А.В. Бесклубная

Теория вероятностей

Учебное пособие

Нижний Новгород
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

А.В. Бесклубная

Теория вероятностей

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2016

ББК 22.1
Б 53
УДК 517.9

Рецензенты:
С. Н. Стребуляев – канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики ИИТММ, ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Г. Л. Барбашова – канд. пед. наук, заведующая кафедрой математики и математического образования ФГБОУ ВО НГПУ им. К. Минина (Мининский университет)

Бесклубная А.В. Теория вероятностей [Текст]: учебн. пос. для вузов / А.В. Бесклубная; Нижегор. гос. архитектур.- строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2016. – 52с.
ISBN 978-5-528-00109-8

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса заочной формы обучения всех направлений по разделу курса математики «Теория вероятностей». Приведены определения основных понятий теории вероятностей, формулировки теорем, соответствующие формулы, примеры с подробными решениями. Данное пособие поможет студентам заочной формы обучения самостоятельно выполнить контрольную работу и подготовиться к зачету.

ББК 22.1

ISBN 978-5-528-00109-8

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения по курсу математики – теории вероятностей.

Цель данного учебного пособия состоит в том, чтобы способствовать лучшему усвоению теории, развитию математического и логического мышления у обучающихся, привитию им навыков решения задач.

Пособие включает следующие разделы: комбинаторика, события и вероятности, случайные величины и их числовые характеристики. По каждому разделу кратко изложен теоретический материал, который иллюстрируется разнообразными примерами и задачами.

В пособии приведены определения основных понятий теории вероятностей, формулировки теорем, соответствующие формулы, варианты контрольных заданий для выполнения расчетно-графической работы.

При создании пособия были использованы некоторые методические приемы и задачи из литературы, список которой указан в конце пособия.

Учебное пособие поможет студентам самостоятельно выполнить контрольные задания и подготовиться к зачету.

Автор будет признателен за любые отзывы, пожелания и критические замечания, которые можно присылать по адресу электронной почты k_vm@nngasu.ru.

1. Элементы комбинаторики

Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Будем переставлять их всеми возможными способами (число элементов остается неизменным, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются ***перестановками*** из n элементов.

Число всех перестановок во множестве из n различных элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Символ $n!$ называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. По определению, считают, что $0! = 1$, $1! = 1$.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3 и 5 так, чтобы ни одна из цифр не повторялась?

Решение: $A = \{1; 3; 5\}$ – множество, состоящее из трех элементов, значит $n = 3$. Число всех перестановок множества A равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Итак, из цифр 1, 3 и 5 так, чтобы ни одна из цифр не повторилась, можно составить шесть трехзначных чисел. Выпишем их:

135 153 315 351 513 531

Ответ: 6.

Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Будем выбирать из них m элементов и переставлять их всеми возможными способами (то есть меняется и состав выбранных элементов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются ***размещениями*** из n элементов по m.

Число всех размещений из n различных элементов по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле $$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3 и 5 так, чтобы ни одна из цифр не повторялась?

Решение. Имеем трехэлементное множество: $A=\{1;3;5\}$, то есть $n=3$. Число всех двузначных чисел, составленных из цифр 1, 3 и 5 так, чтобы ни одна из цифр не повторялась, равно числу размещений из 3 элементов по 2, то есть $A_3^2=\dfrac{3!}{(3-2)!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1}=6$. Выпишем эти числа:

13	15	35
31	51	53

Ответ: 6.

Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Будем выбирать из них m элементов всевозможными способами (то есть меняется состав выбранных элементов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются ***сочетаниями*** из n элементов по m. Число всех сочетаний из n различных элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Пример. На тренировках занимаются 13 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

Решение. Так как при составлении стартовой пятерки тренера интересует только состав пятерки, то достаточно определить число сочетаний из 13 элементов по 5:

$$C_{13}^5=\frac{13!}{5!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=1287.$$

Ответ: 1287.

2. Вероятность события

2.1. Случайные события. Классификация случайных событий

Случайным событием называется какой-либо результат эксперимента, наблюдения или опыта, который при реализации определенного комплекса условий может произойти, а может не произойти.

Примеры событий: попадание в цель при выстреле из орудия (опыт – произведение выстрела, событие – попадание в цель); выпадение двух гербов при трехкратном бросании монеты (опыт – трехкратное бросание монеты, событие – выпадение двух гербов).

Случайные события обозначаются прописными буквами латинского алфавита: $A,\ B,\ C,\ \ldots$ или прописными буквами латинского алфавита с правым нижним индексом: $A_i,\ B_i,\ C_i,\ \ldots$.

Достоверным называется событие, которое обязательно наступает при проведении данного случайного эксперимента.

Примеры достоверных событий:

A – «при подбрасывании игрального кубика выпадает менее 7 очков»;

B – «в очередном чемпионате мира по футболу будет забит хотя бы один гол»;

C – «при подбрасывании трех монет число орлов окажется не равно числу решек».

Невозможным называется событие, которое при проведении данного случайного эксперимента никогда не происходит.

Примеры невозможных событий:

A – «при подбрасывании игрального кубика выпадает 7 очков»;

B – «в очередном чемпионате мира по футболу не будет забито ни одного гола»;

C – «при подбрасывании трех монет число орлов окажется равно числу решек».

Различают совместные и несовместные события.

События называются ***несовместными,*** если наступление одного из них исключает наступление других событий в одном и том же опыте.

События называются ***совместными,*** если наступление одного из них не исключает наступления других событий в одном и том же опыте.

События называются попарно несовместными, если любые два из этих событий несовместны.

Пример. Подбросили два игральных кубика. События A – «выпадение 6 очков на первом кубике» и B – «выпадение 6 очков на втором кубике» являются совместными, так как они могут одновременно произойти в данном опыте.

Два события называются ***противоположными***, если в данном испытании они являются несовместными и одно из них непременно происходит.

Пример. Бросили монету. Рассмотрим событие A – «выпадение герба», тогда событие $\overline{A}$ – «выпадение решки» будет для события A противоположным.

События называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример. Равновозможными являются следующие события:

A - «выпадение орла при бросании монеты» и B - «выпадение решки при бросании монеты»;

A_i - «выпадение i-очков при бросании игрального кубика»;

A - «извлечение карты определенной масти из колоды в 36 карт».

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется ***элементарным*** событием (или элементарным исходом).

Пример. Элементарными являются следующие события:

A - «выпадение 6 очков при бросании игрального кубика»;

B - «извлечение червового туза из колоды карт»;

C - «выпадение орла при бросании монеты».

События A_1, A_2, …, A_n в данном опыте образуют ***полную группу***, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Пример. В ящике находится восемь шаров, из них пять шаров красных, три белых, причем четыре шара пронумерованы. Извлекли один шар. Рассмотрим события:

A **–** «появление красного шара»,

B – «появление белого шара»,

C – «появление шара с номером».

