвольных множеств A, B, C:

а) Если $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, то $A\subseteq C$

б) Если $A\subseteq B$ и $B\subset C$, то $A\subset C$

г) Если $A\subset B$ и $B\subseteq C$, то $A\subset C$

д) Если $A\subset B$ и $B\subset C$, то $A\subset C$

15. Приведите пример множеств A, B, C, Д, E, удовлетворяющих одновременно следующим условиям: $A\subset B$, $B\in C$, $C\subset Д$, $Д\subset E$.

16. Приведите пример множеств A, B, C таких, что

1) $A\in B, B\notin C, A\subseteq C$

2) $A\in B, A\notin C, C\subseteq B$

3) $A\subseteq B, B\in C, A\notin C$

17. Какие из следующих утверждений верны для всех множеств A, B, C:

1) Если $A\notin B$ и $B\notin C$, то $A\notin C$.

2) Если $A\neq B$ и $B\neq C$, то $A\neq C$.

3) Если $A\in B$ и не верно, что $B\subseteq C$, то $A\notin C$.

18. Доказать, что $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \setminus B = \varnothing$.

19. Доказать, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \div B = \varnothing$.

20. Доказать, что $2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$, где 2^A – множество всех подмножеств множества A.

21. Обследование 100 студентов дало следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский 28; немецкий 30; французский 42; испанский и немецкий 8; испанский и французский 10; немецкий и французский 5; все три языка 3.

a) Сколько студентов не изучает ни одного языка?

b) Сколько студентов изучает один французский язык?

c) Сколько студентов изучает немецкий язык в том и только том случае, если они изучают французский язык?

Указание. Нарисуйте диаграмму Венна в виде трех кругов, обозначающих множества студентов, изучающих соответственно французский, немецкий и испанский языки. В каждую из восьми областей впишите данные, используя приведенные цифры.

22. Из 100 опрошенных студентов 50 программируют на алгоритмическом языке Си++, 53 – на Паскале, 42 – на Бейсике, 15 студентов могут программировать на Си++ и на Бейсике, 20 студентов – на Паскале и на Бейсике, 25 – на Си++ и Паскале, а 5 студентов программируют на всех трех языках.
    1) Сколько студентов не могут программировать ни на одном языке из перечисленных языков?
    2) Сколько студентов программируют хотя бы на одном языке из перечисленных языков?
    3) Сколько студентов программируют на Паскале?
    4) Сколько студентов не программируют ни на Си++, ни на Паскале?
23. В отчете об обследовании 100 студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих различные языки, таково; все три языка 5; немецкий и испанский 10; французский и испанский 8; немецкий и французский 20; испанский 30; немецкий 23; французский 50. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?
24. База данных содержит сведения о результатах сдачи экзаменов по математике, информатике и программированию. В таблице приведено количество записей, найденных по следующим запросам:

Запрос	Количество найденных записей
Студенты, сдавшие на «5» математику и информатику	18

Студенты, сдавшие на «5» математику и программирование	15
Студенты, сдавшие на «5» информатику и программирование	12

Сколько студентов сдали все три дисциплины на отлично, если запрос на объединение результатов трех запросов возвращает 37 записей?

25. В таблице показана реакция некоторого числа зрителей на одну телевизионную передачу. Все, фигурирующие в таблице категории, можно выразить в терминах следующих четырех множеств:

	Очень понравилось	Понравилось, но не очень	Не понравилось, но не очень	Очень не понравилось
Мужчины	14	3	5	10
Женщины	6	8	3	1
Мальчики	5	5	3	2
Девочки	8	5	1	1

Сколько человек попадает в каждую из следующих категорий:

(a) М;

(b) $\overline{\Pi}$;

(c) О;

(d) $\text{М} \cap \overline{\text{В}} \cap \overline{\Pi} \cap \text{О}$;

(e) $\overline{\text{М}} \cap \text{В} \cap \Pi$;

(f) $\underline{(\overline{\text{М}} \cap \text{В})} \cup (\Pi \cap 0)$;

(g) $(\text{М} \cap \text{В})$;

(h) $(\overline{\text{М}} \cap \overline{\text{В}})$;

(i) $(\text{М} \setminus \text{В})$;

(j) $[\overline{\text{М}} \setminus (\text{В} \cap \Pi \cap \overline{\text{О}})]$.

26. Пользуясь свойствами операций над множествами доказать равенства:

1) $(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{A}) = A \cap B \cap X$

2) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = U$

27. Каждое из следующих утверждений либо докажите, либо покажите при помощи диаграмм Эйлера, что оно не всегда верно:

а) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

б) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

28. Доказать равенства:

1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; 5) $A \div B = B \div A$;

2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; 6) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$;

3) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; 7) $A \div (A \div B) = B$;

4) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (C \setminus C)$; 8) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

29. Даны множества:

$SN = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}\}$ – множество студентов первого курса вуза N;

$SM = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}\}$ – множество студентов первого курса вуза M;

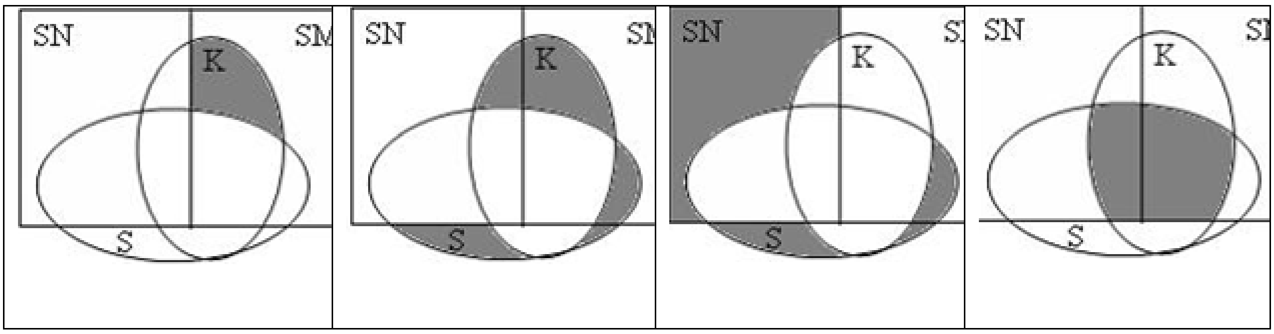
$S = \{n_1, n_2, n_5, n_7, n_8, n_{10}, n_{12}, m_2, m_3, m_4, m_5, m_7, m_8, m_{10}, k_1, k_2, k_3, k_4\}$ – множество выпускников средней школы прошлого учебного года; $K = \{n_1, n_3, n_4, n_5, n_7, n_8, n_{11}, n_{12}, m_2, m_4, m_6, m_7, m_8, m_8, m_9, m_{10}, k_2, k_3\}$ – множество первокурсников – участников студенческих конференций.

a) Найдите количество участников конференций первокурсников от вуза M, окончивших среднюю школу в прошлом учебном году.

b) Установите соответствие между множествами, заданными перечислением и соответствующими им диаграммами Эйлера-Венна:

1) $\{n_1, n_5, n_7, n_8, n_{12}, m_2, m_4, m_7, m_8, m_{10}\}$; 2) $\{m_6, m_9\}$

3) $\{n_6, n_9, m_3, m_5, k_1, k_4\}$



1.2. Отношения и их свойства.

Отношения между элементами множеств имеют основополагающее значение в теории множеств, а также в теории систем. Понятие «отношение» объединяет такие понятия как «соответствие», «отображение», «функция».

Определение. Упорядоченным считается такое множество, в котором важен порядок следования элементов. Неформально, множество частично упорядочено, если указано, какие элементы следуют за какими (какие элементы больше каких). Например, упорядоченным является множество, в котором каждый элемент имеет свой порядковый номер.

Определение. Пара элементов (x, y), взятых в определенном порядке, называется ***упорядоченной парой***.

Определение. Кортеж – это совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место. Например, множество людей, стоящих в очереди, множество слов в предложении, множество букв в слове, и т.п. *Длиной кортежа* называется число элементов в кортеже. Кортежи обычно обозначают последовательностью в круглых скобках (или в угловых скобках) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Декартовым (*прямым*) ***произведением*** множеств $A \times B$ называется множество всех упорядоченных пар (всех кортежей), в которых первый элемент принадлежит множеству A, а второй элемент принадлежит множеству B.

Теорема. Мощность произведения двух конечных множеств равна произведению их мощностей: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство прямо следует из определения операции умножения целых чисел.

Пример 1.15. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$, $\overline{A} = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\overline{B} = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9\}$,

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}; \; |A \times B| = 9.$$

Произведение трех или более множеств можно определить аналогично, как множество, элементами которого являются соответственно тройки или совокупности из n объектов: $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n\}.$$

В том случае, когда каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ совпадает с множеством A, то пишут A^{n} для обозначения прямого произведения n экземпляров A.

Пример 1.16. Пусть $B = \{0,1\}$. Тогда множество B^{n} состоит из последовательностей нулей и единиц длины n. Они называются *строкой бит* или *битовой строкой*. Строка бит применяется для моделирования операций на конечных множествах.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Если $A \subseteq S$. То поставим ему в соответствие n-битную строку $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_i = 1$, если $s_i \in A$ и $b_i = 0$ в противном случае. Тогда строка бит называется ***характеристическим вектором*** подмножества A. Можно имитировать операции на множествах логическими операциями, применяемыми к соответствующим характеристическим векторам.

Пример 1.17. Пусть $S = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$ и $B = \{3,4\}$. Тогда характеристическим вектором множества A является $a = (1,0,1,0,1)$, а характеристическим вектором множества B является $b = (0,0,1,1,0)$. Значит,

$a \;\; \textit{или} \;\; b = (1,0,1,0,1) \;\; \textit{или} \;\; (0,0,1,1,0) = (1,0,1,1,1)$, тогда $A \cup B = \{1,3,4,5\}$

$a \;\; \textit{и} \;\; b = (1,0,1,0,1) \;\; \textit{и} \;\; (0,0,1,1,0) = (0,0,1,0,0)$, тогда $A \cap B = \{3\}$

$\textit{не}\, b = \textit{не}\, (0,0,1,1,0) = (1,1,0,0,1)$, тогда $\overline{B} = \{1,2,5\}$

Определение. ***Отношение*** есть взаимная формальная связь различных величин, предметов, действий, то есть элементов некоторого множества.

Для того, чтобы задать отношение, необходимо указать, между какими объектами оно выполняется. Отношения можно устанавливать между объектами разных множеств и не только для пар объектов, но и для троек, четверок и т.д.

Бинарные *(двухместные)* ***отношения*** используются для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве M (например, на множестве людей могут быть заданы следующие бинарные отношения: «жить в одном городе», «работать в одной организации», «быть моложе», «быть однокурсниками» и т.п.).

Определение. Бинарным отношением называется любое подмножество прямого произведения множеств $\rho \subseteq A \times B$, при этом множество A называется областью определения, а множество B называется областью значений.

Если $\rho \subseteq M \times M$, то говорят, что отношение ρ определено на множестве M. Если пара (x, y) входит в ρ, т.е. $(x, y) \in \rho$, то пишут $x\rho y$, что читается «x находится в отношении ρ с y».

Обозначим через Δ отношение, содержащее пары вида (a, a) для всех $a \in A$. Будем называть такое отношение тождественным. Отношение, содержащее всевозможные упорядоченные пары элементов из A, будем называть универсальным и обозначать через $A \times A$. И, наконец, через $\varnothing$ будем обозначать пустое отношение (отношение, не содержащее никакие пары).

Способы задания бинарных отношений.

1. *Характеристическим свойством*;
2. *Перечислением пар*, для которых это отношение выполняется;
3. *Матрицей* (ρ_{ij}), где $\rho_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i, b_j) \in \rho \\ 0, (a_i, b_j) \notin \rho \end{cases}$ (элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, если элемент a_i находится в данном отношении ρ с элементом b_j);
4. *Графом,* где точками (вершинами) задаются элементы множества, ребрами (линиями, соединяющими эти вершины) – отношение между элементами;
5. *Графиком* (для этого изображают все пары элементов, находящихся в соответствии ρ, точками на координатной плоскости. Получившаяся при этом фигура и будет графиком отношения ρ).

Пример 1.18. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $У = \{1, 2\}$. Бинарное отношение $\rho \subseteq X \times У$ определим следующим образом: $\rho = \{(1,1), (3,2)\}$.

Этому отношению можно придавать самый различный смысл.

Например, объявить элементы множества ρ как концы некоторой дуги. В этом случае $x\rho y$ означает: «элементы x и y находятся в отношении друг к другу, как координаты одного из концов некоторой дуги».

В отношения могут вступать объекты любой природы. Например, значениями множества X можно закодировать названия книжных издательств, а элементами множества $У$ – все фирмы некоторого региона, которые занимаются реализацией этих книг. Тогда отношению ρ можно придать смысл множества заключенных договоров между издательствами и торгующими фирмами.

Пример 1.19. На множестве М натуральных чисел от 1 до 5 построим бинарное отношение R={(a,b)|mod(a,b)=0}.

Решение. На множестве натуральных чисел *M* строим такие пары *(a, b)*, что, *a* делится на *b* без остатка (mod(a,b)=0). Получаем *R={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (4,2)}.*

Граф и матрица данного бинарного отношения:

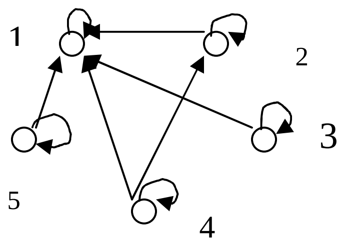


Рис.1.1. Граф бинарного отношения.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1

Пример 1.20. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда отношение $\rho \subseteq M \times M$, если отношение означает «быть строго больше», можно задать:

1. Характеристическим свойством: $\rho = \{(a, в) | a, в \in M ; a > в\}$.
2. Перечислением $\rho = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2),$ $(4,3), (5,3), (6,3), (5,4), (6,4), (5,6)\}$.

3. Матрицей

ρ	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	1	0

4. Графом

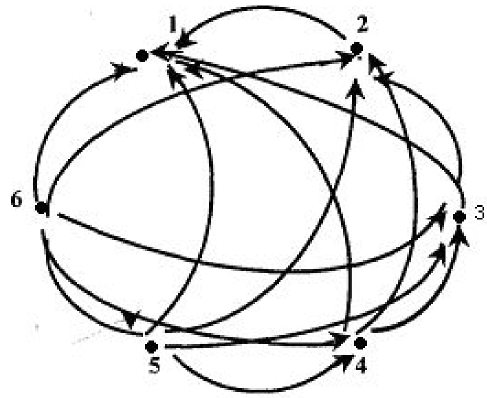


Рис. 1.2. Граф отношения

5. График указанного отношения:

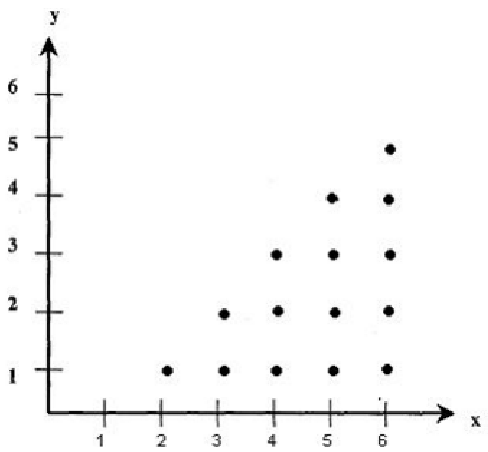


Рис.1.3. График отношения

Пример 1.21. Пусть некоторая программа читает два числа из множества M={1,2,3,4,5}, обозначаемых x и y, и, если $x< y$, печатает число z (также из M) такое, что $x\le z<y$. В любом случае программа останавливается после считывания всех чисел на множестве M.

Построим описанное отношение R={((x,y),z): $x<y$, $x\le z<y$} (перечислим его элементы).

R={((1,2),1); ((1,3),1); ((1,3),2); ((1,4),1); ((1,4),2); ((1,4),3); ((1,5),1); ((1,5),2); ((1,5),3); ((1,5),4); ((2,3),2); ((2,4),2); ((2,4),3); ((2,5),2); ((2,5),3); ((2,5),4); ((3,4),3); ((3,5),3); ((3,5),4); ((4,5),4)}. Всего 20 элементов.

Укажем область определения и область значений отношений.

Область определения: $D(R)$={(1,2), (1,3); (1,4), (1,5); (2,3), (2,4); (2,5), (3,4); (3,5), (4,5)}. Всего 10 элементов.

Область значений: $E(R)=\{1, 2, 3,4\}$. Всего 4 элемента.

Свойства бинарных отношений.

Пусть ρ – бинарное отношение на множестве M. Определим общие свойства таких отношений, которые должны выполняться для всех $(a_i, a_j) \in \rho$.

Определение. Бинарное отношение ρ на множестве M называется ***рефлексивным***, если о любом элементе множества M можно сказать, что он находится в отношении ρ с самим собой: ρ рефлексивно на M тогда и только тогда, когда $x\rho x$ для любого $\forall x \in M$.

Данное определение можно записать короче: $\Delta \in \rho$,

Примерами рефлексивных отношений являются «равенство», «одновременность», «сходство», «быть похожим на», «иметь общий признак с».

Рефлексивные отношения всегда представляются матрицей, у которой на главной диагонали стоят единицы. В графе, изображающем рефлексивное отношение, каждая вершина имеет петлю.

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности не обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности: нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе.

Определение. Бинарное отношение ρ на множестве М называется ***антирефлексивным***, если ни для какого элемента из множества М не выполняется $x\rho x$, т.е. $\Delta \cap \rho = \varnothing$ или ρ – антирефлексивно на М тогда и только тогда, когда $x\overline{\rho}x$ для всех $x \in M$.

Матрица, представляющая антирефлексивное отношение, имеет на главной диагонали нули, а в соответствующем графе отсутствуют петли.

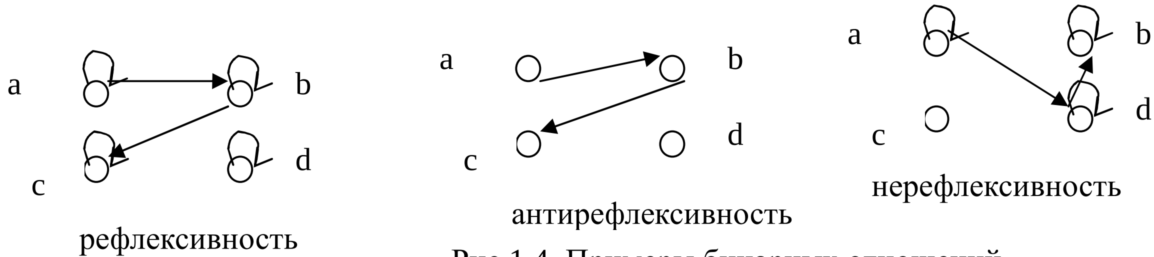


Рис.1.4. Примеры бинарных отношений

На рисунке 1.4 приведены примеры рефлексивных, антирефлексивных и нерефлексивных бинарных отношений на множестве *M={a,b,c,d}*.

Примерами нерефлексивных отношений являются: «быть сыном», «нервировать», «быть начальником».

Особенность графов отношений параллельности, перпендикулярности и равенства заключается в том, что если есть одна стрелка, соединяющая пару элементов, то обязательно есть и другая, соединяющая те же элементы, но идущая в противоположном направлении. Эти стрелки говорят о том, что:

1) если первый отрезок параллелен второму отрезку, то и второй отрезок параллелен первому; 2) если первый отрезок перпендикулярен второму, то и второй отрезок перпендикулярен первому; 3) если первый отрезок равен второму отрезку, то и второй отрезок равен первому.

Про отношения параллельности, перпендикулярности и равенства говорят, что они обладают свойством симметричности или, просто, симметричны.

Определение. Бинарное отношение ρ на множестве *M* называется ***симметричным***, если из того, что элемент *x* находится в отношении ρ с элементом *y*, следует, что и элемент *y* находится в отношении ρ с элементом *x*, т.е. ρ симметрично на *M* тогда и только тогда, когда для любых $\forall x, y \in M$ если $x\rho y$, то и $y\rho x$.

Примерами симметричных отношений являются равенство (=), неравенство (≠), подобие, одновременность, некоторые отношения родства (например, отношение братства).

В матрице, представляющей симметричное отношение, элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны между собой $a_{ij} = a_{ji}$. В соответствующем графе вместе с каждой стрелкой, идущей из вершины a_i в вершину a_j, существует и противоположно направленная стрелка.

Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» для отрезков.

Определение. Бинарное отношение ρ на множестве M называется ***антисимметричным***, если оба соотношения $x\rho y$ и $y\rho x$ выполняются одновременно только тогда, когда $x = y$.

Примерами антисимметричных отношений являются: больше, меньше, длиннее, отношение строгого включения $\subset$, нестрогие включения $\subseteq$, $\supseteq$, нестрогие неравенства $\leq$, $\geq$.

В матрице, представляющей антисимметричное отношение, все элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, не равны между собой $a_{ij} \neq a_{ji}$. В графе антисимметричного отношения могут быть петли, но связь между вершинами, если она имеется, отображается только одной направленной дугой, т.е. в соответствующем графе не может быть стрелок, соединяющих две вершины в противоположном направлении.

Встречаются отношения, которые не обладают ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

Пример 1.22. Рассмотрим множество *M={a,b,c,d}*. На рисунке 1.5 приведены примеры симметричных, антисимметиричных и несимметричных бинарных отношений.

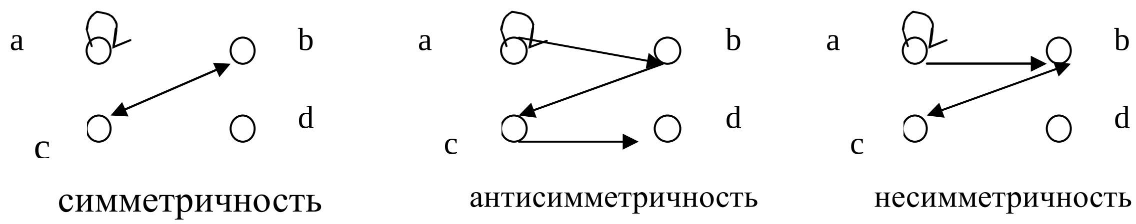


Рис. 1.5. Симметричность бинарных отношений

Определение. Бинарное отношение ρ на множестве M называется ***транзитивным***, если из того, что элемент *x* находится в отношении ρ с элементом *y*, и элемент *y* находится в отношении ρ с элементом *z*, следует, что элемент *x* находится в отношении ρ с элементом *z*, т.е. для любых элементов *x*, *y*, *z*, если $x\rho y$ и $y\rho z$, то $x\rho z$.

Примерами транзитивных отношений являются: «больше», «меньше», «равно», «подобно», «выше», «севернее», «быть начальником».

В матрице транзитивного отношения для каждой пары единичных элементов, один из которых расположен в i-м столбце и j-й строке, а другой в j-м столбце и k-й строке, обязательно существует единичный элемент, расположенный в клетке на пересечении i-го столбца и k-й строки (наличие единичных элементов на главной диагонали не нарушает транзитивности).

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и от y к z, содержит и стрелку, идущую от x к z.

Пример 1.23. При исследовании учебного плана и построении структурно-логической схемы выделена цепочка учебных дисциплин: философия (d_1), математика (d_2), физика (d_3), теория информации (d_4) и надежность и эксплуатация АСУ (d_5). Обозначим это множество соответственно $\{d_i\} = D,\ i = \overline{1,5}$. Зададим между элементами этого множества отношение «обеспечивать знаниями». Тогда граф транзитивного отношения имеет следующий вид (рис. 1.6).

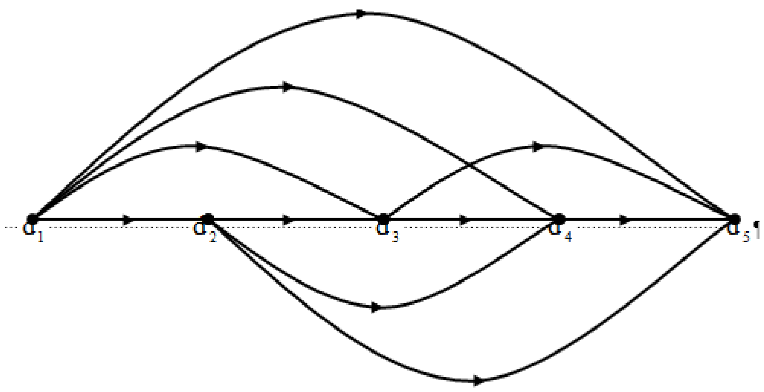


Рис. 1.6. Граф транзитивного отношения.

Обратим внимание на особенность графов транзитивных отношений: если стрелка идет от первого элемента ко второму и от второго – к третьему, то обязательно есть стрелка, идущая от первого элемента к третьему.

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают, например, отношение перпендикулярности отрезков, отношение дружбы.

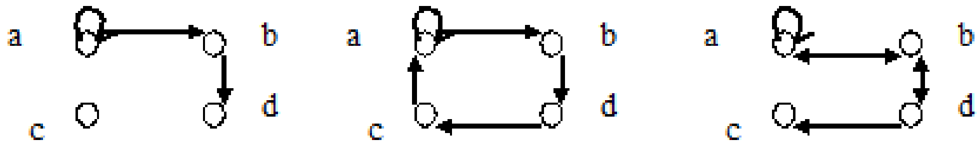


Рис. 1.7. Нетранзитивные отношения.

При графическом представлении нетранзитивного бинарного отношения (рис. 1.7) можно увидеть, что ни один имеющийся путь не обладает транзитивным замыканием.

Пример 1.24.

Определим свойства бинарного отношения, заданного на множестве M×M={a, b, c, d, e, f}.

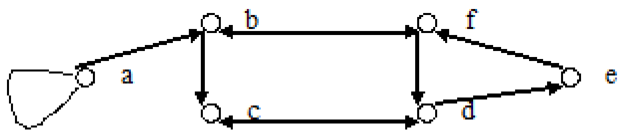


Рис. 1.8.

Решение. Данное бинарное отношение обладает свойствами:

- нерефлексивности (часть вершин имеет петли, часть нет),
- несимметричности (есть симметричные и антисимметричные дуги),
- нетранзитивности (бинарное отношение обладает несколькими путями длины два, но нет транзитивного замыкания).

Определение. Бинарное отношение ρ на множестве *M* *полно*, если для любых двух неравных элементов *x* и *y* из множества *M* пара (x, y) или пара (x, y) принадлежит отношению ρ.

Отношение нестрогого порядка. Отношение нестрогого порядка обладает свойствами рефлективности, транзитивности и антисимметричности. Его принято обозначать символом $\leq$. Запись $x \leq y$ означает, что пара (x, y) принадлежит множеству $\rho \subseteq M \times M$, являющимся отношением порядка в множестве *M*, причем *x* предшествует *y* (или *y* следует за *x*). В принятых обозначениях свойства отношения порядка запишутся следующим образом:

1) $\forall x \; x \leq x$ (рефлексивность);

2) из $x \leq y$ и $y \leq x$ следует $x = y$ (антисимметричность);

3) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзитивность).

Пример 1.25. Пусть X=ß(M) (булеан множества M) и $M \neq \varnothing$. Зададим на X отношение ρ по правилу: $A\rho B \Leftrightarrow A \subset B$. Докажем, что ρ – отношение порядка.

Доказательство:

Рефлексивность: $A \subset A$ выполняется по определению $\subset$.

Антисимметричность: если $A \subset B\, и\, B \subset A$, то $A = B$ – верно про определению равенства множеств.

Транзитивность: если $A \subset B\, и\, B \subset C$, то $A \subset C$ – верно по свойству $\subset$.

Отношение строгого порядка. Отношение, наделенное свойствами антисимметричности, транзитивности и антирефлексивности, называют отношением строгого порядка и обозначают символом <. Свойство антирефлексивности означает, что элемент множества не может сравниваться сам с собой. Отношение строгого порядка характерно для различного рода иерархий с подчинением одного объекта другому.

Пример 1.26. Порядок следования букв в русском алфавите обеспечивает отношение «следует», обладающее свойством антисимметричности и транзитивности.

Отношение линейного порядка. Отношение, наделенное свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности и полноты, называют отношением линейного порядка.

Множество M, на котором определено отношение порядка $\leq$, называется ***упорядоченным*** множеством и обозначается (M, $\leq$). Множество ***линейно*** (*просто, совершенно*) ***упорядочено***, если для любых двух его элементов имеет место, по крайней мере, $x \leq y$ или $y \leq x$, а элементы x и y называются сравнимыми. Линейно упорядоченное множество называют также ***цепью***.

Линейно упорядоченным является множество точек на прямой с отношением «правее», множество целых, рациональных, действительных чисел по отношению «больше» и т.п.

В общем случае может оказаться, что для некоторых пар (x, y) ни одно из соотношений $x \le y$ и $x \le y$ не имеет места (такие элементы называют несравнимыми). Тогда говорят, что множество ***частично упорядочено***. Примерами частичного порядка является отношение «включение», отношение «быть делителем» и др.

Пример 1.27.

Рассмотрим отношение $\rho = \{(x, y) | x, y \in \mathrm{Z}, x - y < 1, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$.

Проверим, будет ли множество $\rho = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$ частично упорядоченным.

Так как $x - x = 0 < 1$ верно для всех *x*, то отношение ρ рефлексивно.

Но $(1,2) \in \rho$ и $(2,1) \notin \rho$, следовательно, отношение ρ несимметрично. Однако, если $x - y < 1$ и $y - x < 1$, то $x = y$, иначе из $x \ne y$ следует $|x - y| \ge 1$. Таким образом, отношение ρ антисимметрично.

Пусть теперь $(x, y) \in \rho$, $(y, \mathrm{z}) \in \rho$, т.е. $x - y < 1$ и $y - \mathrm{z} < 1$. Тогда $x < y$ и $y < \mathrm{z}$ и, следовательно, $x < \mathrm{z}$, т.е. $x - \mathrm{z} < 1$ и $(x, \mathrm{z}) \in \rho$. Отношение ρ транзитивно, тогда множество $\rho = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$ есть частично упорядоченное множество.

Пусть *M* – частично упорядоченное множество. Элемент $a \in M$ называется ***максимальным*** в *M*, если не существует элемента $c \in M$, для которого $a < c$. Элемент $a \in M$ называется ***наибольшим*** (верхней границей) в *M*, если для всякого отличного от *a* элемента $b \in M$ выполнено $b < a$. Симметричным образом определяются минимальный и наименьший элемент. Этих элементов у множества может и не быть, например, линейно упорядоченное множество рациональных чисел $(0,1]$ не имеет наименьшего элемента, наибольший элемент равен 1.

Верхней (нижней) гранью подмножества *B* частично упорядоченного множества *M* называется всякий элемент $a \in M$ такой, что $b \le a$ ($a \le b$) для всех $b \in M$. ***Точной* верхней *(нижней) гранью*** подмножества $B \subseteq M$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для *B*.

Подмножество B называется ограниченным, если оно имеет верхнюю и нижнюю границы.

Верхняя и нижняя границы и грани для подмножества могут и не существовать.

Частично упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если всякое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Всякое вполне упорядоченное множество является линейно упорядоченным (обратное неверно).

Пример 1.28. Множество (N, $\leq$) является вполне упорядоченным и значит линейно упорядоченным. Множество (R, $\leq$) является линейно упорядоченным, но не вполне упорядоченным, так как подмножество (2,4) не имеет наименьшего элемента. Множество (N,/) не является ни вполне упорядоченным, ни линейно упорядоченным.

Отношение доминирования. Отношение, наделенное свойствами антирефлексивности и антисимметричности, называют отношением доминирования.

Отношение толерантности. Отношение толерантности τ на множестве M удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Упорядоченная пара (x, y) принадлежит множеству $\tau \subset M \times M$, если 1) $x\tau x$ и 2) из $x\tau y$ следует $y\tau x$. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и, значит, эквивалентность есть частный случай толерантности. Отношение «быть знакомым с» является отношением толерантности.

Развлекательным примером толерантности является популярная задача «превращение мухи в слона» (муха – мура – тура – тара – кара – каре – кафе – кафр – каюр – каюк – крюк – крок – срок – сток – стон – слон). Здесь отношение толерантности определяется сходством между четырехбуквенными словами, если они отличаются только одной буквой.

Отношение эквивалентности.

Отношение эквивалентности удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и обычно обозначается символом «~». При этом $x \sim y$ обозначает, что упорядоченная пара (x, y) принадлежит множеству $\rho \subseteq M \times M$, являющимся отношением эквивалентности в множестве *M*.

Свойства эквивалентности записывается следующим образом:

1) $x \sim x$ (рефлексивность);

2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность);

3) из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$ (транзитивность).

Отношениями эквивалентности являются, например, отношение параллельности прямых, отношение равенства фигур.

Пример 1.29. На множестве дробей {1/2, 1/3; 1/4; 2/4; 2/6; 3/6} задано отношение равенства. Определим какими свойствами обладает данное отношение.

1. Оно рефлексивно, так как любая дробь равна сама себе.
2. Оно симметрично, так как из того, что дробь *x* равна дроби *y* следует, что и дробь *y* равна дроби *x*.
3. Оно транзитивно, так как из того, что дробь *x* равна дроби *y* и дробь *y* равна дроби *z*, следует, что дробь *x* равна дроби *z*.

Таким образом, отношение равенства дробей рефлексивно, симметрично и транзитивно и, значит, оно является отношением эквивалентности.

Пусть задано непустое конечное множество *A*. Совокупность непустых попарно непересекающихся его подмножеств $A = \{A_j\}$, объединение которых составляет все это множество, называется *разбиением* множества *A* ($\forall i, j \; A_i \cap A_j = \varnothing$ и $\bigcup_i A_i = A$). Признак, по которому производится разбиение, может быть любым. Например, множество студентов можно разбить на подмножества по году рождения, по школе, которую они закончили, по группе, по полу и др. Так, в примере отношения равенства дробей три подмножества: {1/2, 2/4, 3/6}, {1/3, 2/6}, {1/4} не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством *M*, т.е. имеем разбиение множества *M* на попарно непересекающиеся подмножества.

Пример 1.30. Найдем все разбиения множества $A=\{1,2,3,4\}$.

1) $A_1=\{1\},\ A_2=\{2,3,4\}$

2) $A_1=\{2\},\ A_2=\{1,3,4\}$

3) $A_1=\{3\},\ A_2=\{1,2,4\}$

4) $A_1=\{4\},\ A_2=\{1,2,3\}$

5) $A_1=\{1,2\},\ A_2=\{3,4\}$

6) $A_1=\{1,3\},\ A_2=\{2,4\}$

7) $A_1=\{1,4\},\ A_2=\{2,3\}$

8) $A_1=\{1\},\ A_2=\{2\},\ A_3=\{3,4\}$

9) $A_1=\{1\},\ A_2=\{3\},\ A_3=\{2,4\}$

10) $A_1=\{1\},\ A_2=\{4\},\ A_3=\{2,3\}$

11) $A_1=\{2\},\ A_2=\{3\},\ A_3=\{1,4\}$

12) $A_1=\{3\},\ A_2=\{4\},\ A_3=\{1,2\}$

13) $A_1=\{2\},\ A_2=\{4\},\ A_3=\{1,3\}$

14) $A_1=\{1\},\ A_2=\{2\},\ A_3=\{3\},\ A_4=\{4\}$

Если на множестве M дано отношение эквивалентности, то оно разбивает это множество на попарно непересекающиеся подмножества – ***классы эквивалентности***. Множество всех классов отношения эквивалентности ~ называется фактор-множеством и обозначается через $M/\sim$.

Пример 1.31. Если на множестве целых чисел {1, 2, 3, 4, 5} рассмотреть бинарное отношение a*Rb*= «числа *a* и *b* одной четности», то фактор-множество будет состоять из двух классов эквивалентности: A/R={{1, 3, 5}, {2, 4}}.

Если на множестве всех студентов в аудитории рассмотреть бинарное отношение между двумя студентами – «сидеть в одном ряду столов», то фактор-множество будет состоять из трех классов эквивалентности, каждый класс составляют студенты одного ряда.

Если на множестве отрезков задать отношение равенства, то множество отрезков разобьется на классы равных отрезков. Множество треугольников отношением подобия разобьется на классы подобных треугольников.

Верно и обратное утверждение: если какое-либо отношение, заданное на множестве X, определило разбиение этого множества на классы, то это отношение эквивалентности.

Пример 1.32. Рассмотрим на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Оно порождает разбиение множества X на классы: в один попадут все числа, при делении которых на 3 получается в остатке 0 (это числа 3, 6, 9), во второй – числа, при делении которых на 3 в остатке получается 1 (это числа 1, 4, 7, 10), и в третий – все числа, при делении которых на 3 в остатке получается 2 (это числа 2, 5, 8). Действительно, полученные подмножества не пересекаются, и их объединение совпадает с множеством X. Следовательно, отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3», заданное на множестве X, является отношением эквивалентности и ему соответствует следующее фактор-множество $X/\sim=\{\{3,6,9\}, \{1,4,7,10\}, \{2,5,8\}\}$.

Итак, имея отношение эквивалентности на некотором множестве, мы можем разбить это множество на классы. Но можно поступить и наоборот: сначала разбить множество на классы, а затем определить отношение эквивалентности, считая, что два элемента эквивалентны тогда, когда они принадлежат одному классу рассматриваемого разбиения.

В каждом классе эквивалентности оказываются эквивалентные элементы, т.е. элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения. Поэтому считают, что класс эквивалентности (множество) определяется любым (одним) своим представителем, т.е. произвольным элементом этого класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу. Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность отдельных представителей из классов эквивалентности.

Пример 1.33. Пусть на множестве $A=\{a,b,c,d\}$ отношение ρ задано графом:

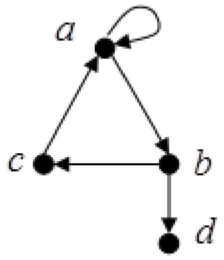


Рис. 1.9.

Обозначим через ρ_0 отношение, полученное из отношения ρ добавлением петель во всех вершинах графа (A,ρ), где петли отсутствуют.

Булева матрица M отношения ρ_0 имеет вид: $M =$

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	1	1	1
c	1	0	1	0
d	0	0	0	1

,

Определим отношение взаимной достижимости $\bar{\rho}$ правилом: две вершины $a,b\in A$ графа находятся в отношении взаимной достижимости $\bar{\rho}$ тогда и только тогда, когда для любой вершины графа её достижимость из a равносильна её достижимости из b. Отношение $\bar{\rho}$ является отношением эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Построим фактор-множество $A/\sim$, где $\sim=\bar{\rho}$. Имеем два класса эквивалентности $\bar{\rho}$: $C_1=\{a,b,\text{c}\}$, $C_2=\{d\}$ и, значит, $A/\sim=\{C_1,C_2\}$.

Пример 1.34. Пусть $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ – множество фирм, выпускающих продукты производственной деятельности. Каждая из них выпускает различные продукты: $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$. Построим декартово произведение $X\times P$, элементы которого (x_i,p_j) означают: p_j – продукт фирмы x_i. Определим на $X\times P$ отношение эквивалентности: элементы (x_i,p_j) и (x_l,p_k) эквиваленты, если выпускается один и тот же продукт, т.е. $p_j=p_k$.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность для введенного отношения очевидно выполняются, значит оно является отношением эквивалентности. Классов эквивалентности столько, сколько различных продуктов выпускается всеми фирмами. Их совокупность представляет фактор-множество. Каждый класс эквивалентности на практике может представлять интерес с точки зрения анализа цен и качества изготовляемой продукции.

Операции над бинарными отношениями.

Пусть отношения заданы на одном и том же множестве *M*. Возьмем два отношения $\rho_1 \subseteq M \times M$ и $\rho_2 \subseteq M \times M$. Так как бинарные отношения являются множествами, то к ним применимы все понятия и операции, которые вводятся для множеств.

Определим несколько понятий относительно отношения $\rho \subseteq M \times M$:

Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(x,y) | (y,x) \in \rho\}$;

Дополнительное отношение $\overline{\rho} = \{(x,y) | (x,y) \notin \rho\}$;

Тождественное отношение $U = \{(x,x) | \; x \in M\}$;

Универсальное отношение $I = \{(x,y) | x \in M \text{ и } \; y \in M\}$.

Пример 1.35. На множестве *M*= {a, b, c, d, e, f} построим тождественное бинарное отношение *U*.

Решение. По определению, на множестве $M = \{a,b,c,d,e,f\}$ можно задать тождественное бинарное отношение *U={(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (d,d)}*.

Пересечением отношений $\rho_1 \cap \rho_2$ называется отношение, определяемое пересечением соответствующих подмножеств. Пересечение отношений $\rho_1 \cap \rho_2$ представляется матрицей $\|c_{ij}\| = \|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|$, элементы которой вычисляются по правилам: $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

Объединением отношений $\rho_1 \cup \rho_2$ называется отношение, определяемое объединением соответствующих подмножеств. Оно задается матрицей, элементы которой вычисляются по правилам: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$,

$1+1=1$.

Пример 1.36. Пусть отношения ρ_1 и ρ_2 представлены матрицами:

$$\left\| a_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \left\| b_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Пересечение отношений $\rho_1 \cap \rho_2$ представляется матрицей

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Объединение отношений $\rho_1 \cup \rho_2$ представляется матрицей:

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Кроме теоретико-множественных операций для отношений вводятся некоторые дополнительные операции, которые связаны с их специфической структурой. Мы будем использовать две такие операции.

1. *Обращение отношений*.

Если в каждой упорядоченной паре, принадлежащей отношению ρ, поменять местами первую и вторую компоненты, то получим новое отношение, которое называется обращённым для отношения ρ и обозначается через ρ^{-1}. Матрица отношения ρ^{-1} получается из матрицы отношения ρ операцией транспонирования.

Пример 1.37.

$$\rho = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ и } \rho^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

2. *Умножение отношений.*

Назовём две упорядоченные пары (a,b) и (b,c) примыкающими, если первая компонента второй пары совпадает со второй компонентой первой пары. Для двух примыкающих упорядоченных пар (a,b) и (b,c) их произведением называется пара (a,c). Пусть теперь ρ и σ – два бинарных отношения, заданных на множестве A. Произведением отношения ρ на отношение σ называется новое отношение, состоящее из результатов произведений всех таких примыкающих пар, первая из которых принадлежит отношению ρ, а вторая – отношению σ. Произведение отношения ρ на отношение σ обозначается $\rho \cdot \sigma$. Таким образом, условие $(a,c) \in \rho \cdot \sigma (a,c \in A)$ означает, что для некоторого элемента $b \in A$ выполняется, что $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \sigma$.

Произведение отношений, вообще говоря, некоммутативно (то есть зависит от порядка сомножителей), но ассоциативно, то есть для любых трёх отношений ρ, σ, τ, заданных на множестве A, выполняется $(\rho \cdot \sigma) \cdot \tau = \rho \cdot (\sigma \cdot \tau)$. Ввиду ассоциативности произведения отношений единственным образом определено n-кратное произведение отношения ρ самого на себя, обозначаемое через ρ^n.

Для выражения матрицы произведения двух отношений, заданных булевыми матрицами, введём в рассмотрение операцию $\oplus$, определив её так: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 1$. Пусть отношения ρ и σ, заданные на множестве A, состоящем из n элементов, представлены булевыми матрицами $U = \| u_{ij} \|$ и $V = \| v_{jk} \|$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ соответственно. Тогда матрица $W = \| w_{ik} \|$, где $w_{ik} = u_{i1} \cdot v_{1k} \oplus u_{i2} \cdot v_{2k} \oplus \ldots \oplus u_{in} \cdot v_{nk}$ будет булевой матрицей отношения $\rho \cdot \sigma$. Матрица $W = \| w_{ik} \|$ вычисляется по обычному правилу умножения матриц.

Пример 1.38. $\rho_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\rho_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

Тогда $\rho_1 \cdot \rho_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\rho_2 \cdot \rho_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $\Rightarrow \quad \rho_1 \cdot \rho_2 \neq \rho_2 \cdot \rho_1$

Пример 1.39. Дан фрагмент расписания международных авиарейсов аэропорта Пулково (г. Санкт-Петербург), где указаны номера авиарейсов, аэропорты назначения, типы самолетов:

Номер авиарейса	**Аэропорт назначения**	**Тип самолета**
Z8277	Амстердам	Ту-154
MA232	Афины	Боинг-737
Z8221	Барселона	Ту-134
Z8285	Каир	Ту-134
LH6370	Нью-Йорк	Боинг-747
Z8257	Париж	Ил-86
Z8229	Хельсинки	Ту-154

Запишем известные базисные множества:

$A = \{LH6370, MA232, Z8221, Z8229, Z8257, Z8277, Z8285\}$ – множество номеров рейсов;

$B = \{Амстердам, Афины, Барселона, Каир, Нью-Йорк, Париж, Хельсинки\}$ – множество аэропортов назначения;

$C = \{Боинг-737, Боинг-747, Ил-86, Ту-134, Ту-154\}$ – множество типов самолетов.

Будем предполагать, что на исходных базисных множествах введено естественное отношение порядка, которое соответствует перечислению элементов в лексикографическом порядке, тогда можно задать отношения $\rho_1 \subset A \times B$ и $\rho_2 \subset A \times C$, используя матричный способ:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица обратного отношения ρ_2^{-1} может быть получена транспонированием матрицы отношения ρ_2, которая устанавливает соответствие между типами самолетов и номерами авиарейсов:

$$\rho_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Композиция отношений $\rho_2^{-1} \cdot \rho_1$ устанавливает соответствие между типами самолетов и аэропортами назначения:

$$\rho_2^{-1} \cdot \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для наглядности результат представим в виде таблицы:

Тип самолета	**Аэропорт назначения**
Боинг-737	Афины
Боинг-747	Нью-Йорк
Ил-86	Париж
Ту-134	Барселона, Каир
Ту-154	Амстердам, Хельсинки

Задачи.

1. Пусть X – множество жителей Нижнего Новгорода и ρ – бинарное отношение на X. Выяснить его свойства.
   a) $x\rho y \Leftrightarrow x$ знает y
   b) $x\rho y \Leftrightarrow x$ родственник y
   c) $x\rho y \Leftrightarrow x$ начальник y
   d) $x\rho y \Leftrightarrow$ зарплата x не меньше зарплаты y
2. На R задано бинарное отношение ρ. Определить тип отношения. Найти область определения, область значений и построить график.
   a) $\rho = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 = y^2\}$
   b) $\rho = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
   c) $\rho = \{(x,y) \in R^2 \mid |x| + |y| = 4\}$
3. На N задано бинарное отношение ρ. Определить тип отношения. Найти область определения, область значений, отношение ρ^{-1}.
   a) $\rho = \{(x,y) \in \mathrm{N}^2 \mid x / y\}$
   b) $\rho = \{(x,y) \in \mathrm{N}^2 \mid (x-y) \vdots 3\}$
   c) $\rho = \{(x,y) \in \mathrm{N}^2 \mid x + y = 10\}$
4. Записать элементы множества Y и вычислить его мощность. Ответ обосновать математическими выкладками.
   1) $Y = (U \setminus (\overline{A \cup B) \cap A}) \cup C$
   2) $Y = (A \cap D) \times (B \cap C \cup E)$

где $A = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3, 7, a, b, c, d, e, f\}$,
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a, b, c\}$, $D = \{1, b\}$, $E = \{c, d\}$.

5. Отношение ρ на некотором множестве ключевых слов для поиска в Интернете определено следующим образом: пара ключевых слов a и b

принадлежит ρ, если и только если они начинаются с одного и того же символа. Является ли ρ отношением эквивалентности?

6. В следующих примерах нужно задать бинарное отношение всеми способами (перечислением элементов, графически, матрицей):

1) Привести пример рефлексивного бинарного отношения, которое не является симметричным и транзитивным.
2) Привести пример симметричного бинарного отношения, которое не является рефлексивным и транзитивным.
3) Привести пример транзитивного бинарного отношения, которое не является рефлексивным и симметричным.
4) Привести пример рефлексивного и симметричного бинарного отношения, которое не является транзитивным.
5) Привести пример рефлексивного и транзитивного бинарного отношения, которое не является симметричным.
6) Привести пример симметричного и транзитивного бинарного отношения, которое не является рефлексивным.
7) Изобразите граф с пятью вершинами, соответствующий рефлексивному симметричному и нетранзитивному отношению.
8) Изобразите граф с пятью вершинами, соответствующий антирефлексивному, несимметричному и транзитивному отношению.

7. Пусть $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $P_1 \subseteq A\times B$, $P_2 \subseteq B^2$. Найти $\left\|(P_1 \cdot P_2)^{-1}\right\|$. Проверить с помощью матрицы $\|P_2\|$, является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.
$P_1=\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}$ и
$P_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,4),(1,4),(2,4),(4,2)\}$

8. Определите, какими из свойств обладают следующие отношения на множестве $\{1,2,3,4,5\}$

1) $R_1: aR_1b \leftrightarrow |a-b|=1$

2) $R_2 : aR_2b \leftrightarrow 0 < a - b < 3$

3) $R_3 : aR_3b \leftrightarrow a + b - \textit{четное число}$

4) $R_4 : aR_4b \leftrightarrow a \geq b^2$

5) $R_5 : aR_5b \leftrightarrow \textit{НОД}(a,b) = 1$

Представьте графически отношения: $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; R_2^{-1}; $R_2 \cdot R_4$; $R_4 \cdot R_2$; $R_5 \setminus R_4^{-1}$.

9. Пусть $|x|$ – длина слова x. Какое из ниже перечисленных фактор-множеств соответствует отношению эквивалентности $R = \{(a,c) : |a| = |b|\}$ на множестве $B = \{awe, bbyyu, iii, bhio, aasdf, tyr, y, 23\}$

   1) $B/\sim\, = \{\{awe, bbyyu, iii, bhio, aasdf, tyr, y\}, \{23\}\}$
   2) $B/\sim\, = \{\{awe, bbyyu\}, \{iii, bhio\}, \{y, 23\}\{aasdf, tyr\}\}$
   3) $B/\sim\, = \{\{y\}, \{bhio, bbyyu\}, \{awe, aasdf\}, \{iii,\}, \{tyr\}, \{23\}\}$
   4) $B/\sim\, = \{\{y\}, \{23\}, \{bhio\}, \{aasdf, bbyyu\}, \{iii, awe, tyr\}\}$

10. Пусть A={a,b,c}, B={1,2,3,4}, $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$. Найти $(P_1 \cdot P_2)^{-1}$. Проверить с помощью матрицы (P_2) является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

    P_1={(a,2), (a,3), (a,4), (b,3), (c,1), (c,4)}

    P_2={(1,1), (2,3), (2,2), (3,4), (1,4), (2,4), (4,2)}

11. Определите, какие из следующих отношений на множестве Z^2 являются отношениями эквивалентности:

1) $R_1 : (x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$

2) $R_4 : (x_1, y_1)R_4(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$

3) $R_3 : (x_1, y_1)R_3(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

4) $R_2 : (x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2 \textit{ или } y_1 = y_2$

5) $R_5 : (x_1, y_1)R_5(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 < x_2 \textit{ или } x_1 = x_2, y_1 \leq y_2$

Найдите для них классы эквивалентности.

12. Определите, какие из следующих отношений на множестве Z являются отношениями порядка:

1) $R_1 : aR_1b \leftrightarrow a \le b$
2) $R_2 : aR_2b \leftrightarrow a \ge b$
3) $R_3 : aR_3b \leftrightarrow a < b$
4) $R_4 : aR_4b \leftrightarrow a^2 \le b^2$
5) $R_5 : aR_5b \leftrightarrow a = b$

13. На множестве X слов, содержащихся в некотором словаре русского языка заданы отношения. Какие из этих отношений являются отношением порядка.

a) $x\rho y \quad \Leftrightarrow$ слово x предшествует слову y

b) $x\rho y \quad \Leftrightarrow$ слово x короче слова y

c) $x\rho y \quad \Leftrightarrow$ слово x не длиннее слова y

d) $x\rho y \quad \Leftrightarrow$ в слове y есть буква, не входящая в слово x.

14. Даны множества: A – множество букв латинского алфавита, B={a, b, c, d, e, f}, C={c, f}, D={b, a, d}, E={k, l, m, n, d}, F={k, l, m, n}. Рассмотрите между ними отношение P= «быть подмножеством». Постройте граф отношения P. Выпишите все пары, находящиеся в отношении P. Определите свойства этого отношения. Докажите, что <M, P> – частично упорядоченное множество, где $M = B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Определите минимальные и максимальные элементы, наибольший и наименьший элементы (если они имеются).

15. На множестве кругов K плоскости задано отношение: $a\rho b \quad \Leftrightarrow$ круг a содержится в круге b. Какими свойствами обладает это отношение? Будет ли (K, ρ) –упорядоченным множеством? Будет ли (K, ρ) линейно упорядоченным множеством?

16. На множестве Z^2 определено отношение

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 \le x_2,\ y_1 \le y_2 .$$

Докажите, что это отношение порядка.

17. Найдите все минимальные и максимальные относительно R элементы в множествах:

$A_1 = \{(x, y) \mid x \le 3,\ y \le 4\}$;

$A_2 = \{(x, y) \mid 2 \le x + y \le 4\}$;

$A_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.

18. На множестве *A* задано бинарное отношение R (по вариантам). Необходимо изобразить орграф, соответствующий отношению R и определить свойства этого отношения.

Вариант	**Множество**	**Отношение**
1	$\{2, 3, 4, 5\}$	$R = \{(a,b) \mid a < b\}$
2	$\{1, 2, 3, 4\}$	$R = \{(a,b) \mid a \le b\}$
3	$\{2, 3, 4, 7\}$	$R = \{(a,b) \mid a \vdots b\}$
4	$\{2, 4, 6, 8\}$	$R = \{(a,b) \mid a : b - \textit{четное}\}$
5	$\{1, 2, 3, 4\}$	$R = \{(a,b) \mid a - b < 1\}$
6	$\{2, 4, 8, 10\}$	$R = \{(a,b) \mid (a - b) \vdots 3\}$
7	$\{1, 2, 5, 7\}$	$R = \{(a,b) \mid (a + b) \vdots 3\}$
8	$\{2, 6, 18, 30\}$	$R = \{(a,b) \mid a : b - \textit{нечетное}\}$
9	$\{1, 3, 7, 9\}$	$R = \{(a,b) \mid (a + b) \vdots 4\}$
10	$\{6, 7, 8, 9\}$	$R = \{(a,b) \mid b - a < 1\}$
11	$\{3, 9, 15, 21\}$	$R = \{(a,b) \mid (a + b) \vdots 6\}$
12	$\{4, 8, 16, 20\}$	$R = \{(a,b) \mid a : b - \textit{четное}\}$
13	$\{4, 8, 16, 20\}$	$R = \{(a,b) \mid b \vdots a\}$
14	$\{10, 11, 12, 13\}$	$R = \{(a,b) \mid a \ge b\}$
15	$\{16, 17, 18, 19\}$	$R = \{(a,b) \mid a > b\}$
16	$\{12, 13, 14, 15\}$	$R = \{(a,b) \mid a > b\}$
17	$\{6, 7, 8, 9\}$	$R = \{(a,b) \mid a \ge b\}$
18	$\{5, 6, 10, 18\}$	$R = \{(a,b) \mid b \vdots a\}$
19	$\{1, 2, 4, 6\}$	$R = \{(a,b) \mid a : b - \textit{четное}\}$
20	$\{2, 4, 16, 22\}$	$R = \{(a,b) \mid (a + b) \vdots 6\}$

Вариант	Множество	Отношение
21	$\{2, 3, 4, 5\}$	$R = \{(a,b) \mid b - a < 1\}$
22	$\{2, 6, 10, 14\}$	$R = \{(a,b) \mid (a + b) \vdots 4\}$
23	$\{3, 9, 21, 27\}$	$R = \{(a,b) \mid a : b - \text{нечетное}\}$
24	$\{2, 4, 6, 8\}$	$R = \{(a,b) \mid (a + b) \vdots 3\}$
25	$\{1, 2, 3, 4\}$	$R = \{(a,b) \mid (a - b) \vdots 3\}$
26	$\{2, 4, 8, 10\}$	$R = \{(a,b) \mid a - b < 1\}$
27	$\{1, 2, 5, 7\}$	$R = \{(a,b) \mid a : b - \text{четное}\}$
28	$\{2, 6, 18, 30\}$	$R = \{(a,b) \mid a \vdots b\}$
29	$\{1, 3, 7, 9\}$	$R = \{(a,b) \mid a \le b\}$
30	$\{6, 7, 8, 9\}$	$R = \{(a,b) \mid a < b\}$

1.3. Функциональные отношения.

