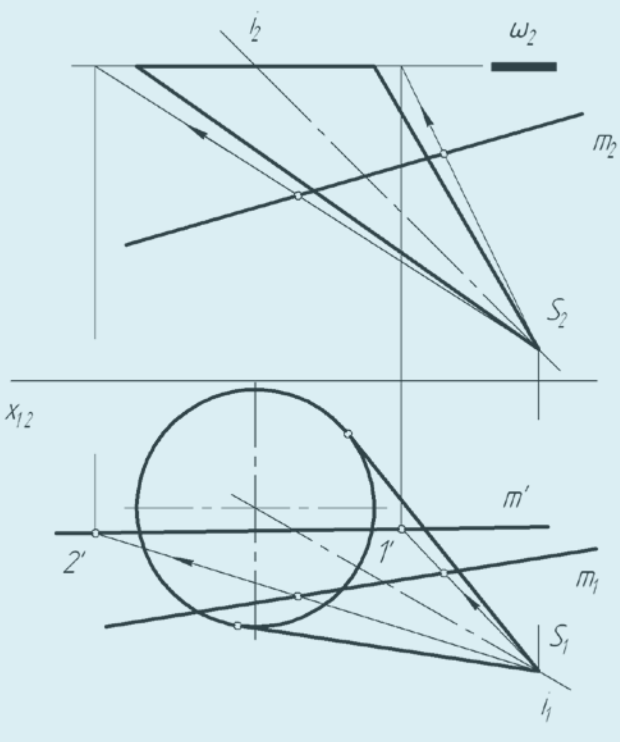
Мошкова Т.В.   Тюрина В.А.

Сборник задач по начертательной геометрии
(часть I)



НИЖНИЙ НОВГОРОД

2010

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Т. В. Мошкова, В. А. Тюрина

СБОРНИК ЗАДАЧ
по начертательной геометрии
(часть I)

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2010

ББК 22.151.3
М 87
Т 98

Рецензенты:

Толок А.В. – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой инженерной графики Московского государственного технологического университета «Станкин»

Вышнепольский В.И. – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой начертательной геометрии и инженерной графики Московской государственной академии тонкой химической технологии

Мошкова Т. В. Сборник задач по начертательной геометрии [Текст]: учеб. пособие для вузов. Ч.I / Т. В. Мошкова, В. А. Тюрина; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2010. - 188 с. ISBN 978-5-87941-742-5

Сборник задач является частью учебно-методического комплекса по начертательной геометрии. Включает контрольные вопросы, сведения из теории и задачи по семи разделам курса.

Пособие предназначено для студентов технических вузов различного профиля; также может быть интересно преподавателям графических дисциплин высшей школы и аспирантам.

ББК 22.151.3

ISBN 978-5-87941-742-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сборник предназначен для студентов всех технических специальностей. По содержанию, терминологии и обозначениям данное учебное пособие соответствует учебнику В.С. Полозова, С.И. Роткова и В.И. Дергунова «Базисный курс начертательной геометрии»[1]. Сборник задач является частью учебно-методического комплекса по начертательной геометрии и составлен применительно к методике преподавания, предложенной авторами.

В учебном пособии собраны материалы по семи разделам курса начертательной геометрии, включающие в себя контрольные вопросы, сведения из теории, задачи. Цель выполнения студентами этих упражнений - уяснение сути изучаемого материала. Рассмотрена общая методика решения задач. Приводятся примеры решения типовых задач по каждому разделу с подробными комментариями. Сделан акцент на выбор наиболее рационального способа решения в каждом случае. Особое внимание уделяется записи исходных данных, искомых элементов и возможных способов решения задач в символическом виде.

Большинство задач сборника служит для самостоятельной работы студентов. Некоторые задачи могут решаться на практических занятиях с помощью преподавателя.

При составлении настоящего сборника были использованы учебно-методические материалы кафедры начертательной геометрии, машинной графики и теоретических основ САПР Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, а также учебные пособия и сборники задач, ссылки на которые приводятся.

---

[1] Полозов, В. С. Базисный курс начертательной геометрии [Текст] : учеб. пособие / В. С. Полозов, С. И. Ротков, В. И. Дергунов ; под общ. ред. С. И. Роткова ; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – М. : АСВ, 2006. – 180 с.

Общая методика решения задач

1. Определить, какой является данная задача: позиционной или метрической.
2. Проанализировать исходные данные. Записать их в символическом виде.
3. Определить искомые элементы; возможные варианты ответа. Записать в символическом виде.
4. Определить тип, если данная задача - позиционная. Вспоминая изученный материал и работая с учебниками, определить различные варианты решения задачи. Записать в символическом виде.
5. Выбрать вариант решения.
6. Записать план решения в символическом виде.
7. Выполнить чертёж к задаче тонкими линиями. Обратить внимание на соответствие чертежа исходным данным. Показать построения точек касания, показать осевые линии, выполнить все необходимые надписи на свободном поле чертежа. Определить видимость рёбер многогранников, оснований конусов и цилиндров.
8. Решить задачу на чертеже. Проверить решение.
9. Дополнить и уточнить запись решения задачи в символическом виде.
10. Записать ответ. Выделить на чертеже красным цветом проекции тех элементов, которые являются искомыми.
11. Обвести чертёж, соблюдая типы линий. Выполнить все необходимые надписи.
12. Получить удовлетворение от качественно выполненной работы и отличную оценку.

ПРЕДМЕТ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Все дисциплины, которые студенты должны изучить за время обучения в вузе, разбиваются на группы. Это происходит при любом выборе профессиональной направленности. К одной из групп относятся дисциплины, при изучении которых происходит формирование и развитие интеллектуальных способностей, необходимых для будущей профессиональной деятельности. К другой группе относятся дисциплины, изучаемые в связи с необходимостью научной аргументации построения объектов и процессов, составляющих основу будущей профессиональной деятельности. Третья группа включает в себя общеразвивающие дисциплины[2]. Для дисциплин третьей группы дано условное название. Неразрывная связь обучения и развития существует при изучении любой дисциплины, к какой бы группе они не относились.

Для успешного освоения содержания образования студенту необходимо уяснить цель изучения каждой дисциплины. Первым этапом этого пути является отнесение каждой из изучаемых дисциплин к той или иной вышеназванной группе[3].

Начертательная геометрия исследует объекты окружающего мира (их принято называть оригиналами) с помощью изображений, содержащих геометрическую информацию об этих объектах. К геометрической относится информация о форме, размерах, положении самих оригиналов в пространстве или их частей относительно друг друга.

---

[2] Информатизация образования: направления, средства, технологии [Текст]: пособие для системы повышения квалификации / под общ. ред. С. И. Маслова. – М. : Изд. МЭИ, 2004. – 868 с.

[3] Педагогика профессионального образования [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Е. П. Белозерцев, А. Д. Гонеев, А. Г. Пашков и др. ; под ред. В. А. Сластенина. – М. : Академия, 2004. – 368 с.

Изображения оригиналов, несущие геометрическую информацию о них, принято называть их геометрическими моделями.

Предметом начертательной геометрии является разработка и исследование геометрических моделей оригиналов, а также разработка и исследование способов решения на этих моделях геометрических задач, связанных с оригиналами.

Начертательную геометрию, таким образом, можно отнести к группе дисциплин, изучающих теоретические основы профессии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие группы дисциплин изучаются студентами в вузе?
2. К какой из этих групп можно отнести начертательную геометрию?
3. Как принято называть объекты окружающего мира в рамках начертательной геометрии?
4. Что использует начертательная геометрия для исследования объектов окружающего мира?
5. Что называют геометрической моделью оригинала?
6. Что является предметом начертательной геометрии?
7. Кого из учёных принято считать основоположником начертательной геометрии как науки? Почему?
8. В какую эпоху жил этот учёный?
9. Каковы его основные достижения?
10. Когда и где именно в России появилась первая кафедра начертательной геометрии?
11. Кто из российских ученых является автором первого учебника начертательной геометрии на русском языке?