События A**,** B**,** C образуют полную группу совместных событий.

Пример. Бросили игральный кубик. Рассмотрим события:

A – «выпало четное число очков»,

B – «выпало нечетное число очков».

События A и B образуют полную группу несовместных событий (можно сказать также, события A и B образуют полную группу равновозможных несовместных событий).

2.2. Операции над событиями

Суммой конечного числа событий A_1, A_2, …, A_n, называется событие $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Пример. Пусть события A – «идет дождь», B – «идет снег», тогда событие $A+B$ состоит в том, что идет либо дождь, либо снег, либо дождь со снегом.

Произведением конечного числа событий A_1, A_2, …, A_n называется событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$, состоящее в наступлении всех этих событий.

Пример. Пусть событие A_i – «попадание в цель при i-ом выстреле», $i = 1, 2$, тогда событие $A_1 \cdot A_2$ состоит в том, что в цель попали при обоих выстрелах.

2.3. Вероятность случайного события

Пусть имеется полная группа равновозможных несовместных случайных событий (исходов испытания). Исход испытания из такой группы называется ***благоприятствующим*** появлению события A, если появление этого исхода влечет за собой появление события A.

Пример. Бросили игральный кубик. Пусть событие A – «выпало число очков, не меньшее 5». Благоприятствующими исходами для этого события являются выпадение 5 или 6 очков.

Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Вероятность события A обозначается $p(A)$.

Определение, приведенное выше, является классическим определением вероятности, согласно которому

$$p(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример. Найти вероятность того, что наудачу выбранная карта из колоды в 36 карт окажется тузом.

Решение. Опыт – выбор одной карты из колоды в 36 карт.

Событие A – «выбранная карта – туз».

Число n всевозможных элементарных исходов для события A равно 36, так как одна карта может быть любой из 36 имеющихся в колоде.

Число m благоприятствующих элементарных исходов для события A равно 4.

Итак, согласно классическому определению вероятности, искомая вероятность будет равна $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Пример. Найти вероятность того, что две наудачу выбранные карты из колоды в 36 карт окажутся тузами.

Решение. Опыт – выбор двух карт из колоды в 36 карт.

Событие A – «две выбранные карты – тузы».

Число n всевозможных элементарных исходов для события A равно числу способов, которыми можно выбрать две карты из 36 имеющихся, то есть числу сочетаний

$$C_{36}^{2} = \frac{36!}{2!\cdot(36-2)!} = \frac{34!\cdot 35\cdot 36}{2\cdot 34!} = 630.$$

Число m благоприятствующих элементарных исходов для события A равно числу способов, которыми можно выбрать двух тузов из четырех имеющихся, то есть числу сочетаний

$$C_{4}^{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2} = 6.$$

Искомая вероятность будет равна

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2}{C_{36}^2} = \frac{6}{630} = \frac{1}{105}.$$

Ответ: $\frac{1}{105}$.

Пример. Найти вероятность того, что из трех наудачу выбранных карт из колоды в 36 карт окажется одна дама и два туза.

Решение. Опыт – выбор трех карт из колоды в 36 карт.

Событие A – «из трех выбранных карт – одна дама и два туза».

Число n всевозможных элементарных исходов для события A равно числу способов, которыми можно выбрать три карты из 36 имеющихся, то есть числу сочетаний

$$C_{36}^{3}=\frac{36!}{3!\cdot(36-3)!}=\frac{33!\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 33!}=7140\,.$$

Число m благоприятствующих элементарных исходов для события A равно числу способов, которыми можно выбрать одну даму из четырех имеющихся и двух тузов из четырех имеющихся, то есть произведению числа сочетаний

$$C_4^1\cdot C_4^2=\frac{4!}{1!\cdot(4-1)!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}=\frac{3!\cdot 4}{3!}\cdot\frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2}=24\,.$$

Искомая вероятность будет равна

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_4^1\cdot C_4^2}{C_{36}^3}=\frac{24}{7140}=0{,}003.$$

Ответ: $0{,}003$.

Из определения вероятности случайного события, поскольку $n>0$, $m\geq 0$, $m\leq n$, следует $0\leq p(A)=\dfrac{m}{n}\leq 1$. Также имеют место два утверждения: вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0.

3. Основные теоремы теории вероятностей

3.1. Теоремы сложения

3.1.1. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B).$$

Пример. В группе студентов 15% имеют синие глаза, 35% – темные волосы и 10% имеют и синие глаза, и темные волосы. Найти вероятность того, что у наудачу вызванного к доске студента есть хотя бы один из этих признаков.

Решение. Опыт – вызов к доске студента. Введем события:

A – «у студента синие глаза»,

B – «у студента темные волосы»,

C – « у студента есть хотя бы один из этих признаков».

Тогда $C = A + B$, причем события A и B – совместны. По условию задачи имеем:

$$p(A) = \frac{15\%}{100\%} = 0{,}15, \quad p(B) = \frac{35\%}{100\%} = 0{,}35, \quad p(A \cdot B) = \frac{10\%}{100\%} = 0{,}1.$$

Используя теорему сложения для совместных событий, получаем

$$p(C) = p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B) = 0{,}15 + 0{,}35 - 0{,}1 = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4.

3.1.2. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Вероятность появления хотя бы одного из нескольких попарно несовместных событий A_1, A_2, …, A_n равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n).$$

Пример. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлены 10 выигрышей по 1000 руб, 50 – по 500 руб, 100 – по 200 руб, и 1000 – по 100 руб. Некто купил один билет. Какова вероятность того, что он выиграет не менее двухсот рублей?

Решение. Опыт – покупка одного билета. Введем события:

A – «выигрыш не менее 200 рублей»,

A_1 – «выигрыш равен 200 рублям»,

A_2 – «выигрыш равен 500 рублям»,

A_3 – «выигрыш равен 1000 рублям».

$$p(A_1)=\frac{100}{10000}=0{,}01;\ p(A_2)=\frac{50}{10000}=0{,}005;\ p(A_3)=\frac{10}{10000}=0{,}001.$$

Поскольку куплен только один билет, то $A=A_1+A_2+A_3$, где события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Используя теорему сложения для несовместных событий, получаем:

$$p(A)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=0{,}01+0{,}005+0{,}001=0{,}016.$$

Ответ: $0{,}016$.

Сумма вероятностей попарно несовместных событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)=1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A)+p(\overline{A})=1.$$

Пример. Найти вероятность того, что из четырех, наудачу выбранных карт из колоды в 36 карт, хотя бы один туз.

Решение. Опыт – выбор четырех карт из колоды в 36 карт.