Определение. Бинарное отношение $\mathrm{f} \subseteq X \times Y$ называется ***функциональным***, если каждому элементу *x* из *X* такому, что $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{f}$, соответствует один и только один элемент *y* из *Y*. Все элементы (упорядоченные пары) функционального бинарного отношения имеют различные первые координаты.

Отличительной особенностью матрицы функционального отношения является то, что в каждом ее столбце содержится не более одного единичного элемента. Граф функционального отношения характеризуется тем, что из каждой вершины может выходить только одна дуга.

Всюду определенное функциональное отношение называется ***функцией*** или отображением множества *X* в *Y*: $(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X})\,(\exists y \in Y)\ x\mathrm{f}\mathrm{y}$. Область определения функции $D(\mathrm{f}) = \mathrm{X}$, область значения функции $E(\mathrm{f}) \subseteq \mathrm{Y}$.

Традиционная запись функции $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ соответствует соотношению $x\mathrm{f}\,\mathrm{y}$, или $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{f}$. Первую координату *x* упорядоченной пары $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{f}$ называют аргументом (переменной, прообразом), а вторую *y* – образом (значением) функции. Множество тех пар (x, y), для которых выполнено соотношение $x f y$ называют графиком функции.

Пример 1.40.

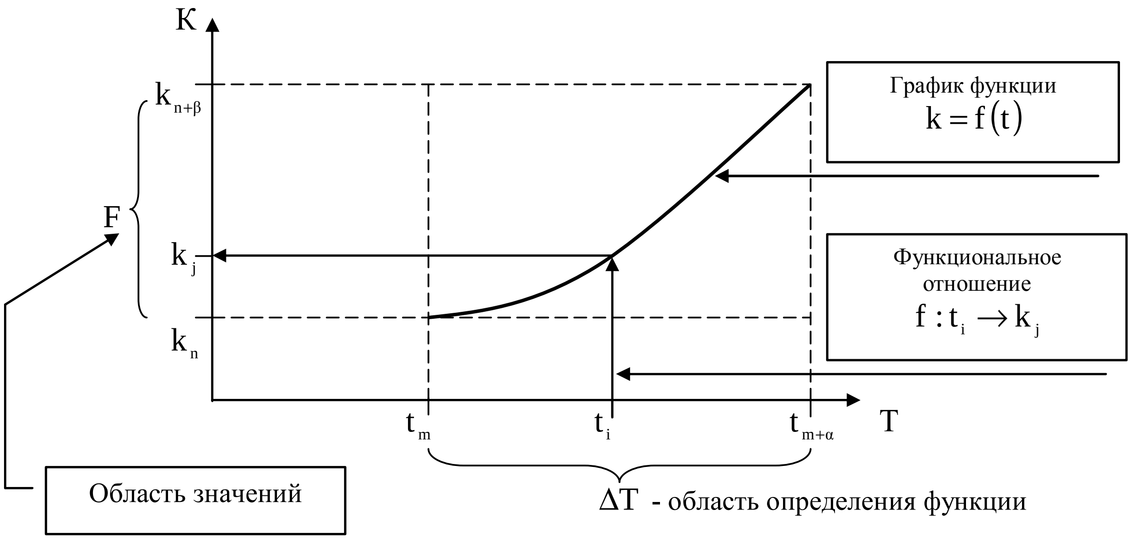


Рис. 1.10 График функции.

Для того, чтобы задать соответствие, необходимо указать:

1. Множество *X*, элементы которого сопоставляются с элементами другого множества.
2. Множество *У*, с элементами которого сопоставляются элементы $x_i \in X$.
3. Множество $f \subseteq X \times У$, определяющее закон, по которому перечисляются все пары (x, y), участвующие в сопоставлении.

Примеры 1.41.

1) Поставим в соответствие целому числу [*x*] действительное число *x*. Отношение $f = \{([x], x) | x \in R\} \subset Z \times R$ не является функциональным, так как, например, $(1;1{,}5) \in f$ и $(1;1{,}3) \in f$, но $1{,}5 \neq 1{,}3$.
2) Отношение $f = \{(x^2, x^4) | x \in R\} \subset R \times R$ не является функциональным так как, например, $(2^2;2^3) \in f$ и $((-2)^2;(-2)^3) \in f$, $2^2 = (-2)^2$, но $2^3 \neq (-2)^3$.
3) Отношение $f = \{(x^2, x^3) | x \in R\} \subset R \times R$ является функциональным, но не является функцией, так как не всюду определено.
4) Отношение $f = \{(x, 2x-1) | x \in R\} \subset R \times R$ является функцией.

5) Пусть задано отношение $f \subseteq X \times У$, где X – множество ключевых слов, а $У$ – множество Web-страниц. Пара (x, y) принадлежит f, если и только если ключевое слово x содержится на странице y. Данное отношение функциональным не является, так как одно слово может встречаться на нескольких страницах.

Типы отображений.

Различают отображения X в Y, где каждый элемент $x \in X$ имеет один и только один образ $y = f(x)$ из Y. Примером такого отображения может служить рассмотренный выше пример (рис. 1.10).

Говорят, что имеет место отображение X **на** Y в том случае, если любой элемент из Y есть образ, по крайней мере, одного элемента из X. Такое отображение получило название ***сюръекция***.

Если для любых двух и более различных элементов из X их образы $y_j = f(x_i)$ также различны, т.е. $(\forall x_1, x_2 \in X)$ $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ и $y_1 \neq y_2$, то отображение f называется ***инъекцией***.

Отображение, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией называется ***биекцией***. В этом случае принято говорить, что $f: X \to Y$, есть взаимно-однозначное отображение, а между элементами X и Y имеется взаимно-однозначное соответствие.

Взаимно-однозначным называется такое соответствие между множествами А и B, при котором каждому элементу $a \in A$ отвечает один и только один элемент $b \in B$, и каждому элементу $b \in B$ отвечает один и только один элемент $a \in A$. Функция, определяющая взаимно-однозначное соответствие называется ***биективной функцией*** или ***биекцией***.

Примеры 1.42.

1) Зададим множество $\{m_i\} = M$, $i = \overline{1, n}$ – множество всех документов, содержащихся в папке «Входящие», множество $d_j \in D$, $j = \overline{1, v}$ – множество всех номеров, использованных для регистрации этих

документов. Отображение $f: M \to D$ является функциональным, так как каждому документу соответствует единственный регистрационный номер. Отображение является сюрьективным, так как каждому регистрационному номеру соответствует какой-либо документ, и также является инъективным отображением, так как разным документам соответствуют разные регистрационные номера. Значит, данное отношение является биекцией.

2) Пусть задано отношение f: $X \to Y$, где X – множество всех книг в книжном магазине, Y – множество цен. Пара (x,y) принадлежит f, если и только если книга x имеет цену y. Отношение f является функцией, так как каждая книга имеет цену. Но отношение f не является инъективным отображением, так как в магазине могут продавать две различные книги по одной цене, и не является сюрьективным отображением, так как может быть в прайс-листе указаны цены книг, но в наличии их уже нет.

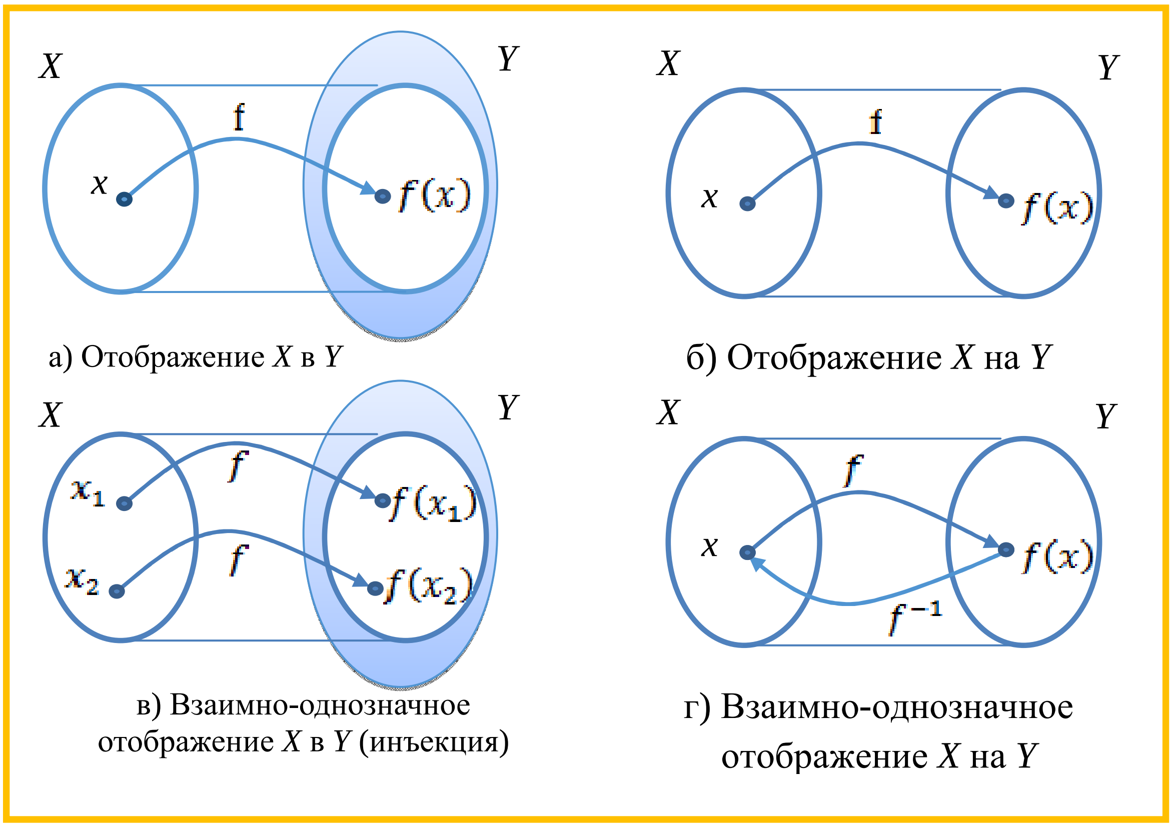


Рис. 1.11. Иллюстрация различных видов отображений

Пример 1.43.

Построим на множестве M={a, b, c, d} отношение, сюръекцию, инъекцию и биекцию максимальной мощности.

Решение. Отношение максимальной мощности совпадает с декартовым произведением $M \times M$ и его мощность равна 16.

При построение инъекции необходимо учитывать, что разным *x* соответствуют разные *y*, например *F1={(a,b), (b, c), (c,d), (d,a)},* Для построения сюръекции нужно использовать все элементы *y, F2={(a,a), (b,d), (c,c), (d,b)}.* Обе эти функции являются как сюръекциями, так и инъекциями, следовательно, они – биекции. Мощность во всех случаях равна четырем.

Сами решения могут быть и другие, но максимальная мощность вычисляется однозначно.

Пусть f: $X \to Y$ – произвольное отображение, $A \subset X$, B, B_1, B_2 – произвольные подмножества множества Y, $f(A)=\{f(x) | x\in A\}$ – множество образов всех элементов x из A, $f^{-1}(B)=\{x\in X | f(x)\in B\}$ – множество прообразов всех элементов из B.

Тогда имеют место следующие *свойства:*

1. $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
4. $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$.
5. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
7. $f^{1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;
8. $f^{1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B_2)$;
9. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
10. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$

11. $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Функции, отображения помимо математики широко используются в различных прикладных областях: теоретическом программировании, теории графов, теории систем и системотехнике, математической лингвистике, в теории чисел.

Множества A и B называются *эквивалентными* ($A \sim B$), если между ними существует биекция (хотя бы одна). Эквивалентные множества называют равномощными, что обозначается так: $|A|=|B|$.

Эквивалентными друг другу оказываются все конечные множества с одинаковым числом элементов n (мощность каждого из этих множеств равна n).

Множество A называется *счетным*, если оно эквивалентно натуральному ряду N ($A \sim N$).

С помощью биекции $\varphi = N \to A$ можно пересчитать все элементы из A, снабдив их индексами. Можно записать, что $A = \{a_n\}$, $n=1,2,\ldots,\infty$. Множество четных натуральных чисел $N_{чет} = \{2,4,\ldots,2n,\ldots\}$, всех натуральных чисел $N = \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$, целых чисел Z и рациональных чисел Q последовательно вложены: $N_{чет} \subset N \subset Z \subset Q$.

Хотя для любых двух из этих множеств нет равенства, они эквивалентны друг другу, то есть имеют одинаковую мощность и являются счетными: $|N_{чет}| = |N| = |Z| = |Q|$.

Существуют бесконечные *несчетные* множества, и их мощность естественно считать большей, чем $|N|$.

Множество точек отрезка $[0, 1] = \{x \in R;\ 0 \le x \le 1\}$ не является счетным (теорема Г. Кантора). Его мощность называется *континуум* и обозначается малой буквой c: $|[0, 1]| = c$.

Множество $[0, 1]$ и любое эквивалентное ему множество называются *континуальными*.

На вещественной оси R континуальными (и значит эквивалентными друг другу и отрезку *[0, 1]*) являются, например, множества:

- *[a,b]*,
- *(a, b)*, при любом $a<b$;
- *(0, +∞)*;
- множество *(– ∞, + ∞)*, равное R.

Для любой биективной функции существует *обратная функция*.

Если f: $X \to Y$ – инъективное отображение, то для любых подмножеств A, A_1, A_2 его области определения X имеют место соотношения:

1. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
2. $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;
3. $A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;
4. $f^{-1}(f(A)) = A$.

Композиция $g \circ f$ – это последовательное применение отображений (первым действуем отображение f, вторым g).

Наибольшую сложность вызывают примеры на нахождение композиции отображений, заданных правилами, содержащими разветвления.

Пример 1.44. Пусть f, g: $R \to R$ действуют по правилам:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } |x| > 1; \\ -x, & \text{если } |x| \le 1. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x > 8; \\ 2 - x, & \text{если } |x| \le 8; \\ 2 + x, & \text{если } x < -8. \end{cases}$$

Найдем $g \circ f$..

Перепишем выражение для f, убрав знак модуля:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x > 1; \\ -x, & \text{если } -1 \le x \le 1; \\ x^3, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

1) Если $x \in (1, \infty)$, то отображение f действует по правилу x^3 и множество $(1, \infty)$ отображается во множество $(1, \infty)$. На полученном множестве действие отображения g определяется как верхней, так и средней строкой, чтобы четко определить, когда какая строка действует. Исходное множество разобьем точкой $x = 2$ на два подмножества: $(1;2]$ и $(2; \infty)$, тогда $f((1; 2]) = (1; 8]$, и интервал $(1,8]$ целиком попадает в среднюю строку определения отображения g, а $f((2; \infty)) = =(8;\infty)$, что соответствует верхней строке определения g. Таким образом, мы получили, что

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если} \quad x \in (2, \infty); \\ 2 - x^3, & \text{если} \quad x \in (1;2]. \end{cases}$$

2) Если $x \in [-1; 1]$, то $f([-1; 1]) = [-1; 1]$, а это множество целиком попадает в среднюю строку определения g. Значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 - (-x) = 2 + x, \text{ если } x \in [-1; 1].$$

3) Если $x \in (-\infty,-1)$, то $f((-\infty,-1)) = (-\infty,-1)$. На этом множестве отображение g определяется как своей средней, так и нижней строкой. Разобьем множество $(-\infty,-1)$ на две части: $(-\infty;-2)$ и $[-2; -1)$. Рассмотрим каждую из этих частей отдельно.

а) Ясно, что $f((-\infty,-1)) = (-\infty,-1)$. На этом множестве отображение g определяется своей нижней строкой, значит

$$(g \circ f)(x) = 2 + x^3, \text{ если } x \in (-\infty, -2).$$

б) $f([-2; -1)) = [-8; -1)$. На этом множестве отображение g определяется своей средней строкой, значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 - x^3, \ x \in [-2;-1).$$

Окончательно получаем

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если} \quad x \in (2, \infty); \\ 2 - x^3, & \text{если} \quad x \in [-2;-1) \cup (1;2]; \\ 2 + x, & \text{если} \quad x \in [-1;1]; \\ 2 + x^3, & \text{если} \quad x \in (-\infty,-2). \end{cases}$$

Задачи

1. Будут ли следующие отношения функциональными? Найти их область определения и область значения.
   a) $\mathrm{f} = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,3),(5,4)\}$
   b) $\mathrm{f} = \{(1,2),(2,2),(1,3),(3,3),(4,2)\}$
   c) $\mathrm{f} = \{(x,y) | x^2 = y\} \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}$
   d) $\mathrm{f}(x,y) = x$
2. Пусть даны два множества $N = \{1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел и $X = \{january,\ february, march, april, may,\ june\}$. Обозначим через $\|x\|$ – длину в знаках (буквах) слова *x*. Найти образ элемента *x=june* в функциональном соответствии: $f : X \to N$, где $f(x) = \|x\|$.
3. На *R* задано отображение $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$ и $\mathrm{A} \subset \mathrm{R}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{R}$. Построить график функции и найти $f(A)$ и $f^{-1}(B)$.
   a) $y = 3x + 1$ $\quad A = [-3,3]$ $\quad B = [-10,10]$
   b) $y = x^2 - 2$ $\quad A = [0,5]$ $\quad B = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
   c) $y = \mathrm{Sin(x)}$ $\quad A = [0,\pi]$ $\quad B = [-1,6]$
   d) $y = |x|$ $\quad A = (-2,-1]$ $\quad B = (-3,4]$
4. Для отображения $f : R \to R,\ f(x) = Sin(x)$ найти $f((0;\pi))$, $f\left(\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)\right)$,
   $f^{-1}((-1/2;1/2))$, $f^{-1}([0;2))$.
5. Пусть отображение $f : R \to R$ действует по правилу

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \geq 0 \\ 1 - x, & x < 0, \end{cases}$$

$f([0;1]) = ?$, $\quad f([-1;2]) = ?$, $\quad f^{-1}([0;1]) = ?$, $\quad f^{-1}([-1;2]) = ?$.

6. Определите свойства отображения f (интъективность, сюръективность, биективность). Укажите область значения $\operatorname{Im} f$.

   a) $f : N \to N,\ f(x) = x + 2;$

   b) $f : R \to R,\ f(x) = 2x;$

   c) $f : R \to R,\ f(x) = 2^x;$

   d) $f : R \to R,\ f(x) = x^2 - 2x + 2;$

   e) $f : R \to R, x \mapsto 2^{x^2+3x+4};$

   f) $f : Z \times Z \to Z, (a,b) \mapsto a + b;$

   g) $f : Z \to Z \times Z, a \mapsto (a,a);$

   h) A – *конечное множество,* $f : \mathrm{B}(A) \to N, X \mapsto |X|;$

   i) $f : R \to R, x \mapsto x^3.$

7. Является ли отображение $f : N \to N, \quad f_n(k) = \begin{cases} n - k, & k < n \\ n + k, & k \geq n \end{cases}$

   инъективным, сюръективным, биективным?

8. Укажите, какие из перечисленных функций на множестве Z имеют обратную:

   1) $y = |x + 1|$
   2) $y = x + 1$
   3) $y = (x + 1)^2$
   4) $y = (x + 1)^3$
   5) $y = x^3 - x^2$
   6) $y = x^3 + x$

9. Приведите примеры отображения $f : X \to У$:

   a) сюръективного, но не инъективного;
   b) инъективного, но не сюръективного;
   c) не сюръективного и не инъективного;
   d) биективного.

10. На заданных множествах-доменах:

    1) Построить матрицы заданных отношений, определить тип отношений.

2) Проверить, является ли данное отношение функцией, и определить тип функции.

№	Домены		Отношения
	D1	D2	
1	Номера учебных групп	Названия факультетов	Принадлежность группы факультета
2	{Иванова Анна, Петров Игорь, Сидорова Елена, Хохлов Петр, Мартиросян Ирина, Сазонова Ольга }	{“М”, “Ж”}	пол
3	Натуральные числа 1,2,…,40	Натуральные числа 1,2,…,40	Наличие НОД
4	{090964, 060965, 090966, 090969, 090970, 090975, 090981, 090983}	{“+”, “-”}	Четность номеров
5	{корабль, table, лук, pen, cucumber, tomato, 7 сыров, grass, морковь, 7-up}	{рус., англ.}	принадлежность
6	На дискретном множестве чисел построить множество всех его подмножеств и задать отношение включения		
7	Множество букв латинского алфавита	Множество букв латинского алфавита	Быть словом длины 4
8	Множество квадратных матриц порядка 3	Множество действительных чисел *R*	Отношение иметь равный определитель

11.Для следующих отображений $f, g : R \to R$ найти композицию $f \circ g$, $g \circ f$.

a)

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\ge 0\\ 1-x, & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1+x, & x\ge 1\\ 2x, & x<1.\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 1\\ x, & x<1,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}|x|, & x<2\\ 4-x, & x\ge 2.\end{cases}$$

Глава 2. Комбинаторика

2.1. Общие правила комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий расположение объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.

Комбинаторика как наука сложилась в 16 веке, хотя с задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди сталкивались еще в доисторическую эпоху (наилучшее расположение охотников во время охоты, инструментов во время работы).

Первое упоминание о вопросах, близких к комбинаторике, встречается в китайских рукописях, относящихся к 12-13 вв. до н.э. Большое внимание вопросам, пограничным между комбинаторикой и теорией чисел уделяли древние греки (2 век до н.э.). Еще в 4 веке до н.э. в школе философа-идеалиста и математика Пифагора возникло убеждение, что миром правят числа, а вещи только отражение чисел, поэтому чтобы познать мир, пифагорейцы начали изучать свойства натуральных чисел. Их исследования о четных и нечетных числах, делимости чисел, простых и составных числах положили основу теории чисел. Символом совершенства пифагорейцы считали совершенные числа, равные суме своих делителей, например, 6=1+2+3, 28=1+2+4+7+14, а символом дружбы – дружественные числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа (например, 220 и 284). Отыскание таких чисел требовало комбинаторного искусства.

В 8 веке н.э. начался расцвет арабской науки. Решая вопрос об извлечении корней любой степени, арабские алгебраисты пришли к формуле для степени суммы двух чисел $(a+b)^n$, известной под исторически неверным названием «бином Ньютона».

Интересовались сочетаниями и в Индии. Так, например, в 12 веке индийский математик Бхаскара изучал проблемы комбинаторики, в частности, он писал о применениях перестановок к подсчету вариаций размера в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т.д. Он дал также правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов, причем рассматривает также и случай, когда в этих перестановках есть повторяющиеся элементы.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в 17 веке французские ученые Паскаль и Ферма. Решая задачи азартных игр, они сформулировали и доказали первые теоремы комбинаторики и теории вероятности. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера. Однако и у них основную роль играли приложения к различным играм.

В настоящее время с комбинаторными вычислениями приходится иметь дело представителям многих специальностей. Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства, для составления и декодирования шифров, и решения других проблем теории информации, в чисто математических вопросах – теории групп и их представлений и т.д.

Комбинаторные задачи бывают самых разных видов. Но большинство задач решается с помощью двух основных правил – правила суммы и правила произведения.

Правило суммы.

Пусть A – конечное множество из n элементов. Тогда говорят, что один объект из A можно выбрать *n способами,* и пишут $|A| = n$.

Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $n+m$ способами.

Замечание. Важно, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта B. Если такие совпадения есть, правило суммы утрачивает силу, и мы получаем лишь $n+m-r$ способов выбора, где r – число совпадений.

Правило суммы можно сформулировать и в терминах теории множеств: если даны n-множество A *и* m-множество B, то при $A \cap B = \varnothing$ (А и В – непересекающиеся) объединение $A \cup B$ будет ($n+m$)–*множеством*, т.е. $|A \cup B| = n + m$.

Пример 2.1. Если на первой полке стоит X книг, а на второй Y, то выбрать книгу с первой или второй полки, можно $X+Y$ способами.

Правило суммы в общем случае: пусть имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Тогда $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{n} |X_i|$ – это правило суммы или правило альтернатив.

Пример 2.2. Сколько имеется различных комбинаций из четырех банкнот достоинством 500 и 1000 руб.? (Например, три банкноты по 1000 руб., одна – 500 руб., или четыре банкноты по 1000 руб.)

Решение. Рассмотрим всевозможные наборы: набор из четырех банкнот по 1000 руб., набор из трех банкнот по 1000 руб. и одной купюры в 500 руб., набор из 2-х банкнот по 1000 руб. и двух в 500 руб., набор из банкноты в 1000 руб. и трех в 500 руб. и набор из четырех банкнот в 500 рублей. Число способов, которыми можно получить эти наборы равно 1+1+1+1+1=5.

Правило произведения.

Если некоторый объект A можно выбрать n *с*пособами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор «A и B» можно осуществить $n \times m$ способами.

Пример 2.3. В розыгрыше первенства страны по футболу принимает участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение. Золотую медаль может получить одна из 16 команд. После того как определен владелец золотой медали, серебряную медаль может иметь одна из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно $16\times15=240$.

Общая формулировка правила умножения.

Пусть требуется выполнить одно за другим *к* действий, причем первое действие может быть выполнено n_1 способами, 2-е действие n_1 способами, 3-е действие n_2 способами и так далее, *к*-е действие n_k способами.

Тогда все к действий могут быть выполнены $P_k = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

***Доказательство*: (**методом математической индукции)

При к=1 формула $S_1 = n_1$ верна.

Пусть формула верна для *к* действий. Докажем, что она верна для *к+1* действий. Обозначим произвольный вариант выполнения *к* действий набором из к чисел. Например, набор (3, 1, 6, …, 5) означает вариант, в котором первое действие выполнено третьим способом, 2-е действие выполнено первым способом, …, *к*-е действие выполнено 5-м способом.

В случае, если выполняются *к+1* действий, каждый вариант записывается как набор из *к+1* чисел. Но всякий набор из *к+1* чисел получается добавлением одного числа к какому-либо набору из *к* чисел. Например, получим (3, 1, 6,…,5, 1), (3, 1, 6,…, 5, 2),…, (3, 1, 6,…., 5,), т.е. всего k_{n+1} вариантов. Поэтому число всех способов выполнения *к+1* действий будет $P_{k+1} = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k \times n_{k+1}$.■

Пример 2.4. Некто написал 6 поздравлений своим друзьям, затем взял 6 разных конвертов и разложил открытки по конвертам наудачу. Каково число всех возможных комбинаций?

Решение. $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!=720$.

Пример 2.5. В вычислительной технике используются тристабильные элементы, выходы которых имеют два состояния 0, 1 и третье состояние (высокоимпедансное), обозначаемое цифрой 2. Сколько существует различных состояний, в которых может находиться устройство, содержащее два таких элемента?

Решение. Каждый элемент имеет три состояния, значит по теореме умножения, устройство с двумя такими элементами имеет $3 \cdot 3 = 9$ состояний.

Пример 2.6. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

А) ни одна из цифр не повторяется более одного раза,

Б) цифры могут повторяться,

В) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться).

Решение.

А) Первой цифрой числа может быть одна из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5 (0 не может быть первой цифрой, потому что в таком случае число не четырехзначное), если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана 5 способами, третья – 4 способами, четвертая – 3 способами. Согласно правилу, общее число способов равно $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

Б) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 возможностей), для каждой из следующих цифр имеем 6 возможностей (0, 1, 2, 3, 4, 5). Следовательно, число искомых чисел равно $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

В) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5, а последней – одна из цифр 1, 3, 5 (числа должны быть нечетными). Следовательно, число искомых чисел равно $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$.

Пример 2.7. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет», «не знаю». Найти число всех различных способов заполнения анкеты.

Решение. На каждый вопрос три варианта ответа. Так как всего в анкете 10 вопросов, то всего вариантов ответов, по правилу произведения, будет $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{10}$ комбинаций.

2.2. Комбинаторные конфигурации

Задачи подсчета возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям, часто встречаются в практической деятельности. Многообразие таких задач не всегда удается описать с помощью математических формул. Однако для стандартных распространенных ситуаций способы подсчета определены. Все комбинаторные конфигурации представлены в таблице.

Таблица. ***Классификация комбинаторных задач***

№	Теоретико-множественный язык	Комбинаторно-вероятностный язык	Формулы
1	Сколько различных упорядоченных k-подмножеств можно образовать из элементов некоторого n-подмножества?	Сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов?	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
2	Сколько различных упорядоченных множеств можно составить, используя каждый раз все элементы некоторого n-множества?	Сколькими способами можно расставить n различных предметов по n различным местам?	$P_n = n!$
3	Сколько различных k-подмножеств можно составить из элементов некоторого n-множества?	Сколькими способами можно выбрать k из n различных предметов?	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
4	Сколько k-последовательностей можно составить из элементов некоторого n-множества?	Сколько слов определенной длины можно составить из букв данного алфавита?	$\overline{A}_n^k = n^k$
5	Сколько существует последовательностей, состоящих из одних и тех же элементов, каждый из которых входит в любую из этих последовательностей одно и тоже (но для каждого предмета свое) число раз?	Сколько существует перестановок длины n, состоящих из m различных элементов, причем первый с кратностью k_1, второй - k_2 и т.д.?	$\overline{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$
6	Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ - разбиение множества A. Сколько существует различных k-подмножеств множества A, если элементы принадлежат одному и тому же классу	Имеется неограниченное число предметов n видов и из них составляются наборы по k предметов, причем 2 набора считаются равными, если они имеют	$\overline{C}_n^k = \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$

	разбиения считаются неразличимыми (одинаковыми)?	одинаковый состав. Сколько таких наборов можно составить?	

Схема определения вида комбинации:

Выборки. Если из множества предметов выбирается некоторое подмножество, то его называют ***выборкой***. Выборки бывают ***упорядоченные*** и ***неупорядоченные***. В выборках могут допускаться и не допускаться повторения элементов, т.е. имеются выборки с повторением и выборки без повторений.

В упорядоченной выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Пример 2.8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить следующие трехзначные числа 123, 431, 524, и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, так как 123 и 132 – разные числа.

Пример 2.9. Из 20 учащихся класса нужно выбрать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен.

Перестановки.

Рассмотрим различные упорядочения n-элементного множества, т. е. расположение элементов множества в какой-либо последовательности.

Определение. Различные упорядоченные кортежи, которые отличаются лишь порядком элементов (т.е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками без повторений из n элементов*. Число перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n.

Пример 2.10. Перестановки множества $A=\{$а, в, с$\}$ из трех элементов имеют вид: (а, в, с), (а, с, в), (в, а, с), (в, с, а), (с, а, в), (с, в, а).

Теорема. Число всех различных перестановок из n элементов равно $P_n = n!$

Доказательство. Будем последовательно выбирать элементы множества A и размещать их в определенном порядке на n местах. На первое место можно поставить любой из n элементов. После того как заполнено первое место, на второе место можно поставить любой из оставшихся n-1 элементов и т.д. По правилу умножения все n мест можно заполнить $P_n = n!$ способами. Следовательно, множество A из n элементов можно упорядочить $n!$ способами.■

Пример 2.11. Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?

Решение. Искомое число способов равно числу способов упорядочения множества, состоящего из 4 элементов, т.е. $P_4 = 4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$.

Пример 2.12. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами, каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно $n! \times n!$.

Пример 2.13. Сколько можно составить перестановок из *n* элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?

Решение. Определим число перестановок, в которых данные два элемента *а* и *в* стоят рядом. Могут быть следующие случаи: *а* стоит на первом месте, *а* стоит на втором месте, …, *а* стоит на n-1 месте, а *в* стоит правее *а*, число таких случаев равно n-1. Кроме того, *а* и *в* можно было поменять местами, и, следовательно, существует 2(n -1) способов размещения *а* и *в* рядом. Каждому из этих способов соответствует (n-2)! перестановок других элементов. Следовательно, число перестановок, где *а* и *в* стоят рядом, равно 2(n-1)(n-2)!=2(n-1)!

Поэтому искомое число перестановок равно n!-2(n-1)!= (n-1)!(n-2).

Пример 2.14. (хоровод) Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение. Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7!=5040 перестановок. Но так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц надо считать одинаковыми, например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Но из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения. Значит, число 5040 надо разделить на 7. Получаем 5040/7 =720 различных перестановок девушек в хороводе.

Вообще, если рассматривать перестановки *n* предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно (n-1)!.

А теперь сосчитаем, сколько ожерелий можно составить из 7 различных бусин. По аналогии с только что решенной задачей можно подумать, что число различных ожерелий равно 720. Но ожерелье можно не только повернуть по кругу, но и перевернуть. Поэтому ответом на эту задачу является 720/2=360.

Перестановки с повторениями.

До сих пор мы переставляли предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок, так как некоторые перестановки совпадают друг с другом.

Перестановка с повторениями – это упорядоченный кортеж, элементы которого могут повторяться.

Теорема. Число различных перестановок, которые можно составить из n элементов, среди которых имеется n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,…., n_k элементов k- го типа, равно $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Доказательство. Имеются предметы $к$ различных типов. Найдем сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,…, n_k элементов $к$-того типа.

Число элементов в каждой перестановке равно $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Поэтому если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы n!. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В самом деле, возьмем, например, перестановку ааааааа ввввввв………хххxxxxx (1), в которой сначала выписаны все элементы первого типа, потом все элементы второго типа,…, наконец, все элементы $к$-того типа. Элементы первого типа можно переставлять друг с другом $n_1!$ способами. Но так как все элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно также ничего не меняют $n_2!$ перестановок элементов второго типа,…, $n_k!$ перестановок $к$-того типа. Перестановки элементов первого типа, второго типа и т.д. можно делать независимо друг от друга. Поэтому по правилу произведения элементы перестановки (1) можно переставлять друг с другом

$n_1! \times\ n_2!\ \times .... \times\ n_k!$ способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов. Поэтому множество всех n! перестановок распадается на части, состоящие из $n_1! \times n_2! \times .... \times n_k!$ одинаковых перестановок каждая. Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, ... , n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}, \text{ где } n_1 + n_2 + ... + n_k = n. \blacksquare$$

Пример 2.15. Число различных слов, которое получим, переставляя буквы слова «математика», равно $\frac{10!}{2!3!3!} = 151200$.

Пример 2.16. Число слов, которые можно составить из 12 букв (4 буквы *а*, 4 буквы *б*, 2 буквы *в*, 2 буквы *г*), равно $\frac{12!}{4!4!2!2!} = 207900$.

Пример 2.17. Количество различных шестизначных натуральных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 так, чтобы каждая цифра встречалась в записи ровно по два раза равно $P(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$.

Пример 2.18. Сколько комбинаций шифров можно получить перестановкой цифр в шифре 20287?

***Решение**:* $P(2,1,1,1) = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$.

Упорядоченные подмножества данного множества (размещения).

Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества *А*.

Определение. Упорядоченные к-элементные подмножества множества из *n* элементов называются ***размещениями из n элементов по к.***

Теорема. Число упорядоченных *к*-элементных подмножеств множества, состоящего из *n* элементов, равно $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$.

Доказательство. Легко видеть, что $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$, так как имеем *n* возможностей выбора первого элемента, $n-1$ возможностей выбора второго и т.д. По теореме умножения, получаем k сомножителей, начинающихся с n и уменьшающихся каждый раз на 1, т.е. неполный факториал, который обычно делают полным, дописывая необходимые множители в числителе и знаменателе.■

Пример 2.19. Размещения множества $A=\{$а, в, с$\}$ из трех элементов по два имеют вид: (а, в), (а, с), (в, а), (в, с), (с, а), (с, в). Их число $A_3^2 = 3(3-1) = 6$.

Пример 2.20. Сколько трех буквенных слов можно составить из слова «число»?

Ответ: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Пример 2.21. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 местах?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 25 по 4: $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$.

Пример 2.22. В соревнованиях участвуют три студента первой группы и два студента из второй группы. Сколько существует способов распределить места, занятые студентами первой группы?

Решение. $A_5^3 = 5 \cdot 4 = 20.$

Пример 2.23. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Искомое число способов равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов, т.е. $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способов. Если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день, то число способов равно $4 \times A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Размещения с повторениями – это упорядоченный кортеж длины k, где элементы могут повторяться.

Теорема. Число различных размещений с повторениями равно $\overline{A}_n^k = n^k$.

Доказательство. Так как имеем n возможностей выбора первого элемента, n возможностей выбора второго и т.д., то по теореме умножения, получаем k одинаковых сомножителей, т.е. $\overline{A}_n^k = n^k$.■

Пример 2.24. Сколькими способами можно разложить 12 деталей по 3 ящикам?

Решение. $\overline{A}_3^{12} = 3^{12}$.

Пример 2.25. Сколькими способами можно разместить восемь пассажиров в три вагона?

Решение. $\overline{A}_3^{8} = 3^{8}$.

Пример 2.26. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Решение. 12 книг могут быть переплетены в переплеты трех цветов $\overline{A}_3^{12} = 3^{12}$ способами. Из них в переплеты двух одинаковых цветов $3 \cdot \overline{A}_2^{12} = 3 \cdot 2^{12}$ способами, а в трех случаях в один цвет. По формуле включений и исключений получаем $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519156$ случаев.

Пример 2.27. Сколько вариантов состояний имеет система из девяти подсистем, если каждая подсистема может находиться в пяти возможных состояниях?

Решение. $\overline{A}_5^{9} = 5^{9}$.

Сочетания.

Пусть задано множество из n элементов. Неупорядоченный набор, состоящий из k элементов, выбранным каким-либо способом из данных n, называется ***сочетанием из n элементов по k***.

Определение отличается от определения для размещений всего одним словом *неупорядоченный*.

Обозначим число сочетаний *из n элементов по k* через C_n^k.

Теорема. Число различных сочетаний равно $C_n^k = A_n^k / k! = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Доказательство. Легко видеть связь между C_n^k и A_n^k. Число сочетаний без повторений определяется исходя из числа размещений без повторений с учетом того, что различных неупорядоченных подмножеств исходного множества будет меньше в число раз, соответствующее числу перестановок без повторений из k элементов, т.е. $C_n^k = A_n^k / k! = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.■

Через $B_к(A)$ будем обозначать множество всех подмножеств А, которые имеют $к$ элементов.

Пример 2.28. Пусть А=$\{$а,в,с$\}$. Тогда В(А)=$\{\{$а$\}$, $\{$в$\}$, $\{$с$\}$, $\{$а, в$\}$, $\{$а, с$\}$, $\{$в, с$\}$, $\{$а, в, с$\}$, $\varnothing$ $\}$. B_2(А)=$\{\{$а, в$\}$, $\{$а, с$\}$, $\{$в, с$\}\}$. Убеждаемся, что $|$В(А)$|$ =8= 2^3, $|$ B_2(А)$|$ =3.

Пример 2.29. Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 5?

Решение. Искомое число способов равно числу трехэлементных подмножеств множества из 5 элементов: $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

Пример 2.30. В турнире принимали участие 20 шахматистов, и каждые два шахматиста встретились один раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

Решение. Партий было сыграно столько, сколько можно выделить 2-элементных подмножеств в множестве из 20 элементов, т.е. $C_{20}^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$.

Пример 2.31. В лаборатории работают 8 физиков и 10 химиков. Надо создать рабочие группы по трем темам. В первую группу должны войти 4 физика, во вторую 5 химиков, а третья должна состоять из трех человек, которые могут быть как физиками, так и химиками. Сколькими способами можно создать такие группы? ***Решение.*** $C_8^4 \cdot C_{10}^5 \cdot C_9^3$.

Пример 2.32. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$.

Сочетания с повторениями.

С*очетанием* с повторениями *из n элементов по k* называется последовательность (кортеж), содержащая *k* элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из *n* типов.

Пример 2.33. Пусть А=$\{$а,в,с$\}$. Из трех элементов данного множества можно составить следующие сочетания по два с повторениями: (а,а), (а,с), (с,а), (а,в), (в,а), (в,в), (в,с), (с,в), (с,с).

Теорема. Число различных сочетаний из *n* элементов по *k* с повторениями равно $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$

Доказательство. Каждое сочетание полностью определяется, если указать, сколько элементов каждого из *n* типов в него входит. Поставим в соответствие каждому сочетанию последовательность нулей и единиц, составленную по такому правилу: напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа входит в сочетание, далее поставим 0 и после него напишем столько 1, сколько элементов второго типа в входит в это сочетание и т.д. Например, написанным выше сочетаниям из трех букв по две будут соответствовать такие последовательности: 1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011.

Таким образом, каждому сочетанию из *n* по *k* соответствует последовательность из *k* единиц и *n*-1 нулей, и, наоборот, по каждой такой последовательности однозначно восстанавливается такое сочетание. Поэтому число сочетаний с повторениями из *n* по *k* равно числу перестановок с повторениями $\overline{C}_n^k = P(n-1,k) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$.■

Пример 2.34. Сколькими способами можно купить букет из 9 роз, если в продаже имеются розы трех цветов: белые, розовые и красные?

Решение. $\overline{C}_3^9 = C_{9+3-1}^9 = C_{11}^9 = \dfrac{11!}{9!\cdot 2!} = 55$.

Пример 2.35. Сколькими способами можно распределить 10 тетрадей между тремя студентами.

Решение. $\overline{C}_3^{10} = C_{10+3-1}^{10} = C_{12}^{10} = \dfrac{12!}{10!\cdot 2!} = 66$.

Пример 2.36. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток?

Решение. $\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = \dfrac{21!}{12!\cdot 9!}$.

2.3. Формула бинома Ньютона.

Знаменитая биномиальная формула Ньютона используется в самых различных рассуждениях. Ее естественным обобщением является часто применяемая полиномиальная формула.

В биномиальной формуле используются коэффициенты C_n^k. При действиях с ними полезны следующие правила:

1. ***Правило симметрии:*** $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Это правило непосредственно следует из формулы для числа выборок. Оно выражает тот факт, что каждая выборка *B* каких-нибудь *n* из *k* элементов множества *A* определяет свое дополнение *A**B* (совпадает с разностью, т.к. $B \subset A$), состоящее из *n*-*k* элементов.

Описательно правило симметрии означает следующее: безразлично, какие из *n* и *n*-*k* элементов рассматриваемых предметов считать выбранными, а какие оставшимися.

Это тождество можно также доказать путем тождественных преобразований: $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = C_n^k$.

Пример 2.37. Сколькими способами можно выбрать две из трех монет?

Ответ: $C_3^2 = C_3^1 = 3$.

Замечание. В этой задаче удобнее считать выбранными одну монету.

Пример 2.38. Сколькими способами можно выбрать три из пяти букв слова «число»?

Ответ: $C_5^3 = C_5^2 = 10$.

2. ***Правило Паскаля***. При подсчете биномиальных коэффициентов C_n^k иногда удобно использовать правило, сформулированное Паскалем.

В соответствии с определением выборки как части множества можно употреблять символ для числа выборок при каждом целом n:

$$C_n^k = \begin{cases} 0, \text{ если } k < 0 \\ \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, \text{ если } 0 \le k \le n \\ 0, \text{ если } k > n \end{cases}$$

Равенства нулю при $k<0$ и $k>n$ соответствует тому, что множество из n элементов не содержит частей со строго отрицательным числом элементов или с числом элементов, строго большим n.

Правило Паскаля: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Если $k<0$, то обе части равенства Паскаля равны нулю. Если $k=0$, то оно сводится к равенству 1=1+0, если $k=n+1$, то к равенству 1=0+1. Если $k>n+1$, то обе части равенства Паскаля равны нулю.

При $0<k<n+1$ с помощью формулы для числа выборок получаем, что правило верно:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!\cdot(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!\cdot(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$$

При 0< $k \le n$ правило Паскаля выражает тот факт, что каждая выборка k элементов из $n+1$ либо содержит некоторый данный элемент, либо нет, причем число выборок первого типа равно числу выборок k-1 элементов из n остальных, число выборок второго тип равно числу выборок k элементов из n.

Правило Паскаля наглядно изображается *треугольником Паскаля*:

n=0	1
n=1	1 1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 **4** **6** 4 1
n=5	1 5 **10** 10 5 1

На k-м месте n-й строки этого треугольника расположено число C_n^k. Начальная строка треугольника и начальное место каждой строки считаются нулевыми. Боковые стороны треугольника Паскаля образованы числами 1. А каждое k-е внутреннее число (n+1)-й строки в соответствии с правилом Паскаля равно сумме расположенных над ним (k-1)-го и k-го чисел n-й строки.

Например, отмеченное на рисунке равенство 10=4+6 соответствует равенству $C_5^3 = C_4^3 + C_4^2$.

3. ***Формула Ньютона:*** $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

$$(x+y)^n = C_n^0 x^0 y^n + C_n^1 x\ y^{n-1} + C_n^2 x^2 y^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} x^k y^{n-k}$$

Замечание: при вычислении биномиальных коэффициентов в разложении бинома Ньютона достаточно дойти до середины разложения, далее коэффициенты будут повторять уже найденные.

Доказательство: (методом математической индукции).

Рассмотрим частные случаи: при n=0 $(x+y)^0 = C_0^0 x^0 y^0 = 1$;

при n=1 $(x+y)^1 = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x + y$;

при n=2 $(x+y)^2 = C_2^0 x^0 y^2 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2$;

при n=3 $(x+y)^3 = C_3^0 x^0 y^3 + C_3^1 x^1 y^2 + C_3^2 x^2 y^1 + C_3^3 x^3 y^0 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$.

Пусть верна формула при некотором n: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$,

докажем, что формула будет верна при $n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n+1-k} = \text{(выделим первое и последнее слагаемое)=}$$

$$= C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \text{(применяя замену и}$$

правило Паскаля, получаем:

$$= x^{n+1} y^0 + \sum_{k=0}^{n-1} (C_n^k + C_n^{k+1}) x^{k+1} y^{n-k} + x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}.$$

По принципу индукции доказали, что формула Ньютона будет верна при любом натуральном n.■

Следствие 1. Формула к-*ого* слагаемого бинома Ньютона:

$T_k = C_n^{k-1} x^{k-1} y^{n-k+1}$, где $k = \overline{0,n}$

Пример 2.39. Найдем 5-ый член разложения бинома Ньютона $\left(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^8$.

$$T_5 = C_8^4 (2x\sqrt{x})^4 (\sqrt[3]{x})^{8-4} = \frac{8!}{4!4!} 2^4 \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^4 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4 = = 1120 x^7 \sqrt[3]{x}.$$

Следствие 2. Если y=1, то $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Следствие3 . Если x=y=1, то $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Следствие 4. Если x=-1, y=1, то $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k = 0$.

Из этой формулы следует, что суммы четных и нечетных коэффициентов бинома Ньютона равны.

Следствие 5. $\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k = n\cdot 2^{n-1}$.

Доказательство:

При y=1 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Дифференцируем эту формулу по *x*:

$$n\cdot(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$$

Положим x=1: $n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k$ ■

Полиномиальная формула.

Естественным обобщением формулы Ньютона является формула для степени суммы нескольких слагаемых.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

Замечание: суммирование ведется по всем неотрицательным решениям $n_k \geq 0$ уравнения в целых числах $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$.

Числа $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ называются ***полиномиальными коэффициентами***.

При *k*=2 данное равенство имеет вид: $(x_1 + x_2)^n = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$. Это и есть формула бинома Ньютона.

Пример 2.40. Найдем коэффициент при a^3c^5 после раскрытия скобок в выражении $(a+c)^8$.

Решение. Искомый коэффициент равен $C_8^3 = 56$.

Пример 2.41. Найдем восьмой член разложения бинома Ньютона $(x+2)^{12}$ ***Решение.*** $T_8 = C_{12}^7 x^7 y = \frac{12!}{7!5!} x^7 y = 72\cdot 11\cdot x^7 y = 792x^7 y$.

Пример 2.42. В биноме Ньютона $(x+1)^{12}$ найдем слагаемое, содержащее x^6.

Решение. $T_k = C_n^{k-1} x^{k-1} y^{n-k+1} = C_{12}^{k-1} x^{k-1}$, $x^{k-1} = x^6$, значит k=7.

$T_7 = C_{12}^6 x^6 = \frac{12!}{6!6!} x^6 = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot x^6 = 924 x^6$.

Пример 2.43. Пусть в разложении бинома Ньютона $(a^3 + c^2)^n$ коэффициент третьего члена равен 28. Найдем средний член разложения.

Решение. Имеем $C_n^2 = 28$, т.е. $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 28$ и $n = 8$. Значит, в разложении бинома Ньютона содержится 9 слагаемых. Средним является пятый член $C_8^4 (a^3)^4 (c^2)^4 = 70 a^{12} c^8$.

Пример 2.44. Найдем коэффициент при xy^3z^4 после раскрытия скобок в выражении $(x + y + z)^8$.

Решение. Искомый коэффициент равен $\frac{8!}{1!3!4!} = 280$.

Пример 2.45. Найдем коэффициент при xy^2z после раскрытия скобок в выражении $(x + 2y + z - 1)^5$.

Решение. *К*оэффициент при ab^2cd после раскрытия скобок в выражении $(a + b + c + d)^8$ равен $\frac{5!}{1!2!1!1!} = 60$. Другими словами, пятая степень суммы $a + b + c + d$ имеет слагаемое $60ab^2cd$. Пусть *a=x*, *b=2y*, *c=z*, *d=-1*. Тогда, раскрывая скобки в $(x + 2y + z - 1)^5$, мы получим слагаемое $60x(2y)^2 z(-1) = -240xy^2z$. Следовательно, коэффициент при xy^2z в выражении $(x + 2y + z - 1)^5$ равен -240.

2.4. Комбинаторика разбиений

(Упорядоченные и неупорядоченные разбиения множества)

В задачах на размещения, перестановки и сочетания из данных элементов составлялись различные комбинации, и мы считали, сколько таких комбинаций получается при тех или иных ограничениях. Судьба элементов, оставшихся после выбора комбинаций, нас не интересовала. Теперь мы будем рассматривать задачи, в которых элементы делятся на две или большее число групп, и надо найти все способы такого раздела. При этом будем различать следующие случаи:

1) порядок элементов в группах играет существенную роль или порядок элементов в группах никакую роль не играет;
2) имеет значение порядок самих групп или не имеет значение порядок самих групп;
3) различаются ли между собой элементы или нет;
4) различаются ли между собой группы, на которые делятся элементы;
5) могут ли быть пустыми группы или такие группы не допустимы.

В соответствии с выделенными случаями возникает целый ряд различных комбинаторных задач на разбиение.

Определение. Каждое семейство попарно не пересекающихся множеств $A_1,\ldots,\ A_k$ из $n_1,\ldots,\ n_k$ элементов, в сумме составляющих множество A из n элементов, называется, $n_1,\ldots,\ n_k$ - разбиением множества A.

Подсчитаем число разбиений конечного множества A, где $|A|=n$, на k различных попарно непересекающихся подмножеств. При формировании упорядоченной последовательности $A_1,\ldots,\ A_k$ на первое место подмножество A_1 можно выбрать $C_n^{n_1}$ способами, на второе место подмножество A_2 можно выбрать из оставшихся $n-n_1$ элементов $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами и т.д., на последнее место множество A_k можно выбрать из оставшихся $n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}$ элементов $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. По правилу прямого произведения получаем, что общее число упорядоченных разбиений множества A на к подмножеств равно

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!},$$

что совпадает с числом $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ перестановок с повторениями.

Замечание. Упорядоченные разбиения множества А на попарно непересекающиеся подмножества $A_1, \ldots, A_k$ допускают интерпретацию в терминах «корзин» и «шаров». Обозначим элементы исходного множества A «шарами». Под разбиением исходного (теперь множества шаров) на различные A_i упорядоченные подмножества будем понимать разложение шаров по к различным корзинам (упорядоченные $A_1, \ldots, A_k$ подмножества): n_1 шаров нужно положить в корзину A_1, n_2 шаров нужно положить в корзину A_2 и т.д., n_k шаров нужно положить в корзину A_k, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Как установлено, число таких разложений равно:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \blacksquare$$

Пример 2.46. Сколькими способами можно распределить 15 студентов по трем учебным группам по пять студентов в каждой?

Решение. $\dfrac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} = 68796$.

Пример 2.47. В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за выдвинутую кандидатуру проголосовали 19 человек, против 3, воздержались 3. Сколькими способами может быть проведено такое голосование.

Решение. Имеем разбиение множества $|A| = 25$ на три группы по 19, 3, 3, человек соответственно (или имеем три различные корзины: «за», «против», «воздержались», в которые необходимо разложить 25 шаров, соответственно 19 в первую, 3 во вторую, 3 в третью). Количество различных распределений определяется выражением $C_{25}^{19}\cdot C_6^3\cdot C_3^3=\dfrac{25!}{19!\cdot 3!\cdot 3!}$.

Неупорядоченные разбиения множества.

Подсчитаем, сколькими способами можно разбить множество A, где $|A|=n$, на подмножества, среди которых для каждого $i=1,2,\ldots,n$ имеется подмножеств с $m_i\ge 0$ с i элементами. Тогда верно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} i\cdot m_i=n$. Данное разбиение позволяет представить исходное множество следующим образом:

$A=\bigcup\limits_{j=1}^{m_1}A_{1j}\bigcup\limits_{j=1}^{m_2}A_{2j}\cup\ldots\bigcup\limits_{j=1}^{m_n}A_{nj}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{m_i}A_{ij}$, где A_{ij} попарно не пересекаются.

Порядок подмножеств в разбиении не является существенным. Так, например, считаются одинаковыми разбиения множества $A=\{1,2,3,4,5\}$ вида:

$\{1,3\},\{4\},\{2,5\}$;

$\{4\},\{2,5\},\{1,3\}$;

$\{1,3\},\{2,5\},\ \{4\}$.

Обозначим число неупорядоченных разбиений множества A через $N(m_1,m_2,\ldots m_n)$. Рассмотрим схему формирования упорядоченных разбиений для представления $n=1\cdot m_1+2\cdot m_2+\ldots+n\cdot m_n$:

$$(C_n^1C_{n-1}^1\ldots C_{n-m_1+1}^1)(C_{n-m_1}^2C_{n-m_1-1}^2\ldots C_{n-m_1-2m_2}^2)(C_{n-m_1-2m_2-1}^3\ldots)\ldots C_{n-m_1-2m_2-\ldots-(n-1)m_{n-1}}^n)$$

$$\frac{n!}{1!1!\ldots1!2!\ldots2!n!\ldots n!}=\frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}}$$

Воспользуемся интерпретацией формирования упорядоченных разбиений как разложения n различных шаров по различным $m_1+m_2+\ldots+m_n$ корзинам так, что в каждую из m_i корзину кладут i шаров. Теперь откажемся от упорядоченности подмножеств в разбиении. Пусть все корзины имеют различное число шаров, такие корзины можно рассматривать как различные (они отличаются числом шаров). В этом случае упорядоченные и неупорядоченные разложения шаров совпадают. Пусть теперь в разложении существуют m_i корзин с одинаковым числом шаров. При упорядоченном разложении такие корзины рассматриваются как различные. Однако при неупорядоченном разложении обмен шарами таких корзин можно рассматривать как соответствующую перестановку указанных корзин, что не приводит к новым разложениям. Если количество корзин с одинаковым числом шаров равно m_i, то неупорядоченных разложений будет в $m_i!$ меньше, чем упорядоченных. Тогда общее число неупорядоченных разбиений будет в $m_1!m_2!\ldots m_n!$ раз меньше, чем упорядоченных. Следовательно,

$$N(m_1, m_2, \ldots m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n} m_1!m_2!\ldots m_n!}.$$

Заметим, что если выполнено упорядоченное разбиение числа n на подмножеств различной мощности, то они совпадают с неупорядоченными разбиениями. В этом случае все $m_i \in \{0,1\}$.

Пример 2.48. Сколькими способами из группы в 17 человек можно сформировать 6 коалиций по 2 человека и 1 коалицию из 5 человек?

