Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
(ННГАСУ)

Кафедра математики

Ряды

Методические указания и контрольные задания
по высшей математике

Нижний Новгород
ННГАСУ
2013

УДК 517.9

Ряды [Текст]. Методические указания и контрольные задания по высшей математике для студентов очной формы обучения всех направлений и специальностей. Часть X / Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т; сост. Л.Н. Кривдина, Г.П. Опалева, В.В. Драгунова – Н. Новгород: ННГАСУ, 2013. – 44 с.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения всех направлений и специальностей при изучении раздела «Ряды» курса высшей математики.

В методических указаниях приведены теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач, подробно разобраны решения типовых задач, даны контрольные задания для самостоятельного решения.

Составители: Л.Н. Кривдина, Г.П. Опалева, В.В. Драгунова

§1. Числовые ряды. Основные понятия

Пусть задана бесконечная числовая последовательность с общим членом $u_n = f(n)$.

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ − действительные или комплексные числа, называется бесконечным **числовым рядом** (или просто рядом), числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются **членами ряда**, u_n − **общим членом ряда.**

Сумма первых n членов ряда (1) S_n называется n**-ой частичной суммой**, т.е. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Числовой ряд (1) называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности n-ых частичных сумм ряда (1) при неограниченном возрастании номера n, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется **суммой** ряда (1).

Числовой ряд (1) называется **расходящимся**, если предел последовательности n-ых частичных сумм ряда (1) при неограниченном возрастании номера n $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен. В этом случае ряд (1) суммы не имеет.

Пример 1. Ряд $0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сходится, т.к. $S_n = 0 \to 0$ при $n \to \infty$. Сумма этого ряда равна 0. ■

Пример 2. Ряд $5 + 5 + \ldots + 5 + \ldots$ расходится, т.к. $S_n = 5n \to \infty$ при $n \to \infty$. ■

Пример 3. Ряд $-5 + 5 - 5 + 5 - 5 + \ldots$ расходится, т.к. $S_1 = -5$, $S_2 = 0$, $S_3 = -5, \ldots$, т.е. последовательность частичных сумм не имеет предела при $n \to \infty$. ■

Пример 4. Ряд $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ сходится. Действительно, т.к. $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, то

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2},$$

и, следовательно, ряд сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{2}$. ■

Ряд вида

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k \qquad (2)$$

называется n**-ым остатком ряда** (1). Остаток (2) получается из ряда (1) отбрасыванием n первых его членов, а сам ряд (1) получается из остатка (2) путем добавления конечного числа членов. Очевидно, что для сходящегося ряда

$$S_n+r_n=S\,,$$

где r_n – сумма остатка этого ряда.

Свойства числовых рядов

Свойство 1. Если ряд (1) сходится и его сумма равна S, то ряд, полученный умножением членов ряда (1) на произвольное число c

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\ldots+cu_n+\ldots, \qquad (3)$$

также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (1) расходится и $c\neq 0$, то и ряд (3) расходится.

Свойство 2. Если ряд (1) и ряд

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n \qquad (4)$$

сходятся и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то ряды, полученные сложением (вычитанием) соответствующих членов рядов (1) и (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)\,,$$

также сходятся и сумма каждого ряда равна $S_1\pm S_2$ соответственно.

Следствие 1. Из свойства 2 следует, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может являться как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (1) присоединить или отбросить любое конечное число начальных членов ряда, то полученный ряд и исходный ряд (1) сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. Из свойства 3 следует, что если ряд (1) сходится, то его остаток $r_n=S-S_n$ стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

В дальнейшем при исследовании сходимости числовых рядов полезно будет воспользоваться некоторыми, т.н. «эталонными» рядами, в частности, это ряд геометрической прогрессии и обобщенный гармонический ряд.

Ряд геометрической прогрессии

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0 \qquad (5)$$

называется **рядом геометрической прогрессии.**

Ряд геометрической прогрессии (5) сходится при $|q| < 1$ *и расходится при* $|q| \geq 1$.

Пример 5. Исследовать ряд на сходимость

$$9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{1}{9^{n-4}} + \ldots.$$

Решение. Данный ряд можно записать как

$$9^4 \cdot 1 + 9^4 \cdot \frac{1}{9} + 9^4 \cdot \frac{1}{9^2} + 9^4 \cdot \frac{1}{9^3} + 9^4 \cdot \frac{1}{9^4} + 9^4 \cdot \frac{1}{9^5} + 9^4 \cdot \frac{1}{9^6} + \ldots + 9^4 \cdot \frac{1}{9^{n-1}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 9^4 \cdot \frac{1}{9^{n-1}}.$$

Этот ряд представляет собой ряд геометрической прогрессии, где $a = 9^4$ и $q = \frac{1}{9} < 1$, поэтому он сходится по свойству 1 числовых рядов. ■

Обобщенный гармонический ряд

Ряд вида

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad (6)$$

где $\alpha > 0$ – действительное число, называется **обобщенным гармоническим рядом.**

Обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leq 1$.

Заметим, что при $\alpha = 1$ получается так называемый *гармонический ряд* (частный случай обобщенного гармонического ряда):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который является расходящимся рядом.

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. Рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд расходится, т.к. $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, и, соответственно, исходный ряд также расходится по свойству 3 числовых рядов (т.к. получен из ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ отбрасыванием первых двух членов). ■

Поскольку при исследовании произвольного числового ряда на сходимость нахождение n-ой частичной суммы S_n и ее предела представляет собой непростую задачу, то были установлены *признаки сходимости числовых рядов*, позволяющие упростить исследование рядов.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости числового ряда). Если ряд (1) сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Замечание. Но не НАОБОРОТ! Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться, т.е. о сходимости ряда еще ничего нельзя сказать. Ряд надо исследовать дальше. Примером ряда, у которого предел общего члена равен нулю, а сам ряд расходится, является гармонический ряд.

Теорема 2 (достаточный признак расходимости числового ряда). Если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд (1) расходится.

Теорема 2 следует из теоремы 1, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Пример 7. Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{7}+\frac{4}{11}+\frac{5}{15}+\ldots+\frac{n+1}{4n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4n-1}.$$

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится по достаточному признаку расходимости. ■

§2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Знакопостоянные ряды – это ряды, все члены которых имеют один и тот же знак.

Знакопостоянные ряды подразделяются на *знакоположительные ряды* (все члены которых положительны) и на *знакоотрицательные ряды* (все члены которых отрицательны). Достаточные признаки сходимости рядов будем рассматривать для знакоположительных рядов, т.к. знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения всех его членов на число (-1), что не влияет на сходимость ряда согласно свойству числовых рядов.

Теорема 1 (поэлементный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0 \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad v_n > 0, \tag{2}$$

причем каждый член ряда (1) не превосходит соответствующего члена ряда(2) для всех n, т.е $u_n \le v_n$. Тогда: 1) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1); 2) если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой и в случае, когда неравенство $u_n \le v_n$ выполняется, начиная с некоторого номера n.

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2} = \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+2} + \ldots .$$

Решение. Применим поэлементный признак сравнения. Члены данного ряда при всех n меньше соответствующих членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

который является сходящимся как ряд геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{3} < 1$. Следовательно, сходится и исходный ряд. ■

Теорема 2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (1) и (2). Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Замечание 2. При применении поэлементного и предельного признаков сравнения исследуемые ряды обычно сравнивают с «эталонными» рядами.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2} = \frac{2}{4} + \frac{3}{7} + \frac{4}{12} + \ldots + \frac{1+n}{3+n^2} + \ldots .$$

Решение. Применим предельный признак сравнения. Для этого рассмотрим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Составим отношение $\frac{u_n}{v_n}$ и найдем его предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}=1\neq 0\,.$$

Так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и исходный ряд также расходится по предельному признаку сравнения. ■

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{\sqrt[3]{n^2}+4}\,.$$

Решение. Сравним общий член данного ряда с общим членом обобщенного гармонического ряда: для всех n выполняется неравенство

$$\frac{7}{\sqrt[3]{n^2}+4}<\frac{7}{\sqrt[3]{n^2}}\,.$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{\sqrt[3]{n^2}}$ расходится, т.к. $\alpha=\frac{2}{3}<1$.