Введем события:

A – «из четырех наудачу выбранных карт хотя бы один туз»,

$\overline{A}$ – «все четыре наудачу выбранные карты – любые, кроме тузов».

Искомая вероятность будет равна

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{C_{32}^4}{C_{36}^4}=1-\frac{7192}{11781}\approx 0{,}61.$$

Ответ: $0{,}61$.

3.2. Теоремы умножения

3.2.1. Условные вероятности

Событие A называется зависимым от события B, если вероятность появления события A зависит от того, произошло или не произошло событие B.

Вероятность того, что произошло событие A при условии, что произошло событие B, называют ***условной вероятностью*** события A при условии B и обозначают $p(A \mid B)$.

Пример. Из ящика, в котором находятся 5 белых и 3 черных шара, наугад вынимают последовательно без возвращения один за другим два шара. Рассмотрим события:

A_i – «появление белого шара при i-*том* вынимании», $i = 1, 2$. Понятно, что $p(A_1) = \dfrac{5}{8}$. Если событие A_1 произошло, то среди оставшихся 7 шаров только 4 белых, поэтому вероятность того, что второй вынутый шар белый при условии, что первый вынутый шар тоже белый, равна $p(A_2 \mid A_1) = \dfrac{4}{7}$.

Событие A называется независимым от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B:

$$p(A \mid B) = p(A).$$

Это, конечно, формальное определение независимых событий. Но независимость можно определять и интуитивно, например, нетрудно сообразить, что результаты неоднократного бросания монеты, результаты выстрелов по некоторой цели – независимые события.

3.2.2. Теорема умножения зависимых событий

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B\,|\,A)=p(B)\cdot p(A\,|\,B).$$

Вероятность произведения зависимых случайных событий A_1, A_2, …, A_n равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили.

$$p(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2\,|\,A_1)\cdot\ldots\cdot p(A_n\,|\,A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

Далее приведем примеры, в которых применяются теорема умножения и теорема сложения вероятностей одновременно.

Пример. Студент выучил 8 вопросов из 10. Найти вероятность того, что он ответит только на один вопрос из двух ему заданных.

Решение. Опыт – ответ на вопросы. Введем события:

A_i – «студент ответит на i – ый вопрос», $i=1,2$;

$\overline{A}_i$ – «студент не ответит на i – ый вопрос», $i=1,2$;

A –«студент ответит только на один вопрос из двух ему заданных».

Тогда событие A произойдет когда, произойдет событие $\overline{A}_1\cdot A_2+A_1\cdot\overline{A}_2$, то есть $A=\overline{A}_1\cdot A_2+A_1\cdot\overline{A}_2$.

Так как события $\overline{A}_1\cdot A_2$ и $A_1\cdot\overline{A}_2$ несовместны, то по теореме сложения для несовместных событий имеем:

$$p(A)=p(\overline{A}_1\cdot A_2+A_1\cdot\overline{A}_2)=p(\overline{A}_1\cdot A_2)+p(A_1\cdot\overline{A}_2).$$

Так как события A_1, A_2, $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ попарно зависимые, то по теореме умножения для зависимых событий имеем:

$$p(A)=p(\overline{A}_1\cdot A_2)+p(A_1\cdot\overline{A}_2)=$$

$$= p\left(\overline{A}_1\right)\cdot p\left(A_2\middle|\overline{A}_1\right) + p\left(A_1\right)\cdot p\left(\overline{A}_2\middle|A_1\right) =$$

$$= \frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9} + \frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{16}{45}.$$

Ответ: $\frac{16}{45}$.

3.2.3. Теорема умножения независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B).$$

Пример. Брошены два игральных кубика. Какова вероятность того, что на первом кубике появится четное число очков, а на втором – шесть очков?

Решение. Опыт – бросание двух игральных кубиков. Введем события:

A – «появление четного числа очков при бросании первого кубика»,

B – «появление шести очков при бросании второго кубика».

Требуется найти $p(A\cdot B)$. Так как события A и B совместны и независимы, то $p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B)$. Но $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{6}$, следовательно, $p(A\cdot B) = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$**.**

Чтобы получить формулу для произведения событий больше двух, придется ввести понятие ***событий независимых в совокупности.*** Это более сильное требование, предъявляемое к событиям, чем попарная независимость.

События называются ***независимыми в совокупности,*** если они попарно независимы и независимы любые комбинации этих событий относительно умножения.

Вероятность произведения независимых случайных событий A_1, A_2, …, A_n равна произведению вероятностей этих событий, то есть

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n).$$

Пример. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна $0{,}3$, вторым – $0{,}4$, третьим – $0{,}5$. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель при одном выстреле.

Решение. Опыт – выстрел по цели тремя стрелками. Введем обозначение событий:

A_i – «i – ый стрелок попадет в цель», $i = 1, 2, 3$;

A – «три стрелка одновременно попадут в цель при одном выстреле».

Событие A произойдет, если произойдет событие $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По условию задачи $p(A_1) = 0{,}3$, $p(A_2) = 0{,}4$, $p(A_3) = 0{,}5$. Так как события A_1, A_2, A_3 независимые, то искомая вероятность будет равна

$$p(A) = p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}06.$$

Ответ: $0{,}06$.

Рассмотрим еще один пример.

Пример. Охотник, имеющий 3 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. С какой вероятностью охотник израсходует все патроны, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6?

Решение. Опыт – стрельба по дичи. Введем обозначение событий:

A_i – «попадание при i – ом выстреле», $i = 1, 2, 3$;

$\overline{A}_i$ – «промах при i – ом выстреле», $i = 1, 2, 3$;

A – «охотник израсходует все патроны».

По условию $p(A_i) = 0,6$, $i = 1, 2, 3$. Тогда:

$p(\overline{A_i}) = 1 - p(A_i) = 1 - 0,6 = 0,4$, $i = 1, 2, 3$.

Событие A произойдет, если произойдет событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, то есть $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

События $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$ и $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ несовместны, поэтому по теореме сложения для несовместных событий

$$p(A) = p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}).$$

События A_i и A_j, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ попарно независимые, поэтому по теореме умножения для независимых событий искомая вероятность будет равна:

$$p(A) = p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) =$$
$$= p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(A_3) + p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,096 + 0,064 = 0,16.$$

Ответ: $0,16$.

3.3. Формула полной вероятности и формулы Байеса

3.3.1. Формула полной вероятности

Пусть требуется найти вероятность события A, которое происходит вместе с одним из несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу попарно-несовместных событий, называемых ***гипотезами***. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле, которая называется формулой ***полной вероятности***

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A \mid H_1) + p(H_2) \cdot p(A \mid H_2) + \ldots + p(H_n) \cdot p(A \mid H_n)$$

или

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p(A\,|\,H_i), \qquad \text{где } \sum_{i=1}^{n} p(H_i)=1.$$

Пример. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошистов и 10 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки; хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки; слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Решение. Опыт – сдача студентом экзамена. Введем событие:

A – «студент получит хорошую или отличную оценку».