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под термином "параметр" согласно теории параметризации?
2. В какой зависимости находятся параметры по отношению друг к другу?
3. Какие существуют параметры в зависимости от вида их задания?
4. Привести примеры формальных и действительных параметров.
5. Что называется параметризацией фигуры?
6. Чем реализуются параметры на чертежах?
7. Что надо учитывать при назначении параметров?
8. Какое требование накладывается на значения величин, задающих параметры?
9. Что такое геометрические условия?
10. Что такое параметры формы и параметры положения?
11. Какая параметризация называется внутренней, а какая внешней?
12. С чего начинается процесс измерения параметров?
13. Как называются элементы систем параметризации в геометрии и на производстве?
14. Как выбирается система параметризации по отношению к оригиналу при измерении параметров положения?
15. Как выбирается система параметризации по отношению к оригиналу при измерении параметров формы?
16. Что называется размерностью пространства?
17. Привести примеры одномерного, двумерного, трёхмерного пространств.
18. По какой формуле производится подсчёт количества параметров какого-либо оригинала?

ЗАДАЧИ

Точки, прямые, плоскости

Задача 1. Сколько параметров необходимо затратить на задание следующих оригиналов:

1) прямой общего положения в пространстве R^2;

2) прямой, параллельной одной из координатных осей системы параметризации, в пространстве R^2;

3) прямой, инцидентной одной из координатных осей системы параметризации, в пространстве R^2;

4) прямой, проходящей через начало отсчета системы параметризации, в пространстве R^2;

5) окружности в пространстве R^2 (рассмотреть различные варианты положения центра окружности);

6) прямой общего положения в пространстве R^3;

7) прямой, проходящей через заданную точку, в пространстве R^3;

8) прямой, параллельной одной из координатных плоскостей системы параметризации в пространстве R^3;

9) прямой, параллельной двум координатным плоскостям системы параметризации в пространстве R^3;

10) прямой, инцидентной одной из координатных плоскостей системы параметризации в пространстве R^3;

11) плоскости общего положения в пространстве R^3;

12) плоскости, перпендикулярной к одной из координатных плоскостей системы параметризации в пространстве R^3;

13) плоскости, перпендикулярной к двум координатным плоскостям системы параметризации в пространстве R^3;

14) окружности в пространстве R^3 (рассмотреть различные варианты положения центра окружности);

15) трёх взаимно перпендикулярных прямых, инцидентных общей точке.

Задача 2. Сколько параметров необходимо затратить на задание каждой из точек – ***M***, ***N***, ***F*** и ***A*** в данной системе параметризации (рис.1)?

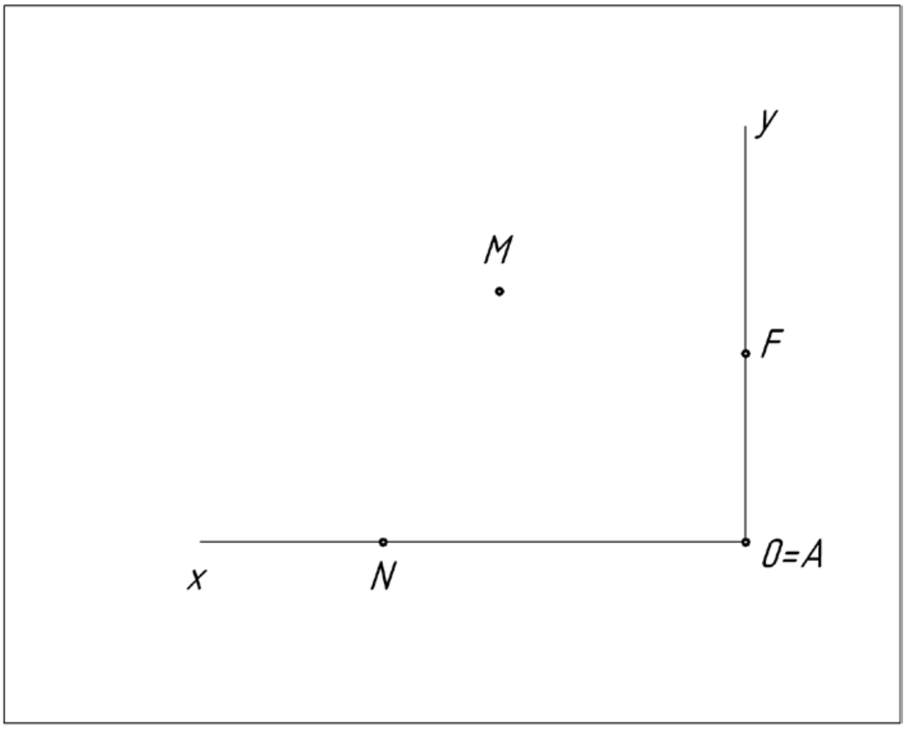


Рис.1

Задача 3. Сколько параметров необходимо затратить на задание каждой из прямых – ***p***, ***d***, ***k*** и ***m*** в данной системе параметризации (рис.2)?

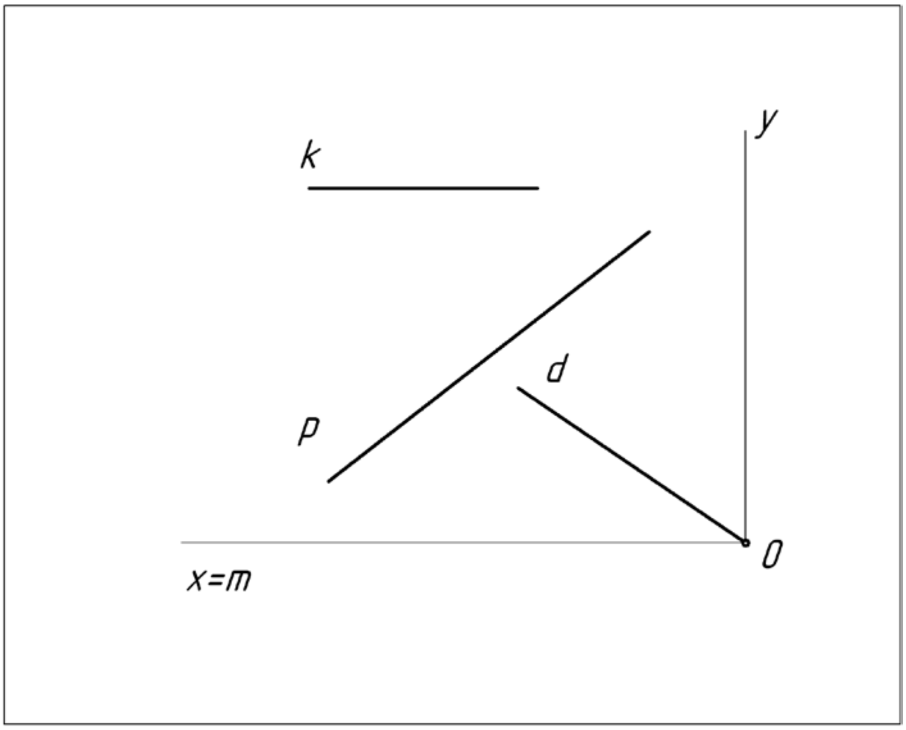


Рис.2

Задача 4. В пространстве $\boldsymbol{R^1}$ (прямая $\boldsymbol{m}$) заданы отрезки $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{EF}$ и $\boldsymbol{MN}$ (рис.3). Общая система параметризации имеет базовую точку **0**. Для какого из заданных оригиналов показан параметр формы?