Сравнение с этим рядом по поэлементному признаку не дает результата, т.к. нельзя сделать никакого заключения о сходимости исходного ряда. Поэтому воспользуемся предельным признаком сравнения с тем же обобщенным гармоническим рядом и найдем предел отношения $\frac{u_n}{v_n}$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot\sqrt[3]{n^2}}{\left(\sqrt[3]{n^2}+4\right)\cdot 7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+4}=1\neq 0\,.$$

Получили конечный и отличный от нуля предел, значит, исследуемый ряд также будет расходиться по предельному признаку сравнения. ■

Теорема 3 (признак Даламбера). Пусть дан знакоположительный ряд (1). Если для ряда (1) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\,,$$

то этот ряд сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$.

Замечание 3. Если $q=1$, то ряд (1) может быть как сходящимся, так и расходящимся. В этом случае вопрос о сходимости ряда остается открытым и требуется его дополнительное исследование.

Замечание 4. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ и (или) a^n.

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+1)!}=\frac{6}{2!}+\frac{6^2}{3!}+\frac{6^3}{4!}+\ldots+\frac{6^n}{(n+1)!}+\ldots\,.$$

Решение. Наличие факториала в общем члене $u_n = \dfrac{6^n}{(n+1)!}$ данного ряда позволяет применить признак Даламбера. Найдем предел отношения $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n \to \infty$, где $u_{n+1} = \dfrac{6^{n+1}}{(n+2)!}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{n+1} \cdot (n+1)!}{6^n \cdot (n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n+2} = 0.$$

Так как $q = 0 < 1$, то исходный ряд сходится по признаку Даламбера. ■

Пример 5. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (3n)!}{3n!}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot (3n+3)! \cdot 3n!}{3(n+1)! \cdot 5^n \cdot (3n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot (3n+1)(3n+2)(3n+3)}{n+1} = \infty,$$

следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера. ■

Теорема 4 (радикальный признак Коши). Пусть дан знакоположительный ряд (1). Если для ряда (1) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

то этот ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Замечание 5. Если $q = 1$, то ряд (1) может быть как сходящимся, так и расходящимся. В этом случае вопрос о сходимости ряда остается открытым и требуется его дополнительное исследование.

Замечание 6. Радикальный признак Коши целесообразно применять, когда общий член ряда представляет собой n-ю (или зависящую от n) степень некоторого выражения.

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n = \frac{2}{5} + \left(\frac{4}{8}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n + \ldots .$$

Решение. Так как общий член $u_n = \left(\dfrac{2n}{3n+2}\right)^n$ данного ряда является некоторым выражением в n-ой степени, то применим радикальный признак Коши. Для этого найдем предел от $\sqrt[n]{u_n}$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Так как $q=\frac{2}{3}<1$, то данный ряд сходится по радикальному признаку Коши.■

Пример 7. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Решение. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{6^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{6}e<1,$$

значит, исследуемый ряд сходится по радикальному признаку Коши. ■

Пример 8. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n^3-2}{5n^3+7}\right)^{n^2}.$$

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{8n^3-2}{5n^3+7}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^3-2}{5n^3+7}\right)^{n}=\left(\frac{8}{5}\right)^{\infty}=\infty,$$

следовательно, ряд расходится по признаку Коши. ■

Теорема 5 (интегральный признак Коши). Если члены знакоположительного ряда (1) могут быть представлены как числовые значения некоторой функции $f(x)$ – непрерывной, положительной и монотонно убывающей при $x\in[1;+\infty)$, т.е. $u_1=f(1)$, $u_2=f(2)$, …, $u_n=f(n)$, …, то:

1) если несобственный интеграл 1-го рода $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1);

2) если несобственный интеграл 1-го рода $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то расходится также и ряд (1).

Замечание 7. Функция $f(x)$, принимающая в точках $x=n$ значения $u_n=f(n)$, получается путем замены натурального n в выражении $u_n=f(n)$ на непрерывно изменяющийся аргумент x. Так, например, если $f(n)=\frac{5n}{1+n^2}$, то $f(x)=\frac{5x}{1+x^2}$; если $f(n)=\frac{\ln^2 n}{n}$, то $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$ и т.п.

Пример 9. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3n-1)^4}=\frac{2}{2^4}+\frac{2}{5^4}+\frac{2}{8^4}+\ldots+\frac{2}{(3n-1)^4}+\ldots.$$

Решение. Применим интегральный признак Коши. Так как $f(n)=\dfrac{2}{(3n-1)^4}$, то функцией, принимающей в точках $x=n$ значения $u_n=f(n)$, является функция $f(x)=\dfrac{2}{(3x-1)^4}$. Эта функция непрерывна, положительна и монотонно убывает на промежутке $x\in[1;+\infty)$. Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2}{(3x-1)^4}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_1^{A}\frac{2}{(3x-1)^4}dx\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\int\limits_1^{A}(3x-1)^{-4}d(3x-1)\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{(3x-1)^{-3}}{-3}\Bigg|_1^A\right)=-\frac{2}{9}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{(3A-1)^3}-\frac{1}{8}\right)=-\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{36},$$

следовательно, несобственный интеграл сходится. Значит, исходный ряд также сходится по интегральному признаку Коши. ■

Пример 10. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ является непрерывной, положительной и монотонно убывающей при $x\in[2;+\infty)$. Вычислим несобственный интеграл от этой функции:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_2^{A}\frac{1}{x\ln x}dx\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln x}\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|\ln x\right|\Big|_2^A\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|\ln A\right|-\ln\left|\ln 2\right|\right)=+\infty.$$

Интеграл расходится, значит, и сам ряд расходится по интегральному признаку Коши. ■

§3. Знакопеременные (знакочередующиеся) ряды

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (1)$$

с членами произвольных знаков называется **знакопеременным рядом**.

Если знакопеременный ряд содержит конечное число отрицательных (положительных) членов, то его исследование на сходимость сводится к исследованию знакоположительного ряда, т.к. отбрасывание от ряда конечного числа начальных членов (а именно, до членов одного знака) не изменит его сходимости или расходимости. Случай, когда знакопеременный ряд содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов, представляет собой особый интерес.

Знакопеременный ряд (1) называется **абсолютно сходящимся,** если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{2}$$

составленный из модулей членов ряда (1).

Знакопеременный ряд (1) называется **условно сходящимся,** если он сходится, а ряд (2), составленный из модулей его членов, расходится.

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд – значит не только ответить на вопрос, сходится он или расходится, но и указать, *как* сходится: абсолютно или условно.

Теорема 1 (общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов). Пусть дан знакопеременный ряд (1). Если сходится ряд (2), составленный из модулей его членов, то и сам знакопеременный ряд (1) сходится.

Замечание 1. Обратное не верно, т.е. если будет сходиться знакопеременный ряд (1), то это не значит, что будет сходиться ряд из модулей (2).

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\beta)}{n^3} = \frac{\sin\beta}{n^3} + \frac{\sin(2\beta)}{n^3} + \ldots + \frac{\sin(n\beta)}{n^3} + \ldots .$$

Решение. Если $\beta = \pi k$, где $k \in Z$, то, очевидно, ряд

$$0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

сходится. Если $\beta \neq \pi k$, то данный ряд является знакопеременным. Составим для него ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\beta)|}{n^3} = \frac{|\sin\beta|}{n^3} + \frac{|\sin(2\beta)|}{n^3} + \ldots + \frac{|\sin(n\beta)|}{n^3} + \ldots .$$

Исследуем полученный ряд из модулей с помощью поэлементного признака сравнения. Так как для всех n и β имеет место неравенство $|\sin(n\beta)| \leq 1$, то выполняется при всех n и β неравенство

$$\frac{|\sin(n\beta)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, т.к. $\alpha = 3 > 1$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\beta)|}{n^3}$ сходится по поэлементному признаку сравнения. Следовательно, исследуемый знакопеременный ряд сходится по общему достаточному признаку сходимости знакопеременных рядов, при этом он сходится абсолютно по определению абсолютной сходимости знакопеременного ряда. ■

Свойства знакопеременных рядов

Свойство 1. Сходящийся знакопеременный ряд (1) (в том числе и знакопостоянный) остается сходящимся и не меняет величины суммы при любой группировке его членов, произведенной без изменения порядка их следования.