Рассмотрим гипотезы:

H_1 – «приглашен студент – отличник»,

H_2 – «приглашен студент – хорошист»,

H_3 – «приглашен студент – троечник».

$H_1,\ H_2,\ H_3$ – попарно-несовместные события.

По условию задачи:

$$p(H_1)=\frac{5}{21},\ p(H_2)=\frac{10}{21},\ p(H_3)=\frac{6}{21};$$

$$p(A\,|\,H_1)=1,\ p(A\,|\,H_2)=1,\ p(A\,|\,H_3)=\frac{1}{3}.$$

Тогда по формуле полной вероятности находим:

$$p(A)=p(H_1)\cdot p(A\,|\,H_1)+p(H_2)\cdot p(A\,|\,H_2)+p(H_3)\cdot p(A\,|\,H_3)=$$

$$=\frac{5}{21}\cdot 1+\frac{10}{21}\cdot 1+\frac{6}{21}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{21}+\frac{10}{21}+\frac{2}{21}=\frac{17}{21}.$$

Ответ: $\frac{17}{21}$**.**

3.3.2. Формулы Байеса

Пусть событие A происходит вместе с одним из несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу попарно-несовместных событий (гипотез). Произведен опыт, в результате которого появилось событие A. Условные вероятности гипотез H_1, H_2, ..., H_n относительно события A определяются формулами, которые называются ***формулами Байеса***:

$$p(H_j \mid A) = \frac{p(H_j) \cdot p(A \mid H_j)}{p(A)},$$

где $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A \mid H_i)$.

Пример. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в 4 раза превышает объем продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе 0,05,на втором – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Опыт – выбор детали. Введем событие

A – «наудачу взятая деталь оказалась бракованной».

Рассмотрим гипотезы:

H_1 – «взятая деталь изготовлена на первом заводе»;

H_2 – «взятая деталь изготовлена на втором заводе».

H_1 и H_2 – несовместные события.

По условию задачи известно, что объем продукции первого завода в 4 раза превышает объем продукции второго завода, следовательно:

$$p(H_1) = \frac{4}{5} = 0{,}8, \quad p(H_2) = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$p(A \mid H_1) = 0{,}05, \; p(A \mid H_2) = 0{,}01.$$

Сначала находим вероятность события A по формуле полной вероятности

$$p(A) = p(H_1)\cdot p(A\,|\,H_1) + p(H_2)\cdot p(A\,|\,H_2) =$$
$$= 0{,}8\cdot 0{,}05 + 0{,}2\cdot 0{,}01 = 0{,}042.$$

Затем по формуле Байеса находим:

$$p(H_1\,|\,A) = \frac{p(H_1)\cdot p(A\,|\,H_1)}{p(A)} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}05}{0{,}042} \approx 0{,}952.$$

Ответ: $0{,}952$.

4. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A появится ровно m раз безразлично в какой последовательности (и не появится $n - m$ – раз), обозначим через $P_n(m)$, тогда

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Эта формула называется формулой Бернулли.

Пример. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность двукратного появления герба?

Решение. Событие A – «двукратное выпадение герба при десятикратном подбрасывании монеты». По условию задачи $n = 10$ – число независимых испытаний (подбрасываний монеты), в каждом из которых вероятность появления герба одинакова и равна $p = \dfrac{1}{2}$, а вероятность выпадения решки $q = \frac{1}{2}$. Применяя формулу Бернулли, учитывая, что $m = 2$, находим искомую вероятность:

$$p(A) = P_{10}(2) = C_{10}^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024} \approx 0{,}044.$$

Ответ: $0{,}044$.

Пример. Число годных деталей в ящике относится к числу бракованных как $2:3$. Найти вероятность того, что из четырех, наудачу выбранных деталей, хотя бы одна годная.

Решение. Событие A «из четырех, наудачу выбранных деталей, хотя бы одна годная». По условию задачи $n = 4$ – число независимых испытаний (выбор деталей из ящика), в каждом из которых вероятность того, что деталь годная, одинакова и равна

$$p = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} = 0{,}4;$$

вероятность того, что деталь бракованная, равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Тогда $p(A) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4)$, где каждое из слагаемых находится по формуле Бернулли. Однако удобнее найти вероятность противоположного события $\overline{A}$ – «из четырех, наудачу выбранных деталей, нет ни одной годной». Применяя формулу Бернулли, находим:

$$p(\overline{A}) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^4 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}1296,$$

тогда

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0{,}1296 = 0{,}8704.$$

Ответ: $0{,}8704$.

5. Случайные величины

Случайной величиной называют величину, принимающую в результате испытаний те или иные возможные значения, наперед неизвестные и зависящие от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т.д. или заглавными буквами латинского алфавита с правым нижним индексом: X_i, $i \in N$.

Значения, принимаемые случайной величиной, называются ее ***возможными значениями*** и обозначаются соответствующими маленькими буквами латинского алфавита с правым нижним индексом, то есть, если X – случайная величина, то ее возможные значения – x_i, $i \in N$.

Понятие случайного события тесно связано с понятием случайной величины. Принятие некоторой случайной величиной X конкретного возможного значения m, то есть $X = m$, есть случайное событие, характеризуемое вероятностью $p_i = P(X = m)$.

На практике различают два типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

5.1. Дискретные случайные величины

5.1.1. Способы задания дискретных случайных величин

Дискретной называют случайную величину, число возможных значений которой является конечным или счетным, то есть таким, что возможные значения можно пронумеровать.

Примеры дискретных случайных величин:

1) X – число выпадений «герба» при двух бросаниях монеты; возможные значения дискретной случайной величины X: $0, 1, 2$.

2) Y – число новорожденных за сутки в некотором роддоме; возможные значения дискретной случайной величины Y: $0,1,2,\ldots,n$.

Каждому значению x_i дискретной случайной величины X отвечает определенная вероятность p_i. Соответствие, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения*** дискретной случайной величины.

Закон распределения можно задать таблично (в виде ряда распределения) либо графически (в виде многоугольника или полигона распределения).