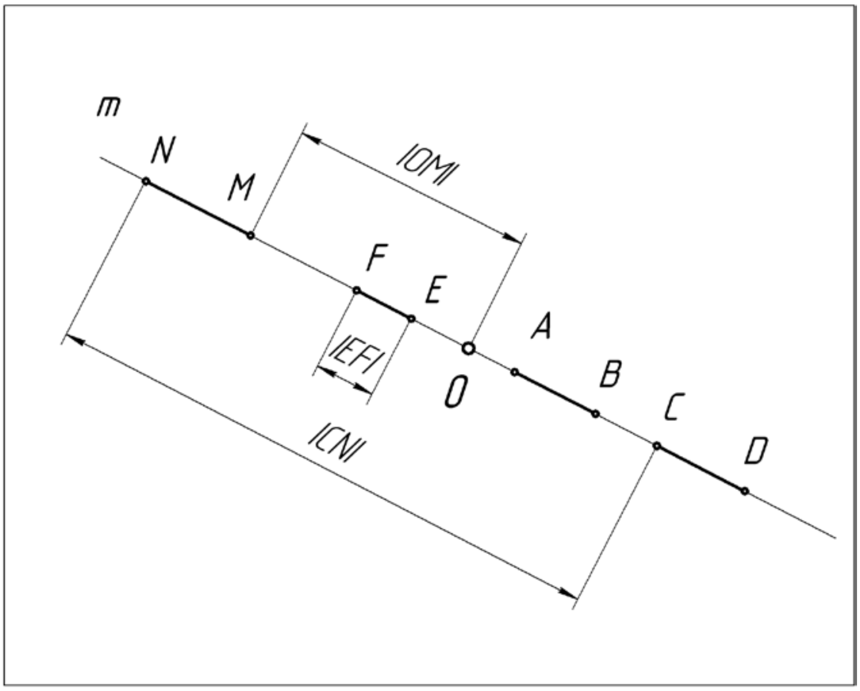


Рис.3

Задача 5. Сколько параметров необходимо затратить на задание каждой из окружностей, с центрами в точках $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ (рис.4)?

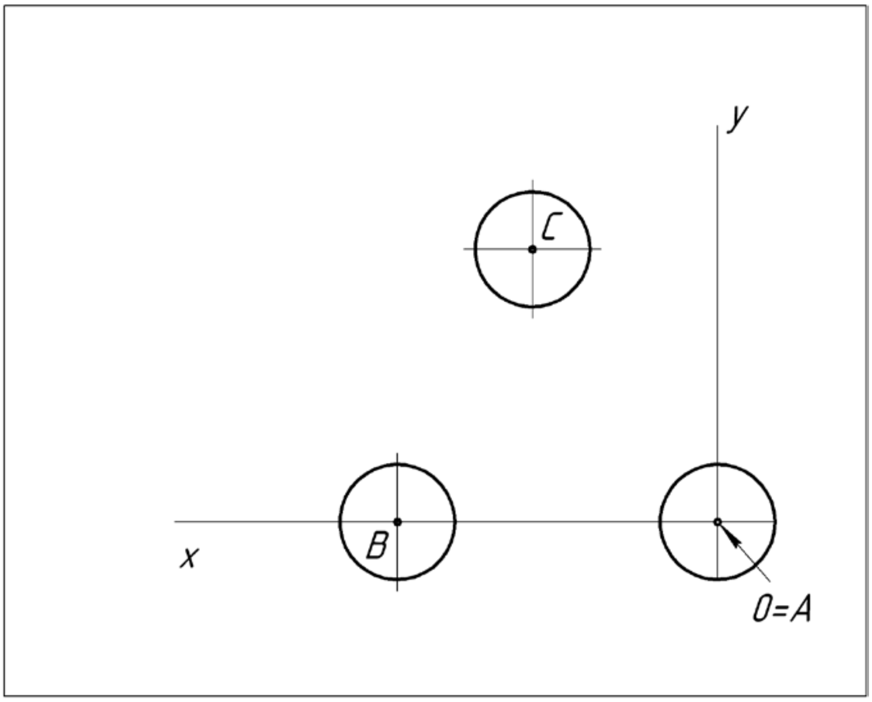


Рис.4

Задача 6. Сколько параметров определяют положение каждой из точек ***A***, ***B*** и ***C***, заданных своими проекциями на эпюре Монжа (рис.5)?

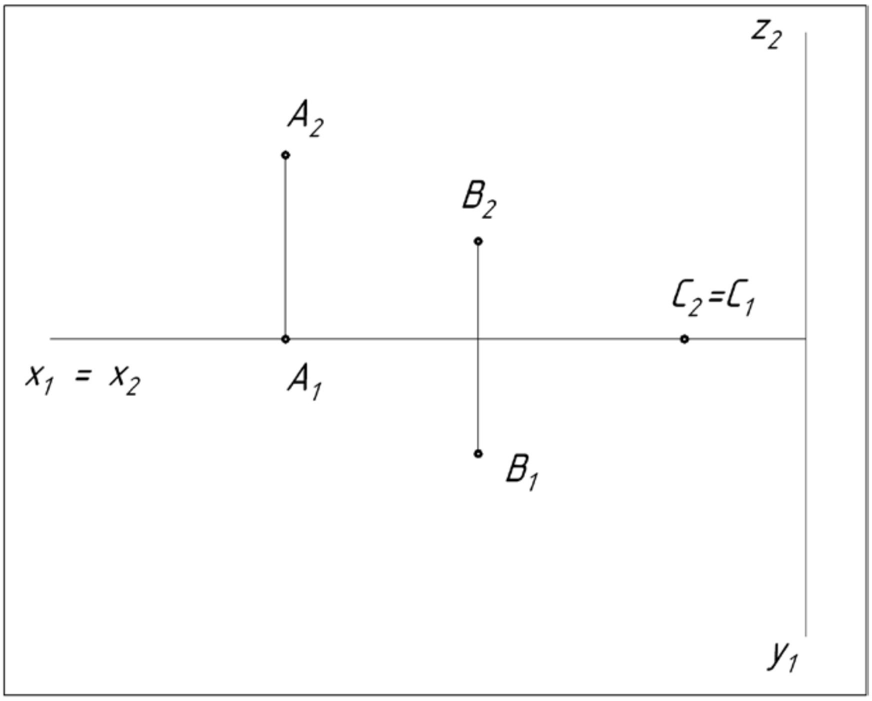


Рис.5

Задача 7. Сколько параметров определяют положение каждой из прямых ***m***, ***d*** и ***k*** , заданных своими проекциями на эпюре Монжа (рис.6)?

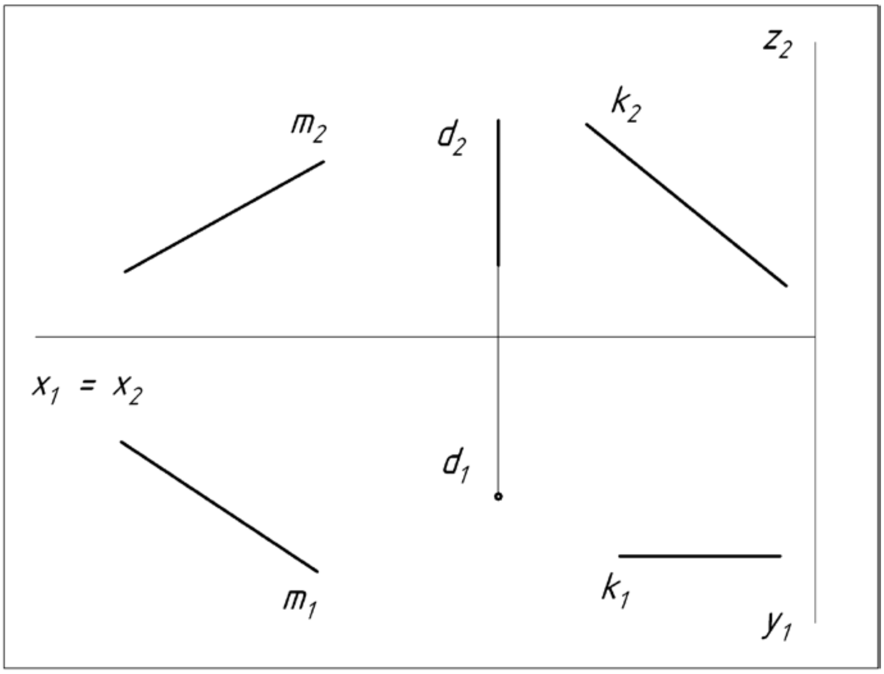


Рис.6

Задача 8. Сколько параметров определяют положение каждой из прямых ***m***, ***d***, ***k*** и ***p***, заданных своими проекциями на эпюре Монжа (рис.7)?