Решение. Требуется разбить множество из 17 человек на непересекающиеся и неупорядоченные группы людей. Откуда искомое число равно $\frac{17!}{(2!)^6(5!)^1 6!1!}$.

Вывод:

1. Число способов разложить $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ предметов по k различным корзинам (ящикам) так, чтобы в первую легло m_1 предметов, во вторую m_2 предметов,…, в k-ую m_k предметов, равно $P(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$.

2. Если n различных предметов распределены на k групп так, чтобы m_1 групп содержали по p_1 предметов, m_2 групп по p_2 элементов,…., m_l групп по

p_l элементов ($k = m_1 + m_2 + \ldots + m_l$ и $n = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_l p_l$), то раздел может быть произведен:

а) $\dfrac{n!}{(p_1!)^{m_1}(p_2!)^{m_2}\ldots(p_l!)^{m_l}}$ способами (если группы различимы)

б) $\dfrac{n!}{(p_1!)^{m_1}(p_2!)^{m_2}\ldots(p_l!)^{m_l}\, m_1!m_2!\ldots m_l!}$ способами (группы неразличимы друг от друга)

Частный случай: если надо разделить $k{\cdot}p$ различных предметов на k групп по p предметов в каждой группе, причем группы неразличимы друг от друга, то число способов раздела равно $\dfrac{(kp)!}{(p!)^k\, p!}$.

Разбиение чисел.

Будем рассматривать задачи, в которых все разделяемые предметы совершенно одинаковы. В этом случае можно говорить не о разделе предметов, а о разбиении натуральных чисел на слагаемые, которые, конечно, тоже должны быть натуральными числами.

Постановка задачи: сколькими способами можно представить число n в виде суммы натуральных слагаемых, если нет никаких ограничений ни на сами слагаемые, ни на их число, а два разбиения, отличающихся порядком слагаемых, считаются различными?

Множество всех таких разбиений числа n можно разбить на классы, отнеся в k-й класс разбиения с k слагаемыми. Каждому такому разбиению отвечает раскладка n одинаковых шаров в k ящиков, при которой ни один из ящиков не пуст. Число таких раскладок равно C_{n-1}^{k-1}.

Чтобы найти общее число разбиений, надо просуммировать полученные ответы по к от 1 до n.

Но эта сумма равна $C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$. Значит, существует 2^{n-1} способов разложить число n на натуральные слагаемые.

Возникает много других задач. В одних задачах учитывается порядок слагаемых, а в других нет. Можно рассматривать лишь разбиения на четное или только нечетное число слагаемых, на различные или на произвольные слагаемые и т.д.

Основным методом решения задач на разбиение является сведение к задачам о разбиении меньших чисел или о разбиении на меньшее число слагаемых.

Пример 2.49. В наличии имеются книги трех наименований, причем имеются три экземпляра книг одного наименования, пять экземпляров другого и два экземпляра третьего. Количество различных расстановок этих книг на одной полке составляет: $\frac{(3+5+2)!}{3!\cdot 5!\cdot 2!}=2520$.

Общий случай: Имеются n различных наименований, причем по k экземпляров книг каждого наименования, тогда все nk экземпляры книг можно разместить на одной полке $\frac{(nk)!}{(k!)^n}$ способами.

Пример 2.50. Из 60 различных белых грибов хотят сделать 4 связки по 15 грибов каждая. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $\frac{60!}{(15)^4\cdot 4!}$ (делим на 4!, так как порядок связок не имеет значения).

Задачи

1. Упростить выражение: $B=\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}\right)$; $D=\frac{5!}{m(m+1)}\frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$.

2. Решить уравнение: $\frac{m!-(m-1)!}{(m+1)!}=\frac{1}{6}$.

3. Решить неравенство: $\frac{1}{n-2}\left[\frac{5}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}-\frac{n(n-1)!}{12(n-3)(n-4)!2!}\right]\le 5$.

4. Упростить выражение: $M=\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}, n\ge 6$.

5. Решить неравенство: $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\frac{15}{(n-1)!}$.

6. Доказать: $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2A_{n+k}^n$.

7. Упростить: $D=\frac{A_{49}^{12}+A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}-\frac{A_{17}^{10}+A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$.

8. Решите систему $\begin{cases} A_n^m : A_n^{m-1}=9 \\ C_n^m : C_n^{m-1}=\frac{3}{2} \end{cases}$.

9. Решите уравнение: $12C_{x+3}^{x-1}=55A_{x+1}^2$.

10. Решите уравнение: $\frac{P_{x+2}}{A_x^n\cdot P_{x-n}}=132$.

11. Доказать тождество: $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n=3^n$.

12. Доказать тождество: $C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=C_{n+2}^{m+1}$.

13. Доказать тождество:

$$\frac{1}{1(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{2^{n-1}}{n!}.$$

14. Доказать тождество: $\frac{C_n^1}{C_n^0}+\frac{2C_n^2}{C_n^1}+\frac{3C_n^3}{C_n^2}+\ldots+\frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$.

15. Найти все рациональные члены разложения $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{5}}\right)^{19}$.

16.Найти все рациональные члены разложения $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{21}$.

17. Найдите коэффициент при x^8 в разложении

$\left(x^2+x^4\right)^6+\left(x-5\right)^8+\left(2x-x^3\right)^{10}$.

18. Сумма коэффициентов первого, второго и третьего членов разложения $\left(x^{-1}+x^2\right)^n$ равна 46. Найти *n*.

19. Найти номера трех последовательных членов разложения бинома $(a+в)^{23}$, коэффициенты которых образуют арифметическую прогрессию.

20. Найти коэффициент при abc^3 после раскрытия скобок в выражении $(2a+b-c+2)^7$.

21.Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

22.Из 12 слов мужского рода, 9 слов женского рода и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

23.Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского, на любой другой из этих пяти языков. На сколько больше словарей придется издать, если число различных языков равно 10?

24.В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов, Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если Ваня взял апельсин?

25.Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную из слова «здание»?

26.Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

27.В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С.Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

28.У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

29.Бросают игральную кость с шестью с шестью гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими различными способами они могут упасть?

30.На железнодорожной станции имеется 12 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

31.Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «ингредиент»?

32.Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

33.Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

34.Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

35.Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть им поставлены отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?

36.Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы? В группу могут входить 1, 2, 3,….,15 человек. Та же задача для случая выбора из n человек.

37.Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100+200+400+800 ?

38.Сколькими способами можно переставить буквы слова «опоссум» так, чтобы буква «п» шла непосредственно после буквы «о»?

39.В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов равно 32)?

40.У отца есть 5 попарно различных апельсинов, которые он выдает своим восьми сыновьям так, что каждый получает либо 1 апельсин, либо ничего. Сколькими способами можно это сделать?

41.Поезду, в котором находится 40 пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками?

42. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

43.Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие 2 женщины не сидели рядом?

44.На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что Б не должен выступать до того, как выступит А? То же условие, но А должен выступить непосредственно перед Б.

45.Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

46. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

47.Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

Ответы к задачам.

№21. 20; №22. 1080; №23. $A_5^2=60$; $A_{10}^2-A_5^2=70$; №24. 11·10 > 12·9; №25. 9; №26. 6·5=30; №27. 6·3·4+5·4+7·6=134; №28. 300+300·299+300·299·298;

№ 29. 6·8=48; №30. $\overline{A}_3^{12}=3^{12}$=531441; №31. $\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$=453600; №32. $C_3^2C_5^3=30$;

№33. 6·8·10=480 ; (10+8+6-2)=22; №34. $2\cdot(5!)^2$; №35. $\overline{A}_3^4=3^4$ № 36. $2^{15}-1$ (2^n-1); №37. $C_{30}^4; A_{30}^4$; №38. $\frac{6!}{2!}$=360; №39. 2^{32}; №40. A_8^5; №41. $\overline{A}_5^{40}=5^{40}$;

№42. $\overline{C}_{10}^{12}=C_{12+10-1}^{12}=C_{21}^{12}$; $\overline{C}_{10}^{8}=C_{17}^{12}$; C_{10}^8; №43. $2(7!)^2$; №44. $\frac{5!}{2}=60$; 4!=24;

№45. $C_4^2C_7^4+C_4^3C_7^3+C_4^4C_7^3=371$; №46. $A_4^3A_5^3A_6^3=172800$; №47. $\frac{8!}{4!}-5!=1560$.

Глава 3. Элементы теории графов.

3.1. Начальные понятия теории графов. Способы задания графов.

Теория графов – один из фундаментальных разделов дискретной математики. Сведения из этого раздела традиционно включались в курсы кибернетики, а затем и информатики, поскольку графы оказались очень продуктивным средством информационного (математического) моделирования структур систем и процессов, представления задач информационного характера.

Теория конечных графов – это раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами. В виде графов можно, например, представить схемы дорог и электрические цепи, географические карты и структурные формулы химических соединений, связи между людьми и группами людей.

Родоначальником теории графов является *Леонард Эйлер* (1707 – 1783). В 1736 году он решил *задачу о кенигсбергских мостах*, которая состояла в следующем: «Найти маршрут прохождения всех четырех участков суши (см. Рис. 3.1), который начинался бы на любом из них, заканчивался на этом же участке и ровно один раз проходил по каждому из семи данных мостов».

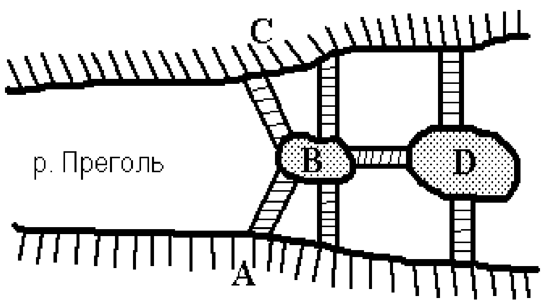


Рис. 3.1

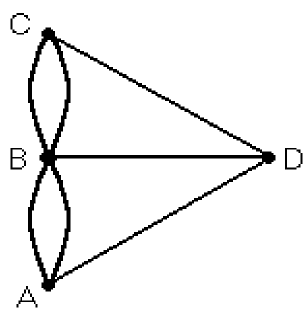


Рис. 3.2

При решении задачи Эйлер обозначил части суши точками, а мосты – линиями, и получил граф, изображенный на рисунке 3.2. Утверждение о существовании положительного решения задачи о кенигсбергских мостах эквивалентно утверждению о возможности обойти этот граф. Можно попытаться решить эту задачу эмпирически, производя перебор всех маршрутов, но все попытки окончатся неудачей. Исключительный вклад Эйлера в решении этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута. Однако этот результат более ста лет оставался единственным результатом теории графов.

В 1847 году инженер-электрик Г. Кирхгофф, рассматривая электрические цепи, каждую из них заменял на соответствующий граф. В 1857 году математик А. Кэли, стараясь найти все изомеры предельных углеводородов, открыл важный класс графов – деревья. В 1869 Жордан независимо от Кэли ввел и изучал деревья, как отдельные математические объекты. С того времени можно считать, что теория графов возникла, как самостоятельная математическая дисциплина. Однако термин «граф» впервые был введен венгерским математиком Д. Кенигом лишь в 1936 году, спустя 200 лет после решения Эйлером первой задачи теории графов.

Имея в своей основе простейшие идеи, теория графов является удобным и эффективным инструментом для решения задач, относящихся к весьма широкому кругу научных проблем (конструирование автоматизированных систем управления, построение переключательных схем, сетевое оптимальное планирование, задачи экономического содержания, т.д.). Возможность приложения теории графов к столь различным дисциплинам заложена, в сущности, уже в самом понятии графа, сочетающего в себе теоретико-множественные, комбинаторные и топологические аспекты.

Определение 1. ***Графом*** $G(V,E)$ называется совокупность двух множеств $\{V,E\}$, где V – множество вершин и E – множество ребер, между элементами которых определено ***отношение инцидентности*** P – каждое ребро $e\in E$ инцидентно ровно двум вершинам v и $w\in V$, которые оно соединяет.

Одним из наиболее удобных способов задания графа является геометрический. ***Геометрическое представление*** графа – это схемы, состоящие из точек и соединяющих эти точки отрезков прямых или кривых (примеры графов изображены на рисунке 3.3).

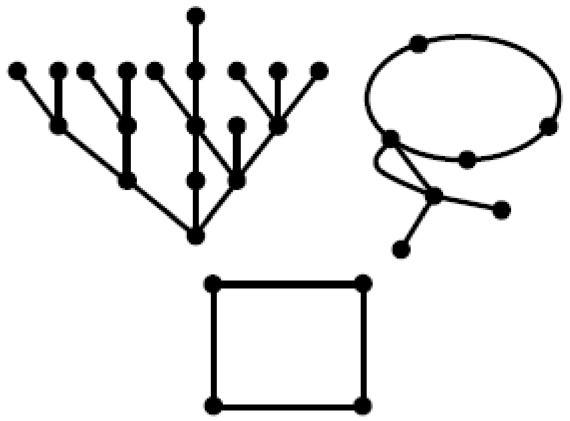


Рис.3.3. Виды графов

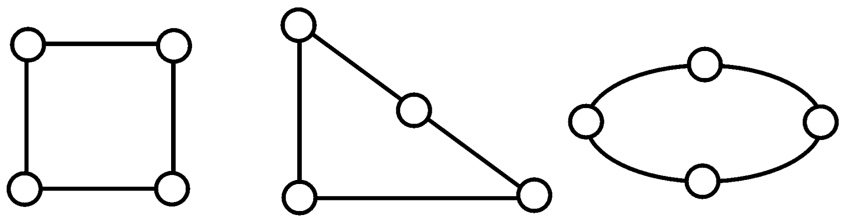
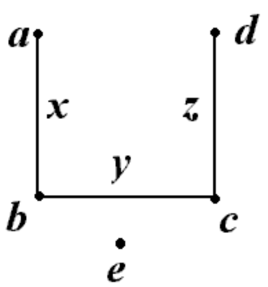


Рис.3.4. Изображение одного графа различными отрезками

Две вершины *v* и *w* называются ***смежными***, если существует соединяющее их ребро *e* (то есть ребро вида (*v*, *w*)); при этом вершины *v* и *w* называются ***инцидентными*** этому ребру *e* (а ребро *e* – ***инцидентным*** этим вершинам). Аналогично, два различных ребра графа *G* называются ***смежными***, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину. Смежность и инцидентность – это два бинарных отношения на совокупности всех элементов графа: смежность – между однородными, а инцидентность – между разнородными элементами. Каждое ребро инцидентно всегда ровно двум вершинам – своим концам. Вершина же может быть инцидентна любому числу ребер.

Пример.3.1.



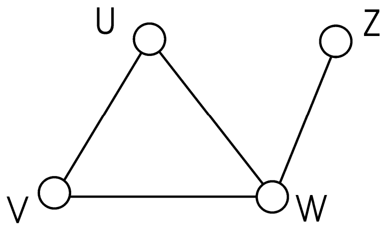
У графа на рис.3.5. вершина *a* инцидентна ребру *x*; *b* инцидентна ребрам *x* и *y*; вершина *c* инцидентна *y* и *z*; вершина *d* инцидентна ребру z; вершины *a* и *b* – смежные;

ребра x и y – смежные; вершина e не инцидентна никакому ребру и не смежна никакой вершине.

Рис. 3.5.

Граф называется ***конечным***, если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и ***тривиальным***, если его множество вершин V содержит один элемент. В противном случае граф называется ***бесконечным***.

Простой граф (рис. 3.6) – это граф, у которого каждую пару вершин может соединять не более чем одно ребро.



Множество вершин данного графа $V(G) = \{u, v, w, z\}$, а множество ребер $E(G)=\{(u, v), (v, w), (u, w), (w,z)\}$. В простом графе каждую пару вершин может соединять не более чем одно ребро.

Рис. 3.6. Простой (обыкновенный) граф

Теорема 1.

Число различных простых графов с n вершинами равно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Доказательство.

Возьмем какое-нибудь множество V, состоящее из n элементов, и будем рассматривать всевозможные простые графы с множеством вершин V. Эти графы различаются только множествами ребер, а каждое ребро – это неупорядоченная пара различных элементов из V. В комбинаторике такие пары называются сочетаниями из n по 2, их число равно $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$. Каждая пара может быть включена или не включена в множество ребер графа. Применяя правило произведения, приходим к нужному результату. ■

Существуют графы, в которых две и более вершины могут быть соединены более чем одним ребром. Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются ***параллельными*** или ***кратными***. Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется ***петлей***. Объект, в котором могут быть петли и кратные ребра, называется ***мультиграфом*** или просто графом.

Наибольшее число кратных рёбер, соединяющих какую-либо пару вершин, называется ***мультичислом***. Мультичисло графа, представленного на рис. 3.7, m=3.

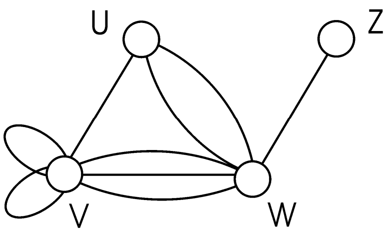


Рис.3.7. Мультиграф

Не всегда точки пересечения ребер принимаются за вершины графа (рис.3.8). На рис.3.8 а изображен граф с четырьмя вершинами и шестью ребрами, на рис.3.8 б граф с пятью вершинами и двумя ребрами, на рис.3.8 в граф с тремя вершинами, не имеющий ни одного ребра.

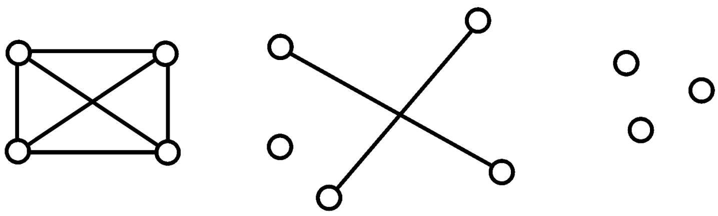


Рис.3.8 а) б) в)

Изолированные вершины – это такие вершины, которые не имеют инцидентных ребер, они могут быть инцидентны лишь одной или нескольким петлям. Из всего этого следует, что изолированные вершины недостижимы из любых других вершин. ***Висячие вершины*** – это такие вершины, которые имеют только одно инцидентное ребро. Граф, изображенный на рис.3.8 б, имеет одну изолированную вершину и 4 висячих вершин, а в графе, изображенном на рис.3.8 в, все три вершины изолированные.

Нулевой граф (пустой граф) – граф, не содержащий ни одного ребра, то есть состоящий из одних изолированных вершин. Пустой граф с множеством вершин $\{1,2,...,n\}$ обозначается через O_n.

Полный граф – граф, в котором каждые две вершины смежные. Полный граф с множеством вершин $\{1,2,...,n\}$ обозначается через K_n. Граф K_1, в частности, имеет одну вершину и ни одного ребра. Примеры полных графов представлены на рисунке 3.9.

В полном графе каждая его вершина инцидентна одному и тому же числу ребер. Если у графа *n* вершин, то ребер, инцидентных каждой из вершин, будет (*n-1*). Для задания полного графа достаточно знать число его вершин.

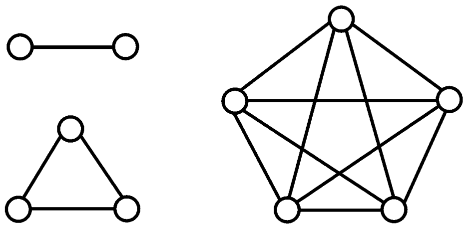


Рис.3.9. Полные графы с *n* вершинами $K_2, K_3,\ K_5$

Пример 3.2. Докажем, что в полном графе с *n* вершинами $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ребер.

Пусть граф имеет *n* вершин. Так как граф полный, то каждая его вершина соединена с другими по одному разу, то есть она инцидентна (*n-1*) ребру. Но каждое ребро инцидентно двум вершинам, следовательно, оно считается два раза. Таким образом, количество ребер в полном графе с *n* вершинами определяется как число неупорядоченных пар, составленных из всех *n* вершин графа, т.е. как число сочетаний из *n* элементов по 2. Следовательно общее количество ребер будет $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.■

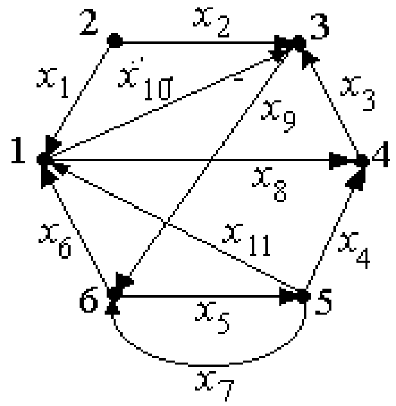
Пример 3.3. Проверим, существует ли полный граф с семью ребрами:

Общее количество ребер в полном графе $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, $n\in N$.

$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=7$, тогда $n^2-n-14=0$, $D=1+56=57$, то есть $\sqrt{D}=\sqrt{57}\notin N$, значит такого полного графа не существует. ■

Ребра могут быть ориентированными и неориентированными. Если ребро, соединяющее вершину x с вершиной y, не имеет направления, то оно называется ***звеном***. Графы, все ребра которых являются звеньями, будем называть ***неориентированными*** или ***н-графами*** (см. рис.3.3 – 3.9).

Если для ребра, соединяющего две вершины, указано направление от одной вершины к другой, то в этом случае оно называется ***направленным*** (***ориентированным***), или ***дугой*** и изображается стрелкой, направленной от вершины, называемой *началом*, к вершине, называемой ***концом***. Графы, все ребра которых являются дугами, будем называть ***ориентированными*** или ***орграфами*** (см. Рис.3.10).



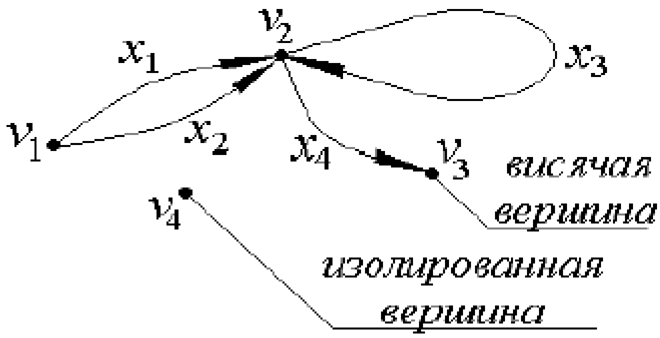


Рис. 3.10. Ориентированные графы

Вершины орграфа можно использовать для представления объектов, а дуги – для отношений между объектами. Например, вершины орграфа могут представлять города, а дуги – маршруты рейсовых полетов самолетов из одного города в другой. Ориентированные графы являются основным объектом исследований в прикладной теории графов, поскольку большинство исследуемых граф-моделей сложных систем представляют орграфами. Например, орграфы моделируют поток информации через граф-модель, используя импульсную модель, согласно которой через входную вершину граф-модели в систему поступает некоторое количество информации в виде импульса, который генерирует импульсы в соседних с входной вершинах. При этом дуги интерпретируются как операторы, воздействующие на пересылаемые по ним импульсы. Обработка информации завершена, если процесс перемещения импульсов прекращается и на выходе системы появляется требуемая информация.

Турнир – ориентированный граф, в котором каждая пара вершин соединена одним ребром.

Ор-граф без кратных петель и кратных дуг одного направления называется ***графом Бержа***.

Понятие бинарного отношения эквивалентно понятию простого (без кратных дуг) ориентированного графа.

Любой орграф *G(V, E)* без кратных дуг задает бинарное отношение *E* на множестве *V*, и обратно, пара элементов принадлежит отношению $(v_i, v_j) \in \rho \subseteq E \times E$ тогда и только тогда, когда в графе *G* есть дуга (v_i, v_j).

Элементы множества изображаются точками плоскости и образуют множество вершин графа. Отношения изображаются рёбрами графа: если пара *(x,y)* входит в отношение, то из вершины *x* проводится ориентированное ребро в вершину *y*.

Граф рефлексивного отношения имеет петли в каждой вершине.

Граф антирефлексивного отношения не имеет петель.

Граф симметричного отношения вместе с ребром, соединяющим *x* с *y*, содержит ребро, соединяющее *y* с *x*.

Граф транзитивного отношения обладает следующим свойством: если из вершины *x*, двигаясь вдоль рёбер, можно попасть в вершину *y*, то в графе должно быть ребро, непосредственно соединяющее *x* с *y*.

Простой граф (граф без дуг, без петель и кратных ребер) – не что иное, как антирефлексивное симметричное отношение.

На рис. 3.11 представлен граф с пятью вершинами, соответствующий нерефлексивному и неантирефлексивному, симметричному отношению.

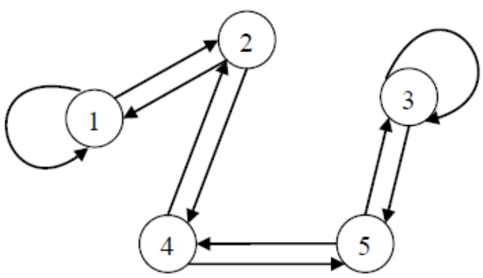


Рис. 3.11.

На рис. 3.12 представлен граф, соответствующий рефлексивному, несимметричному и транзитивному отношению.

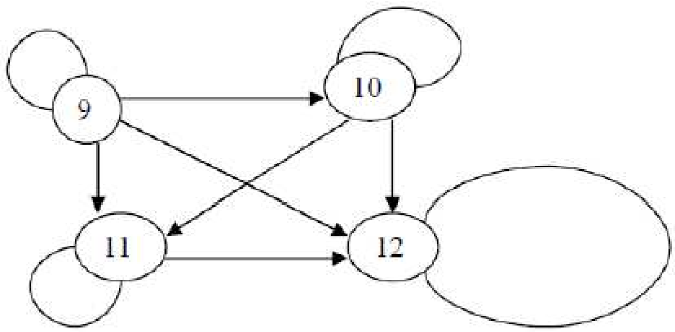


Рис. 3.12

Смешанными (рис.3.13) называются графы, в которых имеются звенья и дуги.

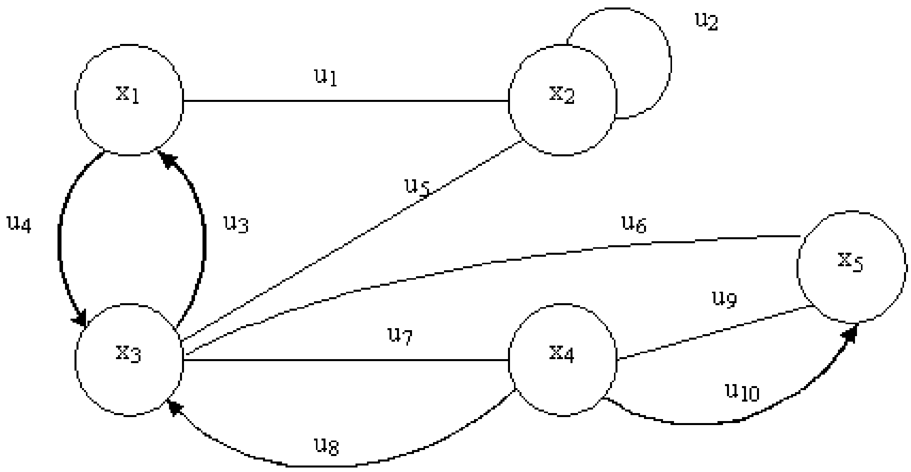


Рис. 3.13. Смешанный граф

Для графа на рис. 3.13 множество вершин $V=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$; множество ребер $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}\}$, отношение инцидентности:

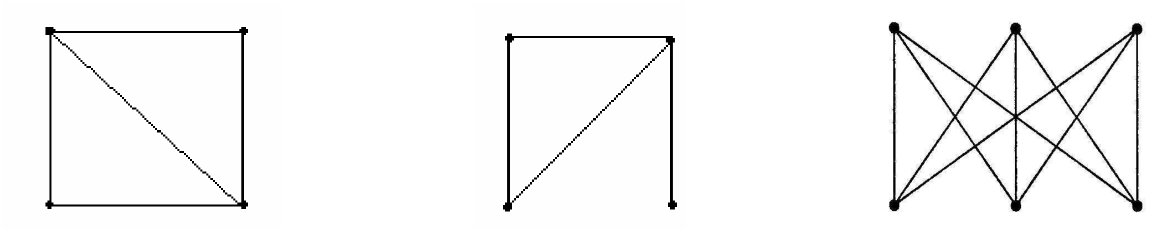
$P=\{(x_1,u_1,x_2),(x_2,u_1,x_1),(x_2,u_2,x_2),(x_3,u_3,x_1),(x_1,u_4,x_3),(x_3,u_5,x_2),(x_2,u_5,x_3),(x_3,u_6,x_5),$
$(x_5,u_6,x_3),(x_3,u_7,x_4),(x_4,u_7,x_4),(x_4,u_8,x_3),(x_4,u_9,x_5),(x_5,u_9,x_4),(x_4,u_{10},x_5)\}$

Звенья: u_1,u_2,u_5,u_6,u_7,u_9, u_1 и u_{11}; дуги: u_3,u_4,u_8,u_{10}; петля: u_2.

Псевдограф – граф, который может содержать петли и/или кратные ребра (рис. 3.13). Псевдограф без петель называется ***мультиграфом***.

В литературе также приняты следующие обозначения для некоторых графов (рис. 3.14): E_n – безреберный n-вершинный граф (n-груда); K_n –

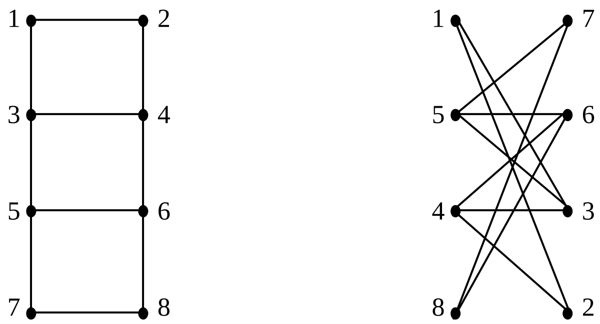
полный граф с n вершинами; C_n – простой n-вершинный граф (n-угольник). Граф C_3 часто называют треугольником, C_4 – квадратом.



Квадрат с диагональю　　　клешня　　　Полный двудольный граф $K_{3,3}$

Рис. 3.14. Примеры графов.

Геометрический граф – это плоская фигура, состоящая из вершин – точек плоскости и ребер – линий, соединяющих некоторые пары вершин. Всякий граф можно многими способами представить геометрическим графом. На рисунке 3.15 показаны два геометрических графа Γ_1 и Γ_2, представляющих один и тот же обыкновенный граф. Простое устройство этого графа, очевидное на левом изображении, не так легко обнаружить, рассматривая правое. Главная причина этого в том, что в Γ_1 ребра не имеют «лишних» пересечений.



Γ_1　　　Γ_2

Рис. 3.15. Γ_1 – плоская укладка графа, Γ_2 – не плоская укладка.

Геометрический граф называется ***планарным*** (***плоским***), если его можно изобразить на плоскости так, чтобы все точки пересечения ребер этого графа являлись его вершинами. Кроме удобства визуального анализа, есть много задач, где требуется плоское изображение графа. Не все графы являются планарными. Так полный граф K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$ не являются планарными.

Если плоскость разрезать по ребрам плоского графа, она распадется на связные части, которые называют ***гранями***.

Грань – область, ограниченная рёбрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и рёбер графа. Внешняя часть плоскости тоже образует грань. Всегда имеется одна неограниченная *внешняя* грань, все остальные грани называются *внутренними*.

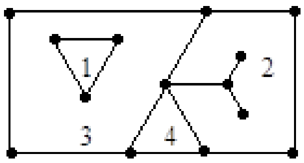
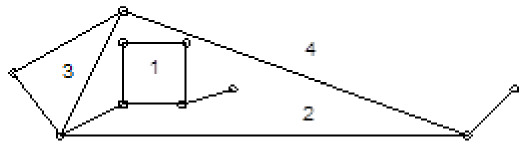
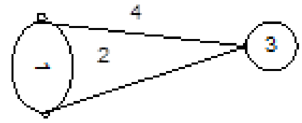


Рис. 3.16. Граф с 5 гранями





Данные графы имеют по четыре грани.

Для планарного графа верна ***формула Эйлера***: $n-m+r=2$, где n – число вершин, m – число ребер, r – число граней в графе.

Двудольный граф (биграф или чётный граф) – это граф $G(V,E)$ такой, что множество его вершин V разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, причём всякое ребро из E соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2, то есть концы каждого ребра принадлежат разным подмножествам. Множества V_1 и V_2 называются «долями» двудольного графа. Двудольный граф называется «полным», если любые две вершины из V_1 и V_2 являются смежными. Если $|V_1|=a$, $|V_2|=b$, то полный двудольный граф обозначается $K_{a,b}$.

Двудольные графы используются для решения логических задач.

Пример. 3.4. Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?

Решение. Обозначим точками карандаши и коробки. При построении ребер графа нужно учитывать следующие ***правила:***

1. Если вершинам одного множества соответствуют вершины другого множества, то соединяем их сплошной линией, а если не соответствуют, то штриховой линией.
2. Для каждой вершины одного множества существует одна и только одна вершина из другого множества.
3. Если некоторая вершина одного множества соединена с *n-1* вершиной другого множества штриховой линией, то с последней вершиной ее нужно соединить сплошной линией.

Используя эти правила, условия задачи можно отобразить на двудольном графе G1 (рис. 3.17). Сплошная линия будет обозначать, что карандаш лежит в соответствующей коробке, а пунктирная, что не лежит.

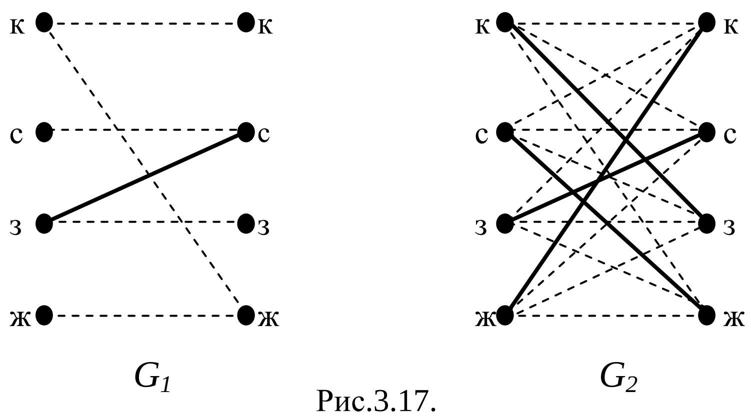


Рис.3.17.

Далее достраиваем граф по следующему правилу: поскольку в коробке может лежать ровно один карандаш, то из каждой точки должны выходить одна сплошная линия и три пунктирные. Получается граф G2, дающий решение задачи.

Пример 3.5. Беседуют трое друзей: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас белокурый, другой брюнет, третий рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из друзей?

Решение. Построим граф отношения, заданного в условии задачи. Для этого, прежде всего, выделим множество фамилий *М* и множество цветов волос *К*, элементы которых будем обозначать точками. Точки множества *М* назовем буквами *Б, Ч, Р* (Белокуров, Чернов и Рыжов); точки второго множества – *б, бр,* *р* (белокурый, брюнет, рыжий). Если точке из одного множества соответствует точка из другого, мы их соединим сплошной линией, а если не соответствует – штриховой. Условие задачи указывает лишь на несоответствия, поэтому вначале должен возникнуть граф, изображенный на рисунке 3.18 а.

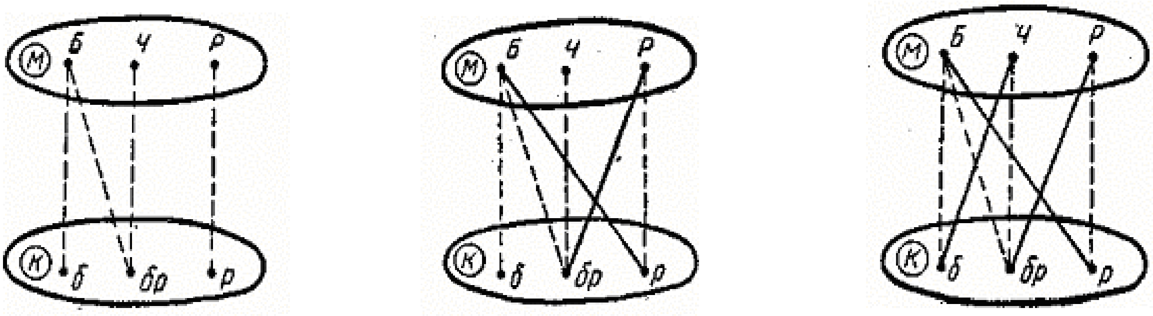


Рис.3.18 а) b) c)

Из условия задачи следует, что для каждой точки из множества *М* существует одна и только одна точка из множеств *К*, которая соответствует первой и, наоборот, каждой точке из множества *К* соответствует одна и только одна точка из множества *М*. Задача сводится к тому, чтобы найти это единственно возможное соответствие между элементами множеств *М* и *К*, т. е. к нахождению трех сплошных линий, соединяющих соответствующие точки множеств. Согласно правилам, если какая-то точка оказывается соединенной с двумя точками другого множества штриховыми линиями, то с третьей точкой ее необходимо соединить сплошной линией. Поэтому граф на рис.3.18 а) дополняется сплошными линиями, соединяющими точки *Б* и *р*, *Р* и *бр* (рис. 3.18 b). Далее остается соединить сплошной линией точку *Ч* и точку *б*, так как точка *Ч* соединена с точкой *бр* штриховой линией, а точка *р* уже «занята» (рис. 3.18 c). Таким образом, на графе этого рисунка автоматически прочитываем ответ: Белокуров – рыжий, Чернов – белокурый, Рыжов – брюнет.

В следующей задаче применение трехдольных графов помогает обнаружить наличие двух решений.

Пример 3.6. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1) девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;

2) Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;

3) Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;

4) девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели;

5) Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

Решение. Условию задачи соответствует граф, изображенный на рис. 3.19.

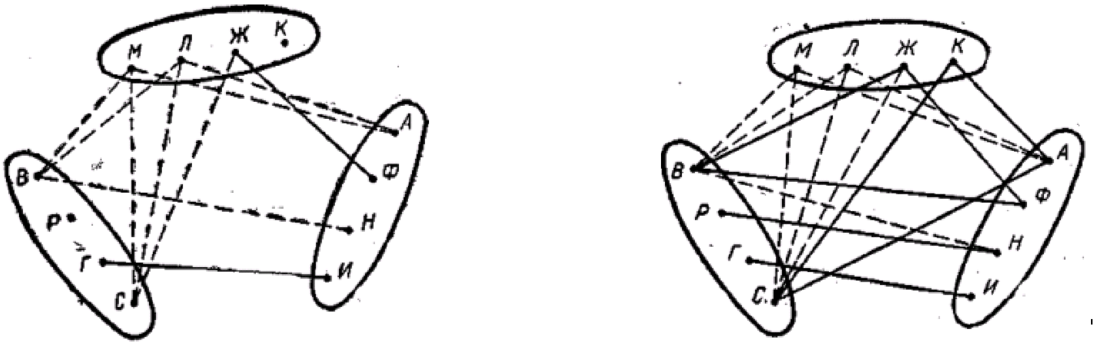


Рис.3.19 а) b)

Проведем последовательно следующие сплошные отрезки: КС, ВЖ, ВФ, АК (рис.3.19 b). Тогда образуются два «сплошных» треугольника ЖВФ и КСА.

Для трехдольных графов дополнительно к правилам, описанным в задаче 3.4, добавляется еще одно *правило*: если у треугольника с вершинами в трех множествах одно ребро – сплошная линия, второе – штриховая линия, то третье – штриховая линия.

Проводим еще сплошной отрезок РН. Теперь убеждаемся, что условия задачи не обеспечивают однозначности выбора третьей точки для каждой из пар РН и ГИ. Возможны следующие варианты «сплошных» треугольников: МГИ и ЛРН или ЛГИ и МРН. Таким образом, задача имеет два решения.

Ответ: а) Маша играет на гитаре и знает испанский язык, Лида на рояле и знает немецкий, Женя на виолончели и знает французский, Катя на скрипке и знает английский; б) Катя играет на скрипке и знает английский язык, Женя на виолончели и знает французский, Маша на рояле и знает немецкий, Лида на гитаре и знает испанский язык.

Способы задания графов.

Существует много различных способов задания графов:

1. Явное задание графа в виде двух множеств вершин *V* и ребер *E*, когда каждое ребро определено парой инцидентных ему концевых вершин.
2. Геометрический способ.
3. Матрица смежности.
4. Матрица инцидентности.
5. Список ребер.

Кроме теоретико-множественного определения графов и геометрической их реализации существуют еще несколько способов их задания.

В общем виде задать граф – значит указать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их занумеровать.

Пусть V=$\{v_1, v_2, ..., v_j, ..., v_n\}$ – вершины графа G, $|V| = n$, $E = \{e_1, ..., e_i, ..., e_m\}$ – ребра, $|E| = m$.

Матрица инцидентности $\|\varepsilon_{ij}\|$– одна из форм представления графа, в которой указываются связи между инцидентными элементами графа (ребро (дуга) и вершина). Столбцы матрицы соответствуют ребрам, строки – вершинам. Ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром (их инцидентность).

а) в случае н-графа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если ребро } e_j \textit{ инцидентно вершине } v_i \\ 0 - \textit{в противном случае} \end{cases}$$

б) в случае ор-графа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1,\ \textit{если вершина}\ \ v_i\ -\textit{начало дуги}\ e_j \\ -1,\ \textit{если вершина}\ \ v_i\ -\textit{конец дуги}\ e_j \\ \alpha\ (\textit{любое число, отличное от}\ -1{,}1,\ 0),\ \textit{если}\ e_j\ \ \textit{петля} \\ 0\ ,\ \ \textit{если}\ \ \textit{вершина}\ \ v_i\ \ \textit{не инцидентна дуге}\ e_j\,. \end{cases}$$

Матрица инцидентности однозначно определяет структуру графа, что позволяет читать всю необходимую информацию о графе, например, выявлять изолированные и висячие вершины, петли; определять степени вершин. Информация о вершинах считывается по строкам, о ребрах – по столбцам.

Матрица инцидентности н-графа обладает очевидными свойствами:

- в графе без петель каждый столбец этой матрицы имеет в точности две единицы, соответствующие паре вершин ребра;
- если в графе имеются петли, то в столбцах, соответствующим петлям, имеется по одной единице, а в остальных по две.

Пример 3.7. По матрице инцидентности определим характеристики графа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- в первой и четвертой строке по одной единице, следовательно, первая и четвертая вершины – висячие;
- в третьем столбце только один элемент равен нулю, следовательно, третье ребро – петля;
- суммируя элементы по строкам с учетом того, что вклад петли равен двум, можно определить степень каждой вершины.

Граф можно задать ***матрицей смежности*** $\left\| \delta_{ij} \right\|$ – квадратной матрицей размера $n \times n$ (n – число вершин графа), где по вертикали и по горизонтали перечисляются все вершины, на пересечении которых стоит в случае н-графа δ_{ij} – число ребер, соединяющих эти вершины; для орграфа δ_{ij}– число дуг с началом в i-той вершине и концом в j-той.

Если два графа равны, то их матрицы смежности совпадают. Если в графе поменять нумерацию вершин, матрицы и список ребер в общем случае изменятся, т.е. вид матрицы и списка зависит от нумерации вершин и ребер графа. Строго говоря, граф полностью задан, если нумерация его вершин зафиксирована.

Граф можно задать ***списком ребер***, представленным двумя столбцами: в левом перечисляются все ребра $e_i \in E$, а в правом – инцидентные ему вершины; для н-графа порядок вершин в строке произвольный, для орграфа первым стоит номер начала ребра.

Пример 3.8. Задать матрицами инцидентности и смежности, а также списком ребер следующие графы:

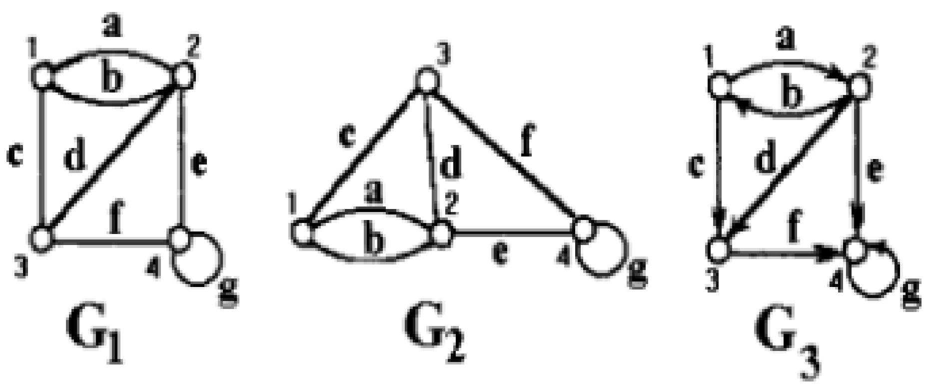


Рис. 3.20.

Матрицы инцидентности:

$G_1 = G_2$	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1

G_3	a	b	c	d	e	f	g
1	1	-1	1	0	0	0	0
2	-1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	-1	-1	0	1	0
4	0	0	0	0	-1	-1	2

Матрицы смежности:

G_1	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	1

G_3	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1

Для любого н-графа матрица смежности симметрична относительно главной диагонали. Если граф не имеет петель, то на главной диагонали стоят все нули.

Свойства матрицы смежности для ор-графа:

1. Сумма единиц по строке определяет полустепень исхода;

2. Сумма единиц по столбцу определяет полустепень захода;

3. Сумма единиц по строкам и по столбцам определяет степень вершин.

Список ребер является более компактным описанием графа. Для всех трех графов он одинаков. Для н-графов G_1 и G_2 порядок вершин может быть произвольным, для ор-графа сначала указывается начало дуги, потом конец.

ребро	**вершина**
a	1 2
b	2 1
c	1 3
d	2 3
e	2 4
f	3 4
g	4 4

Пусть G – неориентированный граф.

Степень вершины (англ. degree, также ***валентность***, англ. valency) в теории графов – количество рёбер графа G, инцидентных вершине x. При подсчёте степени ребро-петля учитывается дважды. Степень вершины обозначается как $d(x)$ или $deg(x)$. Максимальная и минимальная степень вершин графа G обозначаются соответственно $\Delta(G)$ и $\delta(G)$.

Набор степеней графа – это последовательность степеней его вершин, выписанных в неубывающем порядке.

Вершина степени 0 называется ***изолированной***, вершина степени 1 называется ***висячей*** (или концевой) вершиной.

Вершина называется ***нечетной***, если ее степень – число нечетное. Вершина называется ***четной***, если ее степень – число четное.

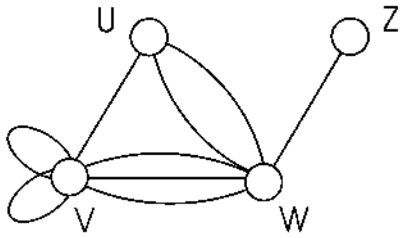


Рис. 3.21.

Набор степеней графа на рис. 3.21: (1, 3, 6, 8). Максимальная степень равна $\Delta(G)$=8, минимальная $\delta(G)$=1. Чётное число вершин (две вершины: u, z) данного графа имеют нечётную степень. Сумма степеней всех вершин равна 18, то есть равна удвоенному числу рёбер графа.

Теорема 1. Сумма степеней всех вершин графа с n вершинами равна удвоенному числу m его ребер: $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) = 2m$.

Доказательство: Подсчет всех степеней вершин графа можно вести по вершинам. Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин четна и равна удвоенному числу ребер.■

Из этой теоремы следует, что каждый граф имеет чётное число нечётных вершин.

Терема 2. (*Лемма о рукопожатиях*)[1]. Любой конечный неориентированный граф имеет чётное число вершин нечётных степеней.

Доказательство: Обозначим через $\sum_1$ *и* $\sum_2$ – количество всех вершин графа, имеющих нечетную и четную степень соответственно. По теореме 1 $\sum_1 + \sum_2 = 2m$, следовательно, $\sum_1 = 2m - \sum_2$. Правая часть этого соотношения четна, поэтому четна и левая часть.■

Если все вершины графа имеют одинаковую степень k, граф называют k-***регулярным*** или ***регулярным графом степени k***. В этом случае сам граф имеет степень k. Примерами регулярных графов являются правильные

---

[1] Лемма о рукопожатиях берёт название от популярной аналогии: в группе людей, некоторые из которых пожимают друг другу руки, чётное число людей поприветствовало таким образом нечётное число коллег.

многогранники: куб, октаэдр и т.д. Из теоремы 1 следует, что в регулярном графе степени k число ребер $\frac{kn}{2}$.

Пример 3.9. Александр, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?

Решение: Пусть каждому из пяти молодых людей соответствует определенная точка на плоскости, названная первой буквой его имени (см. рисунок 3.22), а производимому рукопожатию соответствует отрезок или часть кривой, соединяющие конкретные точки – имена.

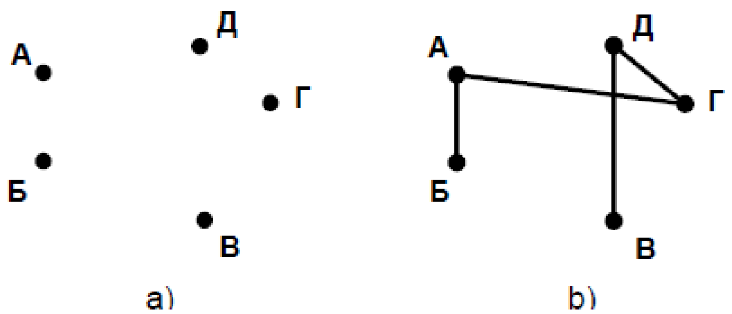


Рис. 3.22. а) нулевой граф с пятью вершинами; б) неполный граф с пятью вершинами

Рассмотрим процесс соединения точек А, Б, В, Г, Д ребрами.

1. Ситуация, соответствующая моменту, когда рукопожатия еще не совершались, представляет собой точечную схему, изображенную на рис. 3.22 а). Такая схема, состоящая из «изолированных» вершин, называется ***нулевым графом***.

2. Ситуация, когда совершены еще не все рукопожатия, может схематически быть изображена, например, с помощью рисунке 3.22 b): пожали руки А и Б, А и Г, Д и Г, В и Д. Следующий момент, когда добавятся, например, пожатия рук А и В, Г и Б. Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются ***неполными графами.***

3. На рисунке 3.23 изображен граф, соответствующий всем совершенным рукопожатиям. Этот граф является ***полным графом.***

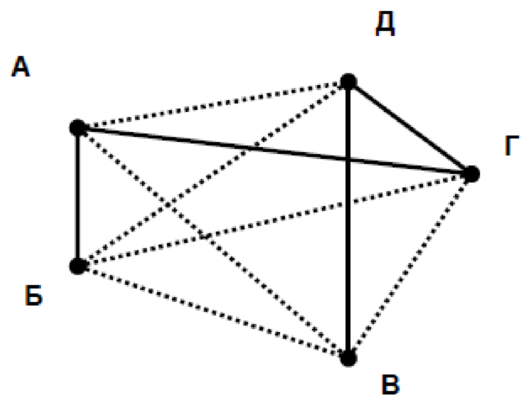


Рис. 3.23. Полный граф с пятью вершинами.

Если подсчитать число ребер графа, изображенного на рисунке 3.23, то это число и будет равно количеству совершенных рукопожатий между пятью молодыми людьми. Всего их 10.

Пример 3.10. Доказать, что число зрителей, пришедших на стадион смотреть футбольный матч и имеющих нечетное число знакомых (среди того же множества зрителей), четно.

На языке теории графов имеем нечетные вершины. Нужно доказать, что их четное количество, а это доказано в теореме 2.

Пример 3.11. В кабинете 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна пяти. Подсчитаем количество ребер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины). Поэтому число ребер графа должно быть равно 15·5/2, но это число нецелое, следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

При решении этой задачи мы выяснили, как подсчитать число ребер графа, зная степени всех его вершин. Для этого нужно просуммировать степени вершин и полученный результат разделить на два.

Ответ: соединить телефоны требуемым образом невозможно.

Полустепень захода $\deg^{+}(v)$ в орграфе для вершины v – число дуг, входящих в вершину. ***Полустепень исхода*** $\deg^{-}(v)$ в орграфе для вершины v – число дуг, исходящих из вершины. Петля дает вклад 1 в обе эти степени.

Для числа ребер в орграфе аналогично теореме 1, имеем:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \deg^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg^{-}(v_i).$$

Пример 3.12. Орграф задан матрицей инцидентности, в которой строки соответствуют вершинам, а столбцы дугам. Определим вектор полустепеней исходов вершин.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сумма единиц i-ой строки матрицы дает *полустепень исхода* вершины v_i, а *полустепень захода* вершины v_i, равна сумме -1 в i-ой строке матрицы инцидентности.

Ответ: (0,0,1,2,2,3).

Ориентированный граф называется ***регулярным*** (***однородным***) степени k, если все его локальные степени имеют одно и тоже значение $\deg^{+}(v)=\deg^{-}(v)=k$ для любой вершины v из G. Для регулярного орграфа имеет место соотношение $m = k \cdot r$.

Вершина ориентированного графа называется ***истоком***, если в нее не входит ни одна дуга, то есть ее полустепень захода равна нулю $\deg^{+}(v)=0$.

Вершина ориентированного графа называется ***стоком***, если из нее не выходит ни одной дуги, то есть ее полустепень исхода равна нулю $\deg^{-}(v)=0$.

Используя матрицу смежности легко определить локальные степени вершин графа: сумма элементов матрицы по строке равна локальной степени соответствующей вершины. Для орграфов по строке определяются полустепени исхода, по столбцам – полустепени захода.

Задачи.

1. Изобразить неориентированный граф, удовлетворяющий условиям:
   1) число вершин n>6;
   2) число ребер m >9.

   Составить матрицу смежности, соответствующую данному графу.
2. Изобразить орграф, удовлетворяющий условиям:
   1) число вершин n>8;
   2) число дуг m>10.

   Составить матрицу инцидентности, соответствующую данному графу.
3. Для графов, изображенных на рисунке 3.24 и 3.25, составить матрицы смежности и инцидентности.

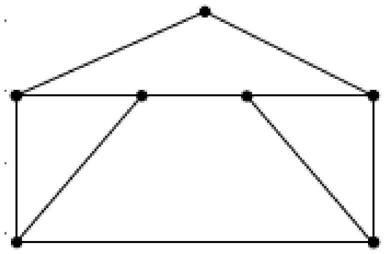


Рис. 3.24

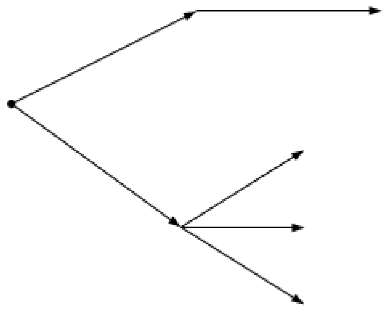


Рис.3.25.

4. Задайте разными способами граф на рис. 3.26. Является ли бинарное отношение, соответствующее заданному орграфу, рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

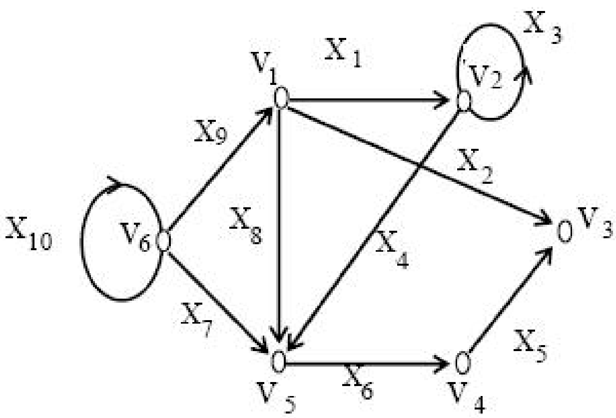


Рис. 3.26.