При табличном задании дискретной случайной величины X первая строка таблицы содержит ее возможные значения x_i, расположенные в возрастающем порядке, а вторая строка — соответствующие им вероятности p_i, причем $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Для того чтобы закон распределения дискретной случайной величины изобразить графически, в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие им вероятности p_i (см. рис.1); отмеченные точки $(x_i; p_i)$, $i=\overline{1,n}$ соединяют отрезками прямых. Построенная ломаная называется ***многоугольником или полигоном распределения.***

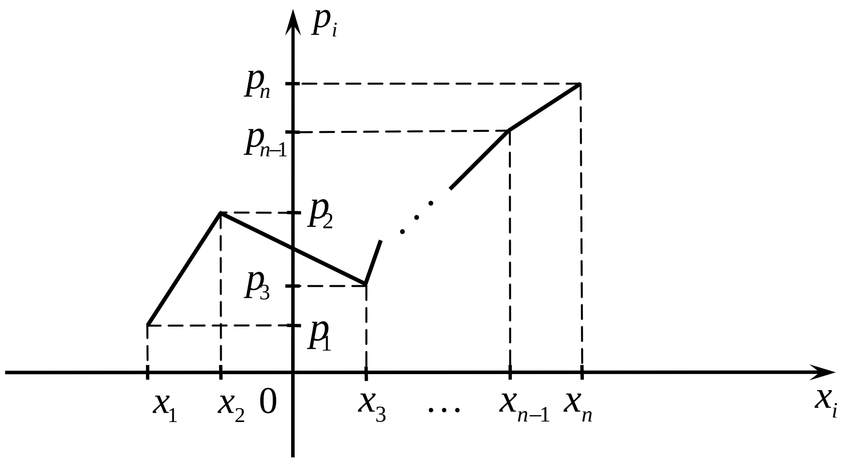

Рис. 1

Пример. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания по дичи при первом выстреле равна 0,8 и уменьшается при каждом следующем выстреле на 0,1. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, израсходованных охотником, и изобразить его графически.

Решение. Введем обозначение событий:

A_i – «попадание по дичи при i-ом выстреле», $i=\overline{1,4}$;

$\overline{A_i}$ – «промах по дичи при i-ом выстреле», $i=\overline{1,4}$.

По условию задачи:

$p(A_1)=0,8$; $p(A_2)=0,8-0,1=0,7$;

$p(A_3)=0,7-0,1=0,6$; $p(A_4)=0,6-0,1=0,5$.

Тогда:

$p(\overline{A_1})=1-p(A_1)=1-0,8=0,2$;

$p(\overline{A_2})=1-p(A_2)=1-0,7=0,3$;

$p(\overline{A_3})=1-p(A_3)=1-0,6=0,4$;

$p(\overline{A_4})=1-p(A_4)=1-0,5=0,5$.

Дискретная случайная величина X принимает следующие возможные значения:

$x_1 = 1$ – охотник израсходовал один патрон, то есть попал по дичи при первом выстреле – произошло событие A_1;

$x_2 = 2$ – охотник израсходовал два патрона, то есть промахнулся по дичи при первом выстреле и попал при втором выстреле – произошло событие $\overline{A}_1 \cdot A_2$;

$x_3 = 3$ – охотник израсходовал три патрона, то есть промахнулся по дичи при первом и втором выстрелах и попал при третьем выстреле – произошло событие $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$;

$x_4 = 4$ – охотник израсходовал четыре патрона, то есть промахнулся по дичи при первом, втором и третьем выстрелах и попал при четвертом выстреле или промахнулся по дичи при всех четырех выстрелах – произошло событие $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4$.

Применяя теорему умножения независимых событий, находим:

$$p_1 = P(X = 1) = p(A_1) = 0{,}8;$$

$$p_2 = P(X = 2) = p(\overline{A}_1 \cdot A_2) = p(\overline{A}_1) \cdot p(A_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14;$$

$$p_3 = P(X = 3) = p(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) = p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(A_3) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}036;$$

$$p_4 = P(X = 4) = p(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4) =$$
$$= p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(\overline{A}_3) \cdot p(A_4) + p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(\overline{A}_3) \cdot p(\overline{A}_4) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}024.$$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}8 + 0{,}14 + 0{,}036 + 0{,}024 = 1 - \text{верно.}$$

Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,8	0,14	0,036	0,024

Построим многоугольник распределения. (См. рис.2)

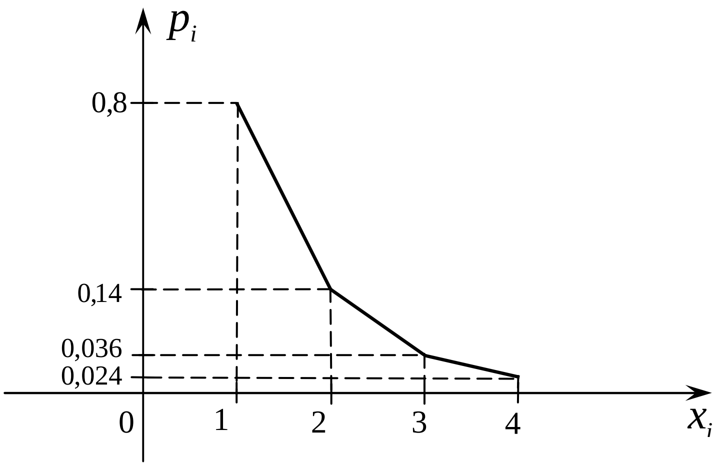

Рис. 2

5.1.2. Биномиальный закон распределения

Предположим, что в одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться событие A с вероятностью p или противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. В каждой серии из n испытаний событие A может либо не появиться (появиться 0 раз), либо появиться 1 раз, 2 раза, ... , n раз. Введем в рассмотрение дискретную случайную величину X – число появлений события A при n испытаниях, которая может принимать следующие значения 0, 1, 2, ... , n. Вероятность p_i того, что случайная величина X принимает значение $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, вычисляется по формуле Бернулли:

$$p_i = P(X = m) = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называется ***биномиальным.*** Постоянные n и p называются ***параметрами биномиального распределения***.

Пример. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,8. Производятся три выстрела. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель.