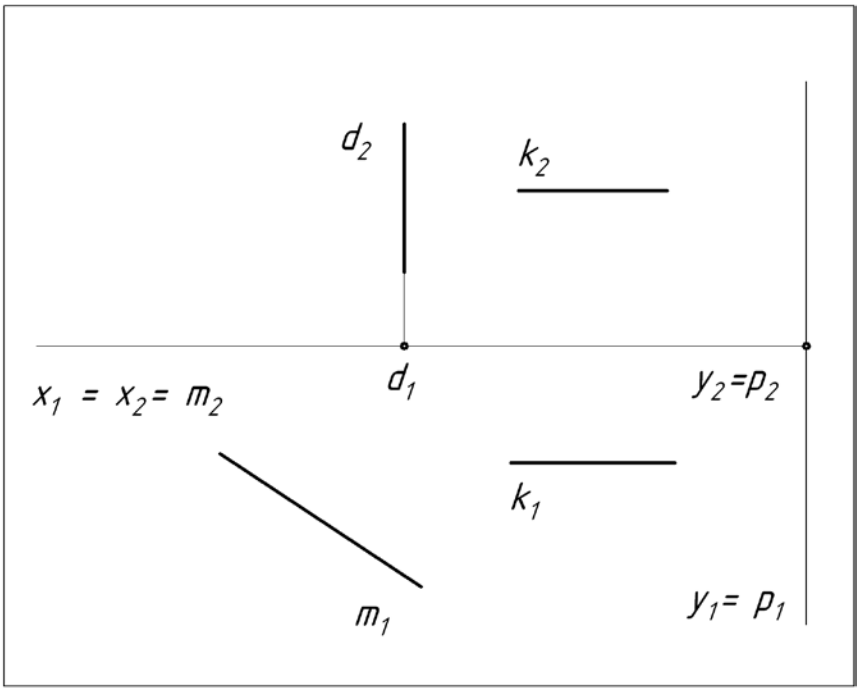


Рис.7

Задача 9. Сколько параметров необходимо затратить на задание каждой из плоскостей – **β, ω,** и **α** (рис.8)?

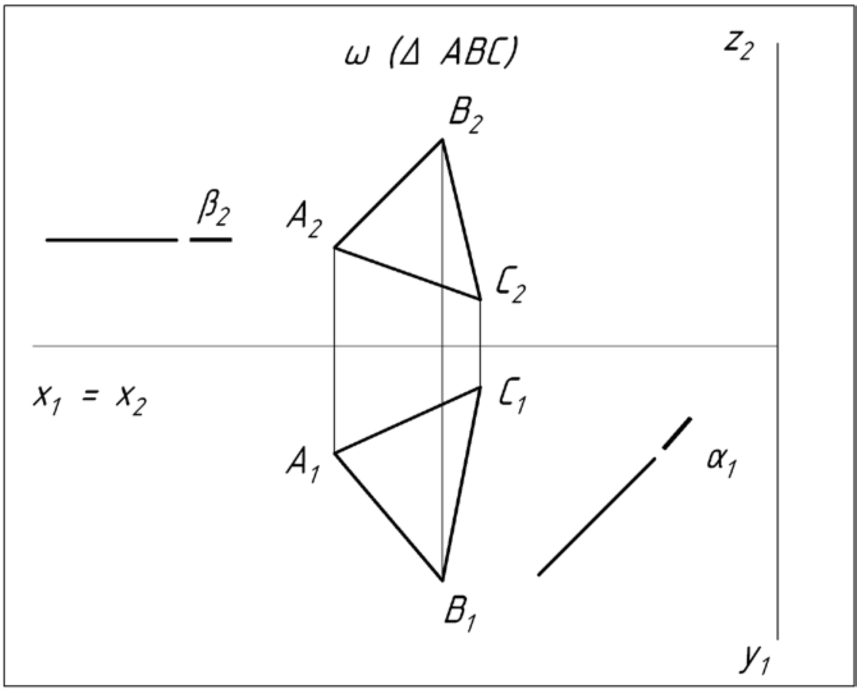


Рис.8

Кривые второго порядка

Задача 10

1. Построить эллипс, задав произвольные значения величин большой и малой оси. Найти положение фокусов эллипса.
2. Задать систему параметризации. Подсчитать количество параметров формы для эллипса.

Задача 11

1. Построить параболу, задав произвольное значение фокусного расстояния.
2. Задать систему параметризации. Подсчитать количество параметров формы для параболы.

Задача 12

1. Построить гиперболу, задав произвольные значения величин фокусного расстояния и расстояния между вершинами.
2. Задать систему параметризации. Подсчитать количество параметров формы для гиперболы.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Эллипс

Эллипс – это плоская замкнутая кривая, у которой сумма расстояний каждой из её точек $\boldsymbol{M}$ до двух заданных точек $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ есть величина постоянная и равная большой оси эллипса:

$$\boldsymbol{M\,F_1 + M\,F_2 = AB}.$$

Оси эллипса – большая (БОЭ) $\boldsymbol{AB}$ и малая (МОЭ) $\boldsymbol{CD}$ – взаимно перпендикулярны и одна делит другую пополам.

Если из концов малой оси $\boldsymbol{CD}$, как из центров, описать дугу окружности радиусом, равным половине большой оси эллипса $\boldsymbol{R=OA=OB}$, то она пересечёт её в точках $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, называемых фокусами (рис.9).

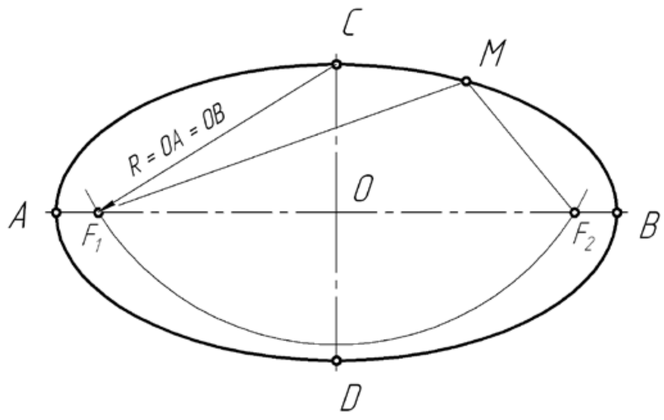


Рис.9

На рис.10 приведён один из способов построения эллипса по его осям. На заданных осях ***AB*** и ***CD***, как на диаметрах, строят две концентрические окружности с центром в точке ***O***. Большую окружность делят на произвольное число частей, и полученные точки соединяют прямыми с центром ***O***. Из точек пересечения **1**, **1′**, **2**, **2′**, **3**, **3′**, **4**, **4′** со вспомогательными окружностями проводят отрезки вертикальных и горизонтальных прямых до их взаимного пересечения в точках ***E***, ***F***, ***K***, ***M***, принадлежащих эллипсу.