Замечание 2. Обратное не верно. Так, например, ряд $2-2+2-2+\ldots$ расходится, а ряд $(2-2)+(2-2)+\ldots=0+0+\ldots$, полученный попарной группировкой его членов, сходится.

Свойство 2. Абсолютно сходящийся знакопеременный ряд (1) (в том числе и знакопостоянный) остается сходящимся и не меняет величины суммы при любой перестановке его членов (**теорема Дирихле**).

Свойство 3. Если в условно сходящемся знакопеременном ряде (1) изменить порядок следования членов, то можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (**теорема Римана**).

Свойство 4. Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать (вычитать), при этом получится абсолютно сходящийся ряд с суммой, равной сумме (разности) сумм исходных рядов.

Из свойства 4 следует, что абсолютно сходящиеся ряды сходятся за счет того, что их члены достаточно быстро стремятся к нулю при $n\to\infty$, а условно сходящиеся ряды сходятся за счет частичной компенсации членов с разными знаками.

Свойство 5. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд с суммой, равной произведению сумм исходных рядов, при этом под произведением двух рядов $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и $v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1v_1)+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1)+\ldots\ .$$

Свойство 6. Если знакопеременный ряд (1) сходится абсолютно, то ряды, составленные из его положительных (отрицательных) членов, сходятся. Если знакопеременный ряд (1) сходится условно, то вышеуказанные ряды расходятся.

Частным случаем знакопеременных рядов являются *знакочередующиеся ряды.*

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n\,, \qquad (3)$$

где $u_n>0$ для всех n, т.е. ряд, у которого положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Замечание 3. Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-...+(-1)^n\cdot u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot u_n\,, \qquad (4)$$

где $u_n>0$ для всех n (т.е. с первым отрицательным членом), сводится путем умножения всех его членов на число (-1) к исследованию ряда (3).

Для исследования знакочередующихся рядов на сходимость применяют следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 2 (признак Лейбница). Если:

1) члены знакочередующегося ряда (3) монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $u_1>u_2>u_3>...>u_n>...$;

2) общий член u_n ряда (3) стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

то знакочередующийся ряд (3) сходится. При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенству

$$0<S<u_1. \qquad (5)$$

Знакочередующиеся ряды (3) и (4), для которых выполняются условия признака Лейбница, называются **лейбницевскими рядами.**

Замечание 4. Признак Лейбница остается справедливым, если первое условие выполняется, начиная с некоторого номера n.

Замечание 5. Неравенство (5) дает возможность получить оценку ошибки, допускаемой при замене суммы S данного ряда (3) на его частичную сумму S_n. Так как при этом отброшенный ряд, т.е. остаток, является также знакочередующимся рядом, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, то ошибка оценки меньше модуля первого из отброшенных членов ряда (3).

Исследование знакочередующихся рядов удобно начинать с исследования их абсолютной сходимости, т.к. часто это быстрее дает результат, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости.

При исследовании знакопеременных (знакочередующихся) рядов на абсолютную сходимость применяют все признаки сходимости для знакопостоянных рядов.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!}+...\ .$$

Решение. Составим для данного знакочередующегося ряда ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}+...+\frac{1}{(3n-2)!}+...$$

и исследуем полученный ряд с помощью признака Даламбера, т.к. общий член содержит факториал.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!}{(3n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n\cdot(3n+1)}=0\,,$$

следовательно, ряд из модулей сходится по признаку Даламбера, т.к. $q = 0 < 1$. Значит, исследуемый знакочередующийся ряд сходится абсолютно по определению абсолютной сходимости. ■

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{n^5+6}} = -\frac{1}{\sqrt[8]{1^5+6}} + \frac{1}{\sqrt[8]{2^5+6}} - \frac{1}{\sqrt[8]{3^5+6}} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{n^5+6}} + \ldots .$$

Решение. Данный ряд является знакочередующимся рядом. Составим ряд из модулей для членов этого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^5+6}} = \frac{1}{\sqrt[8]{1^5+6}} + \frac{1}{\sqrt[8]{2^5+6}} + \frac{1}{\sqrt[8]{3^5+6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[8]{n^5+6}} + \ldots .$$

Применим предельный признак сравнения для полученного ряда. Для этого рассмотрим обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^5}} = \frac{1}{\sqrt[8]{1^5}} + \frac{1}{\sqrt[8]{2^5}} + \frac{1}{\sqrt[8]{3^5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[8]{n^5}} + \ldots,$$

который является расходящимся, т.к. $\alpha = 5/8 < 1$. Найдем предел отношения общих членов указанных рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[8]{n^5}}{\sqrt[8]{n^5+6}} = 1 \neq 0,$$

следовательно, ряд из модулей расходится по предельному признаку сравнения. Проверим тогда сходимость знакочередующегося ряда по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{\sqrt[8]{1^5+6}} > \frac{1}{\sqrt[8]{2^5+6}} > \frac{1}{\sqrt[8]{3^5+6}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt[8]{n^5+6}} > \ldots,$ т.е. члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине с ростом номера n;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^5+6}} = 0,$

следовательно, знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница. Так как ряд из модулей расходится, а сам знакочередующийся ряд сходится, то по определению исследуемый ряд сходится условно. ■

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5n^2}{9n^2+4} = \frac{5\cdot 1^2}{9\cdot 1^2+4} - \frac{5\cdot 2^2}{9\cdot 2^2+4} + \frac{5\cdot 3^2}{9\cdot 3^2+4} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{5n^2}{9n^2+4} + \ldots .$$

Решение. Указанный ряд – знакочередующийся, для которого предел общего члена при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{9n^2+4} = \frac{5}{9} \neq 0,$$

значит, знакочередующийся ряд расходится по достаточному признаку расходимости. ■

§4. Функциональные ряды. Основные понятия

Ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (1)$$

членами которого являются функции от аргумента x, определенного на некотором множестве D, называется **функциональным рядом**.

Если в ряд (1) подставлять определенные числовые значения $x\in D$, то будут получаться различные числовые ряды, среди которых могут быть как сходящиеся, так и расходящиеся.

Совокупность значений x, при которых функции $u_n(x)$ определены и функциональный ряд (1) сходится, называется **областью сходимости** функционального ряда.

Может получиться, что при некоторых $x\in D$ ряд (1) сходится абсолютно, а при некоторых – условно, поэтому можно различать области абсолютной и условной сходимости функционального ряда.

Каждому значению x из области сходимости соответствует определенное значение величины $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ – частичная сумма ряда (1). Эту величину, являющуюся функцией от x, называют **суммой** функционального ряда и обозначают через $S(x)$. При этом говорят, что *функциональный ряд сходится к функции* $S(x)$ на своей области сходимости.

Для нахождения области сходимости функционального ряда можно применять «эталонные» ряды, а также достаточные признаки сходимости числовых рядов (признак Даламбера, радикальный признак Коши и др.) для ряда, составленного из модулей членов исходного функционального ряда.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x.$$

Решение. Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q=\ln x$. Так как ряд геометрической прогрессии сходится при $|q|<1$, то исходный ряд сходится при $|\ln x|<1$, т.е. при $-1<\ln x<1$. Следовательно, область сходимости данного ряда определяется неравенствами $\dfrac{1}{e}<x<e$. ■

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3+1}.$$

Решение. Применим признак Даламбера. Так как этот признак применим для рядов с положительными членами, то исследуем ряд сразу на абсолютную сходимость. Общий член данного ряда имеет вид $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3+1}$, тогда $u_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^3+1}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot(n^3+1)}{((n+1)^3+1)\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot(n^3+1)}{(n+1)^3+1}\right| =$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{(n+1)^3+1} = |x|.$$

По признаку Даламбера исходный ряд сходится, и притом абсолютно, если $|x|<1$, т.е. при $-1<x<1$; ряд расходится, если $|x|<1$, т.е. при $x<-1$ или $x>1$. Если $|x|=1$, то признак Даламбера ответа не дает и при $x=\pm1$ ряд нужно исследовать отдельно.