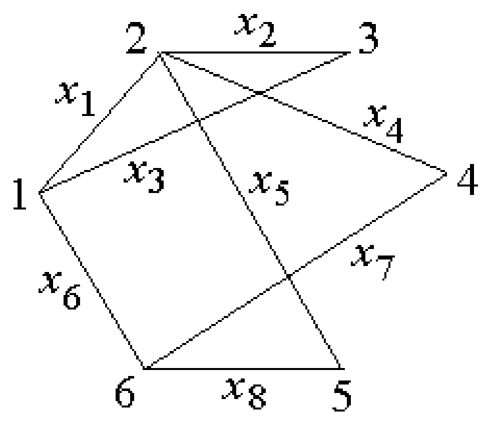
5. По матрице инцидентности определите степени вершин:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Определите количество петель в псевдографе, заданном матрицей инцидентности: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Составьте для каждого из графов G и H (рис.3.27) множества вершин и ребер. Задайте графы G и H матрицами инцидентности и смежности, а также списком ребер:

G



H

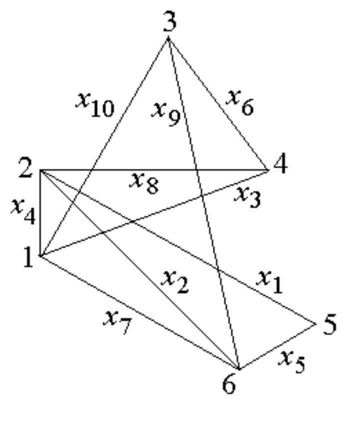


Рис.3.27.

8. По матрице инцидентности нарисуйте граф. Составьте список его вершин и ребер, а также матрицу смежности.

$$I(G) = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

9. Найдите с помощью матрицы смежности $\deg^{+}(v_i)$ и $\deg^{-}(v_i)$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

10. Даны орграфы (рис. 3.28 – 3.29). Составьте для каждого из них матрицу смежности, матрицу инцидентности, матрицу достижимости. Каковы максимальная полустепень исхода и минимальная полустепень захода в этих орграфах? Являются ли эти орграфы направленными? Есть ли в них источники или стоки?

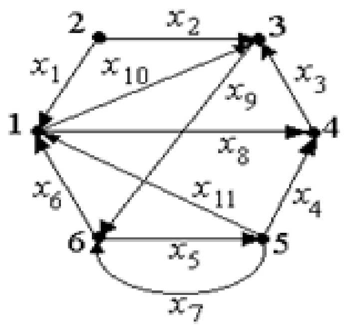


Рис. 3.28.

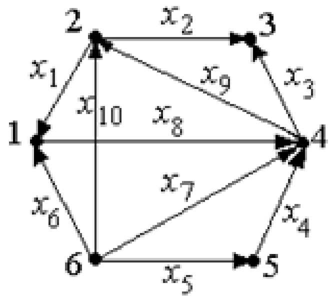


Рис. 3.29

11. Являются ли бинарные отношения, соответствующие орграфам из задачи 10, рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными?

12. Какое бинарное отношение соответствует: а) неориентированному псевдографу без кратных ребер; б) турниру?

13. Найдется ли граф с пятью вершинами, у которого одна вершина изолированная, а другая степени 4?

14. Изобразите граф с пятью вершинами, у которого две вершины имеют одинаковую степень?

15. Если в графе с пятью вершинами ровно две вершины имеют одинаковую степень, то могут ли они быть обе изолированными или иметь степень 4?

16. Верно ли, что в полном орграфе всегда существует источник?

17. Орграф задан матрицей инцидентности, в которой строки соответствуют вершинам, а столбцы дугам. Дуге $\overline{v_i v_j}$ ставиться в соответствие «-1» в строке вершины v_i и «1» в строке вершины v_j. Определите вектор полустепеней исходов вершин и вектор полустепеней заходов вершин.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

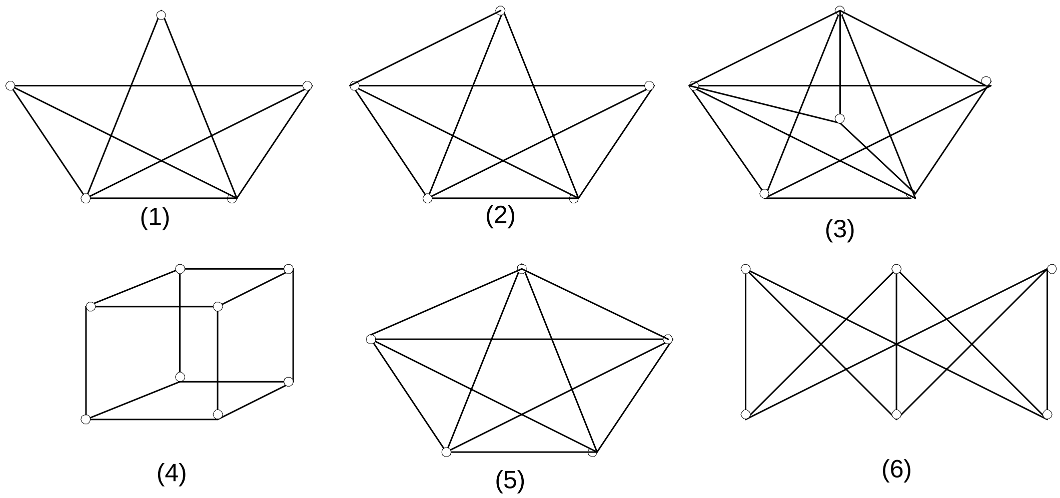
18. Нарисуйте граф с пятью вершинами, который: а) имеет два стока и один источник; б) не имеет ни стока, ни источника.
19. Сколько рёбер имеет полный граф с ***p*** вершинами?
20. Постройте полный граф с 10-ю ребрами.
21. Постройте граф отношения «а делит в» (a|b) для множества чисел от 1 до 20. Является ли бинарное отношение, соответствующее построенному графу, рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
22. При каких n существуют графы с n вершинами, каждая из которых имеет: а) степень 3? ; б) степень 4?
23. Постройте граф (если он существует) с последовательностью степеней: а) (4, 3, 3, 2, 2); б) (5, 4, 2, 2, 1); в) (3, 3, 2); г) (3, 2, 2, 1).
24. Постройте орграф, для которого последовательность (3, 3, 3, 2, 2) является как списком полустепеней исхода вершин, так и списком полустепеней захода.
25. Сколько вершин может быть у графа с 4 ребрами, если петли, кратные ребра и изолированные вершины у него отсутствуют?
26. Сколько рёбер может быть у регулярного графа с 9 вершинами?
27. Сколько рёбер имеет регулярный граф с p вершинами степени r?

28. Существуют ли графы со следующими наборами степеней вершин:

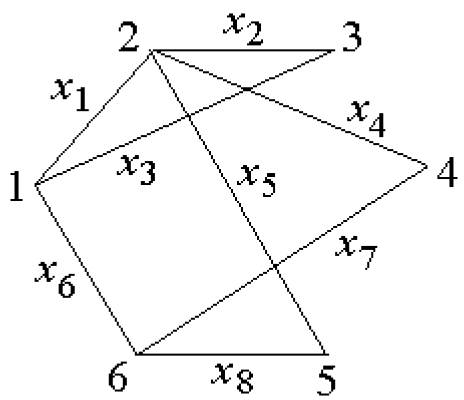
а) {2, 3, 3, 2, 3}; б) {1, 2, 3, 4}? Если существуют, то изобразите их графически.

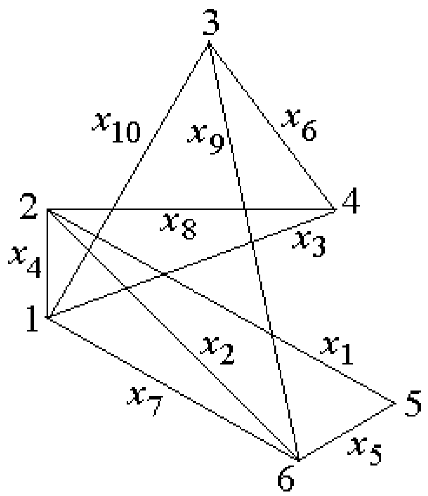
29. Покажите, что простой граф, имеющий, по крайней мере, две вершины, содержит две вершины одинаковой степени.

30. Являются ли следующие графы планарными?



31. Проверьте формулу Эйлера для следующих графов:





32. В студенческой группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 по 4, а 10 по 5 друзей?

33. Семеро студентов, разъезжаясь на каникулы, договорились, что каждый пошлет электронное письмо трем остальным. Может ли оказаться, что каждый получит письма от тех, кому написал сам?

34. В государстве 100 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

35. В футбольном турнире в один круг участвует 29 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей (быть может ни одного).
36. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
37. Три товарища-спортсмена: Михаил, Николай и Павел учатся в одном колледже. Каждый из них увлекается двумя видами спорта из следующих шести: плавание, футбол, волейбол, баскетбол, велоспорт и теннис. Все трое: Павел, теннисист и пловец ходят из колледжа домой вместе. Пловец и футболист – соседи по дому. Михаил – самый младший из троих, а теннисист старше велосипедиста. Наиболее интересные спортивные передачи по телевидению все трое: Михаил, волейболист и велосипедист смотрят вместе. Кто какими видами спорта увлекается.
38. В лицее занятия по информатике, английскому языку, физике, краеведению, татарскому языку, истории и ведут три педагога: Махеев, Вагапов и Тиунов. Каждый из них преподаёт два предмета. Преподаватель краеведения и преподаватель татарского языка – соседи по дому. Махеев – самый младший из троих. Все трое: Тиунов, преподаватель физики и преподаватель татарского языка ездят из школы вместе. Преподаватель физики старше преподавателя информатики. В свободное время преподаватель английского языка, преподаватель информатики и Махеев обычно играют в шахматы. Кто какие предметы преподаёт?
39. В шахматном турнире принимали участие 6 партнеров разных профессий: токарь, слесарь, инженер, учитель, врач, шофер. Известно: 1) в первом туре Андреев играл с врачом, учитель с Борисовым, а Григорьев с Евдокимовым; 2) во втором туре Дмитриев играл с токарем, а врач с Борисовым; 3) в третьем туре Евдокимов играл с инженером; 4) по окончанию турнира места распределились следующим образом: Борисов – I место, Григорьев и

инженер поделили II и III, Дмитриев занял IV место, а Золотарев и слесарь поделили V и VI места.

Какие профессии имели Григорьев, Дмитриев, Евдокимов?

40. Иванов, Петров, Сидоров и Шакиров – жители Бугульмы. Их профессии: милиционер, стоматолог, повар и технолог. Иванов и Петров – соседи и всегда на работу ездят вместе. Петров старше Сидорова. Иванов регулярно обыгрывает Шакирова в настольный теннис. Повар всегда на работу ходит пешком. Милиционер не живёт рядом со стоматологом. Технолог и милиционер встречались единственный раз, когда милиционер оштрафовал технолога за нарушение правил дорожного движения. Милиционер старше стоматолога и технолога. У кого какая профессия?

41. Студенты университета организовали эстрадный квартет. Александр играет на саксофоне. Пианист учится на физическом факультете. Ударника зовут не Виктором, а студента географического факультета зовут не Романом. Александр учится не на историческом факультете. Пётр не пианист и не биолог. Виктор учится не на физическом факультете, а ударник не на историческом. Роман играет не на контрабасе. На каком инструменте играет Виктор и на каком факультете он учится?

42. На международном конгрессе встретились четверо ученых: физик, историк, биолог и математик. Национальности их различны и, хотя каждый из ученых владеет двумя языками из четырех (русский, английский, французский и итальянский), нет такого языка, на котором они могут разговаривать вчетвером. Есть язык, на котором могут разговаривать сразу трое, – это итальянский. Никто из ученых не владеет французским и русским языками одновременно. Хотя физик не говорит по-английски, но может быть переводчиком, если биолог и историк захотят поговорить друг с другом. Историк может говорить с математиком по-французски. Физик, биолог и математик не могут беседовать втроем на одном языке. Какими двумя языками владеет биолог?

3.2. Операции над графами.

Для получения новых графов можно использовать операции над графами. Существуют два вида операций: локальные, при которых заменяются, удаляются или добавляются отдельные элементы графа, и алгебраические, когда новый граф строится по определенным правилам из нескольких имеющихся.

Локальные операции – это удаление и добавление ребра или вершины, стягивание и подразбиение ребра.

При удалении ребра сохраняются все вершины графа и все его ребра, кроме удаляемого. Обратная операция – добавление ребра.

При удалении вершины вместе с вершиной удаляются и все инцидентные ей ребра. При добавлении вершины к графу добавляется новая изолированная вершина.

Операция стягивания ребра определяется следующим образом. Вершины a и b удаляются из графа, к нему добавляется новая вершина c и она соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна хотя бы одна из вершин a, b.

Операция подразбиения ребра действует следующим образом. Из графа удаляется это ребро, к нему добавляется новая вершина и два новых ребра (a,c) и (b,c).

Пример. 3.13. Для графа на рисунке 3.30 выполним локальные операции

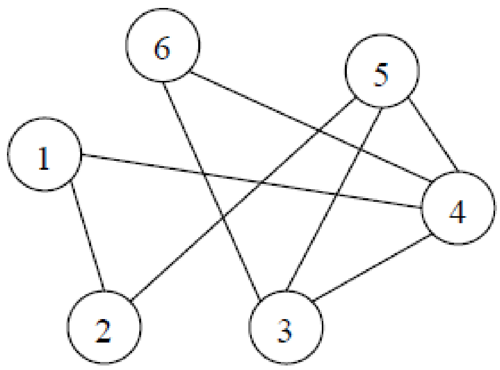
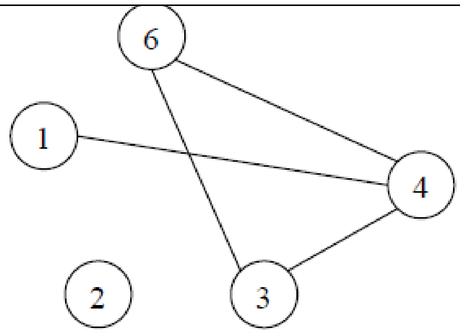
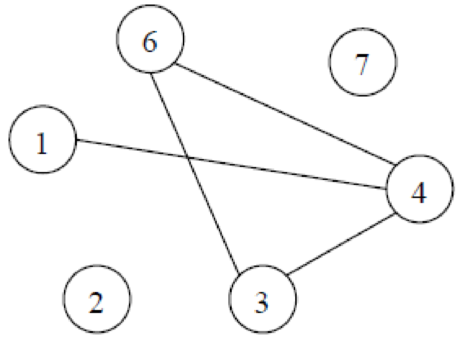
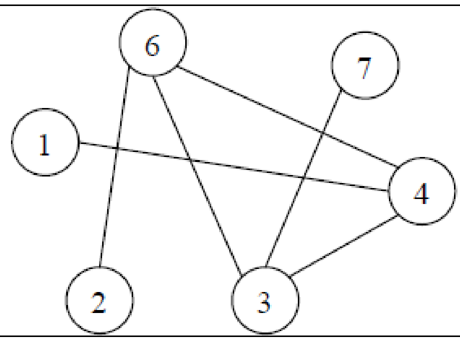
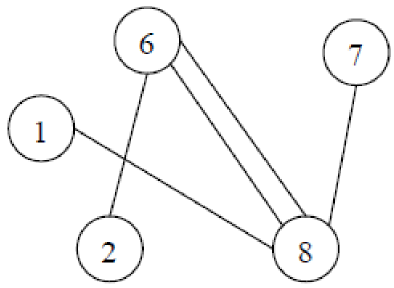


Рис. 3.30.

удалим ребро (1; 2) и вершину 5, вместе с вершиной удалим инцидентные ей ребра	
добавим вершину 7	
добавим ребра (2; 6) и (3; 7)	
стянем ребро (3; 4), для этого добавим вершину 8 и все ребра, инцидентные вершинам 3 и 4, проведем к ней, после чего удалим вершины 3 и 4	

Определение 2. Два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называются ***равными***, если $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$. Обозначение: $G_1 = G_2$.

Определение 3. Пусть задан граф $G = \langle V, E \rangle$. ***Дополнением*** графа G называется граф $\overline{G}$ с теми же вершинами, что и граф G, и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить, чтобы получить полный граф. Граф, не являющийся полным, можно преобразовать в полный с теми же вершинами, добавив недостающие ребра.

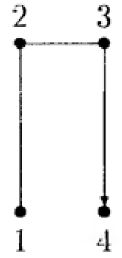


Рис. 3.31. Граф G

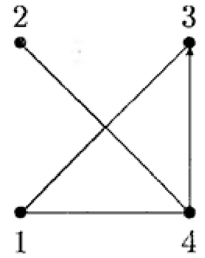


Рис. 3.32. Дополнение граф $\overline{G}$

Граф H называется ***частью графа*** $G = \langle V, E \rangle$ или ***частичным графом*** $H \subset G$, если множество его вершин $V(H) \subset V(G)$ и множество его ребер $E(H) \subset E(G)$.

Частичный граф содержит только часть ребер (дуг) исходного графа. Так, карта главных дорог России – частичный граф карты шоссейных дорог России.

Частным, но важным типом частичных графов являются подграфы.

Граф H является ***подграфом*** графа $G = \langle V, E \rangle$, если *V(H)*⊆*V* и *E(H)*⊆*E*, и при этом любое ребро из *E*, соединяющее две вершины из *V(H)*, принадлежит *E(H)* (т.е. ребрами подграфа являются все ребра из G, оба конца которых лежат в *H*). Так, карта шоссейных дорог Нижегородской области России является подграфом графа «Карта шоссейных дорог Российской федерации».

граф (исходный) *две его части* *два его подграфа*

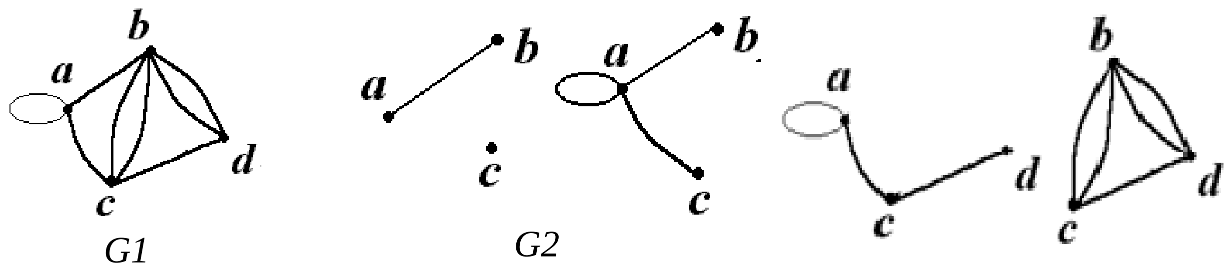


Рис 3.33. Пример частичного графа и подграфа.

Клика графа – это его максимально полный подграф.

Подграф называется ***остовным подграфом*** (***суграфом***) если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа. *Остовной подграф H* графа $G = \langle V, E \rangle$ получается из исходного графа удалением только ребер без удаления вершин.

Подграфом, порождённым множеством вершин U, называется подграф, множество вершин которого – U, содержащий те и только те рёбра, оба конца которых входят в U. *Порожденный подграф* H графа $G = \langle V, E \rangle$ получается из исходного графа удалением вершин и всех ребер, инцидентных удаленным вершинам.

Определение 4. Пусть заданы два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. ***Объединением*** $G_1 \cup G_2$ называется граф, множество вершин которого $V = V_1 \cup V_2$, множество ребер $E = E_1 \cup E_2$.

Пример 3.14. Рассмотрим операцию объединение на примере графов $G_1(X_1,E_1)$ и $G_2(X_2,E_2)$, приведенных на рис. 3.34. Множества вершин первого и второго графов соответственно равны $X_1=\{x_1, x_2, x_3\}$ и $X_2=\{x_2, x_3, x_4\}$, а множество вершин результирующего графа определится как $X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Аналогично определяем множества дуг графа: $E_1=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_3)\}$, $E_2=\{(x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_2)\}$, $E=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_2)\}$.

Результирующий граф $G(X,E)=G_1(X_1,E_1) \cup G_2(X_2,E_2)$ также приведен на рис. 3.34.

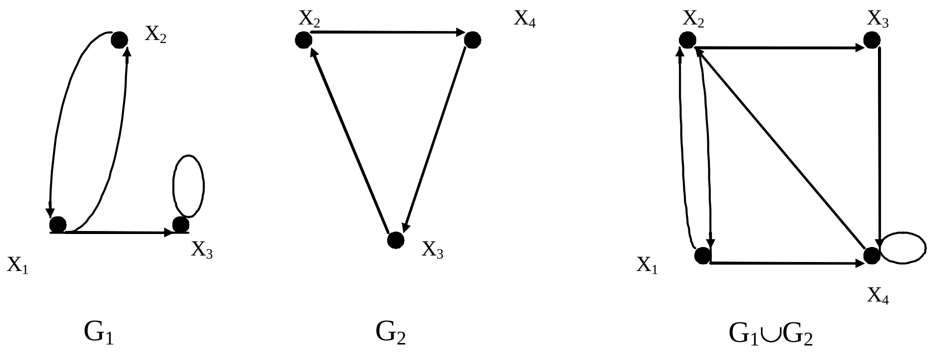


Рис.3.34

Операция объединение обладает следующими свойствами, которые следуют из определения операции и свойств операций на множествах:

$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$ – свойство коммутативности;

$G_1 \cup (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cup G_2) \cup G_3$ – свойство ассоциативности.

Операция объединение графов может быть выполнена в матричной форме.

Выполним в матричной форме операцию объединения графов G_1 и G_2, представленных на рис. 3.34.

Составим матрицы смежности вершин графов.

$$A_1 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Множество вершин результирующего графа $X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Матрица $A = A_1 \cup A_2$ соответствует графу $G_1 \cup G_2$, изображенному на рис.3.34.

$$A = A_1 \cup A_2 = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Определение 5. Пусть заданы два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. ***Пересечением*** $G_1 \cap G_2$ называется граф, множество вершин которого $V = V_1 \cap V_2$, множество ребер $E = E_1 \cap E_2$.

Операция пересечение обладает следующими свойствами, которые следуют из определения операции и свойств операций на множествах:

$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$ – свойство коммутативности;

$G_1 \cap (G2 \cap G3) = (G1 \cap G2) \cap G_3$ – свойство ассоциативности.

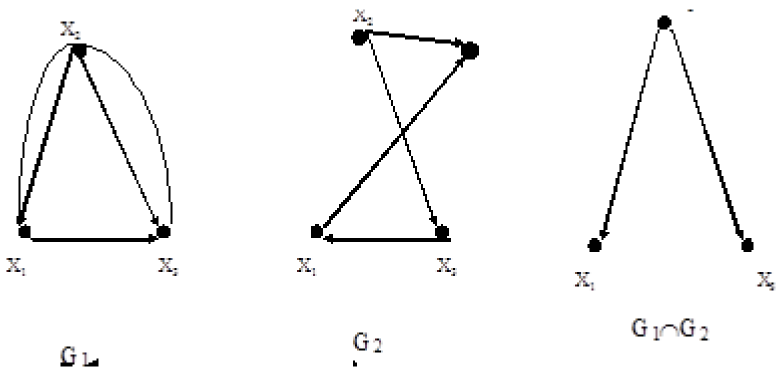


Рис. 3.35.

Пример 3.15. Рассмотрим выполнение операции пересечения графов, изображенных на рис. 3.35.

Для нахождения множества вершин результирующего графа запишем множества вершин исходных графов и выполним над этими множествами операцию пересечения: $X_1=\{x_1, x_2, x_3\}$; $X_2=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $X=X_1 \cap X_2=\{x_1, x_2, x_3\}$.

Аналогично определяем множество E дуг результирующего графа:

$E_1=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\}$; $E_2=\{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1)\}$; $E=E_1 \cap E_2=\{(x_1, x_3), (x_2, x_1)\}$.

Графы $G_1(X_1,E_1)$, $G_2(X_2,E_2)$ и их пересечение приведены на рис 3.31.

Операция пересечения графов может быть выполнена в матричной форме.

Выполним в матричной форме операцию пересечения графов G_1 и G_2, представленных на рис. 3.35.

Составим матрицы смежности вершин исходных графов.

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array} \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{x_4} \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Находим множество вершин X результирующего графа: $X=X_1 \cap X_2=\{x_1, x_2, x_3\}$.

Найдем матрицу смежности вершин $\boldsymbol{A=A_1 \cap A_2}$

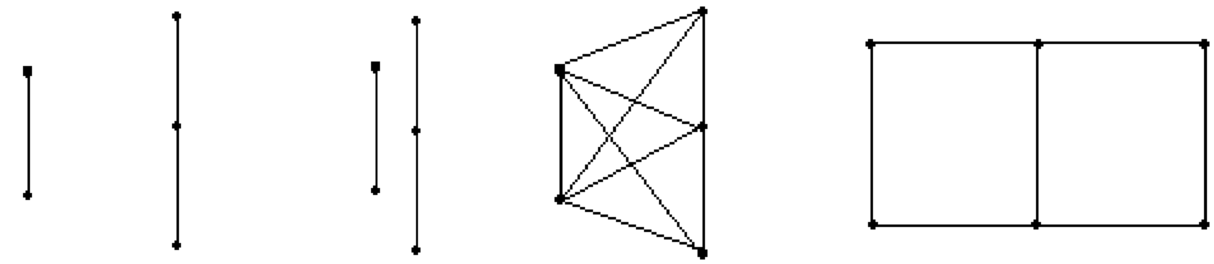
$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Полученная матрица смежности вершин $A_1 \cap A_2$ соответствует графу $G_1 \cap G_2$, изображенному на рис. 3.35.

Определение 6. Соединение (***сумма***) графов G_1+G_2 состоит из $G_1 \cup G_2$ и всех ребер, соединяющих вершины множества V_1 с вершинами множества V_2.

Определение 7. Произведением графов $G_1 \times G_2$ называется граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$, при этом вершины $u=(u_1,u_2)$ и $v=(v_1,v_2)$

смежны в $G_1 \times G_2$ тогда и только тогда, когда $u_1 = v_1$ и вершина u_2 смежна с v_2 в графе G_2 или $u_2 = v_2$ и вершина u_1 смежна с v_1 в графе G_1.



G_1 $\quad G_2$ $\quad G_1 \cup G_2$ $\quad G_1 + G_2$ $\quad G_1 \times G_2$

Рис 3.36. Примеры операций над графами.

Пример 3.16. Для графов G_1 и G_2 найдем дополнения, пересечение и объединение.

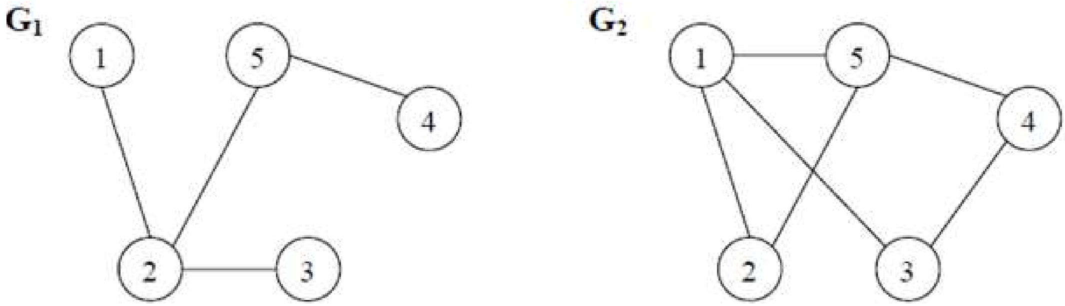
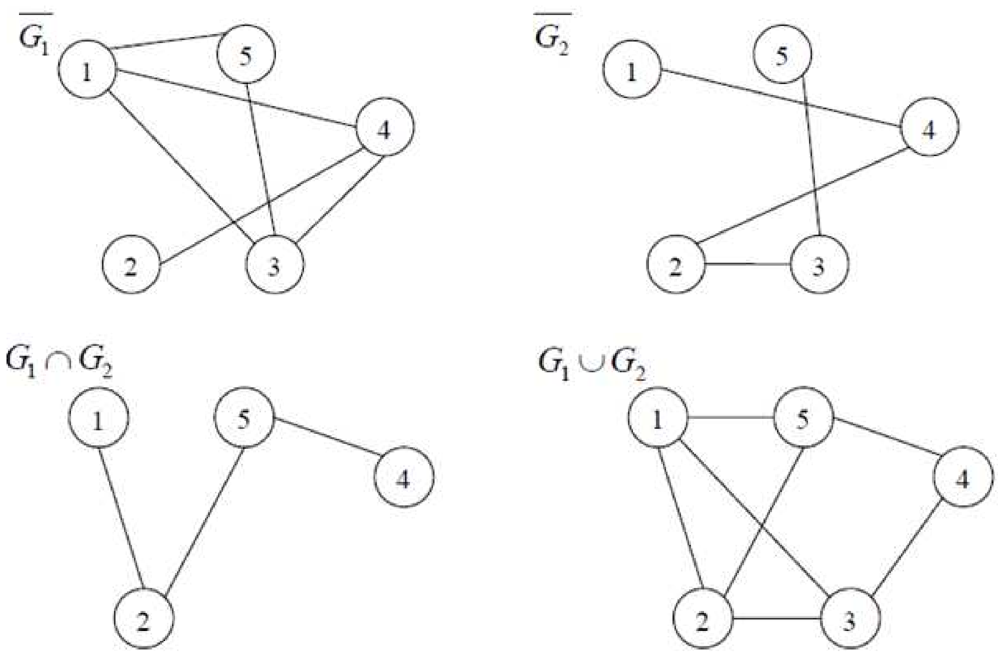


Рис. 3.37.

Решение.



Пример 3.17. Выполнение операции произведения рассмотрим на примере графов, изображенных на рис. 3.38. Множество вершин *Z* результирующего графа определяется как декартово произведение множеств $X \times Y$. Множество *Z* содержит следующие элементы: $z_1=(x_1y_1)$, $z_2=(x_1y_2)$, $z_3=(x_1y_3)$, $z_4=(x_2y_1)$, $z_5=(x_2y_2)$, $z_6=(x_2y_3)$.

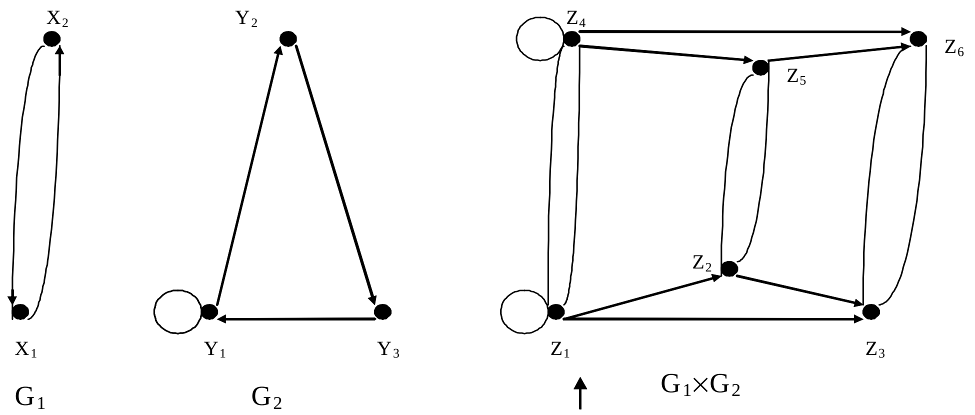


Рис. 3.38. Произведение графов $G_1 \times G_2$

Определим множество дуг результирующего графа. Для этого выделим группы вершин множества *Z,* компоненты которых совпадают. В рассматриваемом примере пять таких групп: две группы с совпадающими компонентами из множества *X*, и три группы, имеющие совпадающие компоненты из *Y*. Рассмотрим группу вершин результирующего графа, которые имеют общую компоненту x_1: $z_1=(x_1y_1)$, $z_2=(x_1y_1)$, $z_3=(x_1y_3)$. Согласно определению операции декартова произведения графов, множество дуг между этими вершинами определяется связями между вершинами множества *Y*. Таким образом, дуга (y_1,y_1) в графе *G2* определяет наличие дуги (z_1,z_1) в результирующем графе. Для удобства рассмотрения всех дуг результирующего графа составим таблицу, в первом столбце которой перечисляются вершины с совпадающими компонентами, во втором – дуги между несовпадающими компонентами, а в третьем и четвертом – дуги в результирующем графе.

№	Группы вершин с совпадающими компонентами	Дуги в исходных графах	Дуга $(x_iy_j)\rightarrow(x_ky_l)$	Дуга (z_α,z_β)
1	$z_1=(x_1y_1)$, $z_2=(x_1y_2)$, $z_3=(x_1y_3)$	(y_1,y_1) (y_1,y_2)	$(x_1y_1)\rightarrow(x_1y_1)$ $(x_1y_1)\rightarrow(x_1y_2)$	(z_1,z_1) (z_1,z_2)

		(y_2,y_3) (y_3,y_1)	$(x_1y_2)\to(x_1y_3)$ $(x_1y_3)\to(x_1y_1)$	(z_2,z_3) (z_3,z_1)
2	$z_4=(x_2y_1)$, $z_5=(x_2y_2)$, $z_6=(x_2y_3)$	(y_1,y_1) (y_1,y_2) (y_2,y_3) (y_3,y_1)	$(x_2y_1)\to(x_2y_1)$ $(x_2y_1)\to(x_2y_2)$ $(x_2y_2)\to(x_2y_3)$ $(x_2y_3)\to(x_2y_1)$	(z_4,z_4) (z_4,z_5) (z_5,z_6) (z_6,z_4)
3	$z_1=(x_1y_1)$, $z_4=(x_2y_1)$	(x_1,x_2) (x_2,x_1)	$(x_1y_1)\to(x_2y_1)$ $(x_2y_1)\to(x_1y_1)$	(z_1,z_4) (z_4,z_1)
4	$z_2=(x_1y_2)$, $z_5=(x_2y_2)$	(x_1,x_2) (x_2,x_1)	$(x_1y_2)\to(x_2y_2)$ $(x_1y_2)\to(x_1y_2)$	(z_2,z_5) (z_5,z_2)
5	$Z_3=(x_1y_3)$, $z_6=(x_2y_3)$	(x_1,x_2) (x_2,x_1)	$(x_1y_3)\to(x_2y_3)$ $(x_2y_3)\to(x_1y_3)$	(z_3,z_6) (z_6,z_3)

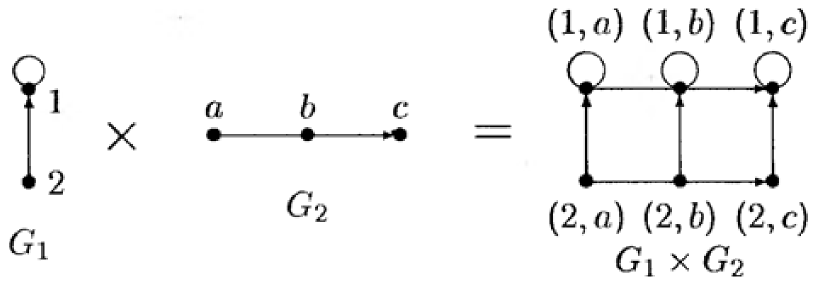


Рис. 3.39. Произведение графов $G_1 \times G_2$

Граф считается полностью заданным в строгом смысле, если нумерация его вершин и ребер зафиксирована. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называются ***изомофными***.

Определение 8. Два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ называются ***изоморфными***, если существует биекция (взаимно однозначное отображение) φ множества V_1 на множество V_2 такое, что для любых двух вершин $a \in V_1$, $b \in V_2$ $(a,b) \in E_1 \Leftrightarrow \left(\varphi(a),\varphi(b)\right) \in E_2$.

Тот факт, что графы G_1 и G_2 изоморфны, записывается следующим образом: $G_1 \cong G_2$.

Некоторые свойства изоморфизма графов:

1) число ребер и число вершин у изоморфных графов должно быть одинаковым;
2) при всяком изоморфизме графов G_1 и G_2 соответствующие друг другу вершины должны иметь одинаковую степень.

Например, все три графа на рисунке 3.40 изоморфны друг другу (изоморфизм определяется нумерацией вершин).

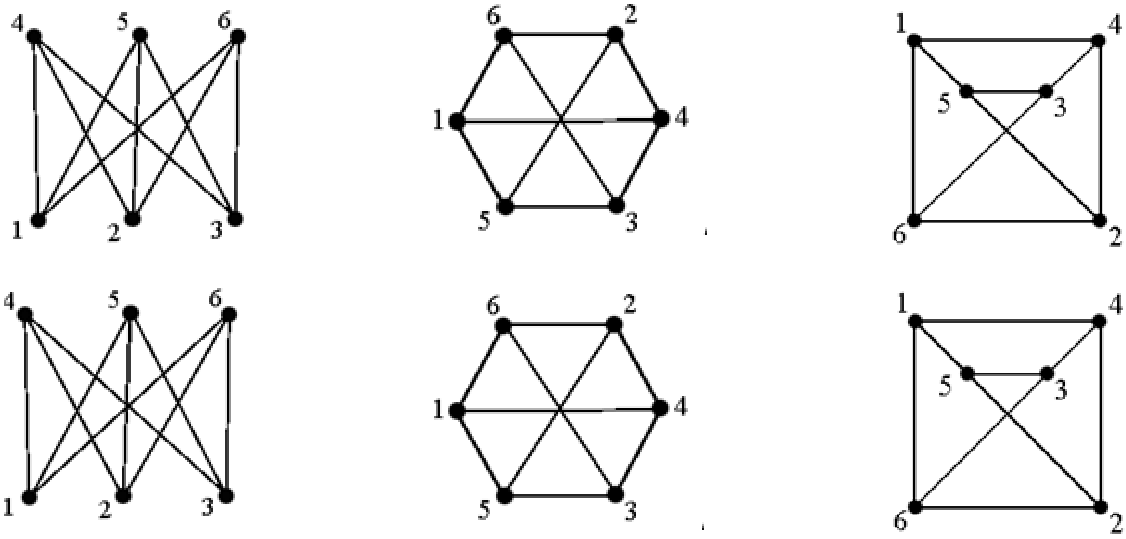


Рис. 3.40. Изоморфные графы

На рисунках 3.41 представлены попарно неизоморфные графы.

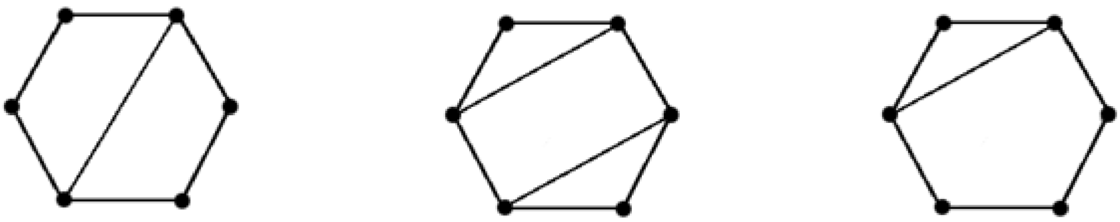


Рис. 3.41. Неизоморфные графы

В общем случае узнать, изоморфны ли два графа, достаточно сложно.

Однако для многих графов их неизоморфность устанавливается на основе инвариантов. ***Инварианты*** – это характеристики графов, которые сохраняются при изоморфизме. Некоторые простые инварианты: число ребер, набор степеней, число циклов заданной длины. Если удается установить, что для двух исследуемых графов некоторый инвариант принимает разные значения, то эти графы неизоморфны.

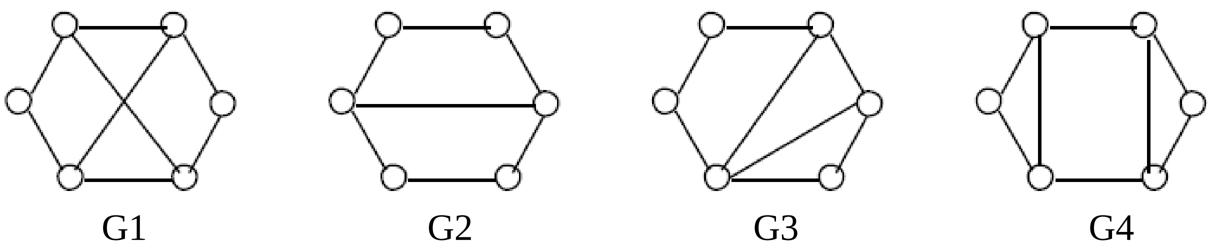


Рис 3.42.

Пример 3.18. Распознавание изоморфизма неориентированных графов (рис.3.42) с помощью анализа вектора степеней.

Так как при изоморфизме пара смежных вершин переходит в пару смежных, а пара несмежных вершин в пару несмежных, то число ребер у двух изоморфных графов должно быть одинаковым. Поэтому графы G1 и G2 на рисунке 3.42, у которых разное количество ребер неизоморфны. У графов G1 и G3 одинаковое число ребер, но они тоже неизоморфны. Это можно установить, сравнивая степени вершин. При изоморфизме каждая вершина переходит в вершину той же степени. Но если выписать степени всех вершин G1 в неубывающем порядке, то получиться последовательность (2,2,3,3,3,3), а для графа G3 получиться последовательность (2,2,2,3,3,4). Так как последовательности различные, то значит, графы неизоморфны.

Для графов G1 и G4 наборы степеней одинаковы, но в G4 есть цикл длины 3, а в графе G1 такого цикла нет, следовательно, графы неизоморфны. ■

Вопрос о том, изоморфны ли два данных графа, в общем случае оказывается сложным. Для изоморфизма двух n-вершинных графов само определение этого отношения дает способ проверки: надо просмотреть все n! взаимно однозначных соответствий между множествами вершин и установить, совмещаются ли полностью ребра графа хотя бы при одном соответствии. Однако даже весьма грубая оценка показывает, что такое решение задачи "в лоб" практически непригодно: уже при n=20 перебор всех n! вариантов потребовал бы около 40 лет машинного времени.

Теорема 3. Два графа изоморфны между собой тогда и только тогда, когда матрицу смежности одного из них можно получить из матрицы смежности другого с помощью одновременной перестановки строк и столбцов этой матрицы (т.е. одновременно с перестановкой i–той и j–той строк матрицы осуществляется и перестановка i–того и j–того столбцов матрицы).

Теорема 4. Два графа изоморфны между собой тогда и только тогда, когда матрицу инцидентности одного из них можно получить из матрицы инцидентности другого с помощью перестановок строк и столбцов этой матрицы.

Пример 3.19. На рисунке 3.43 изображены два графа G_1 и G_2 с одним и тем же множеством вершин $\{a,b,c,d\}$.

Рис. 3.43

Это разные графы, так как в графе G_1 есть ребро (a,c), а в графе G_2 нет.

Но $G_1 \cong G_2$, так как изоморфизмом, например, является отображение, заданное в таблице:

x (вершина графа G_1)	*a*	*b*	*c*	*d*
$\varphi(x)$ (вершина графа G_2)	*a*	*b*	*d*	*c*

Доказательство изоморфизма графов на рис.3.43:

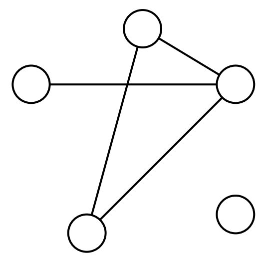
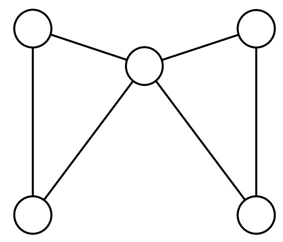
Рассмотрим цепочку преобразований, переводящую матрицу смежности графа G_2 в матрицу смежности графа G_1:

$$s(G_2)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\textit{поменяли местами строки } 3 \textit{ и } 4}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textit{поменяли местами столбцы } 3 \textit{ и } 4}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}=S(G_1)$$

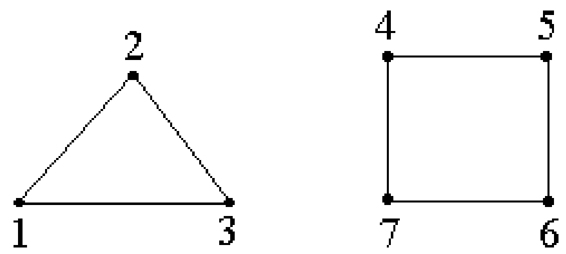
Задачи.

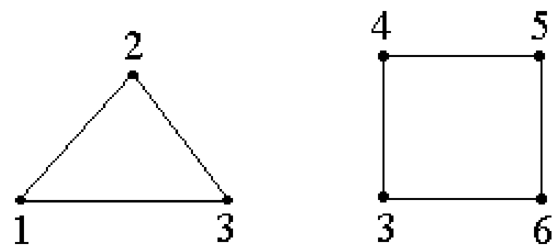
1. Постройте полный граф и дополнение для данных двух графов.

Граф G1	Граф G2
	

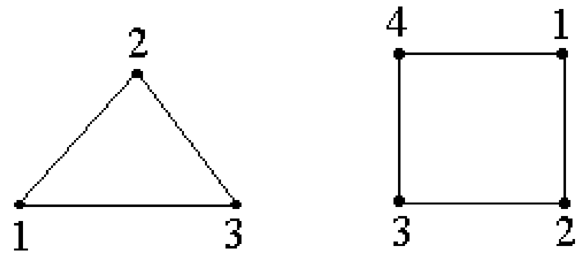
2. Найдите объединение, пересечение, разность и произведение двух графов.

а) б)





в)



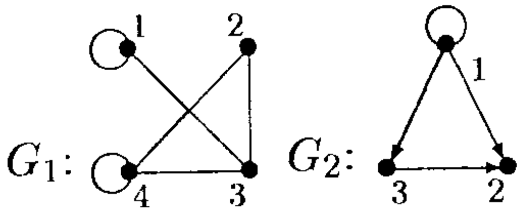
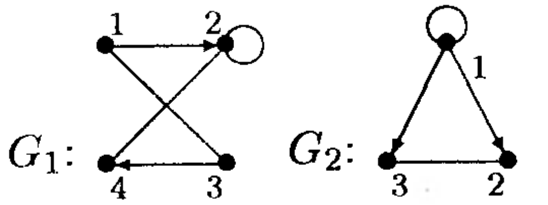
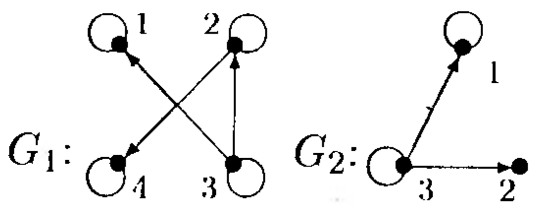
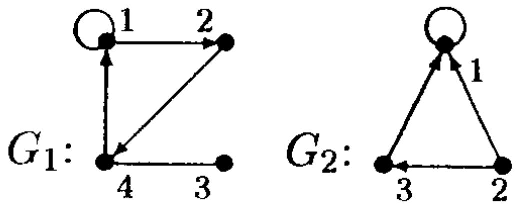
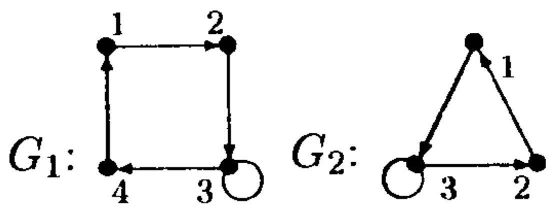
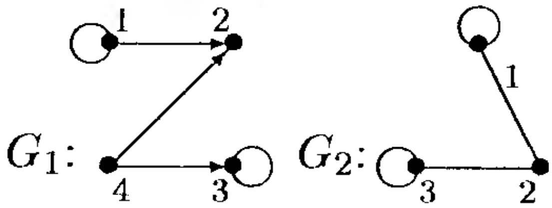
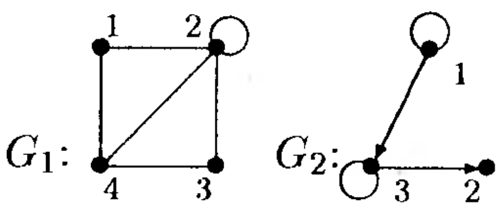
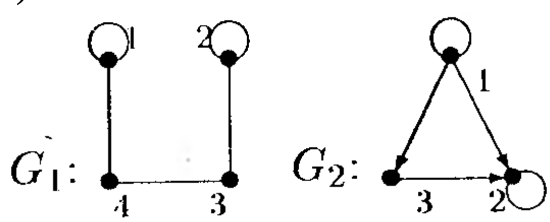
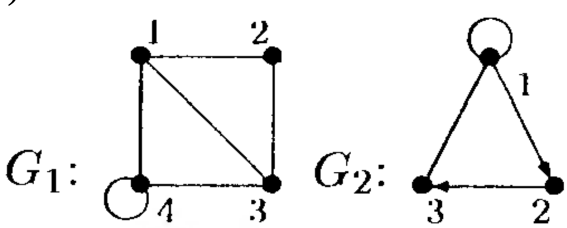
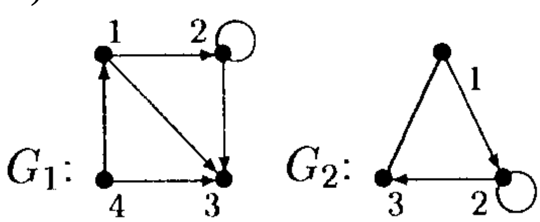
3. Составьте матрицы смежности для графов $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, если

а) $$A(G_1) = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

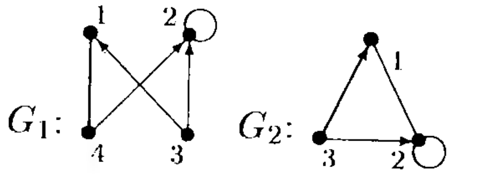
$$A(G_2) = \begin{array}{c|ccccc|} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

б) $A(G_1)=\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\quad A(G_2)=\begin{array}{c|ccccc|} & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

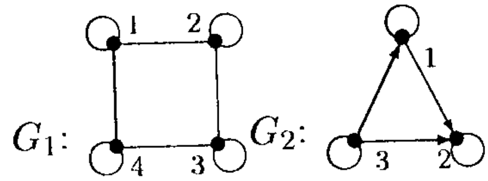
4. Найдите объединение, пересечение, разность и произведение двух графов

1) 	2) 
3) 	4) 
5) 	6) 
7) 	8) 
9) 	10) 

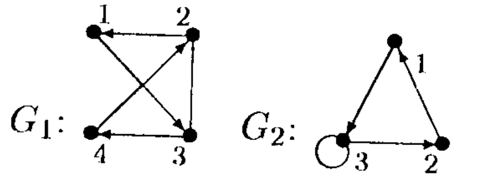
11)



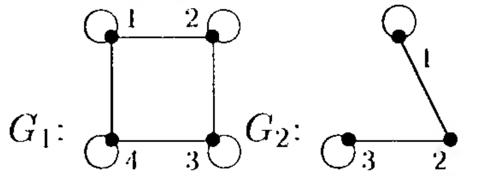
12)



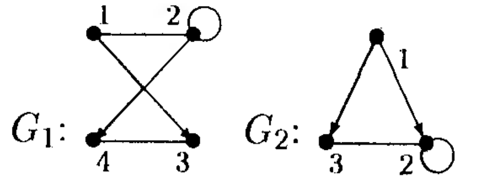
13)



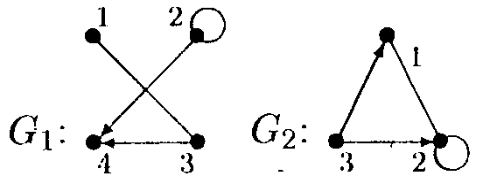
14)



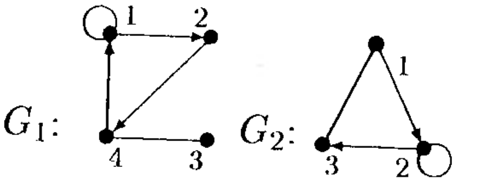
15)



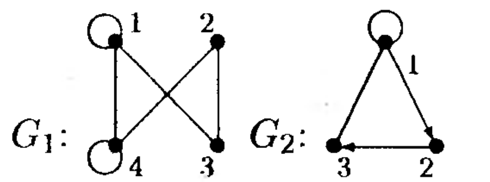
16)



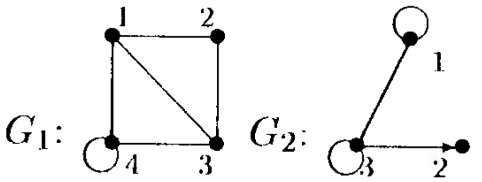
17)



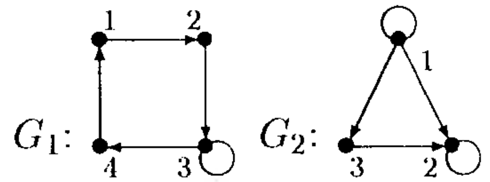
18)



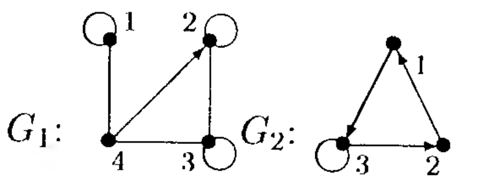
19)



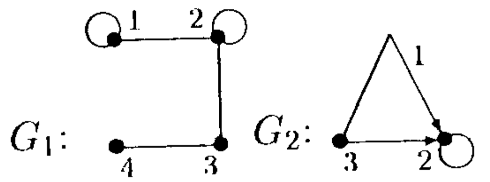
20)



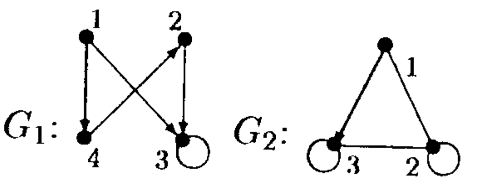
21)



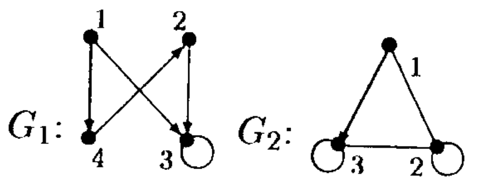
22)



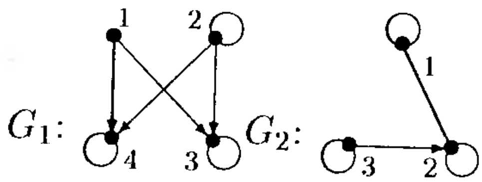
23)



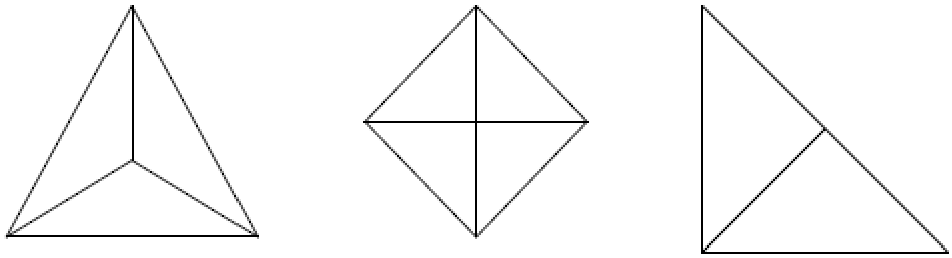
24)



25)



5. Графы, изображенные на рис.3.44 а) и б) изоморфны, но они не изоморфны графу на рис. 3.44 в). Почему?

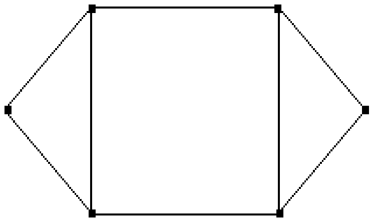


а) б) в)

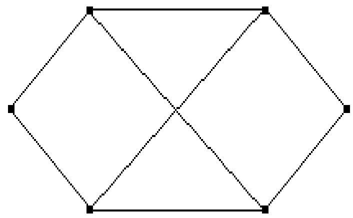
Рис. 3.44

6. Изоморфны ли данные графы? Ответ обоснуйте.