Решение. Дискретная случайная величина X – число попаданий в цель – распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ – число независимых испытаний (выстрелов) и $p = 0{,}8$ – вероятность попадания в цель при одном выстреле и может принимать значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями, вычисленными по формуле Бернулли:

$$p_1 = P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot 1 \cdot 0{,}008 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}008 = 0{,}008;$$

$$p_2 = P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 =$$

$$= 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 = 0{,}096;$$

$$p_3 = P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384;$$

$$p_4 = P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot 0{,}512 \cdot 1 =$$

$$= 1 \cdot 0{,}512 \cdot 1 = 0{,}512.$$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1 - \text{верно.}$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

5.1.3. Математические операции над дискретными случайными величинами

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Рассмотрим независимые дискретные случайные величины X и Y, заданные законами распределения, соответственно:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

и

y_j	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p_j	p'_1	p'_2	$\dots$	p'_m

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{m} p'_i = 1.$

При выполнении математических операций над случайными величинами X и Y получается новая случайная величина с соответствующими законами распределения:

1. Произведение случайной величины X на постоянную величину c: cX

cx_i	cx_1	cx_2	$\dots$	cx_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

2. Квадрат случайной величины X : X^2

x_i^2	x_1^2	x_2^2	$\dots$	x_n^2
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

3. Сумма случайных величин X и Y: $Z = X + Y$

z_k	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$\dots$	$x_n + y_m$
p_k	$p_1 \cdot p_1'$	$p_1 \cdot p_2'$	$\dots$	$p_n \cdot p_m'$

, где $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i \cdot p_j' = 1.$

4. Разность случайных величин X и Y: $Z = X - Y$

z_k	$x_1 - y_1$	$x_2 - y_1$	$\dots$	$x_n - y_m$
p_k	$p_1 \cdot p_1'$	$p_2 \cdot p_1'$	$\dots$	$p_n \cdot p_m'$

, где $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i \cdot p_j' = 1.$

5. Произведение случайных величин X и Y: $Z = X \cdot Y$

z_k	$x_1 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_1$	$\dots$	$x_n \cdot y_m$
p_k	$p_1 \cdot p_1'$	$p_2 \cdot p_1'$	$\dots$	$p_n \cdot p_m'$

, где $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i \cdot p_j' = 1.$

Пример. Случайные величины X и Y заданы законами распределения:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

и

y_j	1	2
p_j	0,3	0,7

Составить закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Для удобства решение оформим в виде таблицы:

Y \ X		-1	0	1
		0,2	0,5	0,3
1	0,3	$1+(-1)=0$ $0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06$	$1+0=1$ $0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}15$	$1+1=2$ $0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09$
2	0,7	$2+(-1)=1$ $0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14$	$2+0=2$ $0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}35$	$2+1=3$ $0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21$

В клетках таблицы перечислены всевозможные значения случайной величины Z с соответствующими вероятностями. Объединив одинаковые значения и сложив их соответствующие вероятности, получаем закон распределения искомой случайной величины Z:

z_k	0	1	2	3
p_k	0,06	0,29	0,44	0,21

$$\sum_{k=1}^{4} p_k = 1.$$

5.1.4. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение.

Математическое ожидание определяет положение центра распределения и обозначается $M(X)$.

Для дискретной случайной величины X математическое ожидание равно сумме произведений ее значений x_i на соответствующие вероятности p_i этих значений, то есть

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-1	0	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Найти $M(x)$.

Решение. $M(x) = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$.

Ответ: $M(x) = 0{,}1$.

Рассмотрим ***свойства математического ожидания,*** которые используются при решении задач:

1. $M(C) = C$, $C = const$.

2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, $C = const$.

3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

4. Если X и Y независимые случайные величины, то $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Пример. $M(X) = -1$, $M(Y) = 2$. Найти $M(2X - 3Y)$.

Решение. Пользуясь свойствами математического ожидания, находим

$M(2X - 3Y) = M(2X) - M(3Y) = 2 \cdot M(X) - 3 \cdot M(Y) =$

$= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -8$.

Ответ: $M(2X - 3Y) = -8$.

Для дискретной случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, математическое ожидание можно вычислить по формуле:

$$M(X) = n \cdot p.$$

Пример. Найти среднее число выпадений «герба» при шести подбрасываниях монеты.

Решение. Проводится $n = 6$ независимых испытаний (подбрасываний монеты), в каждом из которых вероятность выпадения герба равна $p = \frac{1}{2}$. Тогда математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа выпадений герба – равно: $M(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Разность $X - M(X)$ называется ***отклонением случайной величины*** X от ее математического ожидания $M(X)$.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия определяет степень «разброса» значений случайной величины и обозначается $D(X)$. Согласно определению дисперсии:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для дискретной случайной величины X дисперсия $D(X)$ вычисляется по формуле:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i .$$

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-1	0	2
p_i	0,3	0,6	0,1

Найти $D(X)$.

Решение. Сначала находим математическое ожидание случайной величины X: $M(X) = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 = -0{,}1$. Тогда дисперсия будет равна:

$D(X)=(-1-(-0{,}1))^2\cdot 0{,}3+(0-(-0{,}1))^2\cdot 0{,}6+(2-(-0{,}1))^2\cdot 0{,}1=$
$=0{,}243+0{,}006+0{,}441=0{,}69$.

Ответ: $D(X)=0{,}69$.

Из определения и свойств математического ожидания следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна, то есть $D(X)\geq 0$.

Рассмотрим ***свойства дисперсии:***

1. $D(C)=0$, $C=const$.

2. $D(CX)=C^2\cdot D(X)$, $C=const$.

3. Если X и Y независимые случайные величины, то

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ и

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Пример. $D(X)=2$. Найти $D(2-3X)$.

Решение. Пользуясь свойствами дисперсии, находим $D(2-3X)=D(2)+D(3X)=0+3^2\cdot D(X)=9\cdot 2=18$.

Ответ: $D(2-3X)=18$.

Для дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, дисперсию можно вычислить по формуле:

$$D(X)=n\cdot p\cdot q.$$

Пример. Дискретная случайная величина X – число выпадений «герба» при четырех бросаниях монеты распределена по биномиальному закону. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение. По условию $n=4$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. Тогда

$D(X)=npq=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$.

Ответ: 1.

Средним квадратическим отклонением, или стандартным отклонением, случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии и обозначается $\sigma(X)$, то есть

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. $D(X)=2$. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z=3-4X$.

Решение. Используя свойства дисперсии, находим

$D(3-4X)=D(3)+D(4X)=0+16D(X)=16\cdot 2=32$. Тогда по определению среднего квадратического отклонения:

$\sigma(3-4X)=\sqrt{D(3-4X)}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$**.**

5.2. Непрерывная случайная величина

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если все ее возможные значения целиком заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой оси.

Примеры непрерывных случайных величин:

1) размер, вес деталей массового производства;

2) рост и возраст человека;

3) время безотказной работы устройства до момента отказа;

4) ошибки измерительных приборов.

Каждому интервалу $(\alpha;\beta)$ из области значений непрерывной случайной величины X отвечает определенная вероятность $P(\alpha<X<\beta)$ того, что значение, принятое этой случайной величиной, попадет в этот интервал.

5.2.1. Способы задания непрерывных случайных величин

Непрерывную случайную величину можно задать аналитически, т.е. с помощью функции: либо с помощью функции распределения, либо с помощью функции плотности распределения вероятностей.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для каждого значения аргумента x численно равна вероятности того, что при испытании случайная величина X примет значение, меньше чем x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1. Все значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$, т.е. $0 \le F(x) \le 1$. Это следует непосредственно из определения функции распределения.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha; \beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Заметим также, что для непрерывной случайной величины X выполняются равенства:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta).$$

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется первая производная от ее функции распределения $F(x)$, то есть

$$f(x)=F'(x).$$

Свойства функции плотности распределения вероятностей:

1. $f(x)$ – неотрицательная функция, т. к. $f(x)\geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha;\beta]$, то $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=1$.