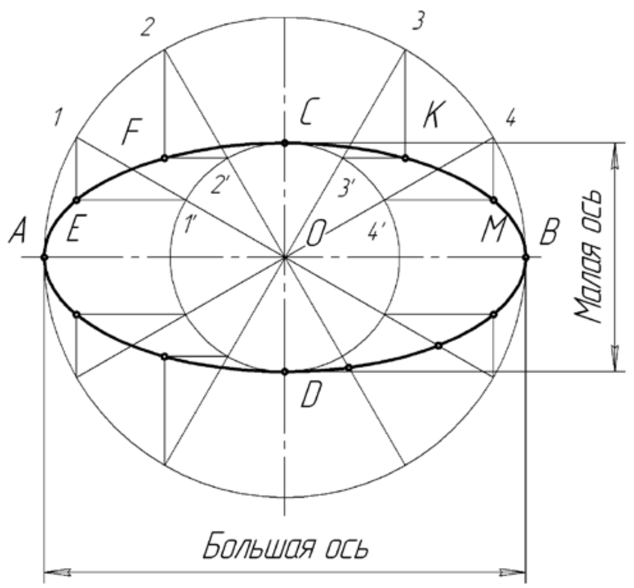


Рис.10

Парабола

Парабола – плоская незамкнутая кривая линия, каждая точка которой расположена на одинаковом расстоянии от данной прямой ***MN*** – директрисы, перпендикулярной оси параболы, и от фокуса ***F***. Вершина параболы ***A*** расположена посередине между фокусом и директрисой. Расстояние от вершины до фокуса (или от вершины до директрисы) называют фокусным расстоянием (***p***).

Для построения параболы по заданной директрисе и фокусу через точку ***F*** проводят ось ***x*** параболы перпендикулярно директрисе ***MN***. Отрезок ***EF*** делят пополам и получают вершину ***A*** параболы. Перпендикулярно оси параболы на произвольном расстоянии от вершины проводят прямые. Из точки ***F*** радиусом, равным расстоянию ***L*** от директрисы до соответствующей прямой, например, ***CB***, делают засечки на этой прямой – точки ***C*** и ***B***. Построив, таким образом, несколько пар симметричных точек, проводят через них с помощью лекала плавную кривую (рис.11).

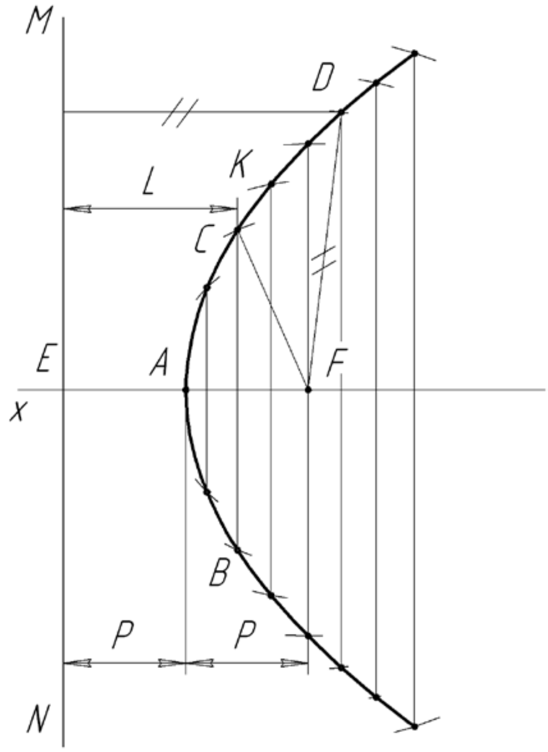


Рис.11

Гипербола

Гиперболой называется плоская кривая, у которой разность расстояний от каждой её точки до двух данных точек $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная расстоянию между её вершинами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, например $\boldsymbol{PF_1 - P\,F_2 = AB}$.

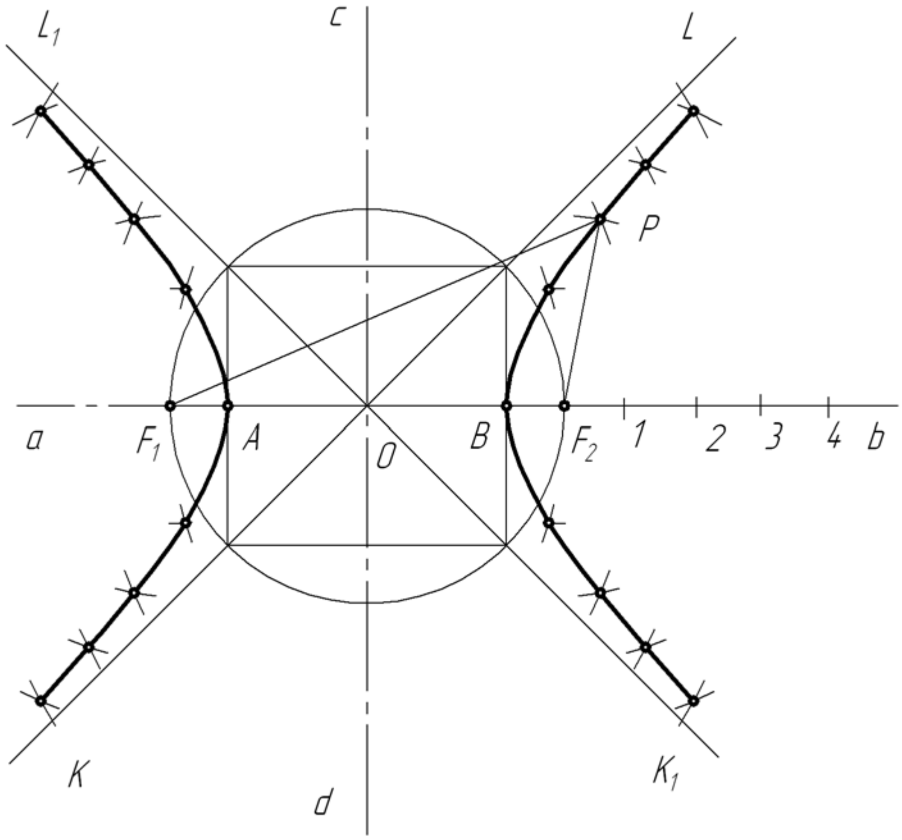


Рис.12

У гиперболы две оси симметрии – действительная ***ab*** и мнимая ***cd*** (рис.12). Две прямые ***KL*** и $\boldsymbol{K_1L_1}$, проходящие через центр **0** гиперболы и касающиеся её ветвей в бесконечности, называются асимптотами.

Гиперболу можно построить по заданным вершинам ***A*** и ***B*** и фокусам $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$. Вершины гиперболы определяют, вписывая прямоугольник в окружность, построенную на фокусном расстоянии (отрезке $\boldsymbol{F_1F_2}$), как на диаметре. На действительной оси ***ab*** справа от фокуса $\boldsymbol{F_2}$ намечают произвольные точки **1**, **2**, **3**, **4**… Из фокусов $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ проводят дуги окружностей сначала радиусом, равным расстоянию от точки A до точки **1**, затем радиусом, равным расстоянию от точки B до точки **1**, до взаимного пересечения по обе стороны от действительной оси гиперболы. Далее выполняют взаимное пересечение следующей пары дуг радиусами равными расстоянию от точки A до точки **2** и от точки B до точки **2** – так получена точка P - и т.д. Полученные точки пересечения дуг принадлежат правой ветви гиперболы. Точки левой ветви будут симметричны построенным точкам относительно мнимой оси cd.

ЗАДАЧИ

Параметризация составных фигур

Пример «Параметризация плоского контура»

Условие задачи: выполнить подсчёт параметрического числа контура, составленного из отрезков прямых линий и дуг окружностей (рис.13).

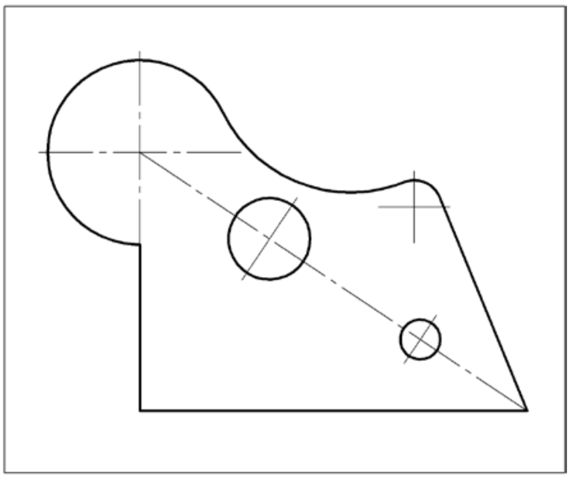


Рис.13

Анализ исходных данных

- На черновике выполнить эскиз контура.
- Обозначить на эскизе элементы, составляющие контур. Элементарные части фигуры, являющиеся отрезками прямых обозначить буквой **П** с цифрой, обозначающей порядковый номер прямой. Дуги

окружностей - буквой **О** с цифрой, обозначающей порядковый номер окружности. Необходимо выявить не только элементы, составляющие собственно контур, но и вспомогательные прямые и окружности, показанные на чертеже-задании. Эти элементы имеют важное значение для верного определения параметрического числа контура. Например, в контуре-образце такой вспомогательной прямой является прямая **П4**, которой инцидентны центры трёх окружностей (рис.14).