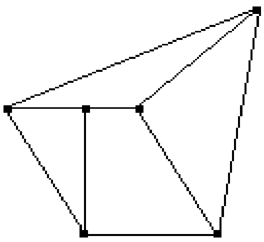
а) G_1



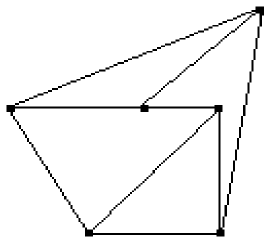
G_2



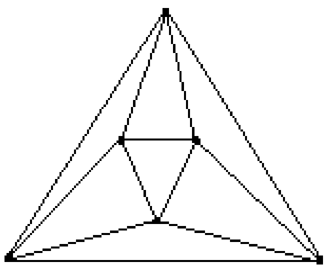
б) H_1



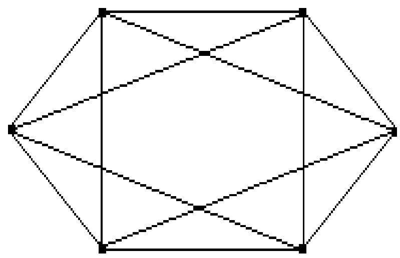
H_2



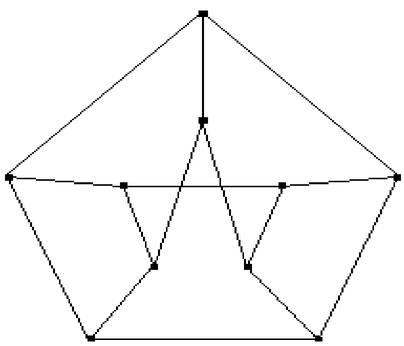
в) G_3



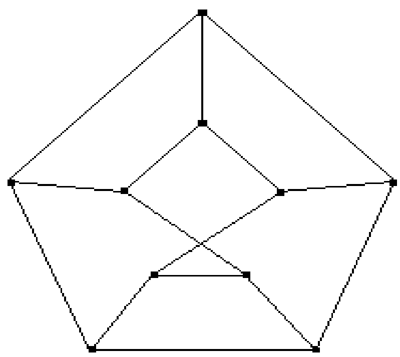
G_4



г) H_3



H_4



3.3. Маршруты, цепи и циклы в графах. Связные графы. Метрические соотношения.

Маршрут в графе *G(V,E)* – это чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n, e_n$, в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Очевидно следующее свойство маршрута: любые два последовательных ребра либо смежные, либо одинаковые.

Говорят, что маршрут соединяет вершины v_1 и v_n, которые называются соответственно ***началом*** и ***концом*** маршрута. Вершины $v_2, \ldots, v_{n-1}$ называются ***промежуточными***. Маршрут называется ***замкнутым*** или ***циклическим***, если $v_1 = v_n$, иначе маршрут называется ***открытым***.

Длиной маршрута называется число ребер в нем. Для любой вершины v_i тривиальным маршрутом, вообще не содержащим ребер, является маршрут из v_i в v_i.

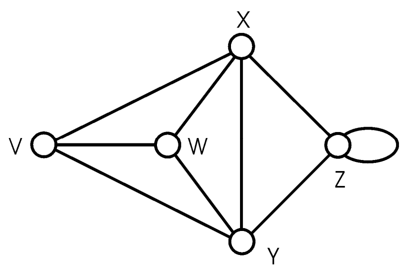


Рис.3.45

На рис.3.45 можно выделить маршрут из v в w: v→w→x→y→z→z→y→w. Он имеет длину, равную семи.

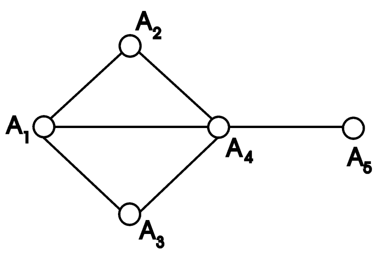


Рис.3.46.

Примеры маршрутов в графе на рис. 3.46, следуя которым можно попасть из A_1 в A_5:

1) $(A_1, A_4), (A_4, A_5)$;

2) $(A_1, A_2), (A_2, A_4), (A_4, A_5)$;

3) $(A_1, A_4), (A_4, A_2), (A_2, A_1), (A_1, A_4), (A_4, A_5)$

В одних маршрутах ребра повторяются, в других нет. Можно указать маршрут от A_1 до A_5, содержащий все вершины графа. Таков, например, маршрут: $(A_1, A_2), (A_2, A_4), (A_4, A_3), (A_3, A_1), (A_1, A_4), (A_4, A_5)$.

Маршрут, в котором все ребра разные, называется ***цепью***. Из определения следует, что последовательность ребер (3) (рис. 3.46) не является цепью в графе. Цепь, не пересекающая себя, т.е. не содержащая повторяющихся вершин, называется ***простой цепью.***

Цикл – это замкнутая цепь. ***Простым циклом*** в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Граф, не содержащий циклов, называется ***ациклическим***.

Приведем доказательства некоторых простых свойств маршрутов, цепей и циклов.

Свойство 1. *Пусть G – некоторый граф. Тогда любой маршрут, соединяющий две различные вершины, содержит простую цепь, соединяющую те же вершины, а любой цикл содержит простой цикл.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – маршрут. Если все его вершины различны, то это уже простая цепь. В противном случае, пусть $x_i = x_j$, $i < j$, тогда последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n$, полученная из этого маршрута удалением отрезка последовательности от x_{i+1} до x_j, тоже является маршрутом. Новый маршрут соединяет те же вершины и имеет меньшую длину. Продолжая действовать таким образом, после конечного числа «спрямлений» получим простую цепь, соединяющую x_1 и x_n.■

Свойство 2. *Во всяком цикле, проходящем через некоторое ребро, содержится простой цикл, проходящий через это ребро.*

Доказательство. Пусть имеется цикл, проходящий через ребро (a,b). Если удалить это ребро из графа, то в полученном подграфе останется маршрут, соединяющий a и b. По свойству 1 существует простой путь $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соединяющий эти вершины, то есть пара (a,b) совпадает с парой

(x_n, x_1). Но тогда $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$ – простой цикл в исходном графе, проходящий через ребро (a,b).■

Свойство 3. *Если в графе степень каждой вершины не меньше 2, то в нем есть цикл.*

Доказательство. Найдем в графе простой путь наибольшей длины (он существует, так как длина простого пути не может превышать $n-1$). Пусть это $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вершина x_n смежна с x_{n-1}, а так как ее степень не меньше двух, то она смежна еще хотя бы с одной вершиной, скажем, с y. Если вершина y была бы отлична от всех вершин пути, то последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ была бы простым путем большей длины. Следовательно, y – это одна из вершин пути, $y = x_i$, причем $i < n-1$. Но тогда $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_i$ – цикл. ■

Свойство 4. *Если у графа все простые циклы четной длины, то граф не имеет ни одного цикла нечетной длины.*

Доказательство. Для графа, являющегося простым циклом, утверждение очевидно. Допустим, что у графа, все простые циклы которого четной длины, все же найдется цикл нечетной длины. Во всяком непростом цикле существует вершина, через которую путь проходит более одного раза. В такой вершине цикл разобьется на два, причем один из них, очевидно, будет иметь нечетную длину, а другой – четную. Будем продолжать расчленение нечетного цикла до тех пор, пока не дойдем до простых циклов. Хотя бы один из них должен иметь нечетную длину. Существование такого простого цикла противоречило бы условию. Следовательно, принятое предположение неверно. Значит, верно, что если у графа все простые циклы четной длины, то граф не имеет ни одного цикла нечетной длины. ■

Проиллюстрируем введенные понятия для графа на рис. 3.47.

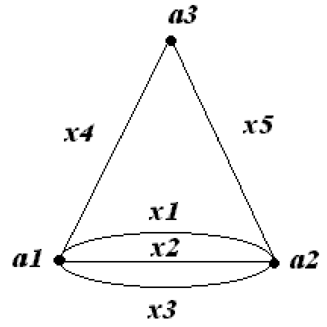
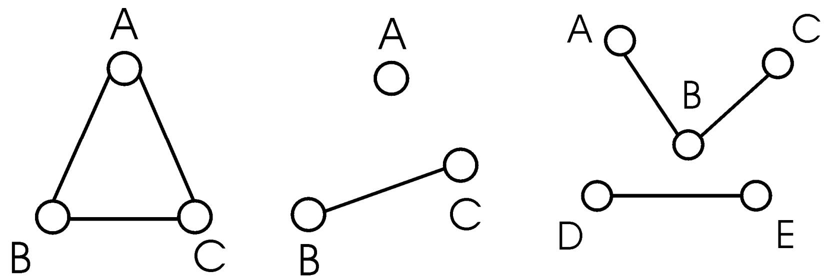


Рис. 3.47.

$a_1x_1a_2x_2a_1x_3a_2x_1a_1x_4a_3x_5a_2x_2a_1x_3a_2$ – открытый маршрут, но не цепь; $a_1x_3a_2x_1a_1x_4a_3x_5a_2$ – цепь, не являющаяся простой; $a_1x_4a_3x_5a_2$; $a_1x_3a_2$ – простые цепи. Кроме того, все три цепи содержатся в выше приведенном маршруте и соединяют те же самые вершины. Цикл $a_2x_2a_1x_1a_2x_5a_3x_4a_1x_3a_2$ не является простым циклом, однако, он содержит простые циклы $a_2x_2a_1x_1a_2$, $a_1x_1a_2x_5a_3x_4a_1$ и $a_2x_5a_3x_4a_1x_3a_2$.

Две вершины графа *A* и *B* называются ***связанными***, если в графе существует маршрут с концами *A* и *B*. Связанные маршрутом вершины связаны также и простой цепью. Отношение связанности вершин обладает свойствам эквивалентности и определяет разбиение множества вершин графа на непересекающиеся подмножества.



а) б) в)

Рис. 3.48.

На рисунке 3.48 а) изображен связный граф; все вершины у него связанные между собой; б) вершины B и C – связанные; а вершины A и B – несвязанные; (б), (в) – несвязные графы.

Граф называется ***связным***, если в нем для любых двух вершин имеется маршрут, соединяющий эти вершины. Заметим, что по свойству 1 можно в этом определении заменить слово «маршрут» словами «простая цепь».

Все подграфы графа связны и называются ***связными компонентами графа***. Для каждого н-графа верно $G = \bigcup_i G(H_i)$.

Для произвольного графа определим на множестве вершин ***отношение соединимости***: вершина a соединима с вершиной b, если существует соединяющий их маршрут. Легко видеть, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются ***областями связности***, а порождаемые ими подграфы – ***компонентами связности*** графа. В связном графе имеется только одна компонента связности – весь граф. Компоненты связности можно определить также как связные подграфы данного графа. У графа на рис.3.44 в) две компоненты связности.

Ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности, называется ***перешейком*** (или ***мостом***).

Теорема 5. *Ребро является перешейком в том и только том случае, если через него не проходит никакой цикл.*

Доказательство. Если через ребро (a,b) проходит цикл, то после удаления этого ребра вершины a и b останутся соединимыми, значит, число компонент связности не увеличится. Обратно, если после удаления ребра (a,b) число компонент связности не увеличивается, то вершины a и b останутся в одной компоненте, то есть существует соединяющий их маршрут, не проходящий через это ребро. По свойству 1 в нем имеется простой путь x_1, $x_2,\ldots,$ x_n, соединяющий a и b, но тогда x_1, $x_2,\ldots,$ x_n, x_1– цикл, проходящий через (a,b). ■

Пусть G – ориентированный граф. В орграфе последовательность ребер, в которой конец каждой дуги совпадает с началом следующей, называется ***путем*** (в нем ребра проходят по их ориентации). Путь называется ***ориентированной цепью***, если каждое ребро встречается в нем не более одного раза, и ***простой ор-цепью***, если каждая вершина инцидентна не более чем двум его ребрам. ***Контур*** – замкнутый путь в орграфе.

Если в ориентированном графе нельзя «пройти» от одной вершины до другой вершины, то расстояние между ними называют бесконечным.

Пусть v_i и v_j – вершины орграфа *G*. **Вершина** v_i ***достижима*** *из* v_j, если существует путь с началом v_i и концом v_j. Любая вершина достижима сама из себя. Вершины v_i и v_j ***сильно связаны***, если они достижимы одна из другой.

Например, для графа, изображенного на рисунке 3.49, вершины v_2 и v_3 сильно связаны, вершины v_1 и v_4 сильно связаны, вершина v_6 достижима из v_1, но вершина v_1 недостижима из v_6.

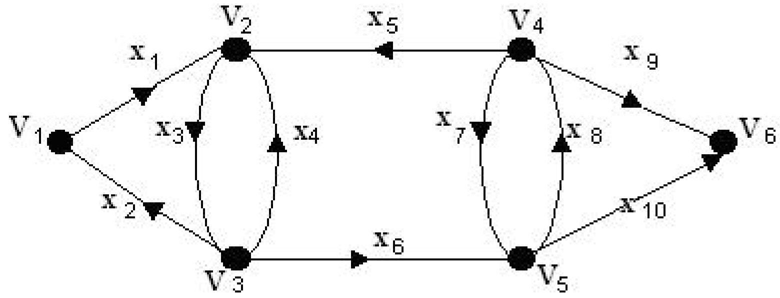
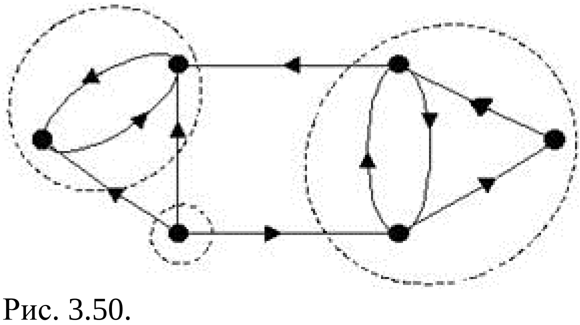


Рис. 3.49.

Орграф называется ***связным***, если он связен без учета ориентации дуг, и ***сильно связным***, если из любой вершины v_i в любую вершину v_j существует путь. ***Компонентой сильной связности*** ориентированного графа называется максимальное множество вершин, в котором существуют пути (маршруты) из любой вершины в любую другую.



Граф, изображенный на рисунке. 3.50, имеет три компоненты сильной связности. Они обведены пунктирными линиями.

Рис. 3.50.

Заметим, что существуют дуги, не принадлежащие ни одной из компонент сильной связности.

Достижимость в графе описывается ***матрицей достижимости*** $R=[r_{ij}]$, i, j=1, 2, ... n, где n – число вершин графа, а каждый элемент определяется следующим образом:

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если вершина } x_j \text{ достижима из вершины } x_i\\ 0-\text{в противном случае}\end{cases}$$

Матрица сильной связности ориентированного графа G − квадратная матрица $S(G)=[s_{ij}]$ порядка n, элементы которой равны 1 или 0:

$$s_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если вершина } x_j \text{ достижима из вершины } x_i \text{ и } x_i \text{ достижима из } x_j\\ 0-\text{в противном случае}\end{cases}$$

Матрица достижимости несет важную информацию об ориентированном графе. Ее анализ позволяет найти сильные компоненты графа, в которые входят взаимно достижимые вершины. Для двух таких вершин с номерами i и j должно выполняться равенство $r_{ij}=r_{ji}=1$. Поэтому, чтобы найти сильную компоненту, в которую входит i-я вершина орграфа, нужно просмотреть i-ю строку и i-й столбец матрицы R и сформировать множество $P_i=\{j: r_{ij}=r_{ji}=1\}$ номеров вершин, порождающих искомую сильную компоненту. Из определения матрицы достижимости вытекает, что в P_i содержатся номера всех вершин данной сильной компоненты. Поскольку две различные сильные компоненты не пересекаются, множества P_i с номерами их вершин при поиске других сильных компонент исключаются из рассмотрения. Процесс поиска начинается с произвольной вершины и заканчивается, когда для каждой вершины будет найдена содержащая ее сильная компонента. Может оказаться, что некоторые (а может быть и все) сильные компоненты содержат только по одной вершине, поскольку каждая вершина, по определению, достижима сама из себя.

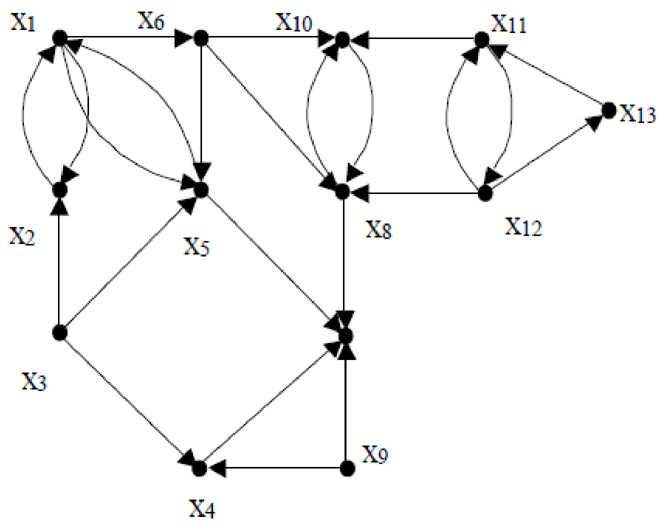
Пример 3.20. Пусть матрица достижимости графа имеет вид:

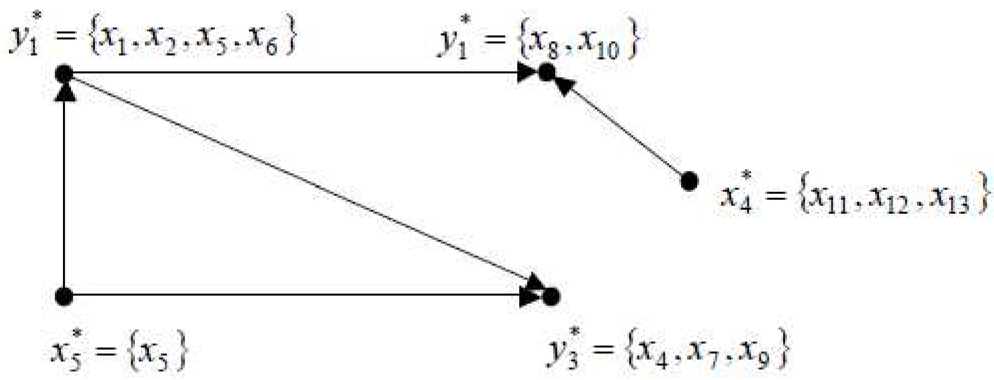
R=

1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

В соответствии с описанной выше процедурой поиск сильных компонент приведет к следующим результатам: $P_1 = \{x_i\}$, $P_2 = \{x_2, x_3\}$, $P_3 = \{x_4, x_5\}$, $P_4 = \{x_6, x_7\}$.

Пример 3.21.





Определение связности, достижимости и расстояний на графе по матрице смежности.

Пусть G – помеченный граф, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $S(G)$– матрица смежности графа G. Умножим матрицу $S(G)$ на себя. Элемент s_{ij}^2 квадрата матрицы смежности – это есть число маршрутов длины 2, соединяющих вершину v_i с вершиной v_j.

Диагональные элементы матрицы S^2, в частности, совпадают со степенями соответствующих вершин. Точно так же можно показать, что элементы матрицы S^3 – это количество маршрутов длины 3, соединяющие соответствующие пары вершин; элементы S^4 – количество маршрутов длины 4, и т. д.

Таким образом, расстояние между вершинами v_i и v_j равно наименьшей степени *r* матрицы *S(G)* такой, что (i,j)–элемент матрицы S^r отличен от 0. Так как расстояния не могут быть больше n-1, где n – порядок графа, то для того, чтобы найти все расстояния и выяснить другие связанные с ними вопросы, достаточно рассмотреть степени $r \leq n$-1. Если s_{ij}^2 = 0 для всех $1 \leq r \leq n$-1, то не существует маршрута между вершинами *i* и *j*, и граф не связан.

Некоторое ребро неориентированного графа называется ***перешейком***, если при его удалении число компонентных связностей увеличивается на единицу. Перешеек не может входить в цикл.

Разрез − множество ребер, удаление которого делает граф несвязным.

Ребро называется ***тупиком***, если степень одной из инцидентных ему вершин равна единице.

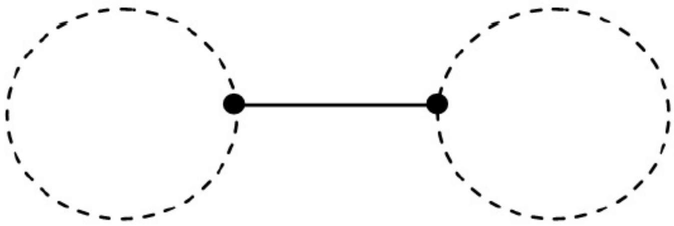


Рис. 3.51. Перешеек в графе.

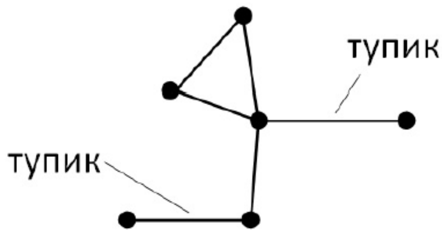


Рис. 3.52. Тупик в графе.

Вершина является ***шарниром***, если ее удаление вместе с инцидентными ребрами увеличивает количество компонент связности.

Пример 3.22. Определим шарниры в графе на рисунке 3.53.

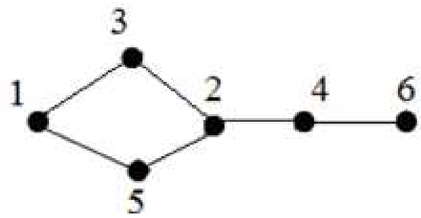


Рис. 3.53.

Граф на рис. 3.53 связный, то есть представляет собой одну компоненту связности. Удалим вершину 2 вместе с инцидентными ребрами (строку 2 и столбцы 3, 4, 5 в матрице инцидентности). В графе останутся три ребра: 13, 15 и 46. Ребра 13 и 15 образуют одну компоненту связности, а ребро 46 – другую. Удаление вершины 2 увеличило количество компонент связности, поэтому вершина 2 является шарниром в графе.

Алгоритм связности.

Пусть $G=(V,E)$ – граф. Алгоритм предназначен для вычисления значения $c=c(G)$ – числа компонент связности графа G.

begin

$V' := V$;

$c := 0$ $

while $V' \neq \varnothing$ **do**

begin

Выбрать $y \in V'$;

Найти все вершины, соединенные маршрутом с y;

Удалить вершину y из V' и соответствующие ребра из E;

$c := c+1$;

end

end

Пример. 3.23. Применим алгоритм для графа на рис. 3.54.

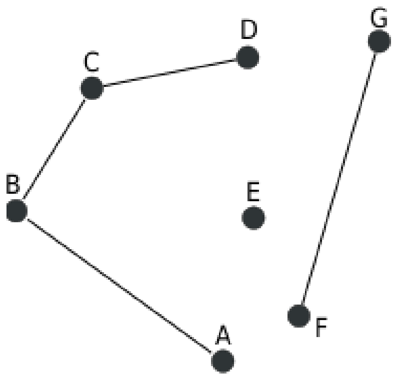


Рис.3.54.

Граф на рис. 3.54. имеет три компоненты связности. Результаты поиска представлены в таблице

	V'	c
Исходные значения	$\{A,B,C,D,E,F,G\}$	c=0
Выбор $y=A$	$\{E,F,G\}$	c=1
Выбор $y=E$	$\{F,G\}$	c=2
Выбор $y=F$	$\varnothing$	c=3

Расстоянием между двумя вершинами графа называется длина кратчайшего пути, соединяющего эти вершины. Расстояние между вершинами a и b обозначается через $d(a,b)$. Если в графе нет маршрута или пути, соединяющего a и b, то есть эти вершины принадлежат разным компонентам связности, то расстояние между ними считается бесконечным.

Расстояние от данной вершины a до наиболее удаленной от нее вершины называется ***эксцентриситетом*** вершины a и обозначается через $e(a)$. Таким образом, $e(a)=\max\limits_{x\in VG} d(a,x)$.

Вершину с наименьшим эксцентриситетом называют ***центральной***, а вершину с наибольшим – ***периферийной***. Множество всех центральных вершин называется ***центром*** графа. Сама величина наименьшего эксцентриситета называется ***радиусом*** графа и обозначается через $r(G)$, а величина наибольшего – ***диаметром*** и обозначается $diam(G)$. Иначе говоря, $r(G)=\min\limits_{x\in V}\max\limits_{y\in V} d(x,y)$, $diam(G)=\max\limits_{x\in V}\max\limits_{y\in V} d(x,y)$. Наименьший диаметр имеет полный граф, его диаметр равен 1. Среди связных графов с n вершинами наибольший диаметр, равный $n-1$, имеет цепь P_n.

Пример 3.24. Для графа G, изображенного на рисунке 3.55, найдем радиус, диаметр и центры.

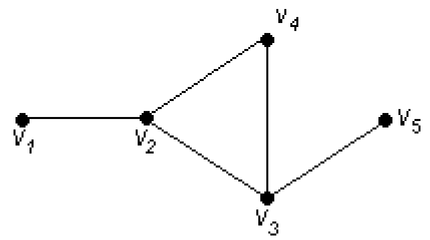


Рис. 3.55.

Решение. Чтобы определить центры, радиус, диаметр графа *G*, найдем матрицу *D(G)* расстояний между вершинами графа, элементами d_{ij} которой будут расстояния между вершинами v_i и v_j. Для этого воспользуемся графическим представлением графа.

$$D(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица *D(G)* симметрична относительно главной диагонали. С помощью полученной матрицы для каждой вершины графа *G* определим наибольшее удаление по формуле вычисления эксцентриситета $e(v_i)$: $e(v_1)=3$, $e(v_2)=2$, $e(v_3)=2$, $e(v_4)=2$, $e(v_5)=3$. Минимальное из полученных чисел является радиусом графа *G*, максимальное – диаметром графа *G*. Значит, $r(G)=2$ и $diam(G)=3$, центрами являются вершины v_2, v_3, v_4.

Пример 3.25.

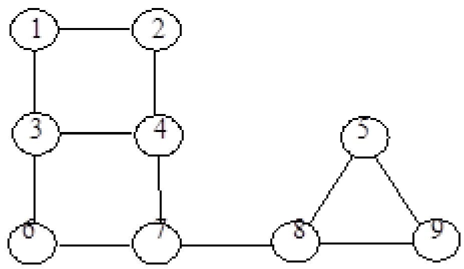


Рис.3.56

Для графа, изображенного на рисунке 3.56, эксцентриситеты вершин приведены в таблице:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e (x)	5	4	4	3	5	3	3	4	5

Центр графа (рис. 3.56) составляют вершины 4, 6, 7; периферийные вершины – 1, 5 и 9; радиус его равен 3, а диаметр 5.

Если расстояние между двумя вершинами равно диаметру графа, то кратчайший путь, соединяющий эти вершины, называется ***диаметральным путем***, а подграф, образованный вершинами и ребрами этого пути, называется ***диаметральной цепью***.

Одна из диаметральных цепей графа на рис. 3.56 порождается множеством вершин {1,3,6,7,8,9}.

Разбиение вершин графа на подмножества по их расстоянию от заданной начальной вершины называется ***структурой уровней графа***.

Метод поиска в ширину.

Метод поиска в ширину позволяет легко найти расстояние от данной вершины до других вершин графа, и значит, определить удалённость данной вершины. Применив его для всех вершин графа, получим удалённости всех вершин, зная которые, можно найти радиус, диаметр графа, а также центры и периферийные центры.

При *поиске в ширину*, после посещения первой вершины, посещаются все соседние с ней вершины. Потом посещаются все вершины, находящиеся на расстоянии двух ребер от начальной. При каждом новом шаге посещаются вершины, расстояние от которых до начальной на единицу больше предыдущего. Чтобы предотвратить повторное посещение вершин, необходимо вести список посещенных вершин. Для хранения временных данных, необходимых для работы алгоритма, используется *очередь* – упорядоченная последовательность элементов, в которой новые элементы добавляются в конец, а старые удаляются из начала.

Таким образом, основная идея *поиска в ширину* заключается в том, что сначала исследуются все вершины, смежные с начальной вершиной (вершина с которой начинается обход). Эти вершины находятся на расстоянии 1 от начальной. Затем исследуются все вершины на расстоянии 2 от начальной, затем все на расстоянии 3 и т.д. Обратим внимание, что при этом для каждой вершины сразу находится длина кратчайшего маршрута от начальной вершины.

Алгоритм поиска в ширину

Шаг 1. Всем вершинам графа присваивается значение *не посещенная*. Выбирается первая вершина и помечается как посещенная (и заносится в очередь).

Шаг 2. Посещается первая вершина из очереди (если она не помечена как посещенная). Все ее соседние вершины заносятся в очередь. После этого она удаляется из очереди.

Шаг 3. Повторяется шаг 2 до тех пор, пока очередь не пуста (рис. 3.57).

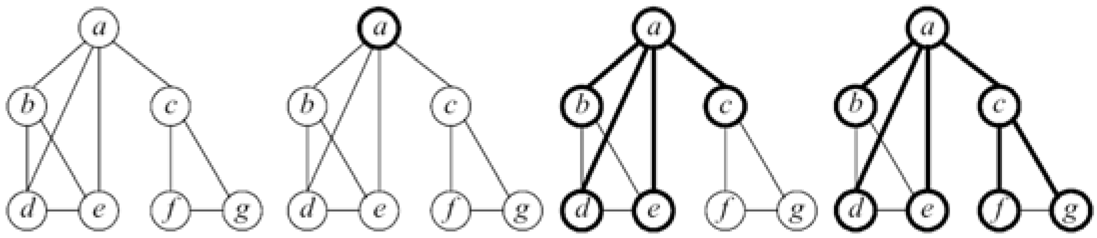


Рис. 3.57. Демонстрация алгоритма поиска в ширину

Пример 3.26. Для графа на рисунке 3.58 найдем радиус, диаметр графа, а также центры и периферийные центры, используя метод *поиска в ширину*.

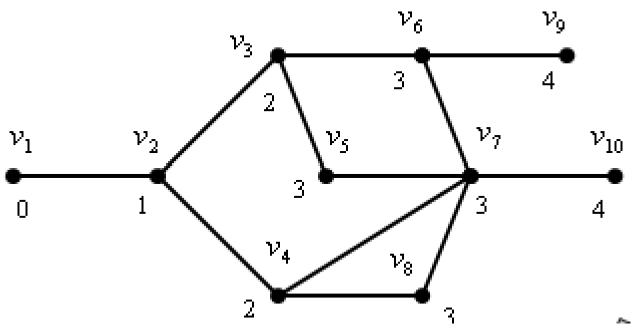


Рис.3.58.

Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу. Предположим, нужно найти расстояние от вершины v_1 до других вершин. Присвоим вершине v_1 метку 0. Всем вершинам, смежным с v_1, присвоим метку 1. Затем всем вершинам, смежным с вершинами имеющими метку 1 (которые ещё не имеют метки), присвоим метку 2 и т. д., пока все вершины не получат метки. Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от v_1 до данной вершины, а наибольшая из меток равна удалённости вершины v_1. Так, в рассматриваемом примере e(v_1) = 4.

Метод позволяет так же находить кратчайшие цепи между вершинами. Если, например, нужно найти кратчайшую цепь от v_1 до v_{10}, то после расстановки меток двигаемся в обратном порядке от вершины v_{10}, переходя каждый раз к вершине с меньшей меткой (такая обязательно найдётся; если их несколько, то выбираем любую): $v_{10} \to v_7 \to v_4 \to v_2 \to v_1$. В результате, получаем кратчайшую цепь: $(v_1, v_2, v_4, v_7, v_{10})$.

Подсчёты удалённостей остальных вершин приводят к следующим результатам: e(v_2)=3, e(v_3)=3, e(v_4)=3, e(v_5)=3, e(v_6)=3, e(v_7)=3, e(v_8)=3, e(v_9)=4, e(v_{10})=4.

Таким образом, для данного графа G имеем: $r(G) = 3$; $diam(G) = 4$; вершины v_1, v_9, v_{10} являются периферийными центрами, а все остальные вершины – центрами.

Метод поиска в глубину

Поиск в глубину – это рекурсивный алгоритм обхода вершин графа. Если метод поиска в ширину проводился симметрично (вершины графа просматривались по уровням), то данный метод предполагает продвижение вглубь до тех пор, пока это возможно. Таким образом, основная идея поиска в глубину: когда возможные пути по *ребрам*, выходящим из вершин, разветвляются, нужно сначала полностью исследовать одну ветку и только потом переходить к другим веткам (если они останутся нерассмотренными).

Невозможность дальнейшего продвижения, означает, что следующим шагом будет переход на последний, имеющий несколько вариантов движения (один из которых исследован полностью), ранее посещенный узел (вершина). Отсутствие последнего свидетельствует об одной из двух возможных ситуаций: либо все вершины графа уже просмотрены, либо просмотрены все те, что доступны из вершины, взятой в качестве начальной, но не все (несвязные и ориентированные графы допускают последний вариант).

При *поиске в глубину* посещается первая вершина, затем необходимо идти вдоль ребер графа, до попадания в *тупик*. Вершина графа является *тупиком*, если все смежные с ней вершины уже посещены. После попадания в *тупик* нужно возвращаться назад вдоль пройденного пути, пока не будет обнаружена вершина, у которой есть еще не посещенная вершина, а затем необходимо двигаться в этом новом направлении. Процесс оказывается завершенным при возвращении в начальную вершину, причем все смежные с ней вершины уже должны быть посещены.

Алгоритм поиска в глубину

Шаг 1. Всем вершинам графа присваивается значение *не посещенная*. Выбирается первая вершина и помечается как *посещенная*.

Шаг 2. Для последней помеченной как посещенная вершины выбирается смежная вершина, являющаяся первой помеченной как не посещенная, и ей присваивается значение посещенная. Если таких вершин нет, то берется предыдущая помеченная вершина.

Шаг 3. Повторить шаг 2 до тех пор, пока все вершины не будут помечены как посещенные (рис. 3.59).

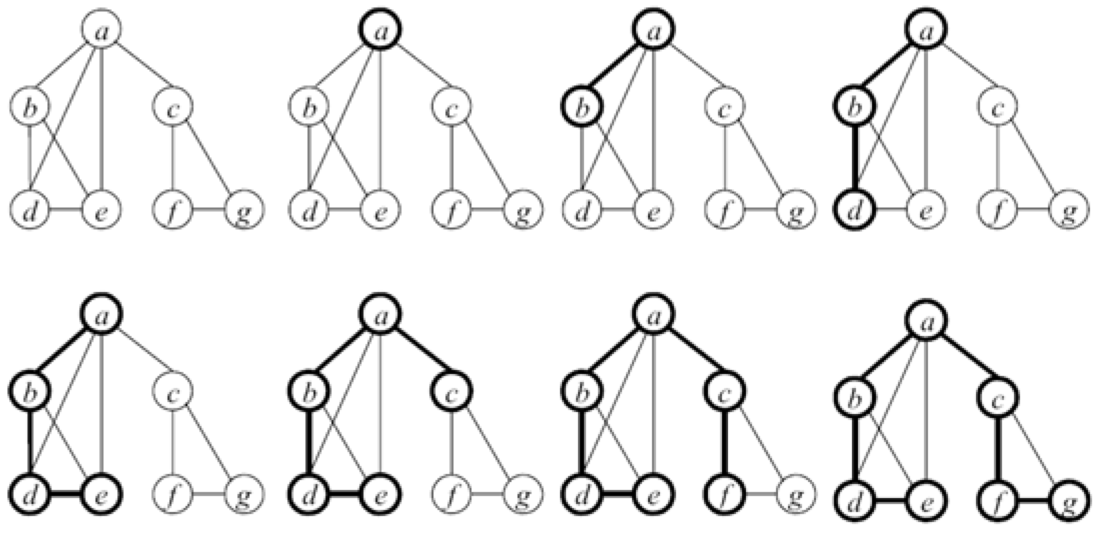


Рис. 3.59. Демонстрация алгоритма поиска в глубину

Пример. 3.27. Для неориентированного связного графа на рис. 3.60. рассмотрим работу алгоритма поиска в глубину.

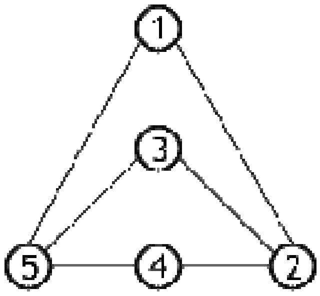


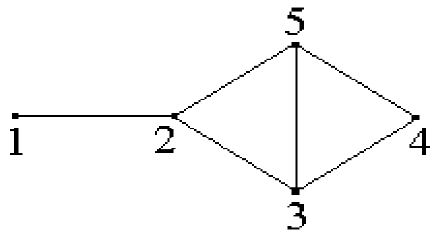
Рис. 3.60.

Сначала необходимо выбрать начальную вершину. Какая бы вершина в качестве таковой не была выбрана, граф в любом случае исследуется полностью, так как это связный граф без дуг.

Пусть обход начнется с узла 1, тогда порядок последовательности просмотренных узлов будет следующим: 1 2 3 5 4. Если выполнение начать, например, с узла 3, то порядок обхода окажется иным: 3 2 1 5 4.

Задачи

1. Дайте классификацию маршрутов в графе, приведенном на рисунке 3.61.



(1, 2, 3, 5, 2);

(2, 3, 5, 4);

(2, 3, 4, 5, 3, 2);

(3, 4, 5, 3).

Рис. 3.61.

2. Найдите в графе (рис.3.62) циклы, содержащие: а) 4 ребра; б) 6 ребер; в) 5 ребер; г) 10 ребер.

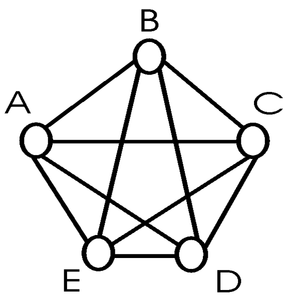


Рис.3.62

3. Определите имеют ли контуры орграфы с матрицами смежности:

$$a)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\qquad б)\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\qquad в)\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad г)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

4. Нарисуйте все графы с указанными свойствами и значениями параметров (в скобках указано число искомых графов):

1) графы с единственным циклом, 5 вершин (9);
2) графы с единственным циклом, 6 вершин, 5 ребер (8);
3) связные, не имеющие циклов длины 3, 5 вершин (6);
4) имеющие цикл длины 6, 5 вершин (6);
5) связные, 6 вершин, 6 ребер (13);
6) связные, 5 ребер (12);
7) две компоненты связности, 4 ребра (9);
8) без изолированных вершин, 4 ребра (11)

5. Изобразите три подграфа графа *G* (рис.3.63) так, чтобы они были связными

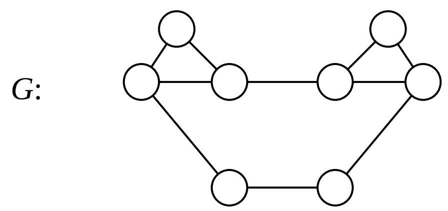


Рис. 3.63.

6. Сколько компонент связности имеет граф *G* (рис.3.64)? Составьте для него матрицу смежности в блочно-диагональном виде (каждой компоненте связности должен соответствовать определенный блок).

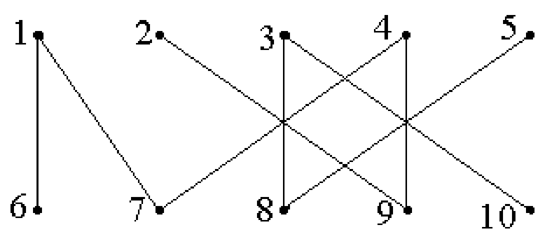


Рис. 3.64.

7. а) Найдите все перешейки (мосты) и разделяющие вершины (шарниры) в графе *G* (рис.3.65); б) Найдите радиус, диаметр и центр.

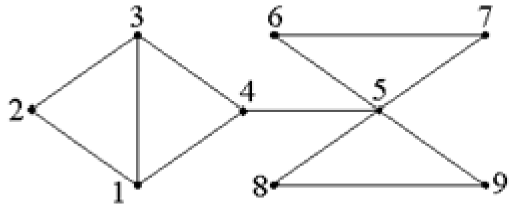


Рис. 3.65.

8. Найдите радиус, диаметр и центр графа на рисунке 3.66.

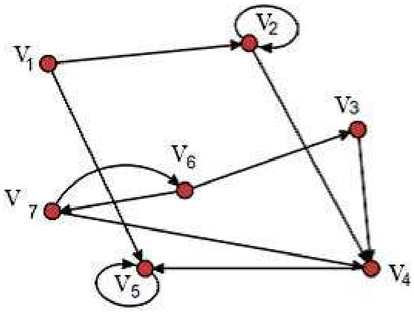


Рис. 3.66.

9. Найдите радиус, диаметр и центр графа, заданного матрицей смежности:

$$1)\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} 2)\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix} 3)\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

10. Постройте граф, центр которого: 1) состоит ровно из одной вершины; 2) состоит из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин; 3) состоит из двух вершин; 4) совпадает с множеством всех вершин.

11. В заданном ориентированном графе *G* (рис.3.67) укажите номера сильно связанных вершин.

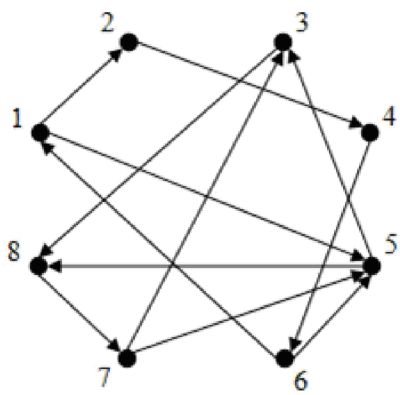
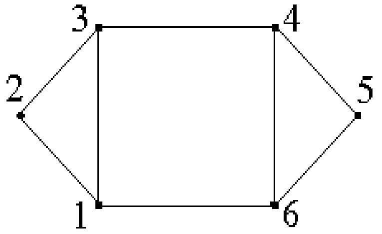


Рис. 3.67.

12.Найдите минимальный разрез в следующих графах (рис. 3.68):

H:



G:

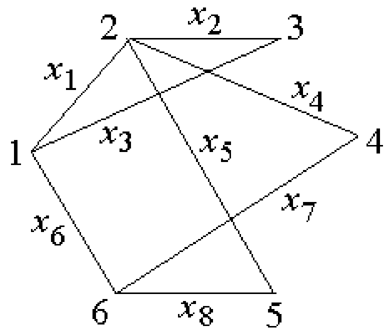


Рис.3.68

13.Определите, имеют ли контуры орграфы с матрицами смежности:

$$A(D_1)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{Vmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{Vmatrix}\quad A(D_2)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{Vmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&0&0\end{Vmatrix}\quad A(D_3)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{Vmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{Vmatrix}.$$

Выясните, являются ли эти орграфы слабо связными или сильно связными. Постройте эти графы и составьте для них матрицы достижимости.

14. Среди графов, изображенных на рис. 3.69, укажите сильно связный, односторонне связный и несвязный графы. Найдите матрицы достижимости.

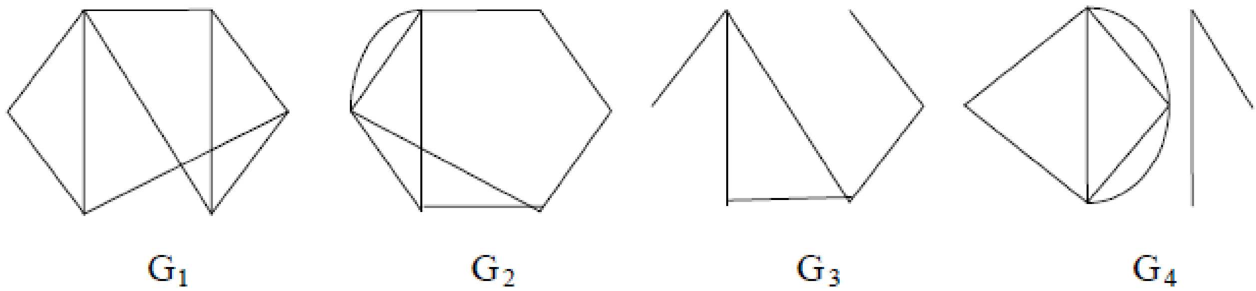


Рис. 3.69.

15.Для графов, изображенных на рис.3.70, определите наибольшую клику.

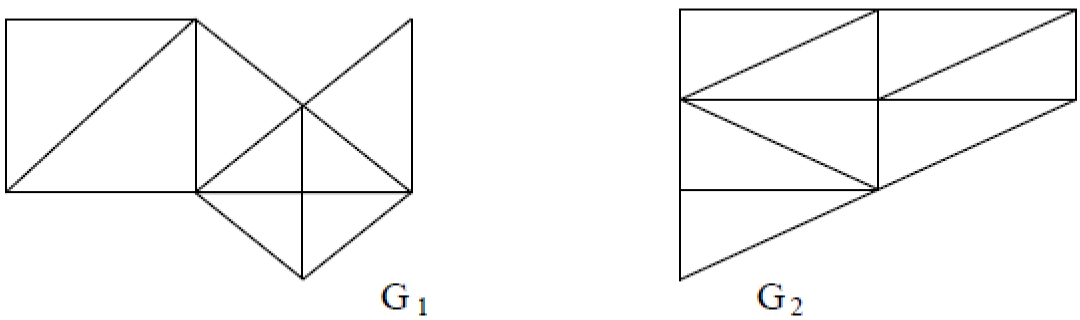


Рис. 3.70.

16. Докажите, что отношение достижимости является отношением эквивалентности.

17. Граф задан матрицей инцидентности. Определите, у какой вершины полустепень захода равна трем

1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	-1	0
0	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1
0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1

18. Задания к практической работе.

Дан неориентированный граф (данные по вариантам). Определите:

1) диаметр и радиус этого графа;

2) центры и периферийные вершины графа;

3) цикломатическое число данного графа.

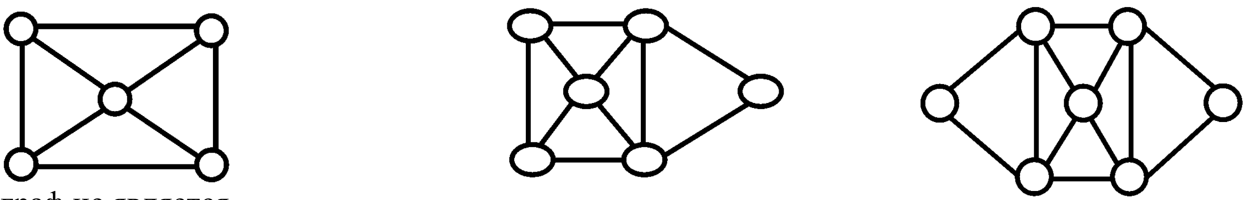
1	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}	2	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (2; 6); (2; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}
3	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 6); (5; 1)}	4	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 6); (2; 3); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 5); (5; 1)}
5	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 3)}	6	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 4); (5; 6)}
7	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)}	8	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3); (6; 1)}
9	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 4); (5; 6)}	10	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 3); (1; 6); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (5; 3)}

11	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 5); (2; 6); (3; 6); (3; 4); (4; 5); (5; 6)}	12	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 6); (2; 6); (3; 5); (4; 3); (4; 5)}
13	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}	14	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}
15	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 6)}	16	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 6); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (5; 1)}
17	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (1; 4); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 3)}	18	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 6)}
19	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3; 4); (4; 6); (5; 3); (6; 1)}	19	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 3); (1; 4); (2; 1); (3; 4); (4; 5); (4; 6); (6; 1)}
21	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 6); (3; 4); (4; 6); (5; 6)}	22	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 6); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (5; 6)}
23	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (2; 4); (2; 5); (3; 5); (4; 3); (4; 6); (5; 1)}	24	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (6; 1)}
25	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (1; 3); (2; 3); (4; 3); (5; 6)}	26	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 5); (2; 5); (3; 6); (4; 3); (4; 6)}
27	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 3); (4; 5); (5; 1)}	28	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 5); (5; 6)}
29	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (2; 5); (3; 5); (3; 4); (4; 5); (5; 6)}	30	V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (3; 6); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

3.4.Обходы графа (эйлеровы и гамильтоновы графы)

Одна из самых первых задач теории графов – это задача о кенигсбергских мостах, вопрос которой состоял в том, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Эйлер дал отрицательный ответ на этот вопрос, так как соответствующий граф не содержал эйлерова цикла. С эйлеровыми графами связана задача китайского почтальона: ребрам графа приписаны положительные веса, требуется найти цикл, проходящий через каждое ребро, по крайней мере, один раз и такой, что его суммарный вес минимален. Эта задача имеет много потенциальных приложений, связанных с проблемой инспектирования распределенных систем, когда требуется проверить все «компоненты» (обслуживание дорог, проверка электрических, телефонных и железнодорожных линий, организация экскурсий и т.п.).

Определение 9. Эйлеров цикл – цикл, проходящий через все ребра графа (в эйлеровом цикле одна вершина может проходиться несколько раз). Граф, который имеет эйлеров цикл, называется ***эйлеровым графом***.



граф не является ни эйлеровым, ни полуэйлеровым

полуэйлеров граф

эйлеров граф

Рис.3.71.

Эйлерова цепь (путь, цикл, контур) – цепь (путь, цикл, контур), содержащая все ребра (дуги) графа по одному разу. Граф, который имеет эйлерову цепь, называется ***полуэйлеровым графом*** (рис. 3.71).

Эйлер сформулировал и доказал **теоремы** (необходимое и достаточное условие существования эйлерова цикла и эйлеровой цепи).

Критерий эйлеровости графа: Связный н-граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Критерий полуэйлеровости графа: Для того, чтобы связный н-граф G обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно 2 вершины нечетной степени.

Доказательство критерия эйлеровости графа.

Необходимость: Имеем эйлеров граф G. Он обладает эйлеровым циклом (следует из определения). Связность графа следует из определения эйлерова цикла. Эйлеров цикл содержит каждое ребро только один раз, поэтому, сколько раз эйлеров путь приведет конец карандаша в вершину, столько и выведет, причем уже по другому ребру. Следовательно, степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: одно – результат подсчета входов в вершину, другое – выходов. Это значит, что каждая вершина должна иметь четную степень.

Достаточность: предполагается, что степень всех вершин четная. Докажем индукцией по числу ребер графа. Заметим, что при числе ребер, равному 2, эйлеров цикл существует.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех мультиграфов с числом ребер $\leq n$. Докажем, что оно справедливо и для мультиграфа с числом ребер (n + 1).

Доказательство: для мультиграфа с числом ребер (n+1) рассмотрим некоторый цикл, такой обязательно существует. Доказательство от противного. Допустим, что в мультиграфе не существует ни одного цикла с числом ребер (n+1). В этом случае все его ребра – перешейки. Рассмотрим некоторый перешеек u (рис. 3.72). Удалим его. Пусть перешеек u был инцидентен вершинам x_r и x_s.

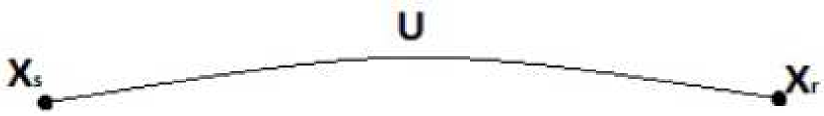


Рис.3.72. Перешеек в графе G.

При удалении перешейка u граф G распадется на две компоненты связности. Так как по условию степень вершины четная, то при удалении перешейка степень вершин x_r, x_s стала нечетной, а в каждой из компонент связности по-прежнему все ребра – перешейки. Склеем компоненты связности по вершинам x_r, x_s, получим связанный мультиграф с числом ребер n, в котором степени всех вершин четные.

По предположению индукции в таком новом мультиграфе существует эйлеров цикл (так как число ребер стало n), а это противоречит предположению, что все его ребра – перешейки. Следовательно, в мультиграфе $(n + 1)$ существует цикл. Если этот цикл эйлеров, т.е. содержит все ребра мультиграфа, то утверждение теоремы доказано. В противном случае найдутся вершины x_{ij} (i=1, 2,…,k), входящие в цикл, такие, что каждой из них инцидентно по крайней мере одно ребро, не входящее в найденный цикл. В силу условия теоремы число таких ребер обязательно четно.■

Принято всякую замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, называть ***уникурсальной***. Рисунок графа, обладающего эйлеровым путем или эйлеровым циклом, является ***уникурсальной линией*** (*фигурой*).

Признаки:

1. Если нечетных вершин в фигуре нет, то ее можно начертить одним росчерком, начиная вычерчивать с любой вершины.
2. Если в фигуре две нечетные вершины, то ее можно начертить одним росчерком, начав вычерчивание в одной из нечетных вершин и закончив в другой.
3. Если в фигуре более двух нечетных вершин, то ее нельзя вычертить одним росчерком.

Пример 3.28. Через реку, омывающую шесть островов, перекинуто семнадцать мостов (рис.3.73). Можно ли обойти все эти мосты, не побывав ни на одном из них более одного раза?

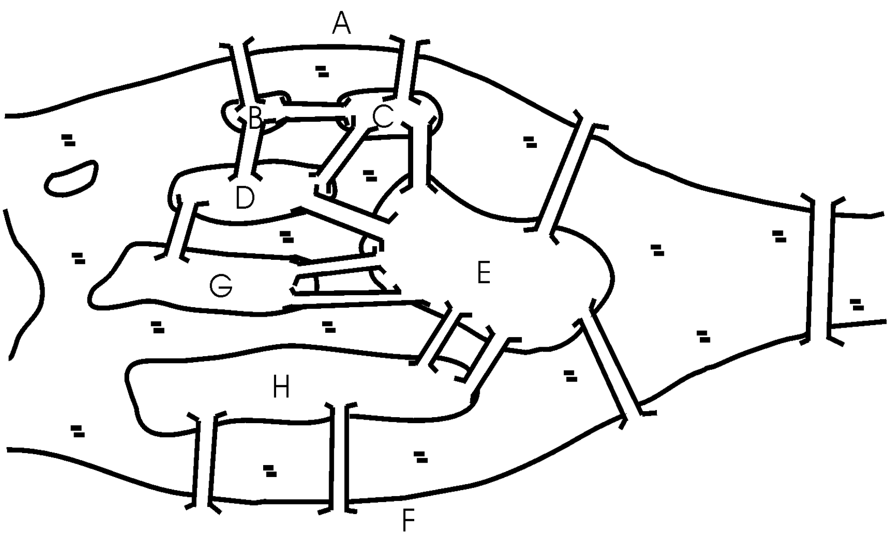


Рис. 3.73.

Составим граф (рис.3.74):

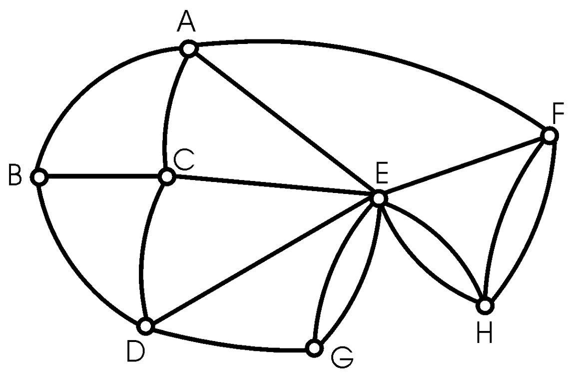


Рис.3.74.

Вершины B и G – нечетные, следовательно, имеем полуэйлеров граф. Его можно построить одним росчерком карандаша, а значит, можно пройти по всем мостам, побывав на каждом из них не более одного раза, начиная, например, с моста на острове B. Один из обходов:

B-A-F-H-F-E-H-E-G-E-A-C-E-D-C-B-D-G.

Понятие эйлеровости можно распространить на орграфы.

Утверждение. Связный ориентированный граф содержит эйлеров контур (существует путь), который содержит все дуги графа точно один раз, тогда и только тогда, когда полустепени захода $\deg^+(v)$ и полустепени исхода $\deg^-(v)$ всех вершин удовлетворяют условиям:

a) для случая контура $\deg^+(x_i) = \deg^-(x_i)$ для всех $x_i \in X$;

b) для случая пути $\deg^+(x_i) = \deg^-(x_i)$ для всех $x_i \in X \setminus \{p, q\}$, $\deg^+(p) = \deg^-(p) + 1$, $\deg^+(q) = \deg^-(q) - 1$, где p – начальная, а q – конечная вершина эйлерова пути.