Отметим связь между функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения вероятностей $f(x)$:

1. Если известна $f(x)$, то

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

2. Если известна $F(x)$, то $f(x)=F'(x)$.

5.2.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины X, все возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, вычисляются, соответственно, по формулам:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2(x).$$

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу $(\alpha;\beta)$, то формулы принимают вид:

$$M(X)=\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)dx,$$

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx - M^2(x).$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется так же, как и для дискретной случайной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. По заданной функции распределения $F(x)$ найти функцию плотности $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\left(X>\frac{5\pi}{3}\right)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le {}^{3\pi}\!/_{2} \\ \cos x, {}^{3\pi}\!/_{2} < x \le 2\pi \\ 1, x > 2\pi. \end{cases}$$

Решение. Функцию плотности $f(x)$ находим по определению $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x \le {}^{3\pi}\!/_{2} \\ \sin x, {}^{3\pi}\!/_{2} < x \le 2\pi \\ 0, x > 2\pi. \end{cases}$$

Строим графики функций $F(x)$ (рис. 3) и $f(x)$ (рис. 4).

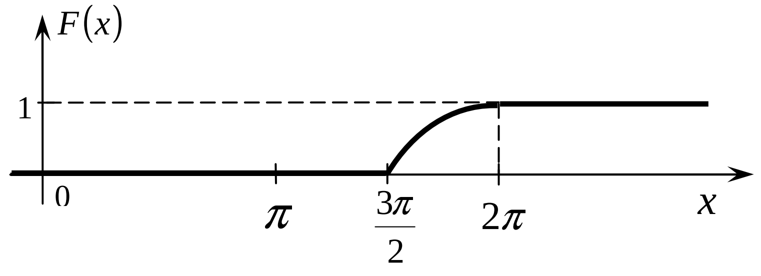

Рис. 3

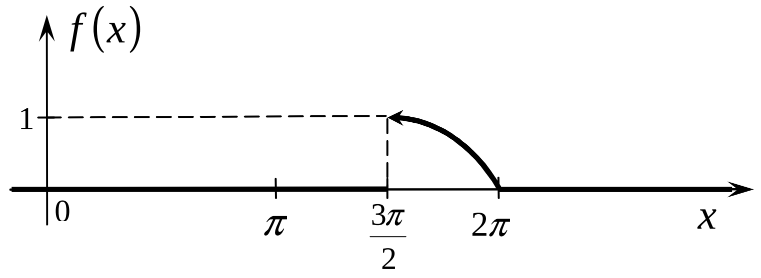

Рис. 4

Находим математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=\int_{3\pi/2}^{2\pi} x\cdot(-\sin x)\,dx$$

Указанный интеграл вычисляем с помощью формулы интегрирования по частям: $\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$. В нашем случае:

$$\left| \begin{array}{c} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = -\sin x\cdot dx \Rightarrow v = \cos x \end{array} \right|$$

$$M(X)= x\cos x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\cdot dx = x\cos x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - \sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} =$$

$$= 2\pi - 0 - (0+1) = 2\pi - 1.$$

Находим дисперсию случайной величины X:

$$D(X)=\int_{3\pi/2}^{2\pi} x^2\cdot(-\sin x)dx-(2\pi-1)^2 =$$

$$\left| \begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = -\sin xdx \Rightarrow v = \cos x \end{array} \right|$$

$$= x^2 \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - 2\int_{3\pi/2}^{2\pi} x\cos xdx - (2\pi - 1)^2 =$$

$$\left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right|$$

$$= 4\pi^2 - 0 - 2\left(x\sin x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin xdx \right) - (2\pi - 1)^2 =$$

$$= 4\pi^2 - 2\left(0 + \frac{3\pi}{2} + \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right) - \left(4\pi^2 - 4\pi + 1\right) =$$

$$= 4\pi^2 - 2\left(\frac{3\pi}{2} + 1 - 0 \right) - 4\pi^2 + 4\pi - 1 = -3\pi - 2 + 4\pi - 1 = \pi - 3.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\pi - 3}.$$

Вычисляем:

$$P\left(X > \frac{5\pi}{3} \right) = P\left(\frac{5\pi}{3} < X < +\infty \right) = F(+\infty) - F\left(\frac{5\pi}{3} \right) =$$

$$= 1 - \cos\frac{5\pi}{3} = 1 - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: $M(X) = 2\pi - 1$**;** $D(X) = \pi - 3$**;** $\sigma(x) = \sqrt{\pi - 3}$; $P\left(X > \frac{5\pi}{3} \right) = 0{,}5$.

Контрольные задания

Задание 1

1.1. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях кратна двум.

1.2. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях кратна трем.

1.3. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях кратна четырем.

1.4. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях кратна пяти.

1.5. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях кратна шести.

1.6. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях равна пяти, а их разность трем.

1.7. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях равна шести, а их разность четырем.

1.8. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях равна семи, а их разность пяти.

1.9. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях равна четырем, а их разность двум.

1.10. Найти вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика сумма очков на выпавших гранях равна трем, а их разность одному.

Задание 2

2.1. В урне 15 белых, 6 черных и 3 красных шара. Найти вероятность того, что из семи, наудачу выбранных шаров, хотя бы два белых шара.

2.2. В урне 15 белых, 6 черных и 3 красных шара. Найти вероятность того, что из восьми, наудачу выбранных шаров, хотя бы три белых шара.

2.3. В урне 15 белых, 6 черных и 3 красных шара. Найти вероятность того, что из шести, наудачу выбранных шаров, хотя бы два белых шара.

2.4. В урне 15 белых, 6 черных и 3 красных шара. Найти вероятность того, что из пяти, наудачу выбранных шаров, хотя бы три белых шара.

2.5. В урне 15 белых, 6 черных и 3 красных шара. Найти вероятность того, что из четырех, наудачу выбранных шаров, хотя бы три белых шара.

2.6. В ящике среди 20 деталей пять бракованные. Найти вероятность того, что среди трех, наудачу выбранных деталей, хотя бы две бракованные.

2.7. В ящике среди 20 деталей пять бракованные. Найти вероятность того, что среди четырех, наудачу выбранных деталей, хотя бы две бракованные.

2.8. В ящике среди 20 деталей пять бракованные. Найти вероятность того, что среди четырех, наудачу выбранных деталей, хотя бы три бракованные.