1) При $x=1$ получается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+1}$, который исследуем с помощью предельного признака сравнения. Так как обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ сходится $(\alpha=3>1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^3+1}=1\neq0$, то оба ряда сходятся одновременно по предельному признаку сравнения. Точка $x=1$ войдет в область сходимости исходного ряда.

2) При $x=-1$ получается знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$, который сходится абсолютно по определению абсолютной сходимости, т.к. сходится ряд из модулей его членов. Точка $x=-1$ также войдет в область сходимости ряда. Значит, исходный ряд сходится при $-1\le x\le1$. ■

Замечание. При нахождении пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$ x считают постоянной величиной.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n.$$

Решение. Применим признак Коши. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$, где $u_n(x)=n^n\cdot x^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n\cdot x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n\cdot|x|^n} = \lim_{n\to\infty}(n\cdot|x|) = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}n = \infty$$

для любого $x\in R$, и, следовательно, ряд из модулей сходится при $x\in R$. Значит, исходный ряд абсолютно сходится при всех $x\in R$. ■

§5. Степенные ряды

Среди функциональных рядов особую роль в математике и ее приложениях играют ряды, членами которых являются степенные функции от аргумента x, т.е *степенные ряды* (частный случай функциональных рядов).

Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, $a_2, \ldots$, $a_n, \ldots$ – действительные (или комплексные) числа (называются **коэффициентами ряда** (1)), $x \in R$ – действительная переменная, называется **степенным рядом.**

Степенной ряд (1) расположен по степеням x. Также можно рассматривать ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$.

Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad (2)$$

где x_0 – некоторое постоянное число, также является *степенным рядом.* Это ряд более общего вида. Степенной ряд (2) приводится к ряду вида (1), если выполнить подстановку $x - x_0 = y$. Поэтому при изучении степенных рядов можно ограничиться изучением степенных рядов вида (1).

Заметим, что область сходимости степенного ряда (1) содержит, по крайней мере, одну точку $x = 0$ (для ряда (2) точку $x = x_0$).

Областью сходимости степенного ряда является интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ для ряда (1) или точки $x = x_0$ для ряда (2). Такой интервал называют **интервалом сходимости** степенного ряда.

Радиусом сходимости степенного ряда называют число $R > 0$ такое, что при всех x, для которых выполняется неравенство $|x| < R$, ряд (1) сходится, а при всех $|x| > R$ – расходится (для ряда (2) – при всех x, для которых $|x - x_0| < R$ ряд (2) сходится, а при всех $|x - x_0| > R$ – расходится).

Другими словами, интервал сходимости степенного ряда – это интервал, характеризующийся неравенствами $-R < x < R$ для ряда (1), или интервал $x_0 - R < x < x_0 + R$ для ряда (2). На концах интервала сходимости, т.е. при $x = -R$ и $x = R$ для ряда (1) (при $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ для ряда (2)), сходимость ряда в каждом случае проверяется отдельно.

Исследовать степенной ряд на сходимость – это значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд на границах интервала сходимости. Область сходимости степенного ряда всегда состоит из интервала сходимости и, быть может, граничных точек этого интервала.

В частном случае, когда $R=0$, ряд (1) сходится только в одной точке $x=0$ (ряд (2) сходится в точке $x=x_0$). Если же $R=\infty$, то это означает, что ряд (1) (ряд (2)) сходится при всех $x\in R$.

Отметим, что встречаются случаи, когда степенной ряд содержит не все степени x (например, только четные степени или только нечетные степени x). В этом случае говорят, что задан *неполный* степенной ряд, в противном случае – *полный* степенной ряд.

Нахождение области сходимости степенного ряда

1. Для нахождения области сходимости степенного ряда (как *полного*, так и *неполного*) применяют признак Даламбера или радикальный признак Коши для ряда, составленного из модулей членов исходного степенного ряда.

2. Для нахождения области сходимости *полного* степенного ряда можно применить одну из следующих формул вычисления радиуса сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3}$$

или

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{4}$$

Замечание. Формулы (3) и (4) нельзя применять в тех случаях, когда бесконечное число коэффициентов степенного ряда равно нулю. В частности, эти формулы неприменимы для неполных степенных рядов.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3\cdot x^n}{5^n}.$$

Решение. Данный ряд является полным степенным рядом, поэтому для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой (3). Здесь $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n^3}{5^n}$, $a_{n+1}=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{(n+1)^3}{5^{n+1}}$, следовательно,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot n^3\cdot 5^{n+1}}{5^n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n+1)^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{5n^3}{(n+1)^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3}{(n+1)^3}=5.$$

Интервал сходимости имеет вид

$$|x|<5\text{, т.е. } -5<x<5.$$

Исследуем сходимость ряда на границах этого интервала.

1) При $x=5$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot n^3$. Этот ряд расходится по достаточному признаку расходимости, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^3=\infty$. Значит, точка $x=5$ не входит в интервал сходимости.

2) При $x=-5$ степенной ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3$, который является расходящимся по достаточному признаку расходимости, поэтому точка $x=-5$ не входит в интервал сходимости. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $-5<x<5$. ■

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)!}.$$

Решение. Данный ряд является полным степенным рядом. Найдем радиус сходимости по формуле (3), где $a_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+2)!}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}|n+2|=\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty,$$

значит, ряд сходится при всех $x\in R$. ■

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!\cdot(x+7)^{n+1}}{n!}.$$

Решение. Заданный ряд – полный степенной ряд. Здесь $a_n=\dfrac{(2n-1)!}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!}$. Найдем радиус сходимости по формуле (3):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)!\cdot(n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n\cdot(2n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n\cdot(2n+1)}=0,$$

следовательно, ряд сходится только в одной точке $x=-7$. ■

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-5)^{2n}}{n^2\cdot 4^n}.$$

Решение. Перепишем данный ряд в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}\cdot(x-5/2)^{2n}}{n^2\cdot 4^n}.$$

Этот ряд является неполным степенным рядом, т.к. содержит только четные степени $(x-5/2)$. Применим признак Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$u_n(x)=\frac{2^{2n}\cdot(x-5/2)^{2n}}{n^2\cdot 4^n},\quad u_{n+1}(x)=\frac{2^{2n+2}\cdot(x-5/2)^{2n+2}}{(n+1)^2\cdot 4^{n+1}}.$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+2}\cdot(x-5/2)^{2n+2}\cdot n^2\cdot 4^n}{(n+1)^2\cdot 4^{n+1}\cdot 2^{2n}\cdot(x-5/2)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^2\cdot(x-5/2)^2\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 4}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(x-5/2)^2\cdot n^2}{(n+1)^2} = (x-5/2)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = (x-5/2)^2.$$

Ряд сходится, если $(x-5/2)^2<1$ или $3/2<x<7/2$, и расходится при $x<3/2$ или $x>7/2$. Исследуем сходимость ряда на границах интервала сходимости.

1) При $x=7/2$ получим обобщенный гармонический сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.к. $\alpha=2>1$. Следовательно, точка $x=7/2$ входит в интервал сходимости.

2) При $x=3/2$ получим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (см. первый случай). Точка $x=3/2$ входит в интервал сходимости. Значит, область сходимости исходного ряда является отрезком $3/2\le x\le 7/2$. ■

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^{n^2}\cdot x^{n^2}.$$

Решение. Запишем ряд в развернутом виде:

$$8x+8^4\cdot x^4+8^9\cdot x^9+\ldots+8^{n^2}\cdot x^{n^2}+\ldots .$$

Очевидно, что бесконечное число его коэффициентов равно нулю, а именно: $a_0=a_2=a_3=a_5=a_6=a_7=a_8=a_{10}=a_{11}=\ldots a_m=\ldots=0$ $(m\ne n^2)$. Поэтому формулы (3) и (4) для нахождения радиуса сходимости здесь неприменимы. Воспользуемся радикальным признаком Коши и найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$, где $u_n(x)=8^{n^2}\cdot x^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|8^{n^2}\cdot x^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{8^{n^2}\cdot|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}(8^n\cdot|x|^n) =$$

$$=\begin{cases}\infty, & \textit{если } 8|x|>1, \quad \textit{или } |x|>1/8,\\ 1, & \textit{если } 8|x|=1, \quad \textit{или } |x|=\pm 1/8,\\ 0, & \textit{если } 8|x|<1, \quad \textit{или } |x|<1/8.\end{cases}$$

Значит, исследуемый ряд сходится при $-1/8<x<1/8$. Рассмотрим граничные точки этого интервала.