Для определения эйлерова цикла в н-графе используется ***метод Флери***, идея которого заключается в следующем: начав с некоторой вершины *x*, каждый раз вычеркивать пройденное ребро; не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две связные компоненты (не считая изолированных вершин).

Алгоритм построения эйлерова цикла в мультиграфе, в котором он существует.

1. Выбрать произвольно некоторую вершину *A*.

2. Выбрать произвольно некоторое ребро u, инцидентное *A*, и присвоить ему номер 1. Назовем это ребро пройденным.

3. Каждое пройденное ребро нужно вычеркивать и присваивать ему номер на единицу больше номера предыдущего пройденного ребра. Это повторяющийся циклический процесс.

4. Находясь в некоторой вершине *X* не нужно выбирать ребро, соединяющее вершину *X* с вершиной *A*, если только есть возможность другого выбора.

5. Находясь в вершине *X* не нужно выбирать ребро, являющееся перешейком (при удалении которого подграф из не вычеркнутых еще ребер распадается на компоненты связности).

6. После того, как в графе будут пронумерованы все ребра, цикл μ будет эйлеров: $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где u_i – ребра с возрастающими номерами.

Задача о лабиринте

Имеются некоторые площадки – перекрестки, и некоторые пути – коридоры. Кроме того, у лабиринта (рис. 3.75) имеются вход (перекресток *A*) и выход (перекресток *B*), остальные коридоры – тупиковые. Надо, попав в лабиринт, найти выход.

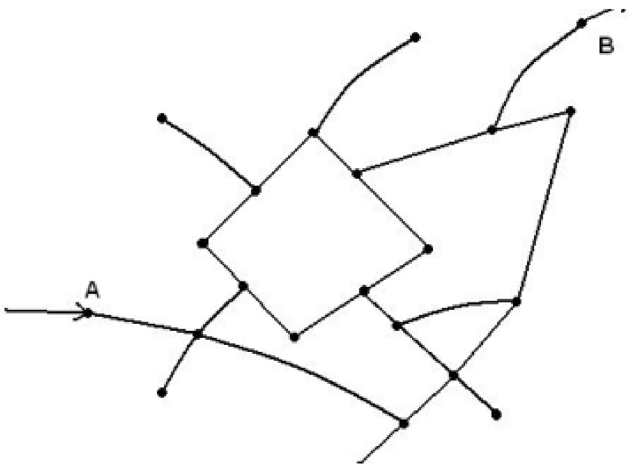


Рис. 3.75.

Задача поиска выхода из лабиринта может быть выражена в терминах теории графов. Достаточно поставить в соответствие перекресткам вершины графа, а коридорам – ребра. Надо. начав с вершины *A*, прийти к вершине *B*.

Пусть мы имеем возможность отмечать, в каком направлении пройти данный коридор, и какой коридор приводит на данный перекресток в первый раз.

Пусть мы находимся на перекрестке *A*, тогда поиск выхода перекрестка *B* может быть описан следующим *алгоритмом*:

1. Никогда не проходить по одному и тому же коридору в одном направлении дважды (в разных можно).

2. Находясь на перекрестке, не выбирать коридор, который привел на этот перекресток в первый раз, если только есть возможность другого выбора.

Определение 10. Простая цепь, проходящая через все вершины данного графа один только раз, называется ***гамильтоновой цепью,*** а простой цикл, проходящий через все вершины (за исключением начальной) данного графа только один раз, называется ***гамильтоновым циклом***. Граф, который имеет гамильтонов цикл, называется ***гамильтоновым графом***. Граф, который имеет гамильтонову цепь называется ***полугамильтоновым графом***.

Гамильтоновым путем в ориентированном графе называется путь $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, проходящий через все вершины графа, притом только по одному разу. ***Гамильтоновым контуром*** называется контур

$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1\}$ в ориентированном графе *G(X)*, если он проходит через все вершины графа, притом только по одному разу.

Замечания. 1. Гамильтонов цикл содержит все вершины графа по одному разу, но не обязательно содержит все ребра графа.

2. Любой граф *G* можно превратить в гамильтонов, добавив достаточное количество вершин и ребер, соединяющих эти новые вершины между собой и с некоторыми из старых.

Пример. 3.29. Дан граф (рис.3.76.).

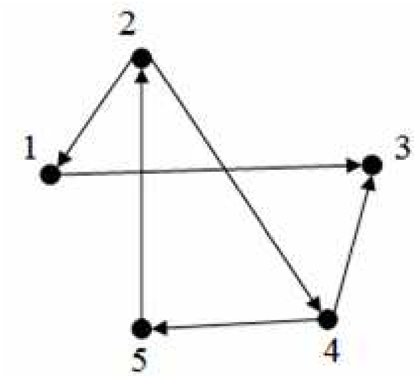
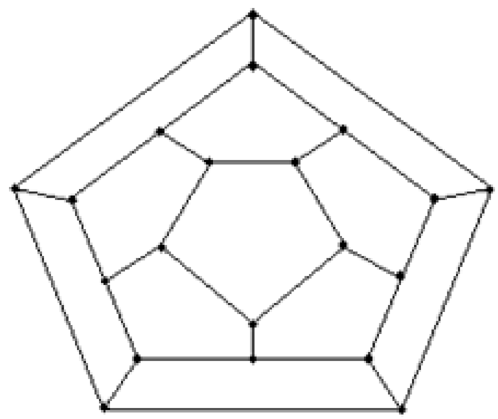


Рис. 3.76.

В графе присутствует гамильтонова цепь (4, 5, 2, 1, 3), следовательно, граф полугамильтонов.

Название *гамильтонов цикл* произошло от задачи “Кругосветное путешествие”, придуманной ирландским математиком Уильямом Гамильтоном в середине XIX века: нужно обойти по одному разу все вершины графа, изображенного на рисунке 3.77 (в исходной формулировке это были названия столиц различных стран), и вернуться в исходную точку. Этот граф представляет собой укладку додекаэдра. Одно из возможных решений задачи “Кругосветное путешествие” представлено на рисунке 3.78 (гамильтонов цикл (1, 2, 3, …, 20)).



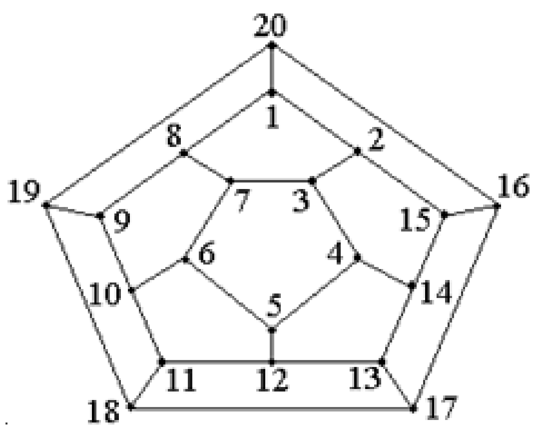


Рис. 3.77. Рис. 3.78.

К гамильтоновым циклам относится также известная задача о бродячем торговце (***задача о коммивояжере***). Район, который должен посетить коммивояжер, содержит определенное количество городов. Расстояния между ними известны, и нужно найти кратчайшую дорогу, проходящую через все пункты и возвращающуюся в исходный. Эта задача имеет ряд приложений в экономике и исследовании операций.

Сформулирован целый ряд достаточных условий существования гамильтоновых цепей, циклов, путей и контуров, но не известно ни одного критерия (т.е. условия, которое одновременно являлось бы и необходимым, и достаточным) для существования в графе гамильтонова цикла:

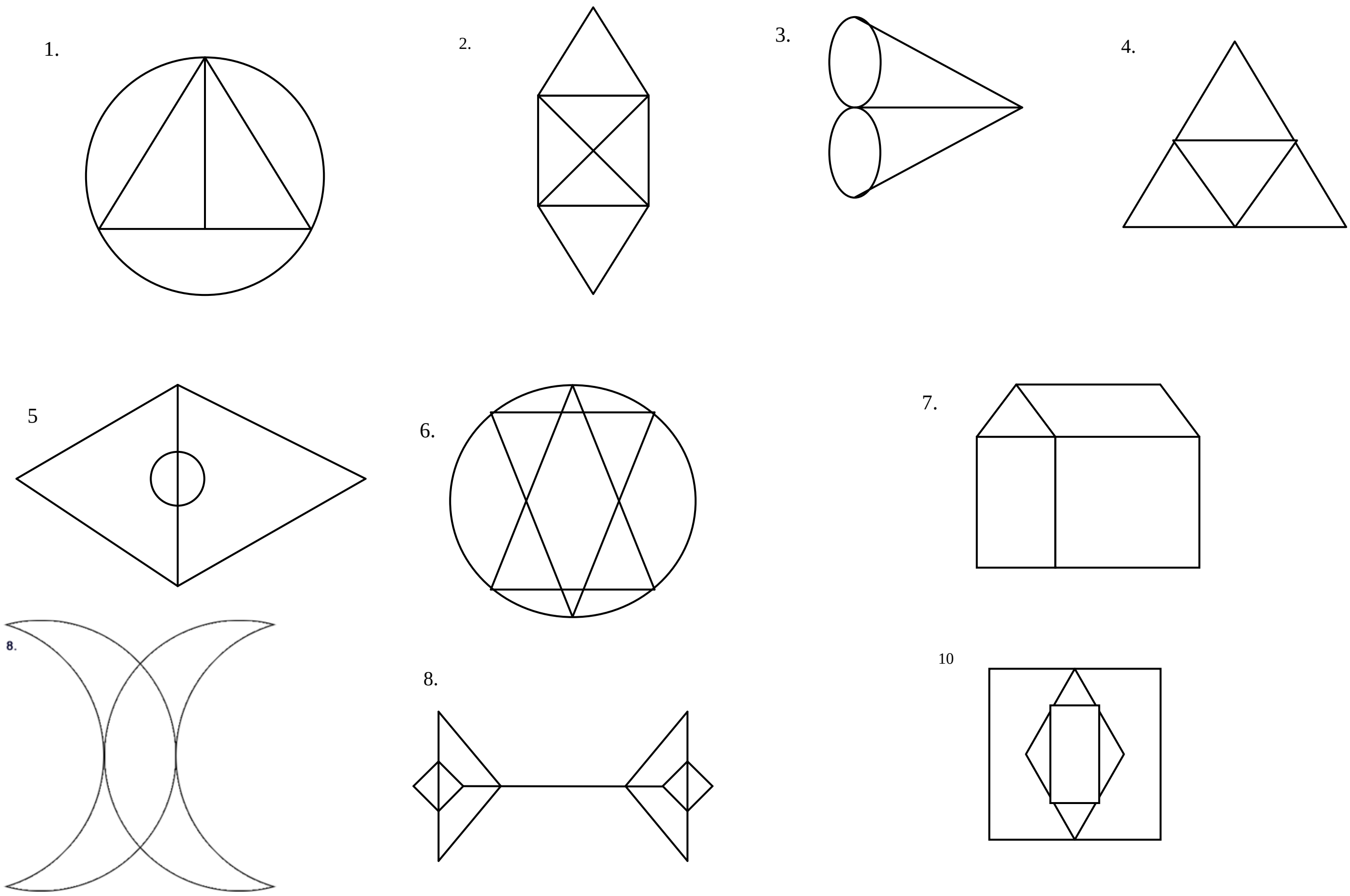
1. ***Теорема Кёнига.*** В полном конечном графе всегда существует гамильтонов путь.
2. ***Теорема Г. Дирака*** (1952 г.). Если в графе $G(V, E)$ с $|V| = p \geq 3$ $\forall v \in V$ $\deg v \geq p/2$, то граф G является гамильтоновым.
3. ***Теорема О. Оре*** (1960 г.). Если в связном графе $G(V, E)$ $\forall u, v \in V$ $\deg u + \deg v \geq p$, то граф G гамильтонов.
4. ***Теорема В. Хватала*** (1972 г.) Граф со степенной последовательностью вершин $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_p$ является гамильтоновым, если для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $1 \leq k < p/2$, при выполнении условия $d_k \leq k$ следует, что $d_{p-k} \geq p - k$.

Для графов общего вида известно лишь одно тривиальное *необходимое условие гамильтоновости*: гамильтонов граф должен быть, как минимум, двухсвязным. Отсюда следует, что графы, имеющие разделяющие (в частности, тупиковые) вершины, заведомо не являются гамильтоновыми.

Известно, что почти нет эйлеровых графов, и эффективный алгоритм отыскания эйлеровых циклов редко применим на практике. С другой стороны, так как почти все графы гамильтоновы, то задача отыскания гамильтонова цикла (а также эквивалентная ей задача коммивояжера) являются практически востребованными, но для них неизвестен (и, скорее всего, не существует) эффективный алгоритм решения. На практике применяют различные алгоритмы частичного перебора.

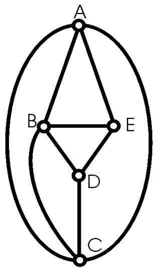
Задачи.

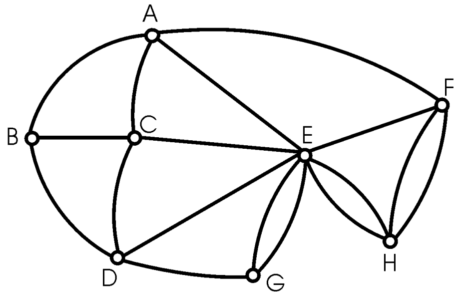
1. Определить какие графы являются эйлеровыми, полуэйлеровыми, не эйлеровыми. Вычертить фигуру одним росчерком, предварительно проверив, можно ли это сделать.



2. Решите задачу а) с девятью мостами; б) с семнадцатью мостами. Можно ли обойти все эти мосты, не побывав ни на одном из них более одного раза?

а) б)





3. Граф, заданный диаграммой (рис. 3.79.) является а) гамильтоновым, б) эйлеровым, в) полугамильтоновым, г) полуэйлеровым. Укажите правильный ответ.

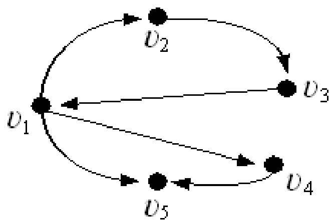


Рис. 3.79.

4. Найти граф с шестью вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.

5. Найти граф с шестью вершинами, который имеет гамильтонов цикл, но не имеет эйлерова цикла.

6. Нарисуйте все графы с указанными свойствами и значениями параметров (в скобках указано число искомых графов):

a) имеющие эйлеров цикл, 6 вершин (8);

b) имеющие эйлеров цикл, 7 вершин, 9 ребер (3);

c) имеющие гамильтонов цикл, 5 вершин (8);

d) имеющие гамильтонов цикл, 6 вершин, 8 ребер (6).

7. Пользуясь соответствующим алгоритмом, найдите эйлеров цикл или эйлерову цепь в мультиграфах, заданных матрицами смежности.

$$A(G)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\left\|\begin{array}{cccccc}0&0&1&0&1&2\\0&0&1&0&1&0\\1&1&0&2&0&0\\0&0&2&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\\2&0&0&1&1&0\end{array}\right\| \qquad A(H)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\left\|\begin{array}{cccccc}0&1&0&0&2&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&2&1&1\\0&0&2&0&1&1\\2&0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1&0\end{array}\right\|$$

8. Найдите радиус, диаметр, центр графа, заданного матрицей смежности.

a) Определите, является ли граф эйлеровым. В случае положительного ответа постройте в нем эйлеров цикл.

b) Определите, является ли граф гамильтоновым. В случае положительного ответа постройте в нем гамильтонов цикл.

$$1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Транспортная компания осуществляет грузовые перевозки в города A, B, C, D, E, F, G. В таблице приведена матрица смежности графа рейсов компании.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A	0	0	1	0	1	1	0
B	0	0	0	1	0	1	1
C	1	0	0	1	0	0	1
D	0	1	1	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	1	1
F	1	1	0	0	1	0	0
G	0	1	1	0	1	0	0

Нужно задать граф диаграммой и матрицей инцидентности. Установите последовательность городов (гамильтонов цикл) с началом в городе D, проходящую через все города ровно один раз с возвращением в D, при условии, что город F был посещен после города A.

10. Существуют ли в полном двудольном графе $K_{3,3}$ и в графе G, заданном на рисунке 3.80, эйлеров цикл, гамильтонов цикл, эйлерова цепь, гамильтонова цепь? Укажите их или докажите их отсутствие.

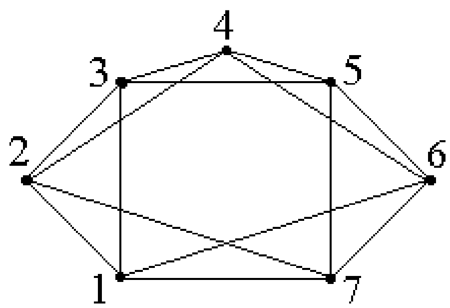


Рис. 3.80.

11. Является ли данный граф на рисунке 3.81 гамильтоновым?

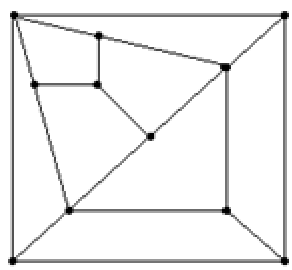


Рис. 3.81.

12. На рисунке 3.82. изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После смерти рыцаря его наследники нашили завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

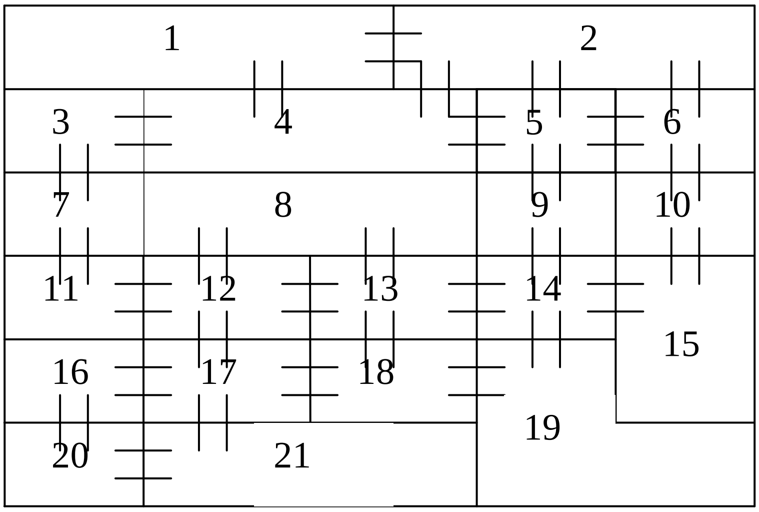


Рис.3.82.

13.Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале ровно один раз (рис.3.83.)? Вершины графа – это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра – залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

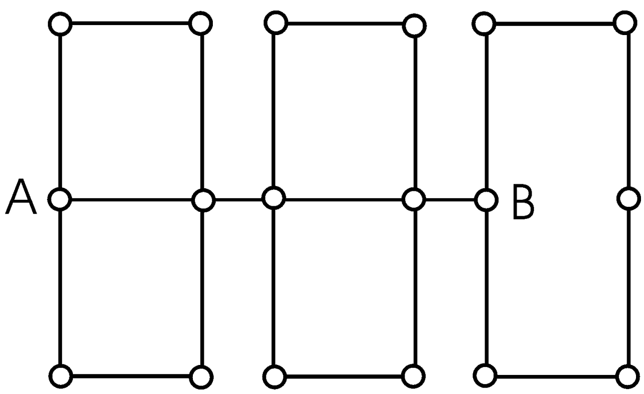


Рис.3.83.

14.В небольшой роще находится заяц (рис.3.84). Выскочив из норы и бегая по снегу от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под одним из этих деревьев. Где находится сейчас заяц? Под каким деревом находится его нора? Сколько решений имеет задача?

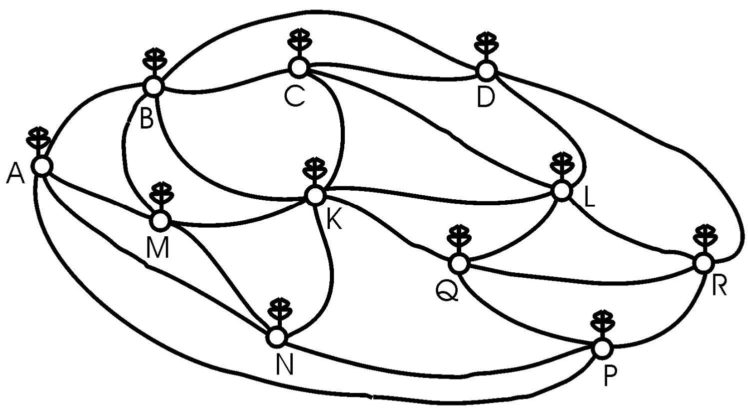


рис.3.84.

3.5. Деревья.

Понятие дерева как математического объекта было впервые предложено Кирхгофом в связи с определением фундаментальных циклов, применяемых при анализе электрических цепей. Деревья имеют особое положение в теории графов из-за предельной простоты строения, и часто при решении какой-либо задачи на графах ее сначала анализируют на деревьях.

Определение 11. Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется ***лесом***. Таким образом, деревья являются компонентами леса.

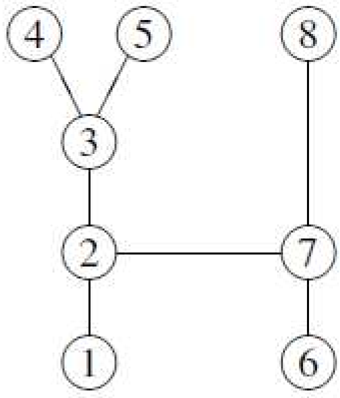


Рис. 3.85. Граф – дерево

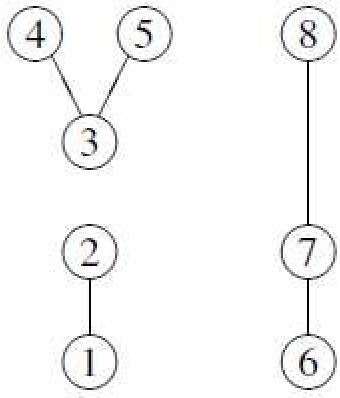


Рис.3.86. Лес (из трех деревьев)

В произвольном графе G вершина a называется ***концевой (листом)***, если $deg(a)=1$. Инцидентное ей ребро называется ***концевым ребром***.

Корнем (центром) в дереве называется вершина с минимальным эксцентриситетом. Эксцентриситет вершины v – это длина кратчайшего пути от вершины v до самой удаленной от нее вершины. Центр дерева состоит из одной вершины или двух смежных вершин.

Нулевое дерево – это дерево, не имеющее ни одной вершины.

Построение дерева начинается с *корня дерева*, который является единственной вершиной «первого уровня». Далее идут вершины «второго уровня» и т.д., где вершины очередного уровня (каждая из вершин) будут связаны ровно с одной вершиной предыдущего уровня и не будут иметь никаких иных связей. Верхняя вершина называется ***предком*** для связных с ней нижних вершин, а нижние вершины – потомками соответствующей верхней вершины. На любом дереве существует единственная вершина, не имеющая предка – корень, и может быть сколько угодно вершин, не имеющих потомков – листьев. Все остальные вершины имеют ровно одного предка и сколь угодно потомков.

Примерами деревьев могут служить генеалогические и организационные диаграммы. Деревья используются для организации информации в системах управления базами данных (иерархическая база данных может быть представлена деревом с корнем) и для представления синтаксических структур в компиляторах программ.

Пусть $G=(V,E)$ и $|V|=n$, $|E|=m$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. G – дерево. G – связный граф и $m=n-1$.
2. G – ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.
3. G – ациклический граф и $m=n-1$.

4. Любые две несовпадающие вершины графа соединяет единственная простая цепь.

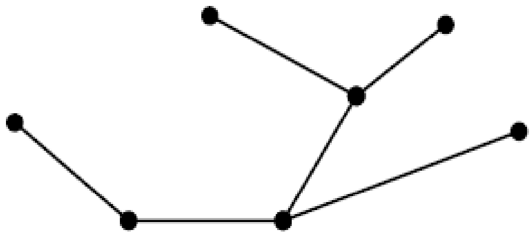


Рис.3.87. Граф – неориентированное дерево.

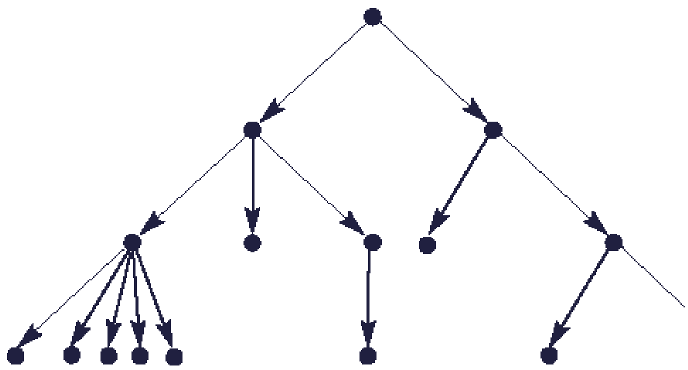


Рис.3.88. Ориентированное дерево

Определение 12. Ориентированный граф называется ***ориентированным деревом***, если: 1) существует ровно одна вершина $x_0 \in V$, называемая корнем, которая не имеет предшествующих вершин; 2) любой вершине $x_j \neq x_1$ в графе G непосредственно предшествует ровно одна вершина.

В ориентированном дереве полустепень захода каждой вершины (за исключением корня) равна 1, а полустепень корня дерева равна 0.

Двоичным деревом называется ориентированное дерево, полустепень исхода каждой вершины которого не превышает 2.

Для графов, которые сами по себе не являются деревьями, вводится понятие остовного дерева.

Подграф $G' = (V', E)$ графа $G = (V, E)$ называется ***остовным поддеревом*** (***остовным каркасом***), если $V' = V$ и G – дерево, т.е. остовной подграф получается из исходного графа удалением только ребер без удаления вершин.

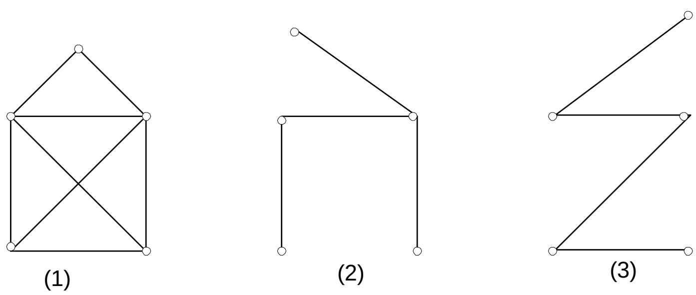


Рис.3.89. Граф G (1) и два его остова (2) и (3).

Часто, особенно когда графы используются для моделирования реальных систем, их вершинам или ребрам приписываются некоторые числа (*веса*). Граф, с заданными весами вершин и/или ребер называется ***взвешенным (нагруженным) графом***. ***Глубина вершины*** определяется как длина пути от нее к корню дерева. ***Глубина графа*** – это максимальная глубина его вершин.

Кратчайший остов взвешенного графа G – это остов, у которого сумма весов ребер наименьшая. Кратчайшее остовное дерево находит применение при решении задач, в которых необходимо связать n точек некоторой сетью так, чтобы общая длина «линий связей» была минимальной (прокладка дорог, газопроводов, линий электропередач).

Порожденный подграф графа $G=(V,E)$ – это такой граф $G'=(V',E')$, у которого $V'\subseteq V$, $E'=\{(a,б)\in E \mid a,б\in V'\}$, т.е. порожденный подграф получается из исходного графа удалением вершин и всех ребер, инцидентных удаленным вершинам.

Свойство 1. Любое конечное дерево имеет хотя бы две концевые вершины и одно концевое ребро.

Свойство 2. Дерево с n вершинами содержит n-*1* ребро.

Доказательство. Простейшее дерево имеет только одно ребро и две вершины. Каждый раз, добавляя еще одно ребро в конце ветви, прибавляем также и вершину.

Свойство 3. Лес, состоящий из k компонент и имеющий n вершин, содержит n- k ребер.

Доказательство следует из того факта, что для каждой компоненты выполнено свойство 2, а именно число ребер на 1 меньше числа вершин, следовательно, для k компонент число ребер будет меньше числа вершин на k. Таким образом, если в графе n вершин, то число ребер будет n- k.■

Свойство 4 (Теорема Кэли). Число различных деревьев, которые можно построить на n различных вершинах, равно n^{n-2}.

Доказательство. Пусть G − дерево с n вершинами $V=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Пусть a_1 − лист в дереве G, а b_1 − смежная с ним вершина. Удалив из G вершину a_1 и ребро $e_1=(a_1,b_1)$, получим дерево G_1, к которому также применим описанную процедуру. Повторяем ее до тех пор, пока после удаления вершины a_{n-2} и ребра $e_{n-2}=(a_{n-2},b_{n-2})$ не получим дерево G_{n-2}, состоящее из одного ребра $e_{n-1}=(a_{n-1},b_{n-1})$. Дереву G поставим в соответствие упорядоченный набор вершин $p(G)=(b_1,\ldots,b_{n-2})$, где каждая вершина b_i может быть любой из множества V. По теореме умножения из комбинаторики всего различных наборов $p(G)$ можно составить n^{n-2} способами**,** а значит число различных деревьев, которые можно построить на n различных вершинах, равно n^{n-2} ■.

Свойство 5. Последовательность целых чисел d_1, $d_2,\ldots$, d_n является последовательностью степеней вершин некоторого дерева на n вершинах тогда и только тогда, когда : 1) каждое $d_i \ge 1$, $i=1,2,\ldots,n$ и 2) $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2n-2$.

Пример. 3.30. Даны последовательности чисел: а) 1, 1, 2, 3, 5, 5, 6; б) 4, 5, 6, 7; в) 1, 1, 1, 3; г) 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4. Проверим, можно ли построить дерево, такое, что данная последовательность чисел являлась бы последовательностью степеней вершин этого дерева.

Ответ: а) нет, т. к. $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=17\ne 2n-2$; б) нет, так как нет ни одной висячей вершины ($\deg(v)\ne 1$); в) да, так как выполняются условия свойства 5; г) да, так как выполняются условия теоремы.

Теорема 6. Число ребер произвольного неориентированного графа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m-n+k$, где m – число ребер графа, n – число вершин графа, k – число компонент связности графа.

Доказательство. Рассмотрим i-тую компоненту связности G_i графа G. Пусть G_i содержит n_i вершин. Тогда остов G_i' графа G_i, являясь деревом, содержит $n_i - 1$ ребро. Следовательно, для получения G_i' из компоненты G_i нужно удалить $m_i - (n_i - 1)$ ребер, где m_i – число ребер в G_i.

Просуммируем удаляемые ребра по всем компонентам связности, получим $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} m_i - (n_i - 1) = m - n + k$.■

Определение 12. Число $\nu(G) = m - n + k$ *называется* ***цикломатическим числом*** графа G, число $\nu^*(G) = n - k$ ***коциклическим рангом*** или ***корангом***. Оно равно числу ребер, входящему в любой остов графа G.

Очевидно, что $\nu(G) + \nu^*(G) = m$.

Следствие 1. Неориентированный граф G является деревом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.

Следствие 2. Неориентированный граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.

Физический смысл цикломатического числа: оно равно наибольшему числу независимых циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическим числом можно пользоваться для определения независимых контуров.

Примеры 3.30.

1) Для полного графа K_5 (5 вершин, $C_5^2 = 10$ ребер) цикломатическое число равно $\nu(K_5) = 10 - 5 + 1 = 6$.

2) Для графа на рисунке 3.90 $\nu(G) = 7 - 6 + 1 = 2$.

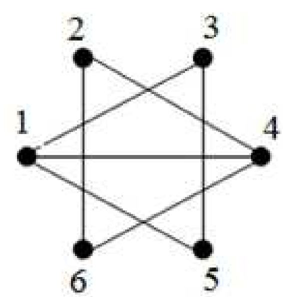


Рис. 3.90.

Кодирование деревьев

Каждому корневому дереву с m ребрами можно взаимно однозначно сопоставить двоичный вектор длины $2m$, называемый ***кодом дерева***.

Построение кодового дерева начинается с корня дерева, каждая вершина может породить не более двух вершин, причем левой вершине будет соответствовать 0, а правой 1. Концевые вершины соответствуют кодовым словам. Пример кодового дерева на рисунке 3.91.

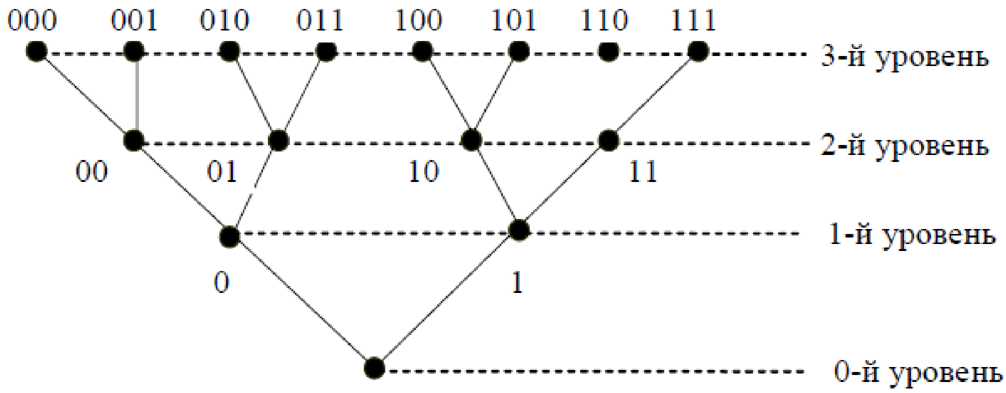


Рис. 3.91. Кодовое дерево

Утверждение. Для того, чтобы последовательность нулей и единиц являлась кодом некоторого дерева, необходимо и достаточно, чтобы число нулей и единиц в последовательности было одинаковым, причем в любом начальном отрезке последовательности количество нулей было не меньше количества единиц.

Например, последовательность (0011101001) не может быть бинарным кодом дерева, поскольку в отрезке 00111 из пяти первых цифр этой последовательности единиц больше, чем нулей.

Чтобы построить корневое дерево по коду из нулей и единиц, нужно разбить последовательность на пары 0 и 1, следуя правилу: первая попавшая в коде единица образует пару с предшествующим нулем; каждая следующая единица образует пару с ближайшим слева неиспользованным нулем. Если образованные таким образом пары пометить снизу кода фигурными скобками, то каждая такая скобка будет соответствовать ребру графа.

Пример 3.31. Построить дерево по коду (010010010111010011).

Разобьем элементы последовательности на пары и построим дерево на рисунке 3.92:

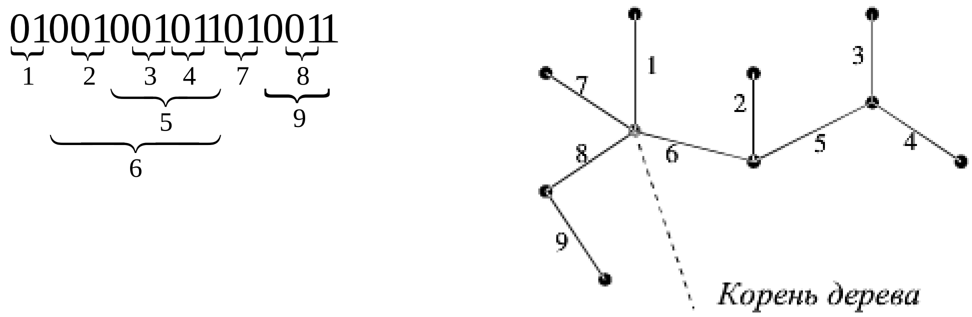


Рис.3.92.

Пример 3.32. Построить бинарный код дерева, изображенного на рисунке 3.93.

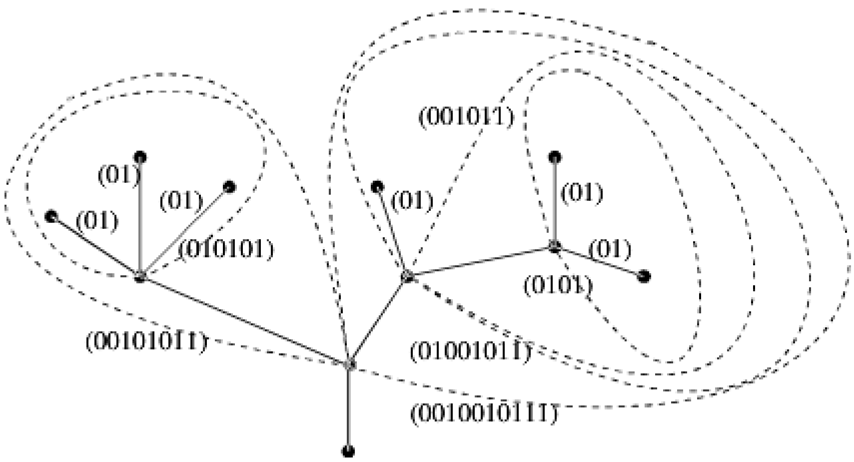


Рис.3.93. Бинарное кодовое дерево.

Этапы построения бинарного кода указаны на рисунке 3.93.

Ответ: 001010110010010111.

Семантическое дерево – это двоичное дерево, корень которого помечен булевой функцией от n переменных, из каждого узла идут по два ребра: одно соответствует нулевому значению соответствующей переменной (его изображают штриховой линией), а другое – единичному значению этой переменной (оно изображается сплошной линией). Таким образом, каждой ветви от корня до листа сопоставляется набор значений переменных, а листья помечаются соответствующими значениями функции.

Семантическое дерево соответствует вычислению булевой функции путем разбора случаев, и в общем случае размер такого представления даже превосходит размер таблицы для той же функции.

Пример 3.33. Семантическое дерево для функции, заданной формулой $f(x,y,z) = xy \vee xz \vee yz$ представлено на рисунке 3.94.

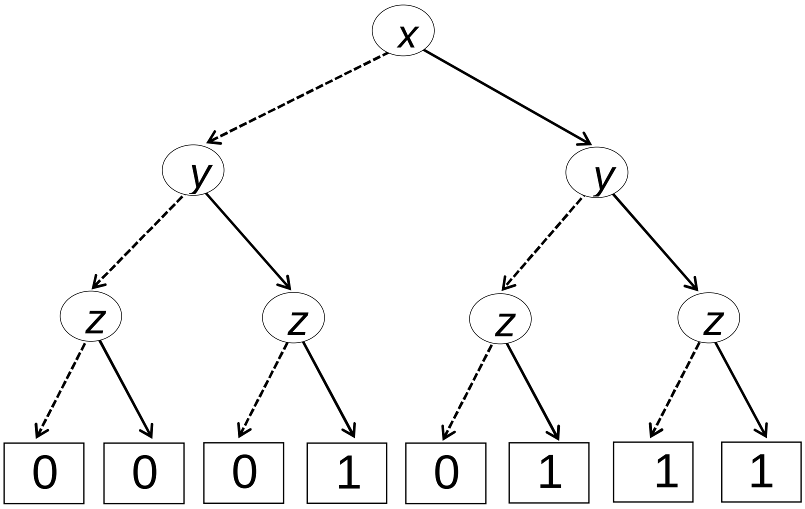


Рис.3.94. Бинарное кодовое дерево.

Задачи.

1. Перечислите все графы с указанными свойствами и значениями параметров (в скобках указано число искомых графов):

a) деревья, 7 вершин (11);

b) деревья, набор степеней (1,1,1,1,2,2,2,3,3) (9);

c) деревья, набор степеней (1,1,1,1,1,2,2,3,4) (8);

d) леса, 5 вершин (10);

e) деревья, степени не более 3, 8 вершин (11);

2. Какое максимальное и минимальное число висячих вершин может иметь дерево, построенное на 9 вершинах? Сделайте рисунки таких деревьев.
3. Приведите пример графа, из которого нельзя выделить дерево, содержащее все вершины графа.

4. Даны последовательности чисел: а) 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4; б) 1, 1, 1, 3, 5, 5, 5; в) 4, 5, 5, 7; г) 1, 1, 1, 3. Можно ли построить дерево, такое, что данная последовательность чисел являлась бы последовательностью степеней вершин этого дерева?
5. Выясните, являются ли графы, задаваемые следующими матрицами смежности, деревьями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Сколько листьев в дереве, заданном списком ребер:

$$G = \{ad, bd, cd, de, ef, fg, ej, fh, fi, jk, jq\}$$

7. Сколько ребер в лесе с 12 вершинами и 3 компонентами связности?
8. В графа на рисунках 3.95 и 3.96 укажите несколько остовных подграфов:

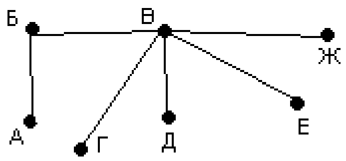


Рис.3.95

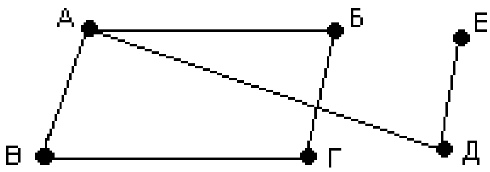


Рис.3.96.

9. Из графа G на рисунке 3.97 удалите часть ребер так, чтобы новый граф был остовным деревом.

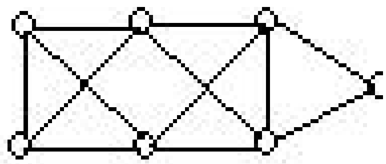


Рис. 3.97.

10.Постройте минимальное остовное дерево для графов на рисунке 3.98.

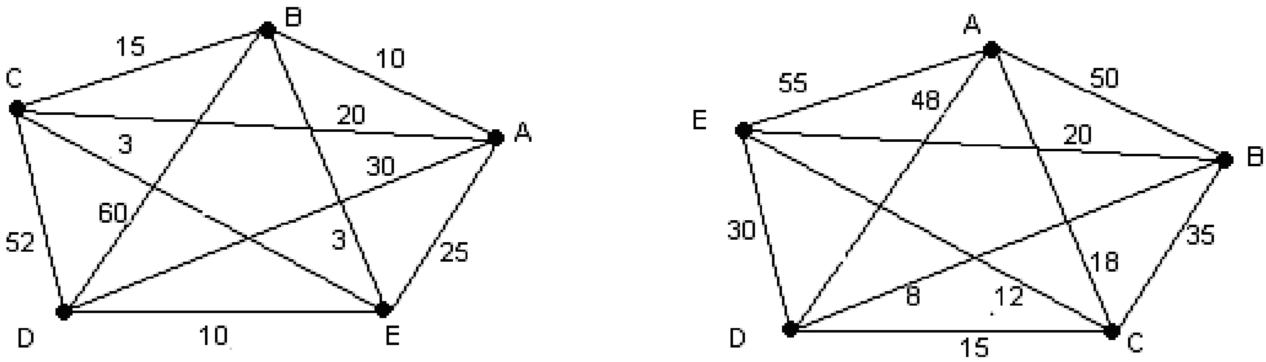


Рис.3.98.

11. Составьте коды для данных деревьев (рис. 3.99):

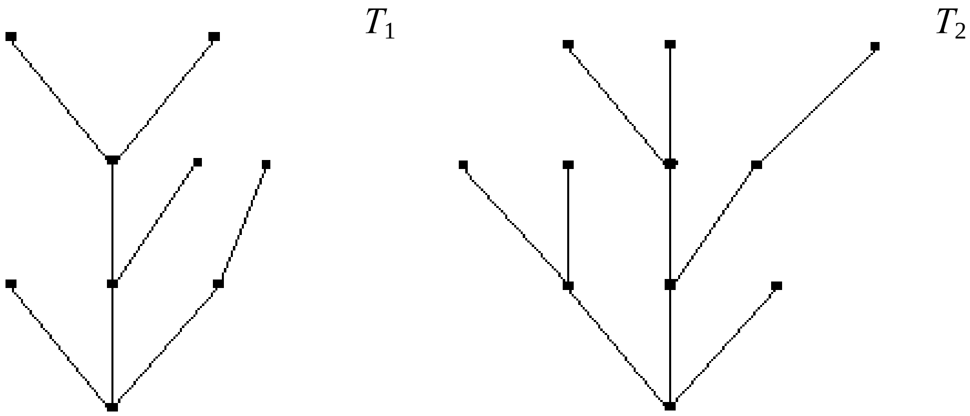


Рис.3.99.

12. Даны коды деревьев:

а) (0100011001101011); б) (0010100111000101 0111).

Сколько вершин имеет каждое из этих деревьев? Постройте соответствующие деревья.

13.Запишите формулой булеву функцию, которая задана семантическим деревом на рисунке 3.100.

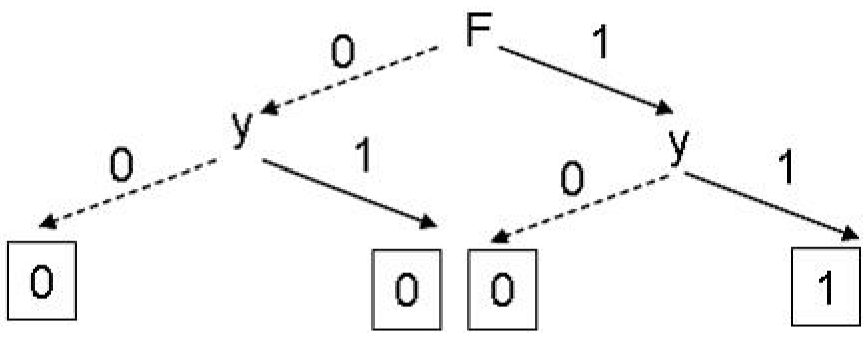


Рис. 3.100.

3.6. Типовые задачи теории графов

1. Задача о кратчайшем пути: замена оборудования, составление расписания движения транспортных средств, размещение пунктов скорой помощи, размещение телефонных станций.
2. Связность графов и сетей: проектирование кратчайшей коммуникационной сети, синтез структурно-надежной сети циркуляционной связи, анализ надежности стохастических сетей связи.
3. Раскраска в графах: распределение памяти в компьютере, проектирование сетей телевизионного вещания.
4. Задача о максимальном потоке: анализ пропускной способности коммуникационной сети, организация движения в динамической сети, оптимальный подбор интенсивностей выполнения работ, задача о распределении работ.
5. Задача об упаковках и покрытиях: оптимизация структуры ПЗУ (постоянного запоминающего устройства), размещение диспетчерских пунктов городской транспортной сети.
6. Изоморфизм графов и сетей: структурный синтез линейных избирательных цепей, автоматизация контроля при проектировании БИС (больших интегральных схем).

3.6.1. Построение остова минимального веса: алгоритмы Прима и Краскала

Одной из самых распространенных задач является задача построения оптимального каркаса графа (остовного дерева минимальной длины). Для решения задачи об оптимальном каркасе известно много алгоритмов: алгоритм поиска в ширину (см. стр. 151), алгоритм поиска в глубину, *жадные алгоритмы Прима и Краскала*. «Жадность» алгоритма состоит в том, что на каждом шаге из всех подходящих ребер выбирается ребро наименьшего веса.

У этих алгоритмов общий подход: алгоритм добавляет некоторые ребра графа по одному так, что в любой момент выбранные ребра составляют часть некоторого минимального остовного дерева, то есть всегда можно уже выбранные ребра завершить до минимального остовного дерева. Алгоритм продолжается пока не будет выбрано $n-1$ ребро, образующее дерево (при этом нужно следить, чтобы выбранные ребра в каждый момент не образовывали циклов). Но принцип выбора очередного ребра в каждом алгоритме отличается.

Алгоритм Краскала

Весь единый список рёбер упорядочивается по неубыванию весов рёбер. Текущее множество рёбер устанавливается пустым. Затем, пока это возможно, проводится следующая операция: из всех рёбер, добавление которых к уже имеющемуся множеству не вызовет появление в нём цикла, выбирается ребро минимального веса и добавляется к уже имеющемуся множеству. Когда таких рёбер больше нет, алгоритм завершён. Подграф данного графа, содержащий все его вершины и найденное множество рёбер, является его остовным деревом минимального веса.

Алгоритм Прима (алгоритм «ближайшего соседа») (отличается от алгоритма Краскала только тем, что на каждом шаге строиться не просто ациклический граф, а дерево).

Построение дерева начинается с произвольной вершины. Затем к дереву последовательно добавляются ребра и вершины, пока не получится остовное дерево, т.е. каркас.

Для того, чтобы из текущего дерева при добавлении нового ребра опять получилось дерево, это новое ребро должно соединять вершину дерева с вершиной, еще не принадлежащей дереву так, чтобы не образовался цикл. Такие ребра будем называть *подходящими* относительно рассматриваемого дерева. Это ребро вместе с одной новой вершиной добавляется к дереву. Если обозначить через U и F множества вершин и ребер строящегося дерева, а через

W множество вершин, еще не вошедших в это дерево, то алгоритм Прима можно представить следующим образом:

$U := \{a\}$, где a – произвольная вершина графа

$F := \varnothing$

$W := V - \{a\}$

while $W \neq \varnothing$ **do**

найти ребро наименьшего веса $e = (x, y)$ среди всех таких ребер, у которых $x \in U$, $y \in W$

$F := F \cup \{e\}$

$U := U \cup \{y\}$

$W := W - \{y\}$

Пример 3.34. Определим минимальное остовное дерево нагруженного графа на рисунке 3.101. В примере длины дуг (веса) – это числа 1, 2, 3, 4, 5.

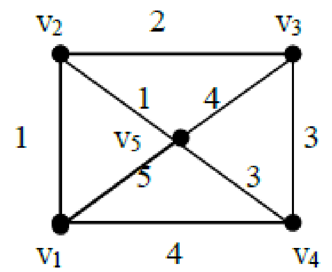


Рис. 3.101.

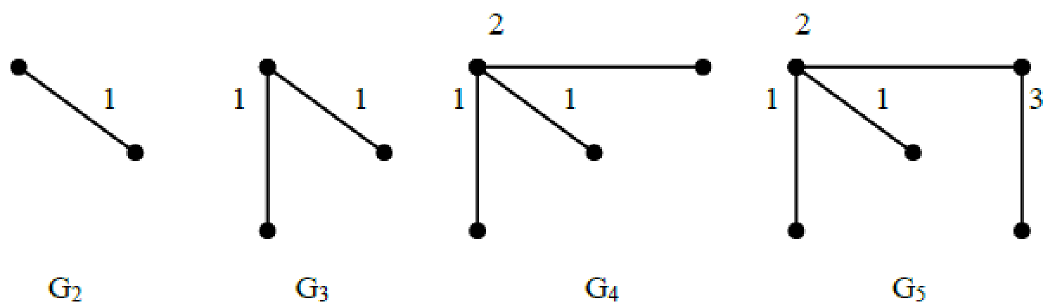


Рис.3.102.

Для решения этой задачи применяется следующий алгоритм:

1) Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инциндентными ему вершинами оно образует подграф G_2.

2) Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди ребер графа G, каждое из которых инциндентно какой–либо вершине графа G_2, и одновременно инциндентно какой–либо вершине графа G, не содержащейся в графе G_2.

3) Строим графы G_4, G_5, …, G_n, повторяя действия пункта 2 до тех пор, пока не переберем все вершины графа G.

4) На четвертом шаге алгоритма получили дерево G_5, которое соединяет все вершины исходного графа. Таким образом, дерево G_5 будет минимальным остовным деревом графа G.

Пример 3.35. Построим остовное дерево минимального веса.

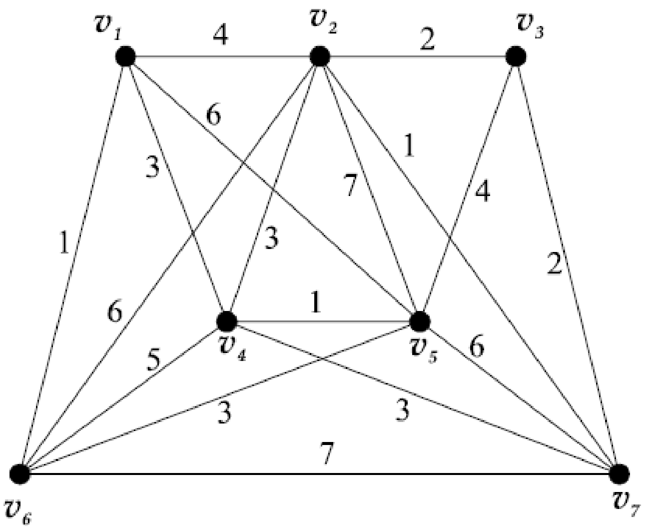


Рис.3.103.

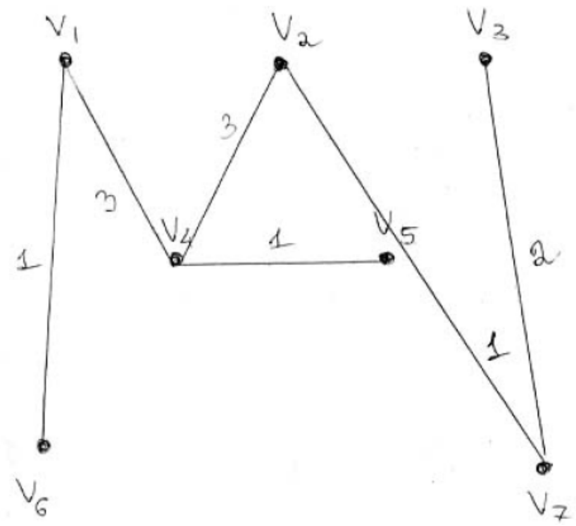


Рис.3.104.

Решение.

1) Применяем алгоритм Прима. Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_1, v_6) = 1$. Вводим вершины v_1 и v_6. Выбираем ребро минимального веса, смежное с вершинами дерева $\{v_1, v_6\}$ $(v_1, v_4) = 3$, добавляем конец этого ребра – вершину v_4. Выбираем ребро минимального веса, смежное с вершинами дерева $\{v_1, v_4, v_6\}$ $(v_4, v_5) = 1$, добавляем конец этого ребра – вершину v_5. Выбираем ребро минимального веса, смежное с

вершинами дерева $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$ $(v_4, v_2) = 3$, добавляем конец этого ребра – вершину v_2. Выбираем ребро минимального веса, смежное с вершинами дерева $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$ $(v_2, v_7) = 1$, добавляем конец этого ребра – вершину v_2. Выбираем ребро минимального веса, смежное с вершинами дерева $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ $(v_7, v_3) = 2$, добавляем конец этого ребра – вершину v_3. Все вершины вошли в дерево, оно построено. Вес дерева 1+3+1+3+1+2=11.

2) Применяем алгоритм Краскала.

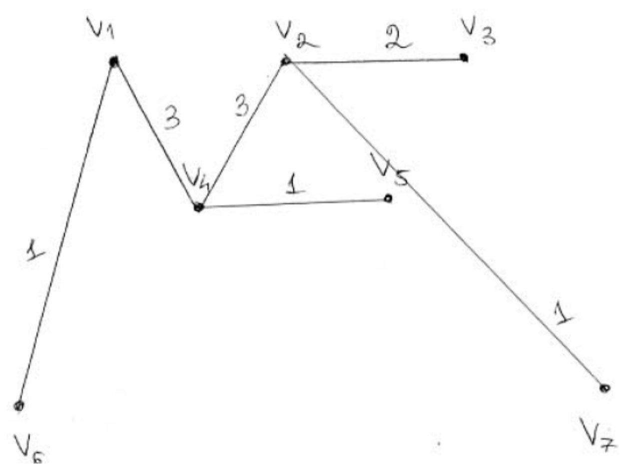


Рис.3.105.

Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_1, v_6) = 1$. Вводим вершины v_1 и v_6. Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_4, v_5) = 1$. Вводим вершины v_4 и v_5. Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_2, v_7) = 1$. Вводим вершины v_2 и v_7.