2.9. В ящике среди 20 деталей пять бракованные. Найти вероятность того, что среди трех, наудачу выбранных деталей, хотя бы одна бракованная.

2.10. В ящике среди 20 деталей пять бракованные. Найти вероятность того, что среди четырех, наудачу выбранных деталей, хотя бы одна бракованная.

Задание 3

3.1. Студент выучил 12 вопросов из 15. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.2. Студент выучил 13 вопросов из 16. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.3. Студент выучил 14 вопросов из 17. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.4. Студент выучил 15 вопросов из 20. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.5. Студент выучил 16 вопросов из 20. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.6. Студент выучил 18 вопросов из 20. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.7. Студент выучил 20 вопросов из 24. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.8. Студент выучил 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.9. Студент выучил 25 вопросов из 30. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

3.10. Студент выучил 28 вопросов из 33. Найти вероятность того, что он ответит на три заданных ему вопроса.

Задание 4

4.1. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего – 3000 деталей.

4.2. На двух автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,9, а на втором – 0,81. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется высшего качества.

4.3. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 95 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных вторым заводом, удовлетворяют стандарту 85. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампочка будет удовлетворять стандарту.

4.4. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

4.5. В ящике содержатся одинаковые изделия, изготовленные двумя автоматами: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные – вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго – 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным.

4.6. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30% изделий из общего объема их производства, на второй – 25%, на третьей – остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 97%, 98%, 96%. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

4.7. Партия электрических лампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% – вторым, на 40% – третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: 0,03, 0,02, 0,01. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

4.8. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,2% брака, второй –0,3% и третий –0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго -1000 и с третьего – 1500 деталей.

4.9. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в два раза больше, чем второго, а третьего в три раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованной?

4.10. На фабрике изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 45% изделий, на второй – 35%, на третьей – остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 98%, 96%, 94%. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Задание 5

5.1. Всхожесть семян данного растения равна 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

5.2. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,6. Предполагая, что неполадки в станках независимы, найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребует какой-либо станок из четырех, обслуживаемых им.

5.3. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а имеется их десять. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

5.4. Монета подброшена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) от 4 до 6 раз; б) хотя бы один раз.

5.5. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправятся не менее 4?

5.6. Найти вероятность того, что при 10 подбрасываниях монеты герб выпадет 5 раз.

5.7. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадает ровно 3 раза?

5.8. Найдите вероятность того, что среди взятых наугад пяти деталей две стандартные, если вероятность детали быть стандартной равна 0,9.

5.9. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,25. Найдите вероятность того, что из шести покупателей, по крайней мере, двум необходима обувь 41-го размера.

5.10. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправятся 4?

Задание 6

6.1. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	0	2
p_i	0,7	0,3

и

y_j	1	2	3
p_j	0,2	0,5	0,3

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = 2X - 3Y$.

6.2. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	-1	0
p_i	0,6	0,4

и

y_j	1	2
p_j	0,5	0,5

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = 3X - Y$.

6.3. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	-2	0	1
p_i	0,7	0,1	0,2

и

y_j	1	2	3
p_j	0,1	0,4	0,5

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = X + 2Y$.

6.4. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

и

y_j	-1	0
p_j	0,7	0,3

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = X - Y$.

6.5. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

и

y_j	-2	-2	0
p_j	0,5	0,1	0,4

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = 4X - Y$.

6.6. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	-2	0
p_i	0,7	0,3

и

y_i	1	2	3
p_i	0,2	0,2	0,6

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = X - 3Y$.

6.7. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	1	2
p_i	0,5	0,5

и

y_j	1	2	3	4
p_j	0,3	0,3	0,1	0,3

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = 5X - Y$.

6.8. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	-1	0	2
p_i	0,4	0,2	0,4

и

y_j	1	3
p_j	0,4	0,6

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = 2X - 3Y$.

6.9. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

и

y_j	1	2
p_j	0,4	0,6

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = X - Y$.

6.10. Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y:

x_i	1	2	3
p_i	0,4	0,3	0,3

и

y_j	-1	0	2
p_j	0,4	0,3	0,3

Найти $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$, где $Z = 2X - Y$.

Задание 7

По заданной функции распределения $F(x)$ найти функцию плотности $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7. 1. $F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{8} \;\; при \;\; 0 < x \le 2, \\ 1 \;\; при \;\; x > 2. \end{cases}$

7. 2. $F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{3} \;\; при \;\; 1 < x \le 2, \\ 1 \;\; при \;\; x > 2. \end{cases}$

7. 3. $F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{64} \;\; при \;\; 0 < x \le 4, \\ 1 \;\; при \;\; x > 4. \end{cases}$

7. 4. $F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{15} \;\; при \;\; 1 < x \le 4, \\ 1 \;\; при \;\; x > 4. \end{cases}$

7. 5. $F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25} \;\; при \;\; 0 < x \le 5, \\ 1 \;\; при \;\; x > 5. \end{cases}$

7. 6. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ \ x \le -1, \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4} \ \ \text{при} \ \ -1 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1 \ \ \text{при} \ \ x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

7. 7. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ \ x \le 2, \\ (x-2)^2 \ \ \text{при} \ \ 2 < x \le 3, \\ 1 \ \ \text{при} \ \ x > 3. \end{cases}$

7. 8. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ \ x \le 0, \\ \dfrac{x^5}{32} \ \ \text{при} \ \ 0 < x \le 2, \\ 1 \ \ \text{при} \ \ x > 2. \end{cases}$

7. 9. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ \ x \le 0, \\ x^2 \ \ \text{при} \ \ 0 < x \le 1, \\ 1 \ \ \text{при} \ \ x > 1. \end{cases}$

7. 10. $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ \ x \le -1, \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3} \ \ \text{при} \ \ -1 < x \le 2, \\ 1 \ \ \text{при} \ \ x > 2. \end{cases}$

Литература

1. Гусак А. А. Высшая математика. В 2-х т. Т.2.: Учебник для студентов вузов. – 3-е изд., стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 448 с.

2. Гусак А. А. Теория вероятностей: справ. пособ. к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – 7-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2009. – 288 с.

3. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – Учеб. пособие для втузов. – 3-е изд., стер. – М: Высш. шк., 2000. – 366 с.: ил.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под редакцией А. А. Светникова. – М: Наука, 1970. – 656 с.

5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. Издание восьмое, исправленное. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», Москва, 1976. – 168 с.

6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 5-е, стер. – М: Высш. шк., 2001. – 400 с.: ил.

7. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1999. –416 с.: ил.

Содержание

Бесклубная Антонина Вячеславовна

Теория вероятностей

Учебное пособие

Редактор
Д.М. Фетюкова

Подписано в печать Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 3,0. Усл. печ. л. 3,3. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственныйархитектурно-строительный университет» 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65