1) При $x=1/8$ имеем ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$, который расходится по достаточному признаку расходимости, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\ne 0$. Точка $x=1/8$ не входит в интервал сходимости.

2) При $x=-1/8$ получим знакочередующийся расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}=-1+1-1+1-\ldots$ по достаточному признаку расходимости. Точка $x=-1/8$ не входит в интервал сходимости.

Таким образом, область сходимости исследуемого ряда – это интервал $-1/8<x<1/8$. ■

Свойства степенных рядов

<u>*Свойство 1.*</u> Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

<u>*Свойство 2.*</u> Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, имеющие радиусы сходимости R_1 и R_2 соответственно, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости суммы, разности и произведения рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

<u>*Свойство 3.*</u> Степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости, при этом для ряда (1)

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

при $-R<x<R$ выполняется равенство

$$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots, \qquad (5)$$

т.е. сумма ряда, полученного почленным дифференцированием степенного ряда, внутри интервала сходимости равна производной от суммы первоначального ряда.

Из этого свойства следует, что степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости сколько угодно раз.

<u>*Свойство 4.*</u> Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости, при этом для ряда (1) при $-R<a<x<R$ выполняется равенство

$$\int_a^x S(t)\,dt=\int_a^x a_0\,dt+\int_a^x a_1t\,dt+\int_a^x a_2t^2dt+\ldots+\int_a^x a_nt^n\,dt+\ldots, \qquad (6)$$

т.е. сумма ряда, полученного почленным интегрированием степенного ряда, внутри интервала сходимости равна интегралу от суммы первоначального ряда.

Ряды (5) и (6) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд (1).

Перечисленные свойства остаются справедливыми и для степенных рядов вида (2).

Свойства степенных рядов широко применяются в приближенных вычислениях и теоретических исследованиях. Так, например, свойства о почленном дифференцировании и почленном интегрировании часто используются для нахождения суммы $S(x)$ функциональных (степенных) рядов. Если сумму $S(x)$ некоторого ряда трудно найти непосредственно, но легко найти сумму ряда производных (или интегралов), то, дифференцируя (или интегрируя) ряд с известной суммой, можно вычислить и сумму исходного ряда $S(x)$.

§6. Разложение функций в степенные ряды

Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ раскладывать в степенной ряд, т.е. представлять функцию $f(x)$ в виде суммы степенного ряда.

Для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$, $c\in(x_0\,;\,x)$, – остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$.

Всякая функция $f(x)$, имеющая производные любых порядков (т.е. бесконечно дифференцируемая) в окрестности точки x_0, может быть разложена по степеням $(x-x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \ldots . \quad (1)$$

Разложение (1) функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ называется **рядом Тейлора.**

Заметим, что ряд Тейлора формально можно построить для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (это необходимое условие). Но отсюда еще не следует, что ряд Тейлора будет сходиться к данной функции $f(x)$. Он может быть расходящимся или сходящимся, но не к функции $f(x)$.

Пример 1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \textit{если } x\neq 0, \\ 0, & \textit{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0)=0$ при всяком n. Ряд Тейлора имеет вид

$$0+\frac{0}{1!}\cdot x+\frac{0}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{0}{n!}\cdot x^n+\ldots .$$

Этот ряд сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$. ■

В следующей теореме приведены необходимое и достаточное условия сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$, порождающей этот ряд.

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора (1), составленный для функции $f(x)$, сходился к этой функции $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$, т.е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд, сходящийся к данной функции $f(x)$, сводится к нахождению значений x, при которых $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

В случае, если в ряде Тейлора (1) $x_0=0$, то получаем разложение функции по степеням x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots \qquad (2)$$

Ряд (2) называется **рядом Маклорена.**

Ряд Тейлора представляет собой степенной ряд вида (2) (см. §5), а ряд Маклорена – степенной ряд вида (1) (см. §5).

При разложении функций в ряд Тейлора нужно:

1) найти производные $f'(x)$, $f''(x)$,…, $f^{(n)}(x)$,…;

2) вычислить значение функции в точке x_0 и значения производных в точке x_0;

3) составить ряд (1) для заданной функции;

4) найти область сходимости полученного ряда;

5) выяснить, для каких значений x из области сходимости остаточный член ряда Тейлора $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Если такие значения x найдены, то для этих значений между функцией $f(x)$ и рядом Тейлора можно поставить знак равенства.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n\to\infty$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Находим производные данной функции и вычисляем значение функции и значения производных в точке $x_0=2$:

$$f(2)=\left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=2}=-\left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=2}=-1,$$

$$f'(x)=(-(x-1)^{-1})'=(x-1)^{-2},\quad f'(2)=1=1!,$$

$$f''(x)=-2(x-1)^{-3}=-2!\cdot(x-1)^{-3},\quad f''(2)=-2!,$$

$$f'''(x)=2\cdot 3\cdot(x-1)^{-4}=3!\cdot(x-1)^{-4},\quad f'''(2)=3!,$$

$$f^{IV}(x)=-2\cdot 3\cdot 4\cdot(x-1)^{-5}=-4!\cdot(x-1)^{-5},\quad f^{IV}(2)=-4!,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(x-1)^{-(n+1)}=(-1)^{n+1}\cdot n!\cdot(x-1)^{-(n+1)},$$

$$f^{(n)}(2)=(-1)^{n+1}\cdot n!.$$

Составим ряд Тейлора:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=-1+\frac{1!}{1!}\cdot(x-2)-\frac{2!}{2!}\cdot(x-2)^2+\frac{3!}{3!}\cdot(x-2)^3-\frac{4!}{4!}\cdot(x-2)^4+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{n!}\cdot(x-2)^n+\ldots=$$

$$=-1+(x-2)-(x-2)^2+(x-2)^3-(x-2)^4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot(x-2)^n+\ldots,$$

т.е. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(x-2)^n$.

Исследуем сходимость полученного ряда. Для этого найдем его радиус сходимости, т.к. этот ряд является полным степенным рядом.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}|-1|=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

где $a_n=(-1)^{n+1}$. Ряд сходится при $|x-2|<1$, т.е. $1<x<3$, и расходится при $x<1$ или $x>3$. Исследуем сходимость ряда на границах этого интервала.

1) При $x=1$ получим знакоотрицательный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}=-1-1-1-\ldots-1-\ldots$, который расходится по свойству, т.к. расходится соответствующий знакоположительный ряд по достаточному признаку расходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$).

2) При $x=3$ получим расходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}=-1+1-1+1-1+\ldots$ по достаточному признаку расходимости. Следовательно, областью сходимости степенного ряда является интервал $1<x<3$ и ряд сходится к функции $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ внутри этого интервала. ■

Приведем ниже разложения в ряд Маклорена для некоторых элементарных функций, которые в дальнейшем могут быть использованы для разложения многих других функций в ряд Маклорена.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}\cdot x+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cdot x^3+\ldots+ \tag{3}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}\cdot x^n+\ldots,\ x\in\begin{cases}[-1;1], & \text{если } m\ge 0,\\ (-1;1], & \text{если } -1<m<0,\\ (-1;1), & \text{если } m\le -1,\end{cases}$$

где m – любое действительное число. Ряд (3) называется *биномиальным рядом.*

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in\Re, \tag{4}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in\Re, \tag{5}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in\Re, \tag{6}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\quad x\in(-1;1], \tag{7}$$

$$arctg\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad x\in[-1;1], \tag{8}$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$
$$x\in[-1;1], \tag{9}$$

$$sh\, x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in\Re, \tag{10}$$

$$ch\, x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in\Re. \tag{11}$$

С помощью разложений (3) – (11) можно довольно просто находить разложения многих других функций в ряд Маклорена. Так, например, для нахождения разложения функции $f(x)=\sin x^3$ в ряд Маклорена следует в равенстве (5) заменить x на x^3. При этом отпадает необходимость исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора с целью выяснения, можно ли между составленным рядом и самой исходной функцией поставить знак равенства, так как области сходимости табличных рядов известны. Кроме этого, иногда разложение функции в ряд Маклорена получается сложением табличных (ряды (3) – (11)) или ранее найденных разложений, а также с помощью вычитания и умножения известного разложения на число. Например, для разложения функции $f(x)=(x^5+3)\cdot\cos x$ в ряд Маклорена нужно разложение (6) умножить на x^5 и 3, а затем сложить полученные разложения функций $x^5\cos x$ и $3\cos x$.