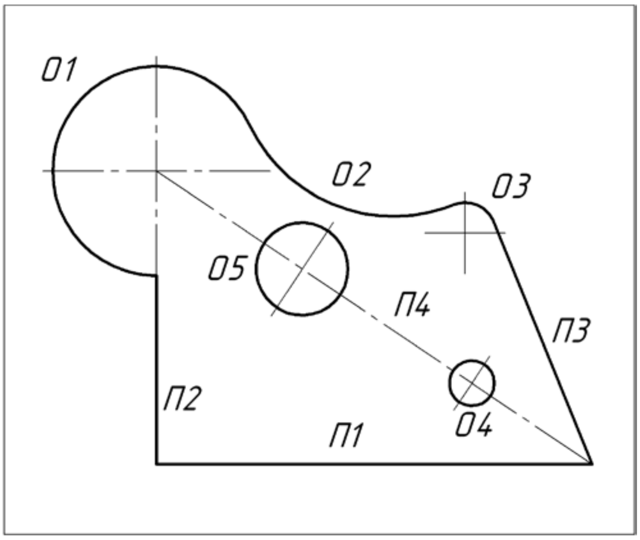


Рис.14

Возможно, придётся корректировать в процессе параметризации контура набор сегментов, вводя новые элементы, не выявленные первоначально.

- Выполнить запись элементов в символическом виде. Элементы контура перечисляются последовательно, взаимосвязанными группами. Обход контура производится из любой точки по направлению часовой стрелки. Отдельные элементы или их группы отделяются друг от друга точкой с запятой.

П1_П2_О1_О2_О3_П3; П4; О4; О5

- Определить, есть ли у контура оси (или одна ось) симметрии. В данном случае ось симметрии у контура отсутствует.

Определение искомых элементов

Параметрическое число контура является суммой параметров, необходимых для описания каждого из элементов, составляющих контур:

$$\sum \mathbf{\Pi}_{контура} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Pi}_{элемента\ \boldsymbol{i}}.$$

В данном случае $\boldsymbol{n}$ = 9, т.е. количество элементов, для которых необходимо выполнить подсчёт параметров, равно 9.

Выполнение чертежа к задаче

При решении задачи чертёж целесообразно выполнять после параметризации контура. В этом случае будет выявлено взаимное положение сегментов контура, а также очерёдность построений. Размеры изображения задаются произвольно. Размеры наносить не нужно.

Запись решения задачи

Выполнение расчёта числа параметров начинается с назначения ортогональной системы координат таким образом, чтобы рассматриваемая фигура обладала максимально возможным числом геометрических условий.

Если контур имеет ось симметрии, с ней необходимо совместить одну из координатных осей (рис.15).

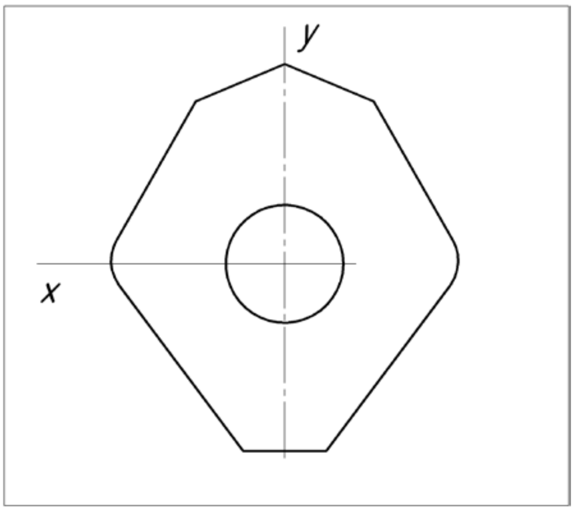


Рис.15

Запись в символическом виде в таком случае будет иметь следующий вид: **ось *0y* $\subset$ оси симметрии контура; *0* $\subset$ центру О1**.

В рассматриваемом примере координатная ось ***0x*** инцидентна прямой **П1**, координатная ось ***0y*** совпадает с прямой **П2** (рис.16).

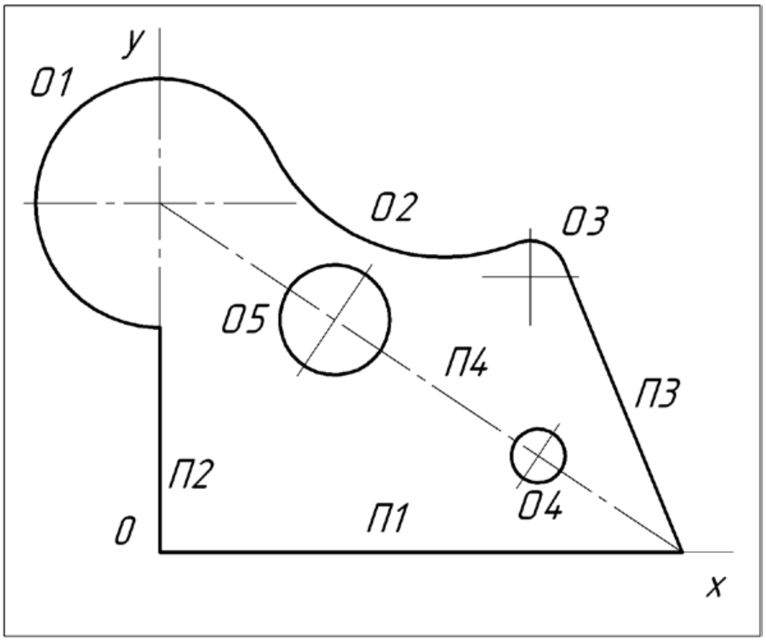


Рис.16

На чертеже необходимо указать координатные оси и начало координат.

Для однозначного выделения из множества фигур единственной фигуры требуется конечное число параметров, реализуемых на чертеже размерами, число которых должно быть минимально необходимым и достаточным. Подсчёт этого числа можно выполнить по следующей формуле:

$$\mathbf{П_{элемента} = ПФ + ПП - ГУ},$$

где $\mathbf{П_{элемента}}$ – необходимое и достаточное число параметров для определения элемента; параметрическое число элемента; **ПП** – признаки, определяющие положение любой фигуры в пространстве относительно выбранной системы координат (параметры положения); **ПФ** – признаки, позволяющие из множества фигур выделить фигуры одной формы (параметры формы); **ГУ** – количество параметров, заменяемых геометрическими условиями, возникающими между фигурами.

На листе должна присутствовать запись формулы с расшифровкой.

Решение задачи

Далее производится подсчёт количества параметров для каждого элемента контура и заполнение таблицы. Наименование столбцов таблицы приводится на рис.17. Размер столбцов и строк таблицы произвольный.

№ элемента	Условное обозначение элемента	ПП параметры положения	ПФ параметры формы	Геометрические условия ГУ	Количество параметров, заменяемых ГУ	Сумма параметров элемента $\Sigma П$	Размер на чертеже

Рис.17

В графе **«Геометрические условия»** следует в символическом виде записать геометрические условия, относящиеся к данному элементу. Графа **«Размер на чертеже»** остаётся свободной.