Ребер веса 1 больше нет. Теперь вводим ребра веса 2 так, чтобы не образовать циклы. Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_2, v_3) = 2$. Вводим вершину v_3. Ребер веса 2, не образующих циклов с существующими, больше нет. Теперь вводим ребра веса 3 так, чтобы не образовать циклы. Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_1, v_4) = 3$. Вводим в дерево ребро минимального веса $(v_2, v_4) = 3$. Все вершины вошли в дерево, оно построено. Вес дерева 1+3+1+3+1+2=11.

3.6.2. Минимальные пути в нагруженных орграфах: алгоритм Дейкстры

G – данный граф, t – начальная вершина, s – конечная вершина $c(x_i, x_j)$ – вес ребра (x_i, x_j), $l(x_i)$ – метка вершины x_i.

I. *Присваивание начальных значений*. Каждой вершине, кроме начальной, сопоставим метку $l(x_i) = \infty$, назовем эти метки *временными*. Начальной вершине сопоставим метку $l(s) = 0$, назовем эту метку *постоянной*, вершину s назовем *текущей* и обозначим как p ($p= s$).

II. *Обновление пометок*. Всем вершинам x_i, связанным с текущей по исходящим дугам и имеющим временные метки, изменим их метки по правилу: $l(x_i) = \min\{l(x_i), l(p) + c(p, x_i)\}$.

III. *Превращение пометок в постоянные*. Среди вершин с временной меткой найдем вершину с минимальной меткой и назовем ее текущей, а ее метку постоянной. Если это есть вершина t, то перейдем к пункту IV, иначе к пункту II.

IV. *Выделение пути обратным ходом*. Определим конечную вершину как текущую $p=t$; для каждой вершины x, связанной с ней по заходящим дугам, определим разность между пометкой текущей вершины и весом дуги $l(x) = l(p) - c(p, x)$. Вершину, метка которой совпадает с этой разностью, назовем текущей, а дугу отнесем к пути. То, что такая вершина всегда найдется, гарантируется способом построения меток вершин. Возможно, что таких вершин будет несколько, что говорит о существовании нескольких решений задачи. Выберем в этом случае любую из них. Повторим эту процедуру до тех пор, пока текущей не станет начальная вершина. В результате множество отнесённых к пути дуг дадут искомое решение – кратчайший путь из s в t.

Пример 3.36. Найдем кратчайшие пути в орграфе от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстры. Построим дерево кратчайших путей.

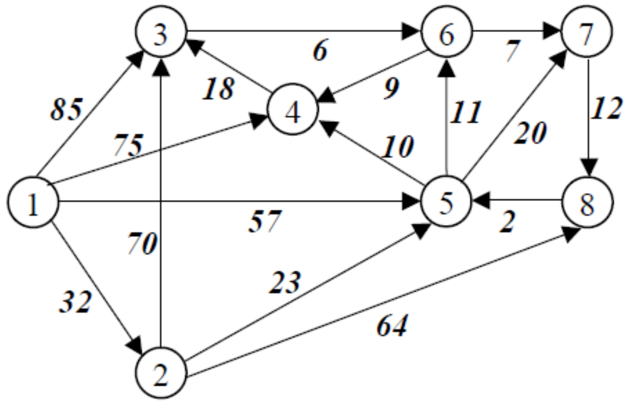


Рис. 3.106.

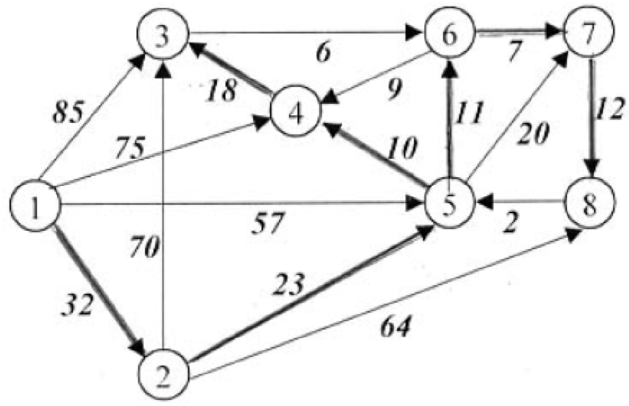


Рис. 3.107.

Решение представлено в таблице:

Шаги	Вершины								*P*	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x_1	0
2		**32**	85	75	57	∞	∞	∞	x_2	32
3			85	75	**55**	∞	∞	96	x_5	55
4			85	**65**		66	75	96	x_4	65
5			83			**66**	75	96	x_6	66
6			83				**73**	96	x_7	73
7			**83**					85	x_3	83
8								**85**	x_8	85

Кратчайшие пути найдены, их длина приведена в последних двух столбцах расчетной таблицы.

Построим дерево кратчайших путей (рис. 3.107) (ребра дерева обведены жирным**)** – ребра (1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (5,6), (6,7), (7,8).

Все вершины вошли в дерево, вес дерева 32+23+10+18+11+7+12=113.

3.6.3. Раскраска графов. Проблема четырех красок.

Исторически раскрасочная терминология пришла в теорию графов из задачи о раскраске стран на карте: “Сколько цветов требуется для раскраски различных стран на карте так, чтобы каждые две смежные страны были окрашены по-разному?”. Эта задача, получившая название проблемы (гипотезы) четырех красок, была впервые предложена вниманию общественности в выступлении Кэли на заседании Лондонского математического общества в 1878 г.

Теорема о 4 красках. Всякий плоский граф можно раскрасить четырьмя красками.

Доказать теорему о 4 красках не могли в течение 125 лет после ее первоначальной формулировки и в течение 99 лет после ее формулировки для научной общественности. Доказана теорема была только в 1977 г. Аппелем и Хакеном.

Определение. Вершинной раскраской графа называется такое приписывание цветов (натуральных чисел) его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинаковый цвет. Раскраска графа в p цветов называется ***p*-раскраской**. Раскраска графа, в которой используется минимальное число цветов, называется *минимальной*. Наименьшее возможное число цветов p в раскраске графа G называется ***хроматическим числом*** и обозначается $\chi(G)$. Если $\chi(G) = 2$, то граф называется ***бихроматическим***.

Определение. Множество вершин, покрашенных в один цвет, называется ***цветовым классом***. Никакие две вершины в цветовом классе не смежны.

Определение*. *Реберной раскраской графа *называется* такое приписывание цветов (натуральных чисел) ребрам графа, что никакие два смежных ребра не получают одинаковый цвет. Наименьшее возможное число цветов m в реберной раскраске графа G называется *реберным хроматическим числом* или ***хроматическим индексом*** и обозначается $\chi'(G)$. Очевидно, что для любого графа $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ – максимальная степень вершин графа G.

Хроматическое число играет важную роль при решении задач наиболее экономичного использования ячеек памяти при программировании. Если вершинам сопоставить вхождение переменной в программу, а ребром обозначить зависимость одной переменной от другой, то идентификатору переменной будет соответствовать краска. Действительно, зависимые переменные должны иметь разные имена. Тогда нахождение минимального числа внутренних переменных сведется к минимальной раскраске вершин графа. В этой трактовке задача рассматривалась А.П. Ершовым, одним из крупнейших теоретиков и практиков программирования, предложившим интересный эвристический алгоритм решения этой задачи. Однако определение хроматического числа, за исключением $\chi(G) = 2$, представляет собой довольно трудную задачу, часто требующую применения ЭВМ.

Пример 3.37. $\chi(K_p) = p$, $\chi(\overline{K}_p) = 1$, $\chi(K_{m,n}) = 2$, $\chi(C_{2n}) = 2$, $\chi(C_{2n+1}) = 3$, $\chi(T) = 2$.

Для графа на рис. 3.108 $\chi = 4$ (его раскраска изображена на рисунке 3.109).

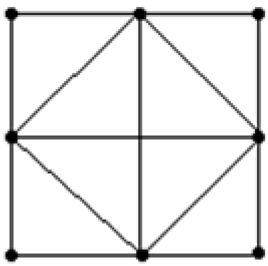


Рис.3.108.

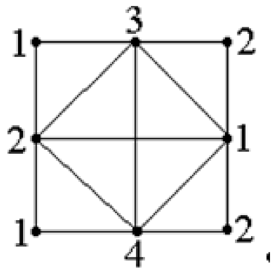


Рис.3.109.

Очевидно, что существует p-раскраска графа G для любого p в диапазоне $\chi(G) \leq p \leq n$.

Теорема. $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$, где m – число ребер графа.

***Доказательство*:** Пусть граф G имеет хроматическое число $k = \chi(G)$. Тогда G содержит, по меньшей мере, одно ребро, инцидентное вершинам из разных цветовых классов, или один и тот же цвет можно использовать для двух различных цветовых классов. Пары вершин из k различных цветовых классов можно выбрать C_k^2 способами, поэтому $m \geq C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1)$. Решая это неравенство относительно k, получаем требуемое утверждение.■

Теорема Кёнига (1916 г.). Для каждого двудольного графа $\chi'(G) = \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ – максимальная степень вершин графа G.

Теорема Визинга (1964 г.).

Для каждого графа $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Таким образом, если для $\chi(G)$ имеются лишь приблизительные оценки, то родственное ему число $\chi'(G)$ может принимать лишь 2 значения.

К сожалению, не существует эффективных алгоритмов (т.е. имеющих полиномиальную сложность) решения задач нахождения минимальной раскраски вершин и ребер графа. Разработаны лишь алгоритмы нахождения минимальной раскраски произвольного графа, основанные на переборе возможных вариантов, и алгоритмы с полиномиальной сложностью, приводящие к раскраске, близкой к минимальной.

Рекомендации по нахождению хроматического числа и хроматического индекса состоят в следующем. Вычисление $\chi(G)$ целесообразно начинать с выделения в графе максимального полного подграфа – количество вершин в нем будет минимально возможным значением $\chi(G)$. Нахождение $\chi'(G)$ лучше начинать с определения вершины максимальной степени и раскраски инцидентных ей ребер. Дальнейшую раскраску вершин (или ребер) следует производить, исходя из экономии цветов, т.е. две несмежные между собой вершины (ребра), но смежные третьей вершине (ребру), нужно раскрашивать одним цветом.

Эвристическая процедура раскрашивания графа.

1. Для каждой вершины графа определить ее степень. Расположить вершины в порядке не возрастания их степеней.
2. Первая вершина окрашивается в цвет №1, затем список вершин просматривается сверху вниз и в цвет №1 окрашивается всякая вершина, которая не смежна с другой, уже окрашенной в этот цвет.
3. Возвращаемся к первой в списке неокрашенной вершине, окрашиваем ее в цвет №2 и, двигаясь по списку, окрашиваем вершины в цвет №2 так же, как окрашивали в цвет №1.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока все вершины не будут окрашены. Количество использованных цветов будет приближенным значением хроматического числа.

Данный алгоритм может дать различные варианты окраски для одного и того же графа. На рисунке 3.110 представлены различные раскраски графа, в первом случае хроматическое число равно 4, а во втором – 3.

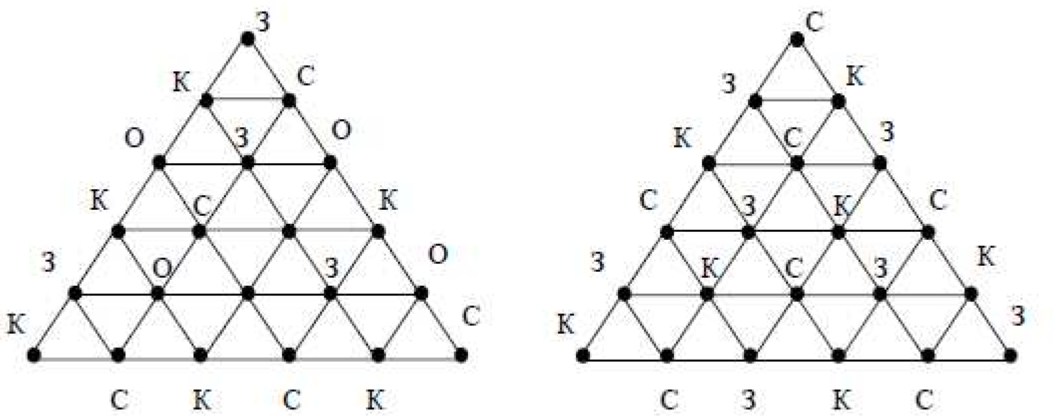


Рис.3.110.

3.6.4. Сети. Потоки в сетях.

Сеть – конечный взвешенный связный орграф без контуров и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины *I* (исток, вход) к вершине *S* (сток, выход).

Максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i, j), называется его ***пропускной способностью***. В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если вершины не соединены, то $r_{ij} = 0$. Так как нет петель, то $r_{ii}=0$. Пропускную способность можно задать квадратной матрицей.

Количество x_{ij} вещества, проходящего по ребру (i, j) в единицу времени, называется потоком по ребру (i, j). Предполагается, что если из x_i в x_j направляется поток $\boldsymbol{x_{ij}}$, то из x_j в x_i направляется поток ($-x_{ij}$): $x_{ij}= -x_{ji}$ (1)

Поток по каждому ребру не превышает его пропускную способность

$x_{ij} \leq r_{ij}$ $(i = \overline{1,n}\ ;\ j = \overline{1,n})$ (2)

Количество вещества, притекающее в вершину, равно количеству вещества, вытекающего из неё $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0$ $(i \neq I, S)$ (3).

Совокупность X = $\{x_{ij}\}$ потоков по всем рёбрам сети называют ***потоком по сети***. Общее количество вещества, вытекающего из истока *I*, совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток *S*, т.е. $F=\sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}$ (4).

Функцию *F* называют ***мощностью*** потока.

Если на сети задан поток X = $\{x_{ij}\}$, то ребро (i,j) называется ***насыщенным***, если поток x_{ij} по нему совпадает с его пропускной способностью r_{ij} ($x_{ij} = r_{ij}$) , и ненасыщенным, если $x_{ij} < r_{ij}$.

Замечание. Не всякие n^2 чисел могут задавать поток по сети. Только такие n^2 чисел x_{ij} задают поток, которые удовлетворяют условиям (1) – (3).

Задачу о максимальном потоке можно сформулировать следующим образом: найти совокупность $X^* = \{x^*_{ij}\}$ потоков x^*_{ij} по всем рёбрам сети, которая удовлетворяет условиям (1) – (3) и максимизирует линейную функцию (4). Это типичная задача линейного программирования.

В задаче о максимальном потоке единственным параметром является пропускная способность дуги. Задача состоит в том, чтобы найти максимальный поток, протекающий по дугам сети из заданного узла источника в заданный узел-сток.

Пример задачи о максимальном потоке представлен на рис. 3.111, где узел 1 является источником, а узел 6 – стоком, (x_{ij}, r_{ij}). На рис. 3.111 изображен один из возможных оптимальных вариантов распределения потоков по дугам сети.

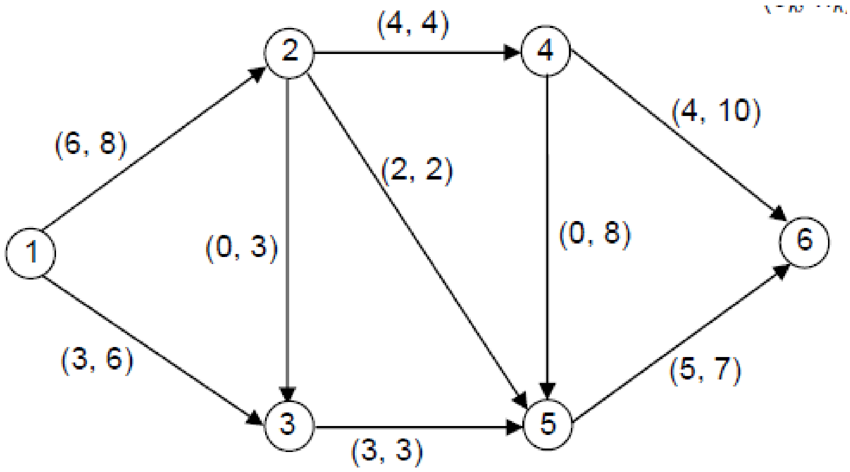


Рис. 3.111. Пример задачи о максимальном потоке.

Разрезом называется набор дуг, удаление которых из сети приводит к тому, что источник и сток оказываются не связанными, т. е. между ними нельзя передать поток. В задаче о минимальном разрезе требуется построить разрез с минимальной суммарной пропускной способностью дуг. Для примера: на рисунке 3.111 минимальный разрез состоит из дуг (2, 4), (2, 5) и (3, 5). Заметим, что суммарная пропускная способность этих дуг составляет 9 ед. потока, т. е. совпадает со значением максимального потока.

Разность сумм весов исходящих и входящих дуг для вершины v называется ***дивергенцией*** функции весов в этой вершине.

Пример 3.38. Для сети на рисунке 3.112. найдем дивергенции вершин.

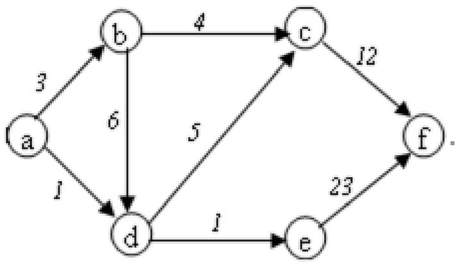


Рис. 3.112.

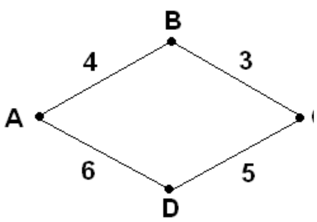
Дивергенция вершины *a* равна 3+1=4, дивергенция вершины *b* равна (4+6)–3 =7, дивергенция вершины с равна 12 – (4 + 5) = 3, дивергенция вершины *d* равна (5 + 1) – (6 + 1) = –1, дивергенция вершины *e* равна 23–1= –22, дивергенция вершины *f* равна 0 – (12 + 23) = –35.

Задачи

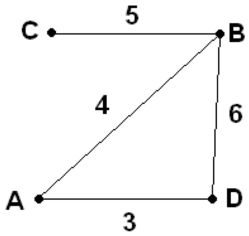
1. В таблице приведена стоимость перевозок между соседними железнодорожными станциями. Укажите схему, соответствующую таблице

	A	B	C	D
A		4		5
B	4		3	6
C		3		
D	5	6		

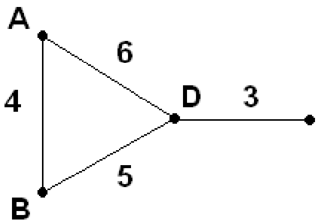
1)



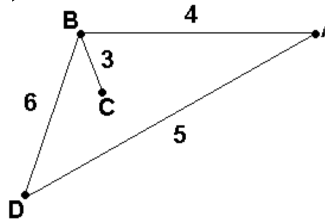
2)



3)



4)



2. Стоимость проезда по маршруту складывается из стоимостей проезда между соответствующими соседними станциями. Укажите таблицу, для которой выполняется условие: «Минимальная стоимость проезда из A в B не больше 6».

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

	A	B	C	D	E
A			3	1	1
B			4		
C	3	4			2
D	1				
E	1		2		

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E	4	2	2		

	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

3. Пользуясь алгоритмами Прима и Краскала, нужно построить остов минимального веса для графа на рис. 3.111.

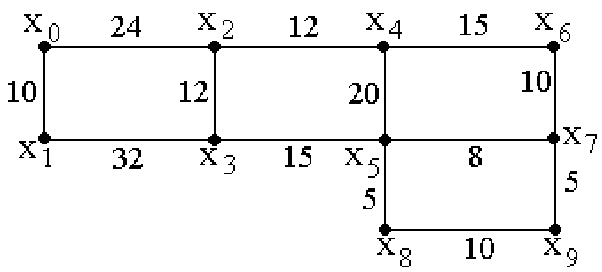


Рис. 3.111.

4. С помощью алгоритма Прима найдите кратчайший остов графов на рисунке 3.112.

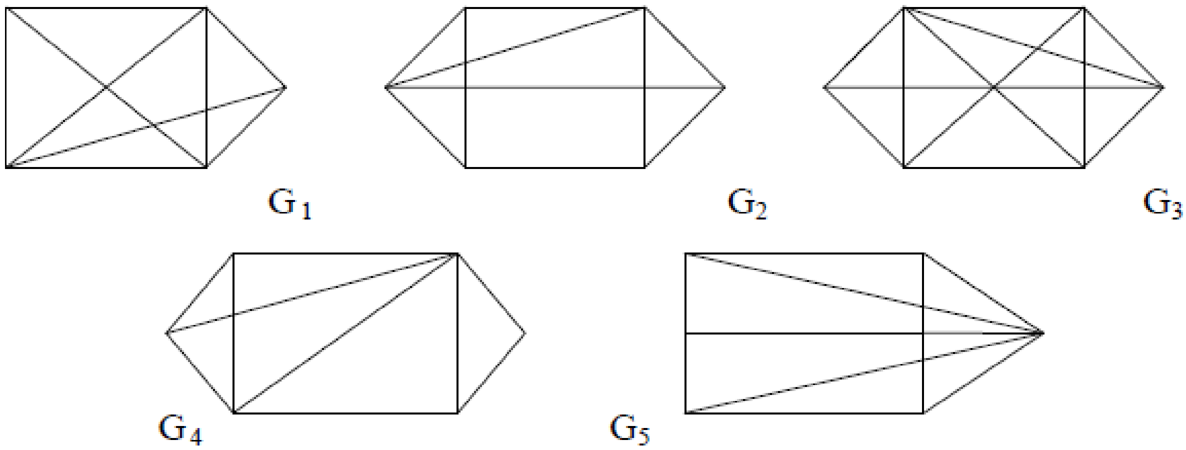


Рис. 3.112.

5. Пользуясь алгоритмом Дейкстры, определите минимальный путь из v_1 в v_6 в нагруженных орграфах, заданных матрицами весов.

а)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	4	∞	12	∞	∞
v_2	∞	0	2	∞	5	10
v_3	3	∞	0	3	∞	∞
v_4	∞	∞	∞	0	1	∞
v_5	∞	∞	∞	∞	0	2
v_6	∞	∞	7	∞	∞	0

б)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	5	1	8	∞	∞
v_2	∞	0	∞	1	∞	6
v_3	∞	5	0	∞	∞	∞
v_4	∞	∞	∞	0	1	∞
v_5	∞	∞	∞	∞	0	2
v_6	∞	∞	4	7	∞	0

6. Пользуясь алгоритмом Дейкстры, определите минимальный путь из v_1 в v_7 в нагруженном орграфе D с заданной матрицей весов

а)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	∞	∞	5	4	2	2	9
v_2	∞	∞	1	1	∞	1	1
v_3	2	∞	∞	1	1	∞	3
v_4	∞	2	1	∞	1	∞	∞
v_5	∞	∞	2	2	∞	1	6
v_6	1	5	∞	1	1	∞	∞
v_7	2	∞	1	∞	1	2	∞

б)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	∞	∞	9	∞	∞	2	12
v_2	1	∞	∞	∞	1	2	4
v_3	2	1	∞	∞	1	∞	2
v_4	∞	1	1	∞	∞	1	∞
v_5	1	2	∞	2	∞	∞	∞
v_6	∞	∞	∞	∞	1	∞	8
v_7	∞	2	1	∞	1	2	∞

7. Все площадки для отдыха, расположенные в лесопарковой зоне, необходимо соединить телефонной сетью, причем телефонные линии должны проходить вдоль троп лесопарковой зоны. Спроектировать телефонную сеть с минимальной суммарной длиной линий.

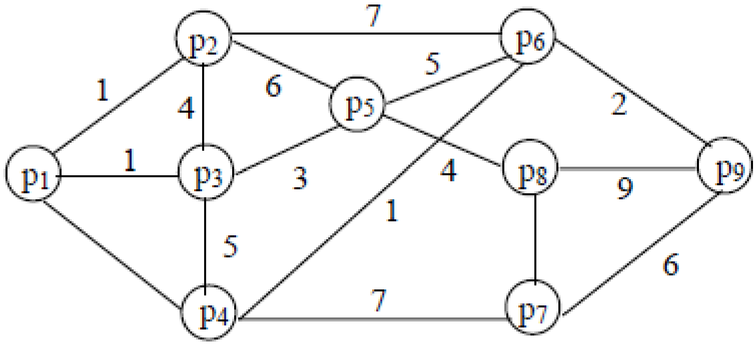


Рис. 3.113.

8. Транспортная компания осуществляет грузовые перевозки в города A, B, C, D, E, F, G. В таблице а) приведена матрица смежности графа рейсов компании; в таблице б) приведены расстояния между городами:

а)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A	0	0	1	0	1	1	0
B	0	0	0	1	0	1	1
C	1	0	0	1	0	0	1
D	0	1	1	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	1	1
F	1	1	0	0	1	0	0
G	0	1	1	0	1	0	0

б)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A			2	0	5	8	
B				8		4	1
C	2			1			7
D		8	1				
E	5					2	6
F	8	4			2		
G		1	7		6		

Найдите длину наименьшего пути, по которому можно доехать из города A в город B.

9. В таблице приведены расстояния (в милях) между шестью городами Ирландии.

	Атлон	Дублин	Голуэй	Лимерик	Слайго	Уэксфорд
Атлон	—	78	56	73	71	114
Дублин	78	—	132	121	135	96
Голуэй	56	132	—		85	154
Лимерик	73	121	64	—	144	116
Слайго	71	135	85	144	—	185
Уэксфорд	114	96	154	116	185	—

Используя алгоритм поиска минимального остовного дерева, найдите сеть дорог минимальной общей длины, связывающую все шесть городов.

10. Найдите хроматическое число графа, заданного матрицей смежности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Найдите хроматический индекс (наименьшее число цветовых классов при реберной раскраске) графа, заданного диаграммой:

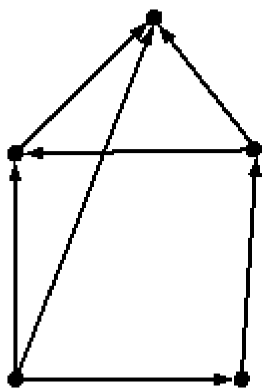


Рис. 3.114.

12. Найдите хроматическое число графа на рисунке 3.115.

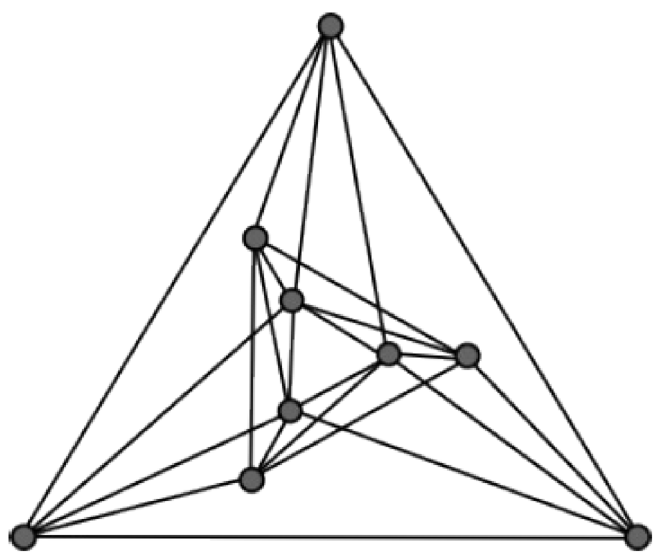


Рис. 3.115.

Глава 4. Математическая логика

4.1.Алгебра высказываний

4.1.1. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы алгебры логики.

Под ***высказыванием*** понимают повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Предложения “Какое сегодня число?”, “Да здравствуют наши спортсмены!”, “x=20” не являются высказываниями. Предложения “Параллелограмм имеет четыре вершины”, “Число 6 делится на 2 и на 3” являются истинными высказываниями, а предложения “Париж – столица Англии”, “карась не рыба”, “47< 16” являются ложными.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Обозначают элементарные высказывания малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d, p, q, r, …., а логическое (*истинностное*) значение высказывания обозначается цифрами 1 (истина) и 0 (ложь).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок ***не***, ***и***, ***или***, ***если***…, ***то***…., ***тогда и только тогда***, принято называть сложными или составными.

В алгебре логики для построения сложных высказываний из элементарных используются следующие логические операции: отрицание (обозначение: $\rceil$ или —) конъюнкция (логическое умножение) (обозначение: $\wedge$, & или $\cdot$), дизъюнкция (логическое сложение) (обозначение: $\vee$ или +), импликация ($\rightarrow$), эквиваленция (или эквивалентность) ($\leftrightarrow$).

Отрицанием высказывания a называется высказывание $\bar{a}$ ($\rceil a$), которое истинно, если a ложно, и ложно, если a истинно. Высказывание $\bar{a}$ читается « не a ».

Конъюнкцией высказываний a, b называется высказывание $a \wedge b$ ($a\&b$, $a \cdot b$), которое истинно, если a и b истинны, и ложно, если хотя бы одно из них ложно. Высказывание $a \wedge b$ читается « a и b ».

Дизъюнкцией высказываний a, b называется высказывание $a \vee b$ ($a+b$), которое истинно, если хотя бы одно из высказываний a или b истинно, и ложно, если оба они ложны. Высказывание $a \vee b$ читается « a или b ».

Импликацией высказываний a, b называется высказывание $a \to b$, которое ложно, если a истинно и b ложно, и истинно во всех остальных случаях. Высказывание $a \to b$ читается «если a, то b ».

Эквиваленцией (или *эквивалентностью*) высказываний a, b называется высказывание $a \leftrightarrow b$, которое истинно, если оба высказывания a и b одновременно истинны или ложны, и ложно во всех остальных случаях. Высказывание $a \leftrightarrow b$ читается « a тогда и только тогда, когда b ».

Таблица 4.1. (таблица истинности основных логических операций)

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$p \mid q$	$p \downarrow q$
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Определение 4.1. Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется ***формулой алгебры логики***.

Определение 4.2. Формула A, называется ***тождественно истинной*** или ***тавтологией*** (записывается $A \equiv 1$), если она принимает значение 1 (истина) при всех значениях входящих в нее переменных (элементарных высказываний). Формула B называется ***тождественно ложной*** или ***противоречием***, если она принимает значение 0 (ложь) при всех значениях входящих в нее переменных (записывается $B \equiv 0$).

Например, формулы $p \vee \overline{p}$ и $p \to (q \to p)$ – тождественно истинные, а формула $p \wedge \overline{p}$ – тождественно ложная.

Формулы алгебры логики будем обозначать большими латинскими формулами. Логические значения формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ при различных комбинациях значений входящих в нее элементарных высказываний можно описать посредством таблицы, содержащей 2^n строк, которая называется ***таблицей истинности*** логической формулы.

Пример 4.1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

1) река Волга впадает в озеро Байкал;

2) всякий человек имеет брата;

3) пейте томатный сок!;

4) существует человек, который моложе своего брата;

5) который час?;

6) ни один человек не весит более 1000 кг;

7) $23<5$;

8) для всех действительных чисел x и y верно равенство $x+y=y+x$;

9) $x^2-7x+12$;

10) $x^2-7x+12=0$.

Решение. Высказывания 4), 6), 8) – истинные, а высказывания 1), 2), 7) – ложные. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Пример 4.2. Пусть a – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b – высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1) $a \wedge \overline{b}$;   2) $a \rightarrow b$;   3) $\overline{b} \leftrightarrow \overline{a}$.

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; б) «Если студент Иванов изучает английский язык, то он успевает по математической логике».

в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Пример 4.3. Составить таблицу истинности для формулы

$A = (\neg q \leftrightarrow r) \vee (r \rightarrow p \wedge q)$

$p\ \ q\ \ r$	$\neg q$	$\neg q \leftrightarrow r$	$p \wedge q$	$r \rightarrow p \wedge q$	A
1 1 1	0	0	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 0 1	1	1	0	0	1
1 0 0	1	0	0	1	1
0 1 1	0	0	0	0	0
0 1 0	0	1	0	1	1
0 0 1	1	1	0	0	1
0 0 0	1	0	0	1	1

Задачи.

1. Установите, истинно или ложно высказывание:

1) $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0,\ x \in R\}$;

2) $-3 \in \{x \mid \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2} < -2,\ x \in R\}$;

3) $\{1\} \in N$;

4) $\{1\} \in P(N)$, где $P(N)$ – множество всех подмножеств множества N;

5) $\varnothing \in \varnothing$;

6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;

7) $\{1,-1,2\} \subset \{x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0,\ x \in Z\}$;

8) $\{x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0,\ x \in Z\} \subset \{1,-1,2\}$;

2. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

Для высказываний определите истинностное значений.

1) 15 кратно 3, но не кратно 4;

2) Каждое действительное число x удовлетворяет неравенству $x^2 \geq 0$;

3) это предложение ложно;

4) Пушкин автор «Медного всадника»;

5) $\pi = 3{,}14$;

6) раскройте учебник на странице 23;

7) эта задача легкая;

8) Да здравствует математика!

3. Запишите символически следующие высказывания, употребляя буквы для обозначения простых высказываний:

1) 3 есть простое число и 9 есть составное число;

2) $\sqrt{3}$ – иррациональное число или существует рациональное число, не являющееся целым;

3) Петр встанет, и он или Иван уйдет;

4) Петр встанет и уйдет, или Иван уйдет;

5) студент не может заниматься, если он устал или голоден;

6) в шахматном турнире ни Петр, ни Иван не выиграли свои отложенные партии;

7) в степи не будет пыльных бурь тогда и только тогда, когда будут лесозащитные полосы; если лесозащитных полос не будет, то пыльные бури уничтожат посевы и нанесут урон хозяйству;

8) для того чтобы натуральное число a было нечетным, достаточно, чтобы a было простым и большим двух;

9) необходимое и достаточное условие для жизни растений состоит в наличии питательной почвы, чистого воздуха и солнечного света;

10) необходимым условием сходимости последовательности S является ограниченность S;

11) если «Спартак» или «Динамо» проиграют и «Торпедо» выиграет, то «Арарат» потеряет первое место и, кроме того «Заря» покинет высшую лигу.

4. Пусть v_1 будет «сегодня светит солнце», v_2 – «сегодня идет снег», v_3 – «сегодня пасмурно», v_4 – «вчера было ясно». Переведите на обычный язык следующие высказывания:

1) $v_1 \wedge \overline{v_3}$; 2) $v_2 \vee v_3$; 3) $v_1 \wedge \overline{v_2 \vee v_3}$;

4) $v_1 \to \overline{v_3 \wedge v_2}$; 5) $\overline{v_1} \leftrightarrow v_4$; 6) $(v_2 \to v_3) \vee v_1$.

5. Придумайте два высказывания, являющиеся дизъюнкцией трех высказываний, одно из которых истинно. а другое ложно.

6. Проверьте, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $p \to p$; 2) $p \vee \overline{p}$;

3) $\overline{p \wedge \overline{\overline{p}}}$; 4) $p \leftrightarrow \overline{p}$;

5) $\overline{p} \to p$; 6) $p \leftrightarrow p$;

7) $(p \vee p) \to p$; 8) $\overline{p \wedge (p \leftrightarrow \overline{\overline{p}})}$;

9) $(p \to p) \vee \overline{p}$; 10) $p \leftrightarrow p \wedge (\overline{p} \to p \wedge p)$;

11) $p \vee (p \leftrightarrow \overline{p})$; 12) $\overline{p \to \overline{\overline{p}}}$;

13) $\overline{p \leftrightarrow \overline{\overline{p}}}$; 14) $(p \vee p) \to (p \wedge p)$

7. Найдите логические значения x, y, z, при которых выполняются равенства: 1) $(1 \to x) \to y = 0$; 2) $x \vee y = \overline{x}$; 3) $(x \vee (y \to x)) \to z = 0$;

4) $x \wedge y \leftrightarrow (y \vee z) = 1$

8. При каких значениях переменных следующие формулы ложны:

1) $((x \to (y \wedge z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y}$; 2) $(x \vee y) \to ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}))$.

9. 1) Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

2) Известно, что эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значении $\bar{x} \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow \bar{y}$?

3) Известно, что x имеет значение 1. Что можно сказать о значениях импликации $\bar{x} \wedge y \to z$; $\bar{x} \to (y \vee z)$?

4) Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$; $\overline{x \to y} \to y$; $(x \to y) \to z$?

10. Составьте таблицы истинности для формул:

1) $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$;

2) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$;

3) $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$;

4) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$;

5) $x \to \overline{y \wedge z}$;

6) $(x \to \bar{y}) \wedge (y \wedge x \vee \bar{x} \wedge \bar{y})$;

7) $\bar{x} \vee y \leftrightarrow x \wedge \bar{z}$;

8) $(x \to y) \to (y \to z) \to (z \to x)$;

9) $(x_1 \to \overline{x_2}) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \overline{x_3})$;

10) $(\bar{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x))$;

11) $\big(x \to (y \wedge z)\big) \leftrightarrow \big((x \to y) \wedge (x \to z)\big)$.

11. Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C, соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций. Переменные функции *f(x,y,z)* определены как $x = (A \neq \text{"printer"})$, $y = (B \neq \text{"print"})$, $z = (C = 2003)$. Определите, для каких ниже перечисленных функций является единичной запись со значениями: Устройство=«printer», Назначение=«print», Год выпуска=2003.

$(x \leftrightarrow y) \wedge z$

$x \oplus y \oplus z$

$x \wedge (y \oplus z)$

$(x \downarrow y) \wedge \bar{z}$

$x \vee (y \leftrightarrow z)$

Укажите не менее двух вариантов ответа.

4.1.2. Равносильные формулы.

Определение 4.3. Две формулы алгебры логики A и B называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений переменных, входящих в формулы.
Обозначение $A \equiv B$.

Для доказательства равносильности формул A и B достаточно составить их таблицы истинности и сравнить их.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы.

I. Основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & x \wedge x \equiv x \\ 2. & x \vee x \equiv x \end{array}\right\} \text{– законы идемпотентности}$$

3. $x \wedge 1 \equiv x$

4. $x \vee 1 \equiv 1$

5. $x \wedge 0 \equiv 0$

6. $x \vee 0 \equiv x$

7. $x \wedge \overline{x} \equiv 0$ – закон противоречия

8. $x \vee \overline{x} \equiv 1$– закон исключенного третьего

9. $\overline{\overline{x}} = x$– закон снятия двойного отрицания

$$\left.\begin{array}{ll} 10. & x \wedge (y \vee x) \equiv x \\ 11. & x \vee (y \wedge x) \equiv x \end{array}\right\} \text{– законы поглощения.}$$

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

2. $x \rightarrow y \equiv \overline{x} \vee y$ – закон исключения импликации

3. $x \rightarrow y \equiv \overline{y} \rightarrow \overline{x}$ – закон контрапозиции

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & \overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \\ 5. & \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y} \end{array}\right\} \text{– законы де Моргана.}$$

6. $x \wedge y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

7. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$ – коммутативность конъюнкции

2. $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции

3. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ – ассоциативность конъюнкции

4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции

5. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

6. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ –дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

Приведенный список основных равносильностей используется для доказательства равносильности формул алгебры логики, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Пример 4.4. Доказать равносильность формул $A \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$ и $B \equiv (p \wedge q) \to r$.

Решение.

1 способ (используя таблицу истинности).

p q r	$p \to r$	$q \to r$	A	$p \wedge q$	B
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	1	0
1 0 1	1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	1	0	1
0 1 1	1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	1	0	1
0 0 1	1	1	1	0	1
0 0 0	1	1	1	0	1

Истинностные значения у формул A и B совпадают, значит $A \equiv B$.

2 способ (используя метод равносильных преобразований).

$A \equiv (p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \to r \equiv$

$\equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg q \to r \equiv p \wedge q \to r \equiv B$.

Пример 4.5. Упростить формулу $(\overline{x \vee y}) \to \bar{x} \vee y) \wedge y$.

Решение. $(\overline{x \vee y}) \to \bar{x} \vee y) \wedge y \equiv (x \vee y \vee \bar{x} \vee y) \wedge y \equiv$

$((x \vee \bar{x}) \vee (y \vee y)) \wedge y \equiv (1 \vee y) \wedge y \equiv 1 \wedge y \equiv y.$

Пример 4.6. Доказать, что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

Решение. Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям

$A \equiv x \to (y \to x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (x \vee \bar{y}) \equiv (x \vee \bar{x}) \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \bar{y} \equiv 1.$

Закон двойственности.

Пусть формула A содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Будем называть операцию конъюнкции двойственной операции дизъюнкции, а операцию дизъюнкции двойственной операции конъюнкции.

Определение 4.4. Формулы A и A***** называются ***двойственными***, если формула A***** получается из формулы A путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Примеры двойственных тавтологий.

1. $x \wedge \bar{x} = 0$ (закон противоречия) и $x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключенного третьего).

2. $x \wedge (y \vee x) = x$ и $x \vee (y \wedge x) = x$ (законы поглощения)

3. $x \wedge x = x$ и $x \vee x = x$ (законы идемпотентности)

4. $\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \wedge y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y} = \overline{x \vee y}$ (законы де Моргана)

Теорема. *Если формулы A и B равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, то есть* $A^* = B^*$.

Доказательство. Пусть формулы A и B равносильны: $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, но тогда, очевидно,

$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{B(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ (1)

По определению двойственных формул:

$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ (2)

$\overline{B(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv B^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

Из равносильностей (1) и (2) получаем:

$A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \equiv B^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, значит, $A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv B^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ■

Пример 4.7. Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C, соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций.

Найдем двойственные запросы к следующим запросам:

1) $(A = "monitor") \wedge (C = 2016)$
2) $(A = "monitor") \vee C = 2016)$
3) $(A = "monitor") \to (C = 2016)$
4) $(A = "monitor") \downarrow (C = 2016)$

Решение: Применяя определение обратных запросов и правила де Моргана, получим:

1) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \wedge \overline{(C = 2016)}} = (A = "monitor") \vee (C = 2016)$
2) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \vee \overline{(C = 2016)}} = (A = "monitor") \wedge (C = 2016)$
3) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \to \overline{(C = 2016)}} = \overline{\overline{\overline{(A = "monitor")}} \vee \overline{(C = 2016)}} =$

   $\overline{(A = "monitor")}$
4) $\overline{\overline{(A = "monitor")} \downarrow \overline{(C = 2016)}} = \overline{\overline{\overline{(A = "monitor")} \vee \overline{(C = 2016)}}} =$

   $= \overline{(A = "monitor")} \vee \overline{C = 2016}$

Задачи.

1. Докажите равносильности:

1) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$;   2) $x \vee (\overline{x} \wedge y) \equiv x \vee y$;

3) $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$;   4) $x \wedge y \vee \overline{x} \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \equiv x \to y$;

5) $x \to \overline{y} \equiv y \to \overline{x}$;   6) $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$;

7) $x \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$;

8) $(x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv x \wedge z \vee y \wedge z \vee x \wedge t \vee y \wedge t$;

9) $x \wedge y \vee z \wedge t \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee t) \wedge (y \vee t)$;

10) $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \to y \equiv x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_n \to y)\ldots))$.

2. Докажите тождественную истинность или тождественную ложность формул:

1) $x \wedge y \to x$;   2) $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;

3) $x \to (x \vee y)$;   4) $(\overline{y} \to \overline{x}) \to (x \to y)$;

5) $(x \to y) \wedge (x \to \overline{y}) \to \overline{x}$;   6) $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to \overline{y})$;

7) $x \vee \overline{x} \to y \wedge \overline{y}$;   8) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

9) $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$; 10) $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;

11) $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$

12) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$.

3. Используя основные равносильности, нужно доказать или опровергнуть:

1) $(x \to y) \to z \equiv x \to (y \to z)$;   2) $(x \wedge y \to z) \to (x \to z) \equiv \overline{x} \vee y \vee z$;

3) $x \wedge (y \to z) \equiv x \wedge y \to x \wedge z$;   4) $x \vee (y \to z) \equiv x \vee y \to x \vee z$;

5) $x \to y \equiv y \to x$;   6) $\overline{x \leftrightarrow \overline{y}} \equiv x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}$;

7) $(x \to y) \vee (x \to z) \to (x \to (y \to z)) \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \vee z$;

8) $(x \wedge y \to z) \to (z \to x \wedge y) \equiv (z \to x) \wedge (z \to y)$;

9) $x \vee z \to y \vee t \equiv (x \to y) \vee (z \to t)$;

10) $x \to (y \to z) \equiv (x \to y) \to (x \to z)$.

4. Пусть F – тождественно ложная формула.

Докажите, что $x \wedge \bar{y} \to F \equiv x \to y$.

5. Найдите x, если $\overline{x \vee a} \vee \overline{x \vee \bar{a}} \equiv b$.

6. Используя основные равносильности, упростите следующие формулы:

1) $\overline{x \to y} \wedge \overline{x \wedge y} \vee y$; 2) $(x \to y) \wedge (x \vee y \wedge z) \wedge (x \to z) \vee \bar{z}$;

3) $x \wedge y \vee \overline{y \wedge z} \vee y$; 4) $\overline{x \wedge y \wedge z} \vee x \wedge \overline{y \wedge z} \vee x \wedge y \wedge z$;

5) $\overline{z \to \bar{y}} \vee \overline{y \wedge x} \vee (y \wedge \bar{z} \to \bar{y})$; 6) $\overline{x \to y} \vee \overline{z \to y} \vee y$;

7) $(x \to y) \to \bar{y}$; 8) $x \wedge y \vee x \wedge \bar{z} \vee (\bar{x} \to y) \vee x \vee y \wedge \bar{z}$.

7. Последовательность высказываний (a_n) определяется следующим рекуррентным выражением: $a_n = a_{n-1} \wedge (a_{n-2} \vee a_{n-3})$, n>3.

Высказывания a_1, a_2, a_3 заданы, причем a_1 и a_3 истинны, а a_2 ложно. Истинно или ложно высказывание a_n? Как выражается a_n через a_1, a_2, a_3?

8. Выразите все основные операции:

1) через операции дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;

2) через конъюнкцию и отрицание;

3) через импликацию и отрицание.

9. Автоматическая прропускная система регистрирует работников предприятия на проходной и заносит данные в таблицу «Рабочее время» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Код сотрудника», «Отдел», «Время прихода» и «Пропуск» с символьными именами B, B, C и D, соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций. Нужно установить соответствие между запросами к данным из таблицы и двойственными запросами.

Запросы к данным из таблицы:

1) $(((A=1618)\leftrightarrow(B=R22))\rightarrow(C\neq"08:55"))\wedge(D=1)$

2) $((A=1618)\oplus(B=R22))\vee((C\neq"08:55")\leftrightarrow(D=1))$

3) $(A\neq1618)\oplus(B\neq R22)\oplus(C="08:55")\oplus(D=1)$

Двойственные запросы:

□ $((A\neq1618)\leftrightarrow(B\neq R22))\wedge((C="08:55")\oplus(D\neq1))$

□ $((A=1618)\oplus(B=R22))\leftrightarrow((C\neq"08:55")\oplus(D\neq1))$

□ $(((A\neq1618)\leftrightarrow(B\neq R22))\wedge(C\neq"08:55"))\vee(D=1)$

□ $(A=1618)\leftrightarrow(B\neq R22)\leftrightarrow(C\neq"08:55")\oplus(D\neq1)$

4.1.3. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам (РКС).

Релейно-контактные схемы (их часто называют переключательными схемами) широко используются в технике автоматного управления.

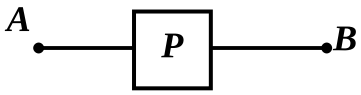
Определение 4.5. Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящее из следующих элементов:

1) *переключателей*, которыми могут быть механические устройства, электромагнитные реле, полупроводники и т.д.;

2) соединяющие их *проводники*;

3) *входы* в схему и *выходы* из нее (клеммы, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами.

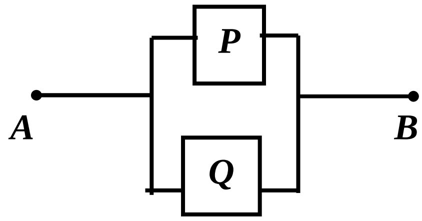
Простейшая схема содержит один переключатель P и имеет один вход A и один выход B. Переключателю P поставим в соответствие высказывание p: «Переключатель P замкнут». Если p истинно, то импульс, поступающий на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения, т. е. схема пропускает ток. Если p ложно, то переключатель разомкнут, и схема тока не проводит. Таким образом, если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема с двумя полюсами (двухполюсная схема).



Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Так, конъюнкции двух высказываний $p \wedge q$ ставится в соответствие схема:

а дизъюнкции $p \vee q$ схема:

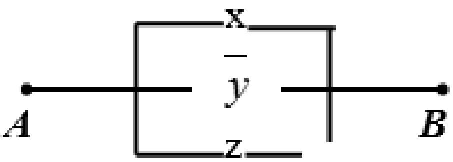


Так как любая формула алгебры логики может быть записана в виде ДНФ или КНФ, то ясно, что каждой формуле алгебры логики можно поставить в соответствие некоторую РКС, а каждой РКС можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики. Поэтому возможности схемы можно выявить, изучая соответствующую ей формулу, а упрощение схемы можно свести к упрощению формулы.

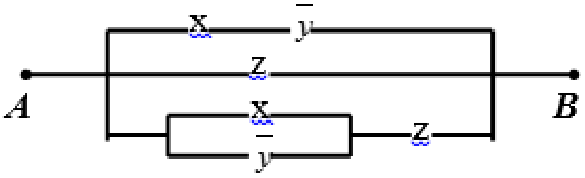
Пример 4.8. Составить РКС для формулы $(\bar{x} \wedge y) \to (z \vee x)$.

Решение. Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований: $(\bar{x} \wedge y) \to (z \vee x) \equiv \overline{\bar{x} \wedge y} \vee z \vee x \equiv x \vee \bar{y} \vee z \vee x \equiv x \vee \bar{y} \vee z$.

Тогда РКС для данной формулы имеет вид:



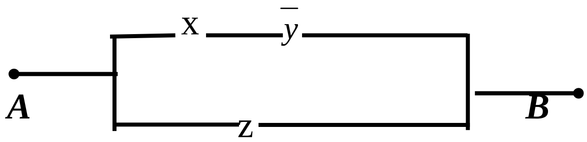
Пример 4.9. Упростить РКС:



Решение. Составим по данной РКС формулу (функцию проводимости) и упростим ее: $(x \wedge \overline{y}) \vee z \vee (x \vee \overline{y}) \wedge z \equiv x \wedge \overline{y} \vee z$.

(к последним двум слагаемым применили закон поглощения).

Тогда упрощенная схема выглядит так:



Пример 4.10. (пример построения РКС по заданным условиям с оценкой числа контактов)

Построить контактную схему для оценки результатов некоторого спортивного соревнования тремя судьями при следующих условиях: судья, засчитывающий результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, должна загореться лампочка положительное решение судей принято простым большинством голосов).

Решение. Ясно, что работа нужной РКС описывается булевой функцией трех переменных $F(x,y,z)$, где переменные высказывания x, y, z означают: x – судья x голосует «за»; y – судья y голосует «за»; z – судья z голосует «за».

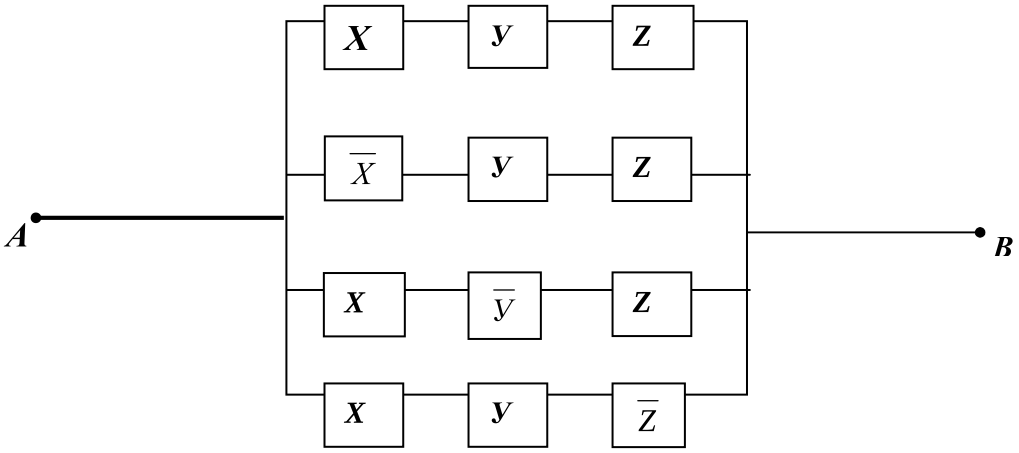
Таблица истинности функции $F(x,y,z)$, очевидно, имеет вид:

x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

СКНФ формулы (функции) $F(x,y,z)$ запишется в виде:

$F(x,y,z) \equiv x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z$.

Этой формуле соответствует РКС с двенадцатью переключателями:



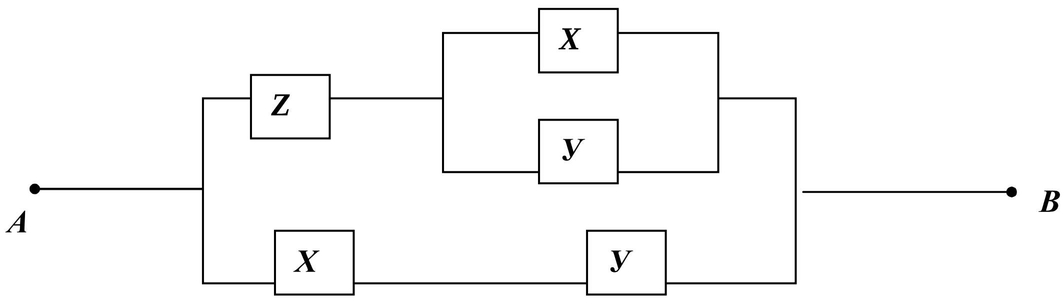
Упростим формулу $F(x,y,z) \equiv x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \equiv$

$\equiv (x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z) \equiv$

$\equiv x \wedge y \wedge (z \vee \overline{z}) \vee x \wedge z \wedge (y \vee \overline{y}) \vee y \wedge z \wedge (x \vee \overline{x}) \equiv x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z \equiv$

$\equiv x \wedge y \vee z \wedge (x \vee y)$.

Полученной формуле соответствует схема, содержащая пять переключателей.



Задачи

1. Составьте РКС для формул:

1) $x \to y$; 2) $x \leftrightarrow y$;

3) $x \wedge (\overline{y} \wedge z \vee x \vee y)$; 4) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x \wedge y \wedge z} \vee \overline{x} \wedge y$;

5) $x \wedge (y \wedge z \vee \overline{y \wedge z}) \vee \overline{x} \wedge (\overline{y} \wedge z \vee y \wedge \overline{z})$; 6) $(\overline{x} \vee y) \wedge (z \wedge y \vee x) \vee u$;

7) $(x \to y) \wedge (y \to z)$; 8) $(x \to y) \to (\overline{x} \wedge (y \vee z))$;

9) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$; 10) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

2. Построить РКС для $F(x, y, z)$, если известно, что:

1) $F(0,1,0) = \mathrm{F}(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;

2) $F(1,0,1) = F(1,1,0) = 1$;

3) $F(0,0,1) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;

4) $F(1,1,0) = F(1,1,1) = 1$;

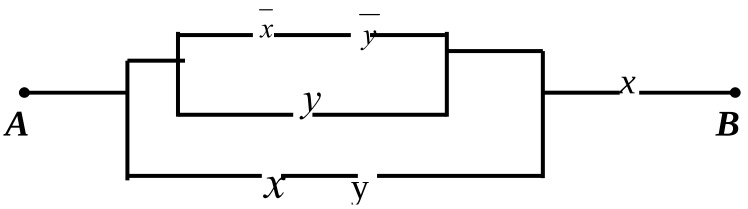
5) $F(0,0,1) = F(1,0,1) = F(1,0,0) = 1$;

6) $F(0,0,1) = F(0,1,0) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = 1$,

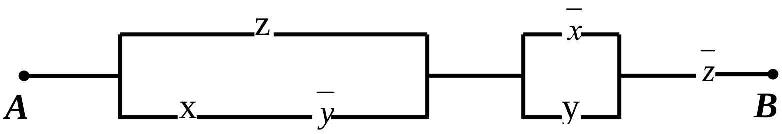
а остальные значения функции F равны нулю.