Также ряды (3) – (11) используются в комбинации с правилами дифференцирования и интегрирования степенных рядов (см. свойства степенных рядов) для разложения некоторых функций в ряд Маклорена. Так, при интегрировании известного разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{1+x}$ получается табличное разложение (7).

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = 7^x$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся готовым разложением (4). Так как $7^x = e^{\ln 7^x} = e^{x \ln 7}$, то заменим в разложении (4) x на $x \ln 7$:

$$7^x = 1 + \frac{x\ln 7}{1!} + \frac{(x\ln 7)^2}{2!} + \frac{(x\ln 7)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x\ln 7)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{\ln 7}{1!}\cdot x + \frac{\ln^2 7}{2!}\cdot x^2 + \frac{\ln^3 7}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 7}{n!}\cdot x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 7}{n!}\cdot x^n .$$

Разложение имеет место для $x \in \Re$, т.к. $x\ln 7 \in \Re$ при $x \in \Re$. ■

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = \cos\frac{x^4}{5}$ в ряд Маклорена.

Решение. Применим табличное разложение (6), в котором заменим x на $\frac{x^4}{5}$ и получим:

$$\cos\frac{x^4}{5} = 1 - \frac{(x^4/5)^2}{2!} + \frac{(x^4/5)^4}{4!} - \frac{(x^4/5)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{(x^4/5)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\cdot 5^2}\cdot x^8 + \frac{1}{4!\cdot 5^4}\cdot x^{16} - \frac{1}{6!\cdot 5^6}\cdot x^{24} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!\cdot 5^{2n}}\cdot x^{8n} + \ldots,$$

т.е. $\cos\frac{x^4}{5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!\cdot 5^{2n}}\cdot x^{8n}$.

Разложение имеет место для $x \in \Re$, т.к. $\frac{x^4}{5} \in \Re$ при $x \in \Re$. ■

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 3x$ в ряд Маклорена.

Решение. Так как $\sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 6x$, то, применив табличное разложение (6) для функции $\cos 6x$, в котором заменим x на $6x$, получим:

$$\sin^2 3x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{(6x)^2}{2!} + \frac{(6x)^4}{4!} - \frac{(6x)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{(6x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{6^2}{2\cdot 2!}\cdot x^2 - \frac{6^4}{2\cdot 4!}\cdot x^4 + \frac{6^6}{2\cdot 6!}\cdot x^6 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{6^{2n}}{2\cdot(2n)!}\cdot x^{2n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{6^{2n}}{2\cdot(2n)!}\cdot x^{2n},$$

где $x \in \Re$. $\blacksquare$

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = \ln\left(2 - \frac{x}{7}\right)$ в ряд Маклорена.

Решение. Так как

$$\ln\left(2 - \frac{x}{7}\right) = \ln\left(2 \cdot \left(1 - \frac{x}{14}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x}{14}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \left(-\frac{x}{14}\right)\right),$$

то, воспользуемся готовым разложением (7), в котором заменим x на $\left(-\frac{x}{14}\right)$. Тогда получим

$$\ln\left(2 - \frac{x}{7}\right) = \ln 2 + \left(-\frac{x}{14}\right) - \frac{(-x/14)^2}{2} + \frac{(-x/14)^3}{3} - \frac{(-x/14)^4}{4} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{(-x/14)^{n+1}}{n+1} + \ldots =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{14} \cdot x - \frac{1}{2 \cdot 14^2} \cdot x^2 - \frac{1}{3 \cdot 14^3} \cdot x^3 - \frac{1}{4 \cdot 14^4} \cdot x^4 - \ldots - \frac{1}{(n+1) \cdot 14^{n+1}} \cdot x^{n+1} - \ldots =$$

$$= \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 14^{n+1}} \cdot x^{n+1},$$

где $-1 < -\frac{x}{14} \le 1$, т.е $-14 \le x < 14$. $\blacksquare$

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{8 - x^7}}$ в ряд Маклорена.

Решение. Так как

$$\frac{5}{\sqrt[3]{8 - x^7}} = 5 \cdot (8 - x^7)^{-1/3} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^7}{8}\right)^{-1/3} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{x^7}{8}\right)\right)^{-1/3},$$

то применим табличное разложение (3) при $m = -\frac{1}{3}$, заменив в нем x на $\left(-x^7/8\right)$:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{8 - x^7}} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 + \frac{(-1/3)}{1!} \cdot \left(-\frac{x^7}{8}\right) + \frac{(-1/3) \cdot (-1/3 - 1)}{2!} \cdot \left(-\frac{x^7}{8}\right)^2 + \frac{(-1/3) \cdot (-1/3 - 1) \cdot (-1/3 - 2)}{3!} \cdot \left(-\frac{x^7}{8}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(-1/3) \cdot (-1/3 - 1) \cdot (-1/3 - 2) \cdot \ldots \cdot (-1/3 - n + 1)}{n!} \cdot \left(-\frac{x^7}{8}\right)^n + \ldots \right) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 8} \cdot x^7 + \frac{1 \cdot 4}{3^2 \cdot 2! \cdot 8^2} \cdot x^{14} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3 \cdot 3! \cdot 8^3} \cdot x^{21} + \ldots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n - 2)}{3^n \cdot n! \cdot 8^n} \cdot x^{7n} + \ldots \right) =$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 8}\cdot x^7+\frac{5}{2}\cdot\frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!\cdot 8^2}\cdot x^{14}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!\cdot 8^3}\cdot x^{21}+\ldots+\frac{5}{2}\cdot\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!\cdot 8^n}\cdot x^{7n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2}\cdot\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!\cdot 8^n}\cdot x^{7n},$$

где $-1<-\dfrac{x^7}{8}\le 1$, т.е. $-\sqrt[7]{8}\le x<\sqrt[7]{8}$. ■

Пример 8. Разложить функцию $f(x)=x^2 arctg\,x$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся готовым разложением (8):

$$x^2 arctg\,x=x^2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=$$

$$=x^3-\frac{1}{3}\cdot x^5+\frac{1}{5}\cdot x^7-\frac{1}{7}\cdot x^9+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+3}}{2n+1}+\ldots,$$

где $-1\le x\le 1$. ■

§7. Некоторые приложения степенных рядов

1. Приближенное вычисление значений функции

Рассмотрим задачу вычисления значения функции $f(x)$ *при* $x=x_1$ *с заданной точностью* $\varepsilon>0$.

Пусть функция $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ может быть разложена в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

и $x_1\in(-R;R)$. Тогда точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x=x_1$:

$$f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots,$$

а приближенное значение равно частичной сумме $S_n(x_1)$:

$$f(x_1)\approx S_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n.$$

Точность этого приближенного равенства увеличивается с ростом номера n.

Абсолютная ошибка приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т.е.

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1)=a_{n+1}x_1^{n+1}+a_{n+2}x_1^{n+2}+a_{n+3}x_1^{n+3}+\ldots\,.$$

Другими словами, абсолютная ошибка $\left|f(x_1)-S_n(x_1)\right|$ находится как оценка остатка $r_n(x_1)$ полученного ряда. Если ряд является рядом лейбницевского типа, то ошибка меньше, чем модуль первого из отброшенных членов, т.е.

$$\left|r_n(x_1)\right|=\left|u_{n+1}(x_1)+u_{n+2}(x_1)+u_{n+3}(x_1)+...\right|<\left|u_{n+1}(x_1)\right|.$$

В случае, когда ряд знакоположительный или знакопеременный, поступают следующим образом: для этого ряда составляют ряд из модулей его членов и подбирают для него положительный ряд с большими членами (как правило, это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который бы легко суммировался. И тогда в качестве оценки $\left|r_n(x_1)\right|$ берется величина остатка нового ряда.

Пример 1. Найти $\cos 1$ с точностью до $0{,}0001$.