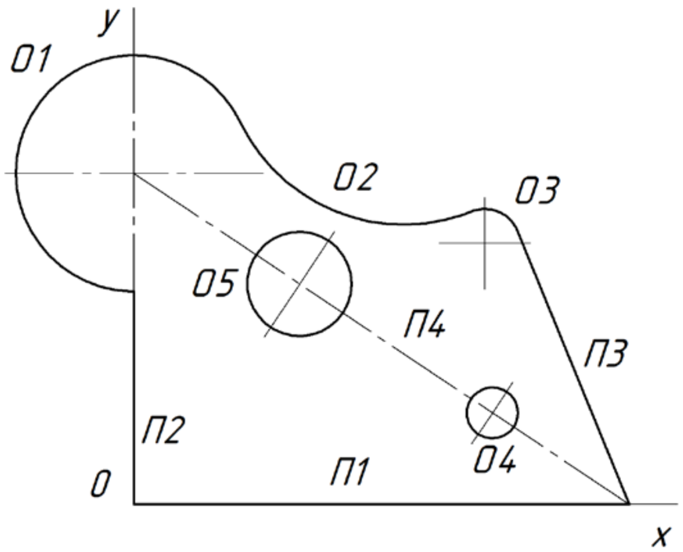
Образец решённой задачи «Параметризация плоского контура» приведен на рис.18 и 19.

При заполнении таблицы были приняты следующие условные обозначения:

$\subset$ - знак инцидентности

$\cap$ - знак пересечения

$\underline{\Omega}$ - знак касания



Дано: П1_П2_О1_О2_О3_П3; П4; О4; О5
Контур не имеет оси симметрии

Найти: $П_{контура} = \sum_{i=1}^{n} П_i$, где n=9

Назначение системы параметризации:

ось $0x \subset П1$
ось $0y \subset П2$

$П_{элемента}$ = ПФ + ПП – ГУ, где

$П_{элемента}$ – параметрическое число элемента
ПФ – количество параметров формы
ПП – количество параметров положения
ГУ – количество параметров,
заменяемых геометрическими условиями

Назаров Т.В.	гр. 0923	Подпись студента

Рис. 18

№ элемента	Условие обозначение элемента	ПФ	ПП	Геометрические условия ГУ	Количество ГУ	ΣП	Размер на чертеже
1	П1	0	2	П1 $\subset$ 0x	2	0	
2	П2	0	2	П2 $\subset$ 0y	2	0	
3	01	1	2	ц.01 $\subset$ 0y	1	2	
4	03	1	2		0	3	
5	П3	0	2	П3 $\underline{\Omega}$ 03	1	1	
6	02	1	2	02 $\underline{\Omega}$ 01; 02 $\underline{\Omega}$ 03	2	1	
7	П4	0	2	ц.01 $\subset$ П4; П4$\subset$(П3$\cap$0x)	2	0	
8	04	1	2	ц.04 $\subset$ П4	1	2	
9	05	1	2		1	2	
Параметрическое число контура						11	

Назаров Т.В.	гр. 0923	Подпись студента

Рис.19

На чертежах параметры реализуются размерами, геометрическими условиями и условными обозначениями. Вторым этапом работы с задачей «Параметризация плоского контура» является нанесение размеров на чертеж. Общее количество размеров будет равно параметрическому числу контура. Каждый из размеров будет являться реализацией того или иного параметра. Один из вариантов нанесения размеров на рассмотренном контуре приведён на рис.20.

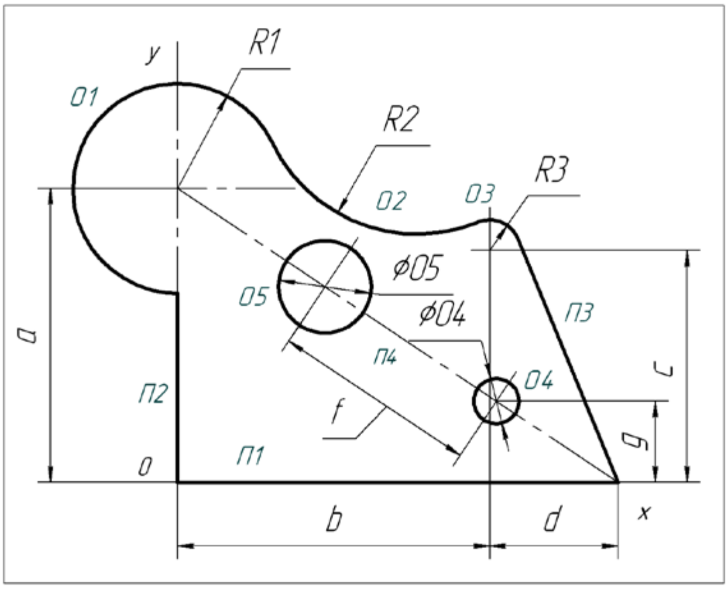


Рис.20

Еще один пример нанесения размеров показан на рис.21.

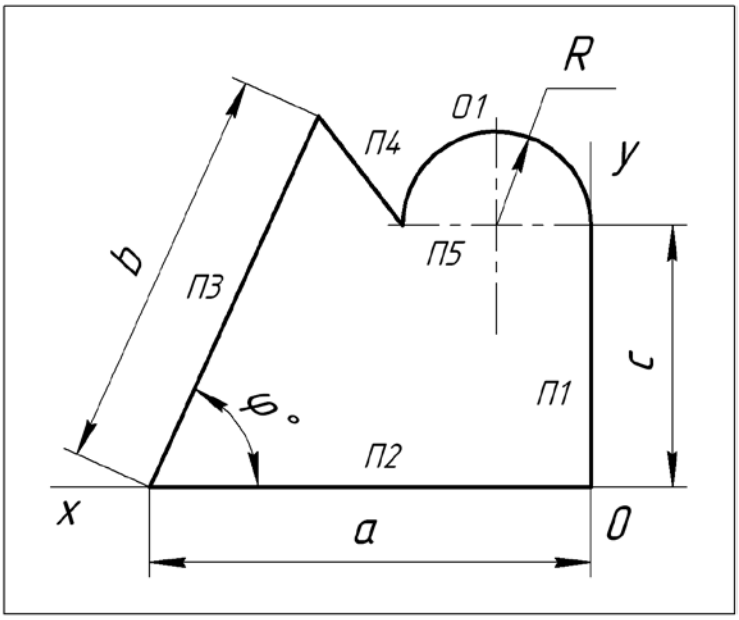


Рис.21

Таблица подсчета параметров для контура, показанного на рис.21, приведена на рис.22.

	Сегмент	ПП	ПФ	ГУ		Σ	Размер
1	П1	2	0	П1 ⊂ 0y	2	0	
2	П2	2	0	П2 ⊂ 0x	2	0	
3	П3	2	0	–	0	2	a,φ
4	П5	2	0	П5 // 0x	1	1	c
5	01	2	1	центр 01 ⊂ П5 01 $\underline{\bigcirc}$ 0y	2	1	R
6	П4	2	0	П4 ⊂ (П5 ∩ 01)	1	1	b
Итого						5	5

Рис.22

Задача 13. Подсчитать параметрическое число контура (рис.23).