3. Упростить РКС:

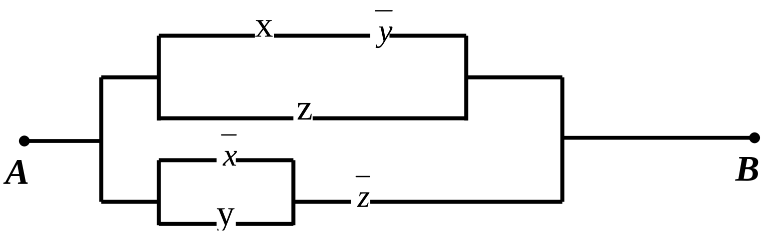
1)



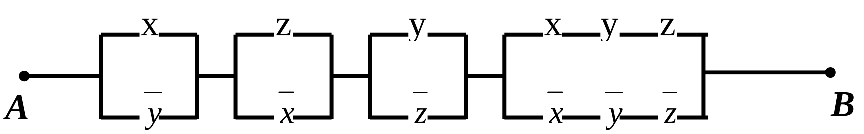
2)



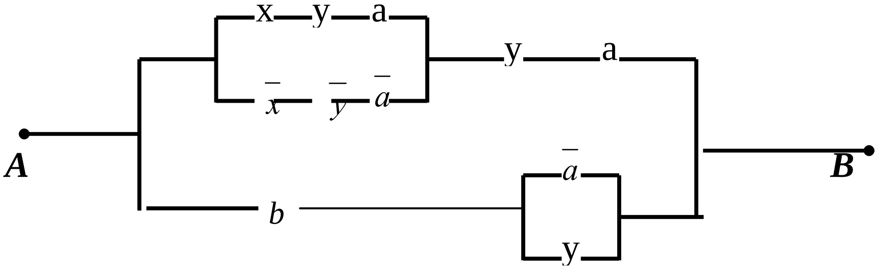
3)



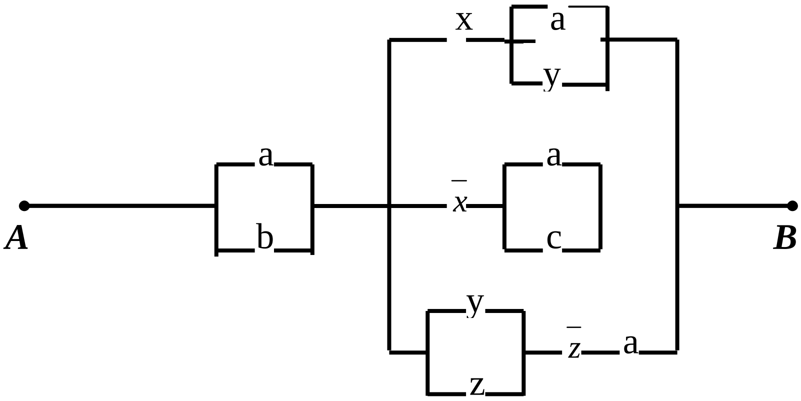
4)



5)

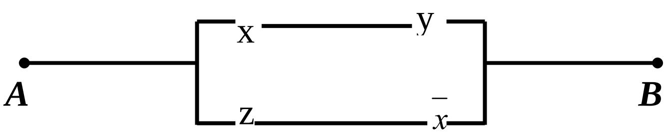


6)

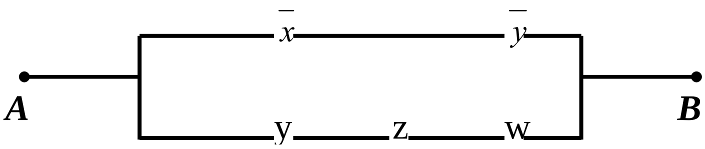


4. По данной схеме найдите функцию проводимости (СДНФ) и условия работы:

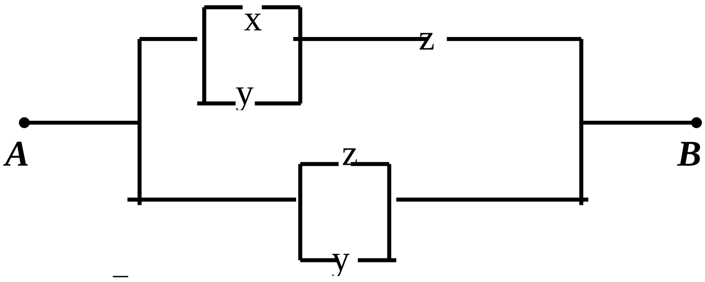
1)



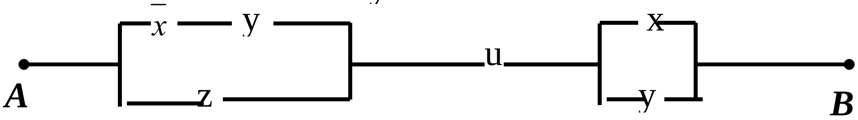
2)



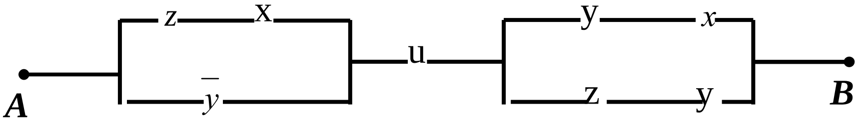
3)



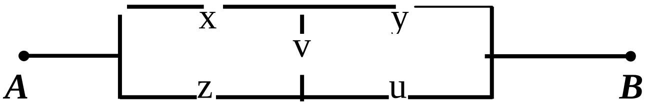
4)



5)

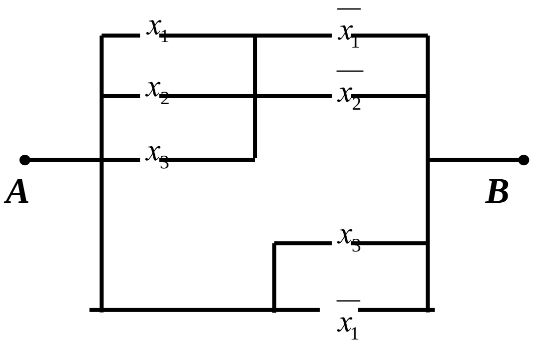


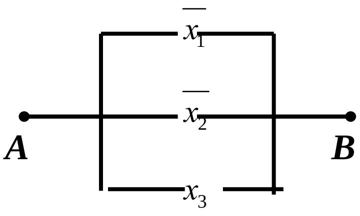
6)



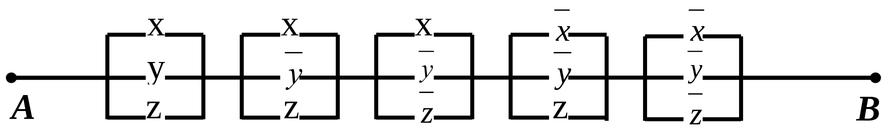
5. Проверьте равносильность схем:

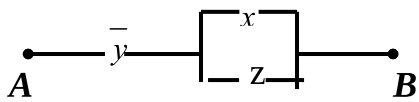
1)



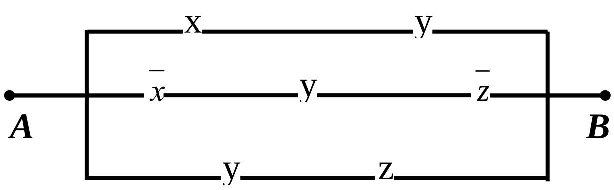


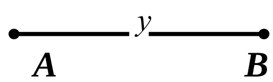
2)





3)





4.1.4. Логическое следствие.

Пусть $A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\ A_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формулы алгебры логики.

Определение 4.6. Формула $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***логическим следствием*** формул $A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, A_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если она обращается в истинное высказывание на всяком наборе значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которого в истинные высказывания обращаются все формулы $A_1, A_2, \ldots,\ A_m$.

Обозначение: $A_1, A_2, \ldots,\ A_m \models B$ (читается «из $A_1, A_2, \ldots,\ A_m$ логически следует *B*»), здесь $A_1, A_2, \ldots,\ A_m$ – посылки, *B* – следствие.

Если воспользоваться истинностными таблицами, то можно сказать, что *B* есть логическое следствие формул $A_1, A_2, \ldots,\ A_m$, если формула *B* имеет значение 1 (истина) во всех тех строках, в которых $A_1, A_2, \ldots,\ A_m$ одновременно имеют значение 1 (истина).

Пример 4.11.

p	q	p	$p \to q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Формулы p и $p \to q$ одновременно истинны в 4-ой строке, где q тоже имеет значение 1, значит $p,\ p \to q \models q$.

Свойства.

1. Тавтология логически следует из любой формулы алгебры логики.
2. Противоречие логически влечет любую формулу алгебры логики.
3. $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \models B$ и $B \models A$.
4. $A \models B$ тогда и только тогда, когда $A \to B$ – тавтология.
5. $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B$ тогда и только тогда, когда $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \models B$.
6. $A_1, A_2, \ldots, A_m, B \models C$ тогда и только тогда, когда $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B \to C$.

7. $A_1, A_2, \ldots, A_m \models C$ тогда и только тогда, когда $A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_m \to C)\ldots)$ – тавтология.

В любом рассуждении в логике высказываний можно проверить, будет ли истинность следствия этого рассуждения определяться истинностью фигурирующих в нем высказываний (если это имеет место в данном рассуждении, то говорят, что оно логически правильное).

Пример 4.12. Является ли логически правильным следующее рассуждение. Студент пойдет домой (a) или останется в университете ($в$). Он не останется в университете. Следовательно, студент пойдет домой.

Решение. Запишем это рассуждение символически с помощью указанных в скобках букв: $a \vee в$, $\overline{в}$, a. Истинность следствия будет определяться истинностью имеющихся высказываний, если $a \vee в, \overline{в} \models a$.

Имеем, $a \vee в \to (\overline{в} \to a) \equiv \overline{a \vee в} \vee \overline{\overline{в}} \vee a \equiv \overline{a} \wedge \overline{в} \vee в \vee a \equiv (\overline{a} \vee в) \wedge (\overline{в} \vee в) \vee a \equiv$ $\equiv (\overline{a} \vee в) \wedge 1 \vee a \equiv \overline{a} \vee в \vee a \equiv 1$. Таким образом, $a \vee в \to (\overline{в} \to a)$ – тавтология, поэтому можно считать, что данное рассуждение логически правильное.

Пример 4.13. Справедливо ли следующее рассуждение.

Я пойду или в кино на новую комедию (a), или на занятие по математической логике ($в$). Если я пойду в кино на новую комедию, то от всей души посмеюсь (c). Если я пойду на занятие по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений (d). Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.

Решение. Учитывая символические обозначения высказываний, приведенные в условии, запишем посылки нашего рассуждения: $a \vee в$, $a \to c$, $в \to d$ и заключение: $c \vee d$.

Покажем, что имеет место следующее логическое следование:

$a \vee в,\ a \to c,\ в \to d \models c \vee d$.

От противного. Предположим, что это следование неверно, т.е. $a \vee в=1$, $a \to c=1$, $в \to d=1$, но заключение $c \vee d=0$. Тогда из последнего соотношения следует, что $c=0$ и $d=0$. Далее, из $a \to c=1$ и $c=0$ следует, что $a=0$. Затем из $в \to d=1$ и $d=0$ следует, что $в=0$, тогда $a \vee в=0 \vee 0=0$, что противоречит предположению $a \vee в=1$.

Таким образом, приведенное в данной задаче рассуждение справедливо.

Пример 4.14. Если завтра будет холодно (a), то я надену теплое пальто ($в$), если рукав будет починен (c). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?

Решение. Посылки данного рассуждения символически записываются следующим образом: $a \to (c \to в)$, $a \wedge \overline{c}$. Спрашивается: следует ли отсюда утверждение $\overline{в}$?

Предположим, что высказывание $\overline{в}$ ложно, в то время как все посылки являются истинными высказываниями. Тогда $\overline{в}=0$, а $в=1$. Значит, первая посылка $a \to (c \to в)$ действительно истинна, а вторая посылка будет истинной, если a истинно, а c ложно. Таким образом, ситуация, когда посылки все истинны, а высказывание $\overline{в}$ ложно, вполне возможна. Это означает, что высказывание $\overline{в}$ не следует из данных посылок.

Даны A_1, $A_2, \ldots$, A_m – формулы алгебры логики (посылки). Стоит задача найти все следствия из данной совокупности посылок $A_1, A_2, \ldots$, $A_m \models B$?

Для того, чтобы найти все неравносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры логики, являющиеся логическими следствиями данной совокупности посылок нужно:

1. Составить конъюнкцию посылок $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$.
2. Равносильными преобразованиями привести полученную конъюнкцию к СКНФ $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_к$, где B_i – элементарные дизъюнкции.

3. Выписать все элементарные дизъюнкции B_1, $B_2, \dots,$ B_K, а также всевозможные конъюнкции этих дизъюнкций по два, по три, т.д.
4. С помощью равносильных преобразований упростить полученные формулы.

Пример 4.15. Найти все следствия из посылок: «Если сумма цифр целого числа делится на 3, то это число делится на 3 или на 9»; «Если целое число делится на 9, то оно делится на 3»;

Решение. Введем обозначения для простых высказываний:

x – «сумма цифр целого числа делится на 3»;

y – «целое число делится на 3»;

z – «целое число делится на 9».

Тогда первая посылка запишется символически в виде формулы $x\rightarrow(y\vee z)$, а вторая – в виде формулы $z\rightarrow y$. Задача сводится к тому, чтобы из этих формул (посылок) получить все формулы, являющиеся их логическими следствиями.

Составим конъюнкцию посылок, равносильными преобразованиями приводим ее к СКНФ:

$(x\rightarrow(y\vee z))\wedge(z\rightarrow y)\equiv(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{z}\vee y)\equiv(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{z}\vee y)\vee(x\wedge\bar{x})\equiv$

$\equiv(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{z}\vee y\vee x)\wedge(\bar{z}\vee y\vee\bar{x})$ – СКНФ.

Выпишем все следствия (всевозможные конъюнкции из элементарных дизъюнкций, входящих в полученную СКНФ), придав им более удобную равносильную форму:

$\bar{x}\vee y\vee z\equiv x\rightarrow(y\vee z)$;

$\bar{z}\vee y\vee x\equiv z\rightarrow(y\vee x)$;

$\bar{z}\vee y\vee\bar{x}\equiv\bar{z}\vee\bar{x}\vee y\equiv\overline{z\wedge x}\vee y\equiv z\wedge x\rightarrow y$;

$(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{z}\vee y\vee x)\equiv y\vee(\bar{x}\vee z)\wedge(\bar{z}\vee x)\equiv y\vee(x\rightarrow z)\wedge(z\rightarrow x)\equiv y\vee(x\leftrightarrow z)$;

$(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{z}\vee y\vee\bar{x})\equiv(\bar{x}\vee y)\vee(\bar{z}\wedge z)\equiv\bar{x}\vee y\vee 0\equiv\bar{x}\vee y\equiv x\rightarrow y$;

$(\bar{z}\vee y\vee x)\wedge(\bar{z}\vee y\vee\bar{x})\equiv(\bar{z}\vee y)\wedge(x\vee\bar{x})\equiv(\bar{z}\vee y)\wedge 1\equiv z\rightarrow y$;

$(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{z}\vee y\vee x)\wedge(\bar{z}\vee y\vee\bar{x})\equiv y\vee(\bar{x}\vee z)\wedge\bar{z}\equiv y\vee\bar{x}\wedge\bar{z}\vee\bar{z}\wedge z\equiv y\vee\bar{x}\wedge\bar{z}\equiv$

$\equiv \overline{x \vee z} \vee y \equiv x \vee z \to y$.

Выразим полученные следствия в содержательной форме:

$x\to(y\vee z)$ – «Если сумма цифр делится на 3, то число делится на 3 или на 9»;

$z\to(y\vee x)$ – «Если число делится на 9, то оно делится на 3 или сумма цифр делится на 3»;

$z\wedge x\to y$ – «Если число делится на 9 и сумма цифр делится на 3, то оно делится на 3»;

$y\vee (x\leftrightarrow z)$ – «Или число делится на 3, или сумма цифр делится на 3 тогда и только тогда, когда число делится на 9»;

$x\to y$ – «Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3»;

$z\to y$ – «Если число делится на 9, то оно делится на 3»;

$x\vee z\to y$ – «Если сумма цифр числа делится на 3 или число делится на 9, то число делится на 3».

Задачи

1. Установите, имеют ли место логические следствия:

1) $p \vee q, \quad p \quad \models \quad \overline{q}$

2) $p \vee q \vee r, \quad \overline{p} \wedge \overline{q} \quad \models \quad r$

3) $p \vee q \vee r, \quad p \quad \models \quad \overline{q} \wedge \overline{r}$

4) $p \vee q \vee r, \quad \overline{p} \quad \models \quad q \vee r$

5) $F \to G, \quad (F \vee L) \wedge H \to M, \quad L \to H \quad \models \quad (F \vee L) \wedge G \to \overline{M}$

6) $F \wedge G \to \overline{R}, \quad F \wedge H \to K, \quad F \to \overline{K}, \quad F \wedge \overline{G} \to H, \quad \models \quad F \to \overline{R}$

2. Выясните, являются ли логически правильными следующие рассуждения:

1) Если 3 и 5 – простые числа, то они простые числа – близнецы. Числа 7 и 11 простые. Следовательно, 7 и 11 – простые числа-близнецы.

2) Если 8 – составное число, то 16 – составное число. Если 16 – составное число, то существуют простые числа. Если существуют простые числа, то число 16 – составное. Простые числа существуют. Следовательно, число 8 – составное.

3) Если $a \neq 0$ или $в \neq 0$, то $a^2+в^2>0$. Если $a=0$ и $в=0$, то выражение $\frac{a+в}{a-в}$ не имеет смысла. Неверно, что $a^2+в^2>0$. Следовательно, выражение $\frac{a+в}{a-в}$ не имеет смысла.

4) Если функция f и g непрерывны на [a,b], то их сумма непрерывна на [a,b]. Их сумма не является непрерывной. Первая функция непрерывна. Следовательно, вторая функция не является непрерывной.

5) Или Петр и Иван братья, или они однокурсники. Если Петр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья. Если Петр и Иван однокурсники, то Иван и Михаил также однокурсники. Следовательно, или Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил однокурсники.

6) Если Петр не встречал Ивана, то либо Иван не был на лекциях, либо Петр лжет. Если Иван был на лекциях, то Петр встречал Ивана, и Сергей был в читальном зале после лекций. Если Сергей был в читальном зале после лекций, то либо Иван не был на лекциях, либо Петр лжет. Следовательно, Иван не был на лекциях.

7) Если я пойду завтра на первое занятие (A), то должен буду рано встать (B), а если я пойду вечером на танцы (C), то лягу спать поздно (D). Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна (E). Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить вечером на танцы.

8) Если я поеду автобусом (A), а автобус опоздает (B), то я пропущу назначенное свидание (C). Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться (D), то мне не следует ехать домой (E). Если я не

получу работу (P), то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следует ли тогда, что, если я поеду автобусом, и автобус опоздает, то я получу работу?

9) Если фирма приглашает на работу крупного специалиста в области новейшей технологии, то она считает ее привлекательной и разворачивает работы по изменению технологии производства своего продукта, или начинает разработку нового продукта. Конкурирующая фирма пригласила на работу крупного специалиста в области новейшей технологии. Следовательно, она разворачивает работу по изменению технологии производства выпускаемого продукта или по разработке нового продукта. Уточните справедливость данного умозаключения.

3. Найдите все следствия из посылок: «Если сумма цифр целого числа делится на 3, то это число делится на 3 или на 9»; «Если целое число делится на 9, то оно делится на 3».
4. Найдите недостающую посылку, если известная посылка: «Целое число делится на 5 и не оканчивается нулем», и следствие: «Целое число оканчивается цифрой 5».

4.1.5. Решение логических задач с помощью алгебры логики.

Суть применения методов алгебры логики к решению логических задач состоит в том, что, конкретные условия логической задачи с помощью соответствующих обозначений записывают в виде формулы алгебры логики. После равносильных преобразований формулы получают ответ на все вопросы задачи.

Пример 4.16. После обсуждения состава участников предполагаемой экспедиции было решено, что должны выполняться два условия:

a) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский;

b) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин.

Требуется: 1) ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую принятое решение в символической форме; 2) для полученной формулы найти возможно более простую равносильную формулу; 3) пользуясь найденной более простой формулой, дать новую и более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников экспедиции.

Решение. Назначение в экспедицию Арбузова, Брюквина и Вишневского обозначим буквами $А$, $Б$, $В$, соответственно. Тогда условие а) можно записать в виде $А \to Б \vee В$, а условие б) в виде $А \wedge В \to Б$. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то они должны быть соединены логической связкой "и". Поэтому принятое решение можно записать в виде следующей символической формулы:

1. $(А \to Б \vee В) \wedge (А \wedge В \to Б)$;

2. $(А \to Б \vee В) \wedge (А \wedge В \to Б) \equiv (\overline{А} \vee Б \vee В) \wedge (\overline{А} \vee \overline{В} \vee Б) \equiv (\overline{А} \vee Б) \vee (В \wedge \overline{В}) \equiv$
$\equiv А \to Б$.

Символическую формулу читаем так: "Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин". Это и есть наиболее простая словесная формулировка принятого решения о составе экспедиции.

Пример 4.17. Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1) Антон был вторым, а Борис – пятым.
2) Виктор был вторым, а Денис – третьим.
3) Григорий был первым, а Борис - третьим
4) Антон был третьим, а Евгений – шестым.
5) Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение. Обозначим высказывания зрителей символом X_y, где X – первая буква имени участника турнира, а y – номер места, которое он занял в турнире.

Так как в паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний

$A_2 \vee Б_5 \equiv 1;\ В_2 \vee Д_3 \equiv 1;\ Г_1 \vee Б_3 \equiv 1;\ А_3 \vee Е_6 \equiv 1;\ В_3 \vee Е_4 \equiv 1.$

Но тогда истинной будет формула

$F \equiv (A_2 \vee Б_5) \wedge (В_2 \vee Д_3) \wedge (Г_1 \vee Б_3) \wedge (А_3 \vee Е_6) \wedge (В_3 \vee Е_4) \equiv 1.$

Путем равносильных преобразований легко показать, что

$F \equiv А_3 \wedge Б_5 \wedge В_2 \wedge Г_1 \wedge Е_4 \equiv 1$. Откуда получаем $А_3 \equiv 1,\ Б_5 \equiv 1,\ В_2 \equiv 1,$ $Г_1 \equiv 1;\ Е_4 \equiv 1$, что и дает ответ задачи.

Пример 4.18. Жили четыре мальчика: Альберт, Карл, Дидрих и Фридрих. Фамилии друзей те же, что и имена только так, что ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковы. Кроме того, фамилия Дидриха была не Альберт. Требуется определить фамилию каждого из мальчиков, если известно, что имя мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого – фамилия Карла.

Решение. Поставим в соответствие каждому мальчику символ X_Y, где X – имя, а Y – фамилия мальчика. Тогда по условию задачи ложны высказывания: $А_А$, $К_К$, $Д_Д$, $Ф_Ф$, $Д_А$, но есть мальчик Y_X такой, что истинна конъюнкция $X_Ф \wedge Y_X \wedge К_Y \equiv 1$.

Очевидно, что $X \neq Ф$, $X \neq К$, $Y \neq Ф$, $Y \neq К$. Тогда возможны два случая:

1) $X=А$ и $Y=Д$,
2) $X=Д$ и $Y=А$.

Но первый случай невозможен, так как здесь $Y_X = Д_A$, а по условию $Д_A \equiv 0$. Следовательно, имеет место второй случай. Значит, Дидрих имеет фамилию Фридрих, Альберт имеет фамилию Дидрих, Карл имеет фамилию Альберт, а Фридрих имеет фамилию Карл.

Задачи

1. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1) Андреев: "Я убирал 9-ый класс, а Савельев – 7-ой".
2) Костин: "Я убирал 9-ый класс, а Андреев – 8-ой".
3) Савельев: "Я убирал 8-ой класс, а Костин – 10-ый".

Давыдов уже ушел из школы домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

2. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: "Откуда Вы?" каждый дал ответ:

Иванов: "Я приехал из Клинцов, а Дмитриев – из Новозыбкова".

Сидоров: "Я приехал из Клинцов, а Петров – из Трубчевска".

Петров: "Я приехал из Клинцов, а Дмитриев – из Дятькова".

Дмитриев: "Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов – из Жуковки".

Ефимов: "Я приехал из Жуковки, а Иванов живет в Дятькове".

Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

3. Семья, состоящая из отца A, матери B и трех дочерей C, D, E купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

1) Когда отец A смотрит передачу, то мать B делает то же.
2) Дочери D и E, обе или одна из них, смотрят передачу.
3) Из двух членов семьи – мать B и дочь C – смотрят передачу одна и только одна.
4) Дочери C и D обе смотрят, или обе не смотрят.
5) Если дочь E смотрит передачу, то отец A и дочь D делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

4. На вопрос: "Кто из трех студентов изучал математическую логику?" получен ответ – "Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий". Кто изучал математическую логику?

5. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1) Если первый сдал, то и второй сдал.
2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
3) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
4) Если четвертый сдал, то первый сдал.

6. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

7. Четыре студентки, имена которых начинаются буквами A, E, C**,** P посещают институт по очереди и ведет общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

1) Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.

2) *С* и *Р* не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
3) Если *С* выйдет в среду или *Р* – в четверг, то *Е* согласится побывать на занятиях в пятницу.
4) Если *А* не пойдет в ВУЗ в четверг, то *Е* позволит себе сходить туда в среду.
5) Если *А* или *Р* будут в институте в среду, то *С* сможет пойти в пятницу.
6) Если *Р* в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то *А* придется сходить в институт во вторник, а *С* – в четверг.

8. Четыре друга – Антонов (*А*), Вехов (*В*), Сомов (*С*), Деев (*Д*) решили провести каникулы в четырех различных городах – Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1) Если *А* не едет в Москву, то ***С*** не едет в Одессу.
2) Если *В* не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то *А* едет в Москву.
3) Если *С* не едет в Ташкент, то *В* едет в Киев.
4) Если *Д* не едет в Москву, то *В* не едет в Москву.
5) Если *Д* не едет в Одессу, то *В* не едет в Москву.

9. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.

1) Клод уверял, что Жак лжет.
2) Жак обвинял во лжи Дика.
3) Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

10. Один из трех братьев Витя, Коля и Толя разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев – Андрей и Дима.

– Это мог сделать только или Витя, или Толя, – сказал Андрей.

– Я окно не разбивал, – возразил Витя, – и Коля тоже.

– Вы оба говорите неправду, – заявил Толя.

– Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, – возразил Дима.

– Ты, Дима, неправ, – вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

11. Для полярной экспедиции из восьми претендентов А, В, С, Д, Е, Ф, К и М надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врач. Обязанности биолога могут выполнять Е и К, гидролога – В и Ф, синоптика – Ф и К, радиста – С и Д, механика – С и М, врача – А и Д. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и с кем следует взять в экспедицию, если Ф не может ехать без В, Д без М и С, С не может ехать одновременно с К, А не может ехать вместе с В?

4.2. Функции алгебры логики.

4.2.1. Совершенные нормальные формы. Полином Жегалкина.

Определение 4.7. Функцией алгебры логики n переменных (или ***булевой функцией***) называется любая функция n переменных $F(x_1, x_2,..., x_n)$, аргументы которой принимают два значения 1 и 0, и при этом сама функция может принимать одно из двух значений 0 или 1.

Всякая формула алгебры логики есть функция алгебры логики. Тождественно истинная и тождественно ложная формулы представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Используя правила комбинаторики, можно установить, что число различных функций алгебры логики n переменных равно числу двоичных векторов длины 2^n, т.е. 2^{2^n}.

Если фактически функция не зависит от некоторой переменной, то такую переменную называют ***фиктивной***, иначе переменную называют ***существенной.***

Пример 4.19. Даны функции:

1) $f(a,b,c) = (b \to c \vee a) \wedge (a \to c \vee b)$
2) $f(a,b,c) = \overline{b} \wedge c \vee b \wedge (a \downarrow c \vee a \wedge \overline{c})$
3) $f(a,b,c) = (a \to b \vee c) \wedge (a \oplus c \vee \overline{b})$
4) $f(a,b,c) = \overline{a} \wedge (b \leftrightarrow c) \vee a \wedge b \wedge c)$
5) $f(a,b,c) = (\overline{a} | (b \downarrow c)) \wedge (a \to c \vee b)$

Проверим для каких функций переменная *a* является фиктивной.

Решение. Рассмотрим значения функций на наборах, которые отличаются только значением переменной *a* (на соседних наборах по переменной *a*).

1) f(0, 0, 0) = 1, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 0, f(0, 1, 1) = 1,
f(1, 0, 0) = 1, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 0, f(1, 1, 1) = 1.

Изменение значения переменной *a* в любом наборе значений переменных не изменяет значение функции, поэтому переменная *a* для этой функции является фиктивной.

2) f(0, 0, 0) = 0, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 1, f(0, 1, 1) = 0,
f(1, 0, 0) = 0, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 1, f(1, 1, 1) = 0.

Изменение значения переменной *a* в любом наборе значение переменных не изменяет значение функции, поэтому переменная *a* для этой функции является фиктивной.

3) f(0, 0, 0) = 1, f(1, 0, 0) = 0.

Изменение значения переменной *a* в наборе (0, 0, 0) приводит к изменению значения функции, поэтому переменная *a* для этой функции является существенной.

4) f(0, 0, 0) = 1, f(1, 0, 0) = 0.

Изменение значения переменной *a* в наборе (0, 0, 0) приводит к изменению значения функции, поэтому переменная *a* для этой функции является существенной.

5) f(0, 0, 0) = 0, f(0, 0, 1) = 1, f(0, 1, 0) = 1, f(0, 1, 1) = 1,

f(1, 0, 0) = 0, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 1, f(1, 1, 1) = 1.

Изменение значения переменной *a* в любом наборе значение переменных не изменяет значение функции, поэтому переменная *a* для этой функции является фиктивной.

Итак, переменная *a* является фиктивной в переключательных функциях 1, 2, 5.■

Найдем все булевы функции одной переменной y=f(x). Перенумеруем эти функции (их 4) естественным образом и представим в виде таблицы:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Видно, что $f_0(x) = 0$, а $f_3(x) = 1$, т.е. эти две функции не зависят от x,

$f_1(x)=x$, т.е. она не меняет аргумента. Функция $f_2(x)$ принимает значения, противоположные значениям аргумента, обозначается $f_2(x)=\overline{x}$.

Найдем все булевы функции двух переменных z = f(x,y).

Число этих функций равно $2^4 = 16$. Перенумеруем и расположим их тоже в естественном порядке в таблице:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рассмотрим более подробно эти функции. Две из них $f_0 = 0$ и $f_{15} = 1$ являются константами.

$$f_3 = x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, f_{12} = \overline{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, f_5 = y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, f_{10} = \overline{y} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f_1(x,y) = x \wedge y = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad f_7(x,y) = x \vee y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad f_{11}(x,y) = y \to x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f_{13}(x,y) = x \to y = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad f_2(x,y) = \overline{x \to y} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad f_4(x,y) = \overline{y \to x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_6(x,y) = x \oplus y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad f_9(x,y) = \overline{x \oplus y} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad f_8(x,y) = x \downarrow y = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} -$$

стрелка Пирса; $f_{14}(x,y) = x|y = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ – штрих Шеффера.

Можно показать, что всякую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы алгебры логики следующим образом:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(1,...,1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \vee F(1,...,1,0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \wedge \overline{x_n} \vee$$
$$\vee F(1,...,1,0,0) \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_{n-2} \wedge \overline{x_{n-1}} \wedge \overline{x_n} \vee ... \vee F(0,0,...,0) \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge ... \wedge \overline{x_n} \quad (1)$$

или в виде формулы:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (F(1,...,1) \vee \overline{x_1} \vee ... \vee \overline{x_n}) \wedge (F(1,...,1,0) \vee \overline{x_1} \vee ... \vee \overline{x_{n-1}} \vee x_n) \wedge$$
$$\wedge (F(1,...,1,0,0) \vee \overline{x_1} \vee ... \vee \overline{x_{n-2}} \vee x_{n-1} \vee x_n) \wedge ... \wedge (F(0,...,0) \vee x_1 \vee ... \vee x_n) \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно привести при помощи равносильных преобразований в алгебре высказываний к некоторому специальному виду – ***совершенной нормальной форме***.

Определение 4.8. Элементарной конъюнкцией n переменных называется конъюнкция переменных и их отрицаний.

Примеры элементарных конъюнкций: $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{x} \wedge z$, $x \wedge y \wedge \bar{z}$, $y \wedge \bar{y} \wedge \bar{x}$.

Элементарной дизъюнкцией n переменных называется дизъюнкция переменных и их отрицаний.

Примеры элементарных дизъюнкций: $y \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee x$, $x \vee y \vee \bar{x}$, $x \vee z \vee x$.

Определение 4.9. **Дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ДНФ и КНФ, причем не единственную.

Определение 4.10. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) формулы *A* называется ДНФ *A*, обладающая следующими свойствами:

1. Все элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ *A*, различны.
2. Все элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ *A*, содержат все переменные, участвующие в формуле.
3. Каждая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ *A*, не содержит двух одинаковых выражений.
4. Каждая элементарная конъюнкция не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

СДНФ для формулы единственна с точностью до перестановки дизъюнктивных и конъюнктивных членов.

СДНФ *A* можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

Построение СДНФ с помощью таблицы истинности.

1. Составить таблицу истинности данной логической формулы или булевой функции.
2. Указать в таблице строки, где формула равна 1.
3. Для каждого набора значений переменных, на котором формула имеет значение 1, выписать конъюнкции всех переменных, причем над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания.
4. Все полученные конъюнкции нужно соединить знаками дизъюнкции.

Пример 4.20. Булеву функцию трех переменных $F(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \to (x_1 \vee x_3) \wedge x_2$ представить логической формулой – в виде СДНФ.

x_1 x_2 x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_3) \wedge x_2$	$F(x_1,x_2,x_3)$	
0 0 0	1	0	0	0	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$
0 0 1	1	0	1	0	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$
0 1 0	0	1	0	0	0	
0 1 1	0	1	1	1	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$
1 0 0	1	1	1	0	0	
1 0 1	1	1	1	0	0	
1 1 0	0	0	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$
1 1 1	0	0	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Искомая СДНФ логической функции

$$F(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

Правило получения СДНФ формулы *A* с помощью равносильных преобразований.

1. Для формулы A получить любую ДНФ (пусть $A \equiv B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_к$).
2. Если B есть элементарная конъюнкция, не содержащая переменную x_i, то нужно заменить B равносильной формулой $B \wedge (x_i \vee \overline{x_i}) \equiv B \wedge x_i \vee B \wedge \overline{x_i}$

3. Если в ДНФ есть два одинаковых выражения $B \vee B$, то одно можно отбросить, так как $B \vee B \equiv B$.
4. Если в некоторую элементарную конъюнкцию B переменная x_i входит дважды, то лишнюю переменную надо отбросить, так как $x_i \wedge x_i = x_i$.
5. Если B содержит конъюнкцию $x_i \wedge \overline{x_i}$, то это слагаемое можно отбросить, так как $x_i \wedge \overline{x_i} \equiv 0$, и, следовательно, $B \equiv 0$, а ложное высказывание из дизъюнкции можно отбросить в силу равносильности $C \vee 0 \equiv C$.

Пример 4.21. Для формулы $A \equiv x \vee y \wedge (x \vee \overline{y})$ построить СДНФ.

Решение. ДНФ $A \equiv x \vee y \wedge x \vee y \wedge \overline{y}$

$x \vee y \wedge x \vee y \wedge \overline{y} \equiv x \vee y \wedge x \vee 0 \equiv x \equiv x \wedge (y \vee \overline{y}) \equiv x \wedge y \vee x \wedge \overline{y}$

СДНФ $A \equiv x \wedge y \vee x \wedge \overline{y}$.

Определение 4.11. КНФ A называется ***совершенной конъюнктивной нормальной формой*** формулы A (СКНФ), если для нее выполнены условия:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, различны.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, содержат все переменные, участвующие в формуле.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит двух одинаковых выражений.
4. Каждая элементарная дизъюнкция не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

Можно доказать, что каждая не тождественно истинная формула имеет единственную СКНФ.

СКНФ A можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности (используя закон двойственности $СКНФA \equiv \overline{СДНФ\overline{A}}$);

б) с помощью равносильных преобразований.

Построение СКНФ с помощью таблицы истинности.

1. Составить таблицу истинности данной логической формулы или булевой функции.
2. Указать в таблице строки, где формула равна 0.
3. Для каждого набора значений переменных, на котором формула имеет значение 0, выписать дизъюнкции всех переменных, причем отрицание ставится над теми переменными, которые на этом наборе имеют значение 1.
4. Все полученные дизъюнкции нужно соединить знаками конъюнкции.

Пример 4.22. Булеву функцию трех переменных $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \to (x_1 \vee x_3) \wedge x_2$ представить логической формулой – в виде СКНФ.

x_1 x_2 x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_3) \wedge x_2$	$F(x_1, x_2, x_3)$	
0 0 0	1	0	0	0	1	
0 0 1	1	0	1	0	1	
0 1 0	0	1	0	0	0	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
0 1 1	0	1	1	1	1	
1 0 0	1	1	1	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
1 0 1	1	1	1	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
1 1 0	0	0	1	1	1	
1 1 1	0	0	1	1	1	

Искомая СКНФ логической функции:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

Правило получения СКНФ формулы A с помощью равносильных преобразований.

1. Для формулы A получить любую КНФ (пусть $A \equiv B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_к$).
2. Если B есть элементарная дизъюнкция, не содержащая переменную x_i, то нужно заменить B равносильной формулой $B \vee x_i \wedge \overline{x_i} \equiv (B \vee x_i) \wedge (B \vee \overline{x_i})$.

3. Если в КНФ есть два одинаковых выражения $B \wedge B$, то одно можно отбросить, так как $B \wedge B \equiv B$.
4. Если в некоторую элементарную дизъюнкцию B переменная x_i входит дважды, то лишнюю переменную надо отбросить, так как $x_i \vee x_i \equiv x_i$.
5. Если B содержит дизъюнкцию $x_i \vee \overline{x_i}$, то это слагаемое можно отбросить, так как $x_i \vee \overline{x_i} \equiv 1$, и, следовательно, $B \equiv 1$, а истинное высказывание из конъюнкции можно отбросить в силу равносильности $C \wedge 1 \equiv C$.

Пример 4.23. Для формулы $A \equiv x \vee y \wedge (x \vee \overline{y})$ построить СКНФ.

Решение. КНФ $A \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee x \vee \overline{y})$, СКНФ $A \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$.

Полином Жегалкина

Определение 4.12. Полиномом (многочленом) Жегалкина от n переменных называется функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_0 x_1 x_2 \ldots x_n \oplus a_1 x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \oplus \ldots \oplus a_{m-1} x_n \oplus a_m$$

Всего здесь 2^n слагаемых. Напомним, что $\oplus$ означает сложение по модулю 2, коэффициенты a_i являются константами (равными нулю или единице).

Теорема. Любая функция n переменных может быть представлена полиномом Жегалкина и это представление единственно.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***линейной***, если ее полином Жегалкина содержит только первые степени слагаемых. Более точно функция называется линейной, если ее можно представить в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$$

Построение полинома Жегалкина с помощью таблицы истинности.

1. Составить таблицу истинности данной логической формулы или булевой функции.
2. Указать в таблице строки, где формула равна 1.

3. Для каждого набора значений переменных, на котором формула имеет значение 1, выписать конъюнкции всех переменных, причем над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания.
4. Все полученные конъюнкции нужно соединить знаками $\oplus$ суммы по модулю 2.
5. Все отрицания заменяем равносильной формулой $\bar{x} \equiv x \oplus 1$, раскрываем скобки и упрощаем, используя формулу: $x \oplus x \equiv 0$.

Пример 4.24. Представим в виде полинома Жегалкина дизъюнкцию $f(x_1, x_2) \equiv x_1 \vee x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	
0	0	0	
0	1	1	$\overline{x_1} \wedge x_2$
1	0	1	$x_1 \wedge \overline{x_2}$
1	1	1	$x_1 \wedge x_2$

$$f(x_1, x_2) \equiv x_1 \vee x_2 \equiv \overline{x_1} \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge \overline{x_2} \oplus x_1 \wedge x_2 \equiv$$
$$\equiv (x_1 \oplus 1) \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge (x_2 \oplus 1) \oplus x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 \wedge x_2 \equiv$$
$$\equiv x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 .$$

4.2.2. Проблема разрешимости.

Все формулы алгебры высказываний делятся на три класса: тождественно истинные, тождественно ложные, выполнимые.

Определение 4.13. Формулу алгебры высказываний называют ***выполнимой***, если она принимает значение 1 (истина) хотя бы на одном наборе значений входящих в нее переменных и не является тождественно истинной.

Проблема разрешимости может быть сформулирована следующим образом: существует ли способ, который позволял бы для каждой формулы алгебры высказываний за конечное число шагов ответить на вопрос, к какому классу эта формула принадлежит?

Очевидно, проблема разрешимости алгебры высказываний разрешима. Действительно, для каждой логической формулы может быть записана таблица истинности, которая и даст ответ на поставленный вопрос. Однако практическое использование таблицы истинности для формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ при больших n затруднительно.

Существует другой способ проверки к какому классу принадлежит данная формула, этот способ основан на приведении формулы к ДНФ и КНФ.

Критерий разрешимости. Для того, чтобы формула алгебры высказываний A была тождественна истинна (тождественно ложна), необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция (конъюнкция), входящая в КНФ (ДНФ) формулы A, содержала переменную и ее отрицание.

Пример 4.25. Будет ли формула $A \equiv (x \to y) \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y}$ тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой?

Решение. Приведем формулу A к ДНФ.

$$(x \to y) \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee y \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv \overline{\bar{x} \vee y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y}.$$

Полученная ДНФ не является тождественно ложной, так как каждая элементарная конъюнкция не содержит переменную и ее отрицание. Следовательно, исходная формула тождественно истинна или выполнима.

Преобразуем данную формулу к КНФ: $(x \to y) \to \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv$

$$\equiv x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \equiv (x \wedge \bar{y} \vee \bar{y}) \vee \bar{x} \wedge y \equiv \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \equiv (\bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{y} \vee y) \equiv \bar{y} \vee \bar{x}.$$

Полученная КНФ не является тождественно истинной, так как элементарная дизъюнкция не содержит переменную и ее отрицание.

Следовательно, данная формула A выполнима.

Задачи

1. Для следующих формул найдите СДНФ и СКНФ, каждую двумя способами (путем равносильных преобразований и, используя таблицы истинности):

1) $x \wedge (x \to y)$; 2) $(\overline{x \wedge y} \to \overline{x}) \wedge \overline{x \wedge y \to \overline{\overline{y}}}$;

3) $(x \to y) \to (y \to x)$; 4) $(x \vee \overline{z}) \to y \wedge z$;

5) $(\overline{a} \to c) \to \overline{\overline{b} \to \overline{\overline{a}}}$; 6) $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to \overline{x \to \overline{\overline{x}}} \vee y \wedge \overline{z}$;

7) $(\overline{a} \to \overline{b}) \to (b \wedge c \to a \wedge c)$; 8) $(a \wedge b \to b \wedge c) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;

9) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_{n-1} \to x_n)\ldots))$;

10) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

2. Найдите СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей одну, две или три переменных.

3. Найдите СКНФ для всякой тождественно ложной формулы, содержащей одну, две или три переменных.

4. Докажите равносильность формул $\overline{x \wedge \overline{\overline{y}}} \to (\overline{y} \to x)$ и $\overline{x \to y} \vee x \vee y$ сравнением их совершенных нормальных форм (конъюнктивных или дизъюнктивных).

5. По таблицам истинности найдите формулы, определяющие функции $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$, $F_3(x,y,z)$, $F_4(x,y,z)$, и придайте им более простой вид:

x	y	z	$F_1(x,y,z)$	$F_2(x,y,z)$	$F_3(x,y,z)$	$F_4(x,y,z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1

6. Запишите формулами все функции алгебры логики одной и двух переменных (составить их таблицы истинности и записать аналитические выражения этих функций).

7. Найдите более простой вид формул, имеющих следующие совершенные нормальные формы: 1) $x \wedge y \vee x\overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$;

2) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge z$;

3) $(x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$; 4) $(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

8. Используя критерий тождественной истинности и тождественной ложности формулы, установите, будет ли данная формула тождественно истиной, тождественно ложной или выполнимой:

1) $\overline{x \wedge \overline{y}} \leftrightarrow \overline{x} \vee x \wedge y$;	2) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y)$;
3) $x \wedge y \to (x \to \overline{y})$;	4) $x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$;
5) $x \vee y \to z$;	6) $(x \to z) \wedge (y \to z) \wedge (x \to y)$.

4.2.3. Суперпозиция функций. Замыкание набора функций. Замкнутые классы функций. Полные наборы. Базисы.

Пусть имеется некоторый набор K, состоящий из конечного числа булевых функций. ***Суперпозицией*** функций из этого набора называется новая функция, полученная с помощью конечного числа применения двух операций: можно переименовать любую переменную, входящую в функцию из K; вместо любой переменной можно поставить функцию из набора K или уже образованную ранее суперпозицию.

Суперпозицию еще иначе называют сложной функцией.

Пример 4.26. Если дана одна функция $x|y$ (штрих Шеффера), то ее суперпозициями, в частности, будут следующие функции $x|x$, $x|(x|y)$, $x|(y|z)$.

Замыканием набора функций из *K* называется множество всех суперпозиций. Класс функций *K* называется ***замкнутым***, если его замыкание совпадает с ним самим.

Набор функций называется ***полным***, если его замыкание совпадает со всеми логическими функциями. Иначе говоря, полный набор – это множество таких функций, через которые можно выразить все остальные булевы функции.

Неизбыточный полный набор функций называется ***базисом*** (“неизбыточный” означает, что если какую-то функцию удалить из набора, то этот набор перестанет быть полным).

Пример 4.27. Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание являются полным набором, но не являются базисом, так как это набор избыточен, поскольку с помощью правил де Моргана можно удалить конъюнкцию или дизъюнкцию.

Любую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина. Ясно, что функции конъюнкция, сложение по модулю 2 и константы 0 и 1 являются полным набором, но эти четыре функции также не являются базисом, поскольку 1+1=0, и поэтому константу 0 можно исключить из полного набора (для построения полиномов Жегалкина константа 0 необходима, поскольку выражение “1+1” не является полиномом Жегалкина).

Легко видеть, что одним из способов проверки полноты какого-то набора *K* является проверка того, что через функции из этого набора выражаются функции другого полного набора (можно проверить, что через функции из *K* можно выразить конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание).

Существуют такие функции, что одна такая функция сама является базисом (здесь достаточно проверить только полноту, неизбыточность очевидна). Такие функции называются шефферовскими функциями. Это название связано с тем, что штрих Шеффера является базисом. Напомним, что штрих Шеффера определяется следующей таблицей истинности:

$x|y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{x \wedge y}$ («не и»), так как очевидно $x|x = \bar{x}$, т.е. отрицание является суперпозицией штриха Шеффера, а дизъюнкция $x \vee y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y)$, штрих Шеффера сам является базисом. Аналогично, стрелка Пирса является шефферовской функцией. Для функций 3-х или более переменных шефферовских функций очень много (конечно, выражение других булевых функций через шефферовскую функцию большого числа переменных сложно, поэтому в технике они редко используются).

Заметим, что вычислительное устройство чаще всего базируется на полном наборе функций (часто на базисах). Если в основе устройства лежат конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, то для этих устройств важна проблема минимизации ДНФ; если в основе устройства лежат другие функции, то полезно уметь алгоритмически минимизировать выражения через эти функции.

Перейдем теперь к выяснению полноты конкретных наборов функций. Для этого перечислим 5 важнейших классов функций:

- T_0 – это набор всех тех логических функций, которые на нулевом наборе принимают значение 0 (T_0 – это класс функций, ***сохраняющих 0***).
- T_1 – это набор всех логических функций, которые на единичном наборе принимают значение 1 (T_1 – это класс функций, ***сохраняющих единицу***) (заметим, что число функций от *n* переменных принадлежащих классам T_0 и T_1 равно 2^{2n-1}).
- L – класс ***линейных*** функций, т.е. функций, для которых полином Жегалкина содержит только первые степени переменных (число линейных функций *n* переменных равно 2^{n+1}).

Замечание. *Если* $n \geq 2$, *то линейная функция* в *таблице истинности может содержать только четное число единиц.* Действительно, если

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, то легко видеть, что такая функция в таблице истинности содержит одинаковое число нулей и единиц, а именно $2^n/2$ единиц и нулей. Добавление фиктивной переменной приводит к увеличению числа единиц (и нулей) в два раза. Разумеется, нелинейная функция может иметь в таблице истинности как четное, так и нечетное число единиц.

- Класс S – класс ***самодвойственных*** функций. Функция n переменных называется самодвойственной, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения, т.е. самодвойственная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$

  Замечание: таблица истинности самодвойственной функции не должна быть симметрична ни для одного набора значений переменных.

- M – класс *монотонных* функций. Опишем класс этих функций более подробно.

Пусть имеются 2 набора из n переменных: $s_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $s_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Будем говорить, что набор s_1 меньше набора s_2, если все $x_i \le y_i$. Очевидно, что не все наборы из n переменных сравнимы между собой (например, при n=2 наборы (0,1) и (1,0) не сравнимы между собой).

Функция от n переменных называется ***монотонной***, если на меньшем наборе она принимает меньшее или равное значение. Разумеется, эти неравенства должны проверяться только на сравнимых наборах.

Пример 4.28. В нижеследующей таблице функции f_1, f_2 являются монотонными функциями, а функции f_3, f_4 – нет. Функции f_1 , f_2 являются самодвойственными, а функции f_3, f_4 не являются.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Замечание. Естественный порядок переменных обеспечивает тот факт, что если какой-то набор меньше другого набора, то он обязательно расположен в таблице истинности *выше* “большего” набора. Поэтому если в таблице истинности (при естественном порядке набора переменных) вверху стоят нули, а затем единицы, то эта функция точно является монотонной. Однако возможны инверсии, т.е. единица стоит до каких-то нулей, но функция является все равно монотонной. В этом случае наборы, соответствующие “верхней” единице и “нижнему” нулю должны быть *несравнимы*. Можно проверить, что функция, задаваемая таблицей истинности при естественном порядке набора переменных (00010101), является монотонной.

Теорема. *Классы функций T_0, T_1, L, M, S замкнуты*.

Это утверждение следует непосредственно из определения самих этих классов, а также из определения замкнутости.

В теории булевых функций очень большое значение имеет следующая теорема Поста.

Теорема Поста. *Для того, чтобы некоторый набор функций K был полным, необходимо и достаточно, чтобы в него входили функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, M, S*.

Заметим, что необходимость этого утверждения очевидна, так как, если бы все функции из набора K входили в один из перечисленных классов, то и все суперпозиции, а значит, и замыкание набора входило бы в этот класс, и класс K не мог быть полным.

Достаточность этого утверждения доказывается довольно сложно, поэтому здесь не приводится.

Из этой теоремы следует довольно простой способ выяснения полноты некоторого набора функций. Для каждой из этих функций выясняется принадлежность к перечисленным выше классам. Результаты заносятся в так называемую *таблицу Поста*, где знак “+” означает принадлежность функции соответствующему классу, знак “–” означает, что функция в него не входит.

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	+
f_3	–	+	–	–	–
f_4	+	+	–	+	–

В соответствии с теоремой Поста набор функций будет полным тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста имеется хотя бы один минус. Таким образом, из приведенной таблицы следует, что данные 4 функции образуют полный набор, но эти функции не являются базисом. Из этих функций можно образовать 2 базиса: f_3, f_1 и f_3, f_2. Полными наборами будут любые наборы, содержащие какой-либо базис.

Непосредственно из таблицы Поста следует, что число базисных функций не может быть больше 5. Нетрудно доказать, что на самом деле это число меньше или равно 4.

Задачи

1. Проверьте свойства булевой функции (линейность, самодвойственность, монотонность) и построить соответствующую РКС:

a) $f(x,y,z) = (x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \wedge \bar{z} \vee y \wedge z$

b) $f(x,y,z) = \bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge z \vee y \wedge \bar{z}) \vee (y \oplus z \oplus 1) \wedge x$.

2. Выясните, полны ли системы функций:

a) $A=\{xy, x \vee y, xy \vee yz \vee zx\}$

b) $A=\{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

c) $A=\{1, \bar{x}, x(y \leftrightarrow z) \oplus \bar{x}(y \oplus z), x \leftrightarrow y\}$;

d) $A=\{0, \bar{x}, x(y \oplus z) \oplus yz\}$;

e) $A=\{\bar{x}, x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z), x \oplus y \oplus z\}$;

f) $A=\{\bar{x}, x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow yz, x \oplus y \oplus z\}$;

g) $A=\{xy(x\oplus y),\, xy\oplus x\oplus y, 1,\, xy\oplus yz\oplus zx)\}$;

h) $A=\{(y\leftrightarrow x)\oplus z,\, x\wedge y\oplus z,\, 0\}$;

i) $A=\{\, x\to y,\, \bar{x}\to \bar{y}x,\, x\oplus y\oplus z, 1\}$.

3. Выясните, полны ли системы функций:

a) B=$\{f_1=(10),\ f_2=(00110111)\}$

b) B=$\{f_1=(0110),\ f_2=(1100\,0011),\ f_3=(1001\,0110)\}$

c) B=$\{f_1=(0111),\ f_2=(01011010),\ f_3=(01111110)\}$

d) B=$\{f_1=(0111),\ f_2=(1001\,0110)\}$

e) B=$\{f_1=(0101),\ f_2=(1110\,1000),\ f_3=(0110\,1001)\}$

f) B=$\{f_1=(1001),\ f_2=(1110\,1000)\}$

g) B=$\{f_1=(11),\ f_2=(0111),\ f_3=(00110\,111)\}$

h) B=$\{f_1=(11),\ f_2=(00),\ f_3=(00110\,101)\}$

4. Выделите всевозможные базисы из полной в P_2 системы

a) $C=\{1,\, \bar{x},\, xy(x\oplus y),\, x\oplus y\oplus xy\oplus yz\oplus zx\}$

b) $C=\{0,\, x\oplus y,\, x\to y,\, xy\leftrightarrow zx\}$

c) $C=\{0, 1,\, x\oplus y\oplus z,\, xy\oplus yz\oplus zx,\, xy\oplus z,\, x\vee y\}$

d) $C=\{xy,\, x\vee y,\, xy\vee z,\ \ x\oplus y,\, x\to y\}$

e) $C=\{xy\oplus z,\, x\oplus y\oplus 1,\, x\bar{y},\ \ \bar{x}\}$

f) $C=\{xy\vee \bar{z},\ \ \bar{x},\, x\to y,\, 0,\, x\oplus zy\}$

g) $C=\{xy,\, xy\vee z,\ \ \bar{x},\, x\oplus y,\, x\to y,\, \bar{x}\}$

h) $C=\{x\oplus y,\, x\leftrightarrow y,\, 0,\, x\oplus y\oplus z,\, xy,\, x\to y\}$

5. Укажите минимальное число функций булева базиса, с помощью которых можно записать функцию $F(a,b,c)=(a\to b)\oplus bc$.

Список литературы

1. Алексеев В.Е. Элементы теории графов. Пособие для студентов заочного отделения. – Н.Новгород, ННГУ, 2002.

2. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Изд. иностр. лит., 1962.

3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977.

4. Москинова, Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учебное пособие / Г.И. Москинова. – М. : Логос, 2004. – 240 с.

5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2001.

6. Оре О. Теория графов. 2-е изд. –М.: Наука. 1980. –336 с.

7. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий: Учеб. пособие. СПб: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

8. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику: учебное пособие / С.В. Яблонский. – 3-е изд. стер. –М. :Высш. шк., 2002. – 384 с.

Прокопенко Наталья Юрьевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
http://www. nngasu.ru, srec@nngasu.ru