Решение. В разложении (6) (см. §6) положим $x=1$ и получим:

$$\cos 1=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}... \; .$$

Так как $1>0{,}0001$, $\frac{1}{3!}\approx 0{,}16667>0{,}0001$, $\frac{1}{4!}\approx 0{,}04167>0{,}0001$, $\frac{1}{6!}\approx 0{,}00139>0{,}0001$, $\frac{1}{8!}\approx 0{,}00002<0{,}0001$, то для нахождения $\cos 1$ с точностью до $0{,}0001$ достаточно взять четыре первых слагаемых:

$$\cos 1\approx 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\approx 0{,}8736.$$

При этом допускаемая ошибка меньше, чем модуль первого отброшенного члена, т.е. меньше 0,00002. ■

Пример 2. Найти $\sqrt[3]{e}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Воспользуемся готовым разложением (4) (см. §6) и положим в нем $x=1/3$:

$$\sqrt[3]{e}=1+\frac{1/3}{1!}+\frac{(1/3)^2}{2!}+\frac{(1/3)^3}{3!}+...+\frac{(1/3)^n}{n!}+...=$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 2!}+\frac{1}{3^3\cdot 3!}+...+\frac{1}{3^n\cdot n!}+... \; .$$

Справа получили знакоположительный ряд. Поэтому для оценки ошибки $r_n(x)$ и подберем для ряда $r_n(x)$ знакоположительный ряд с большими членами:

$$r_n(x)=\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}+\frac{1}{3^{n+2}\cdot(n+2)!}+\frac{1}{3^{n+3}\cdot(n+3)!}+...=$$

$$=\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot(n+2)}+\frac{1}{3^2\cdot(n+2)(n+3)}+...\right)<$$

$$<\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot(n+1)}+\frac{1}{3^2\cdot(n+1)^2}+...\right)=\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3\cdot(n+1)}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3^n\cdot n!\cdot(3n+2)},$$

т.е. $r_n(x)<\frac{1}{3^n\cdot n!\cdot(3n+2)}$. Теперь остается подобрать наименьшее натуральное число n, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{3^n\cdot n!\cdot(3n+2)}<0{,}00001$. Это неравенство выполняется при $n\geq 5$. Тогда

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 2!}+\frac{1}{3^3\cdot 3!}+\frac{1}{3^4\cdot 4!}+\frac{1}{3^5\cdot 5!}\approx 1{,}39561. \qquad \blacksquare$$

2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ *с заданной точностью до* $\varepsilon>0$.

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд и отрезок $[a;b]$ включен в интервал сходимости $(-R;R)$ ряда. Тогда для вычисления заданного интеграла применяют свойство почленного интегрирования степенного ряда. Ошибка, получаемая при вычислениях, определяется так же, как и при вычислении значений функции.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^4}{x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, применив разложение (5) (см. §6), в котором заменим x на x^4:

$$\frac{\sin x^4}{x^2}=\frac{1}{x^2}\cdot\left(x^4-\frac{x^{12}}{3!}+\frac{x^{20}}{5!}-\frac{x^{28}}{7!}+...\right)=x^2-\frac{x^{10}}{3!}+\frac{x^{18}}{5!}-\frac{x^{26}}{7!}+... \; .$$

Заметим, что полученный ряд сходится при $x\in\Re$.

Интегрируя почленно этот ряд на отрезке $[0;1]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty;+\infty)$, получим:

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x^4}{x^2}dx=\int\limits_0^1\left(x^2-\frac{x^{10}}{3!}+\frac{x^{18}}{5!}-\frac{x^{26}}{7!}+...\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^{11}}{11\cdot 3!}+\frac{x^{19}}{19\cdot 5!}-\frac{x^{27}}{27\cdot 7!}+...\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{11\cdot 3!}+\frac{1}{19\cdot 5!}-\frac{1}{27\cdot 7!}+... \; .$$

Получили ряд лейбницевского типа. Сравним каждый член этого ряда по модулю с заданной точностью, отбросим те, которые меньше заданной точности и найдем алгебраическую сумму оставшихся членов ряда. Так как $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333 > 0{,}001$, $\frac{1}{11 \cdot 3!} \approx 0{,}0151 > 0{,}001$, $\frac{1}{19 \cdot 5!} \approx 0{,}0004 < 0{,}001$, то

$$\int_0^1 \frac{\sin x^4}{x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{11 \cdot 3!} \approx 0{,}318. \qquad \blacksquare$$

Контрольные задания

Задание № 1

Исследовать ряд на сходимость.

1.01. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}}$	1.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+5}{n(n+1)(n+3)}$
1.02. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+4}$	1.17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$
1.03. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^9+1}}$	1.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[5]{n^7+3n-1}}$
1.04. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$	1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3}{(7n^2+2)^4}$
1.05. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+2n+3}$	1.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+8n+9}$
1.06. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n^2+2)}$	1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^4}$
1.07. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$	1.22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{(n^4+1)^2}$
1.08. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+4)}$	1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+1)^7}}$
1.09. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-4}}$	1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^5}}$
1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+13}$	1.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n^2)}{n^2}$
1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+2)^5}$	1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3+2}$
1.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+4}$	1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{(2n-1)^6}$
1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^4}$	1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$
1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$	1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n-3}{n^8+4n+5}$
1.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$	1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+2}}$

Задание № 2

Исследовать ряд на сходимость.

2.01. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n \cdot (n-1)!}$	2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$
2.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1} \cdot (n^3+1)}{(n+1)!}$	2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$
2.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n \cdot 2n!}{(2n)!}$	2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n-1} \cdot \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$
2.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \dfrac{1}{2^n}$	2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! \cdot (2n+1)!}{(3n)!}$
2.05. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}$	2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(2n)!}$
2.06. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{6^n \cdot (n^2-1)}{n!}$	2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$
2.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(n+2)!}$	2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{3^n \cdot (2n+1)}$
2.08. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{2n}}{(2n-1)!}$	2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3n!}$
2.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(3n)!}$	2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n^2}$
2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}$	2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{2n}}{(2n+1)!}$
2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{n-1}}$	2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{e^n}$
2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{n^n}$	2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$
2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$	2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(3n)!}$
2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n \cdot (n+1)!}{(2n)!}$	2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{5^n \cdot (n+1)^2}$
2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$	2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{(n+1) \cdot 2^n}}$

Задание № 3

Исследовать ряд на сходимость.

3.01. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$	3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^{-n} \cdot \left(\frac{n-2}{5^{n+1}}\right)^n$
3.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$	3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$
3.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$	3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{\pi}{3n}$
3.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$	3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot e^{-n}$
3.05. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$	3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}$
3.06. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$	3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2}$
3.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$	3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$
3.08. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$	3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3^n}$
3.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{8n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$	3.24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n+10}{2n-3}\right)^{\frac{n}{3}}$
3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n-2}}{n^n}$	3.25. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{n-3}\right)^{n^2}$
3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$	3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \cdot \left(\frac{n+2}{7n-1}\right)^n$
3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}$	3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+2}}{3^n}$
3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{16n+2}\right)^{\frac{n}{4}}$	3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{6n^2+1}\right)^{2n}$
3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^{1-2n}$	3.29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{-n}$
3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n+4}\right) \cdot 3^{-n}$	3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{n^2}$

Задание № 4

Исследовать ряд на сходимость.

4.01. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$	4.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$
4.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2n+1)^2}$	4.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{n^3+3}$
4.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+9}$	4.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln^2 n$
4.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$	4.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2-1}}$
4.05. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$	4.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
4.06. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$	4.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$
4.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$	4.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$
4.08. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$	4.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$
4.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+1}$	4.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2}$
4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$	4.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\ln^2(3n+1)}{3n+1}$
4.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+2)^2}$	4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$
4.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16+8n+n^2}$	4.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+10}$
4.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-8n+16}$	4.28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}$
4.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$	4.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1}$
4.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$	4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt{9n+8}}$

Задание № 5

Исследовать ряд на сходимость.

5.01. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{7n+2}$	5.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$
5.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin^n\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$	5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$
5.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2^n \cdot n!}$	5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^9+1}}$
5.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^{2n+1}}$	5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^{2n+2}}$
5.05. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+3) \cdot n!}$	5.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n \cdot n!}$
5.06. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$	5.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{6^{n+1} \cdot (n+2)!}$
5.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt[4]{n+1}}$	5.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot (3n+1)}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$
5.08. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n \ln^4 n}$	5.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{n^{n-1}}$
5.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{2n}}$	5.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 7^{2n}}{(2n-1)!}$
5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2 \cdot \sqrt[5]{n^7}}$	5.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$
5.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$	5.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$
5.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{2n-1}{5n}$	5.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 4^{-n}}{\sqrt{n}}$
5.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n^3}{(n+1)!}$	5.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+2)!}$
5.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$	5.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot (3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$
5.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^3 \cdot 7^n}$	5.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1`)^n \cdot 3^n}{5^n \cdot (n+1)^2}$

Задание № 6

Найти область сходимости ряда.

6.01. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!\cdot(n+3)}$	6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{10n-12}$
6.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$	6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}$
6.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot x^{2n-2}}{(2n+1)!}$	6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n\cdot x^n}{\sqrt[4]{n}}$
6.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\cdot x^{n+1}$	6.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n\cdot(n^2+1)}\cdot x^n$
6.05. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\cdot x^{n+2}$	6.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{n^3\cdot 7^n}$
6.06. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{(n-2)^n}$	6.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}}$
6.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{(2n-1)\cdot 2n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	6.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^5}$
6.08. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$	6.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n\cdot n!}$
6.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$	6.24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-3}}$
6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$	6.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$
6.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$	6.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{n\sqrt{n+1}}$
6.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\cdot x^n}{n(n+1)}$	6.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{16^n\cdot(2n+1)}$
6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n^3}$	6.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)\cdot x^{n+1}}{3^n}$
6.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n\cdot x^n}{n!}$	6.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^7}$
6.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 5^n\cdot x^{n+1}}{\sqrt{n}}$	6.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$

Задание № 7

Найти область сходимости ряда.

7.01. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$	7.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot (x-5)^{n-1}}{n^2+n}$
7.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$	7.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \frac{(x+1)^n}{2^n}$
7.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$	7.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{3n^2+2} \cdot \frac{(x+3)^n}{3^n}$
7.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$	7.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^{2n}}{\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n-1}}$
7.05. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$	7.20. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+5)^{2n+1}}{\sqrt{n-2} \cdot \sqrt{n-3}}$
7.06. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$	7.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot (x+3)^n}{3^n}$
7.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{2n \cdot 4^n}$	7.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-1)^{2n}}{5^{2n}}$
7.08. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$	7.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x+4)^n}{\sqrt{3n^2+1}}$
7.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n}$	7.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cdot \left(\frac{2x-1}{5}\right)^n$
7.10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)^3 \cdot (x+3)^{2n}}{2n+3}$	7.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{(4\sqrt{n}+3) \cdot 5^n}$
7.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}$	7.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1} \cdot \left(\frac{x-2}{2}\right)^n$
7.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1) \cdot 2^n}$	7.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n \cdot 2^{3n}}$
7.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{10^{2n}}{n^2+1} \cdot (x+1)^{2n}$	7.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} \cdot (x-2)^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$
7.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{5^{2n}}$	7.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{5^{n-1} \cdot n \cdot \sqrt{n^2+1}}$
7.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{3^n \cdot (4n^2+5)}$	7.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot (2n+1)}$

Задание № 8

Разложить функцию в ряд Маклорена, пользуясь готовыми разложениями.

8.01. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$	8.16. $f(x)=\dfrac{1}{9+x^4}$
8.02. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cdot\sin x^2$	8.17. $f(x)=\dfrac{x^2}{4+x^2}$
8.03. $f(x)=\cos^2 5x$	8.18. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$
8.04. $f(x)=\dfrac{x}{8-4x^2}$	8.19. $f(x)=(x^2+tg\,x^2)\cdot\cos x^2$
8.05. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	8.20. $f(x)=\sqrt[3]{8+x^3}$
8.06. $f(x)=e^{-3x}+e^{3x}$	8.21. $f(x)=e^{4x}-e^{-4x}$
8.07. $f(x)=(x-ctg\,x)\cdot\sin x$	8.22. $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x^4$
8.08. $f(x)=\sqrt[4]{1+x}$	8.23. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$
8.09. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$	8.24. $f(x)=\dfrac{1}{\sec x}\cdot tg\,x$
8.10. $f(x)=1+\cos 8x$	8.25. $f(x)=\dfrac{1}{\sec 2x}\cdot tg\,2x$
8.11. $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$	8.26. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}\cdot\sin x^3$
8.12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-x^2}}$	8.27. $f(x)=2\cos^2 3x$
8.13. $f(x)=\sin 2x+x\cos 2x$	8.28. $f(x)=\dfrac{1}{\cos ec2x}\cdot ctg2x$
8.14. $f(x)=\sin^2 4x$	8.29. $f(x)=\dfrac{1}{\cos ec\,x}\cdot ctg\,x$
8.15. $f(x)=e^{x^3}$	8.30. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$

Задание № 9

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

9.01. $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}$	9.16. $f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x_0 = 1$
9.02. $f(x) = e^{\cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$	9.17. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2$
9.03. $f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$	9.18. $f(x) = \cos^2 2x, \quad x_0 = 0$
9.04. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}, \quad x_0 = 15$	9.19. $f(x) = e^{3x}, \quad x_0 = 1$
9.05. $f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{8}$	9.20. $f(x) = \ln (x-3), \quad x_0 = 8$
9.06. $f(x) = e^{arctg\, x}, \quad x_0 = 0$	9.21. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x_0 = 1$
9.07. $f(x) = \ln \cos x, \quad x_0 = 2\pi$	9.22. $f(x) = \sin 3x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{3}$
9.08. $f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 4$	9.23. $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad x_0 = 1$
9.09. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{5}, \quad x_0 = 10$	9.24. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = -1$
9.10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x_0 = 3$	9.25. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = -1$
9.11. $f(x) = \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1$	9.26. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}, \quad x_0 = -2$
9.12. $f(x) = \sqrt[3]{e^{-2x}}, \quad x_0 = -2$	9.27. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4$
9.13. $f(x) = \frac{x}{4x-1}, \quad x_0 = 2$	9.28. $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$
9.14. $f(x) = \sqrt[3]{e^{x+7}}, \quad x_0 = -5$	9.29. $f(x) = tg\, x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$
9.15. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$	9.30. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}, \quad x_0 = 7$

Задание № 10

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001.

10.01. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}\,dx$	10.16. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
10.02. $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\,e^x\,dx$	10.17. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2)\,dx$
10.03. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx$	10.18. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}\,dx$
10.04. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$	10.19. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
10.05. $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$	10.20. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$
10.06. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{9+x^4}$	10.21. $\int\limits_0^{0,1} e^{-5x^2}\,dx$
10.07. $\int\limits_0^{0,3} \frac{dx}{16-x^3}$	10.22. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-3x}}{x}\,dx$
10.08. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^4}{x}\,dx$	10.23. $\int\limits_0^{0,2} \cos(25x^2)\,dx$
10.09. $\int\limits_0^{1/2} x\cos x^3\,dx$	10.24. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$
10.10. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$	10.25. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+4x)}{x}\,dx$
10.11. $\int\limits_0^{1} \cos x^2\,dx$	10.26. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{x/4}}{x}\,dx$
10.12. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$	10.27. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$
10.13. $\int\limits_0^{0,1} \sin(100x^2)\,dx$	10.28. $\int\limits_0^{0,2} \ln(1+x^2)\,dx$
10.14. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$	10.29. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$
10.15. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx$	10.30. $\int\limits_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx$

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 431 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для студентов втузов. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 415 с.

3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 288 с.

4. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.

Оглавление

Кривдина Лариса Николаевна
Опалева Галина Павловна
Драгунова Валерия Викторовна

Ряды

Методические указания и контрольные задания по высшей математике

Подписано в печать
Формат 60×90 1/16 . Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. . Усл. печ. л. .
Тираж 500 экз.
Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет" (ННГАСУ),
603950, Н.Новгород, ул. Ильинская, 65.

Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, ул. Ильинская, 65.