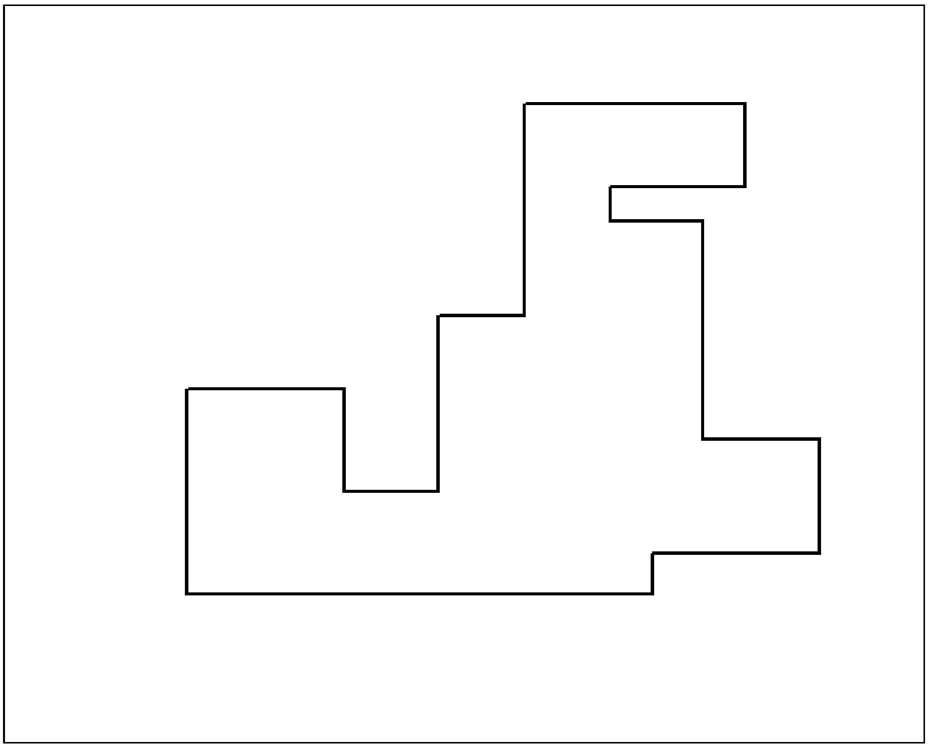


Рис.23

Задача 14. Подсчитать параметрическое число контура (рис.24).

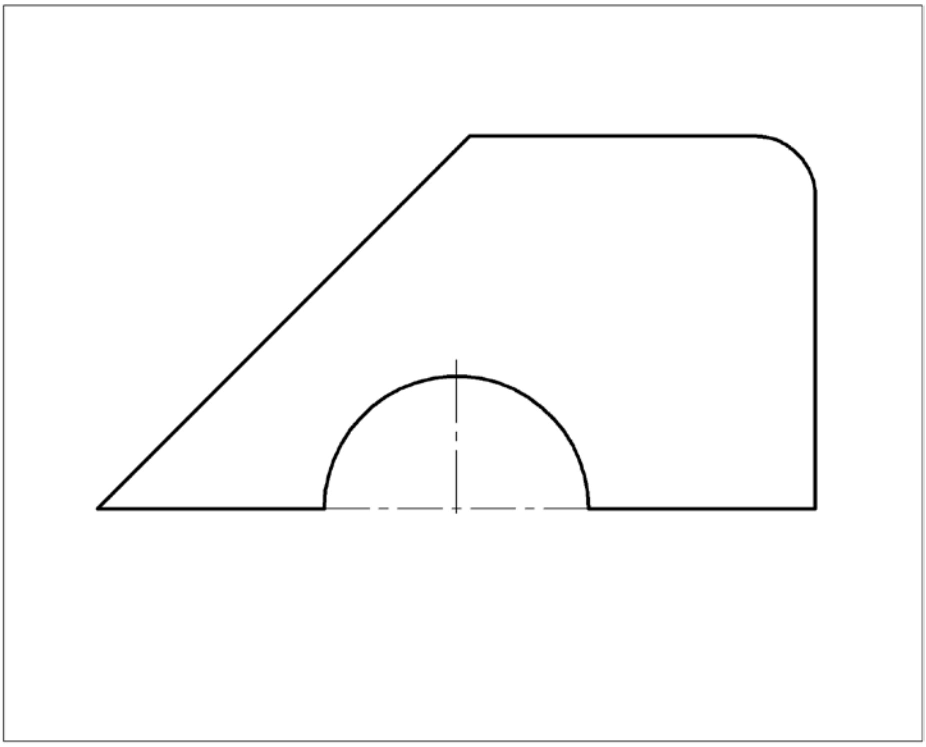


Рис.24

Задача 15. Подсчитать параметрическое число контура (рис.25).

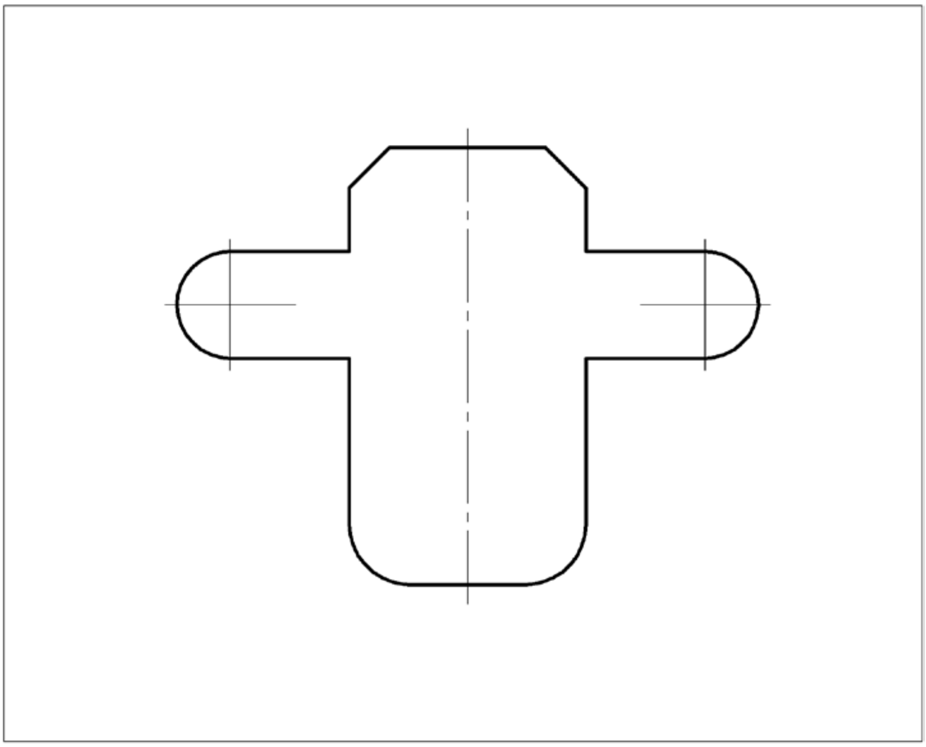


Рис.25

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие существуют виды проецирования?
2. Расположить виды прямолинейного проецирования от общего к частному.
3. На каком основании производится классификация параллельного проецирования на косоугольное и ортогональное?
4. Что понимают под инвариантами проецирования?
5. Перечислить инварианты проецирования.
6. Перечислить инварианты центрального проецирования.
7. Перечислить инварианты параллельного проецирования.
8. Перечислить инварианты ортогонального проецирования.
9. Какое пространство называется «проективным»?
10. Какие элементы называют «несобственными»?
11. В каком пространстве операция центрального проецирования может осуществляться без исключений? Что понимают под этим условием?
12. Какие требования предъявляются к проекционному чертежу?
13. Что понимают под наглядностью проекционного чертежа?
14. Что понимают под обратимостью проекционного чертежа?
15. Какой чертёж называется «полным»?
16. Какой чертёж называется «метрически определённым»?
17. Какова схема получения эпюра Монжа?
18. Какова схема получения аксонометрии?
19. Какова схема получения технического чертежа?
20. Какие виды обратимых чертежей получают с помощью метода центрального проецирования?
21. Какие виды обратимых чертежей получают с помощью метода параллельного проецирования?

ЗАДАЧИ

Проекции точек и прямых на эпюре Монжа

Задача 16. Три точки заданы своими координатами:

A (10, 20, 30), ***B*** (30, 10, 20), ***C*** (20, 30, 10).

Ответить на следующие вопросы:

- какая из точек расположена ближе (дальше) других к фронтальной плоскости проекций $\mathbf{\Pi_2}$?
- какая из точек расположена ближе (дальше) других к горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{\Pi_1}$?
- какая из точек расположена ближе (дальше) других к профильной плоскости проекций $\mathbf{\Pi_3}$?
- из двух точек – ***A*** и ***C*** – какая ближе к $\mathbf{\Pi_2}$?
- из двух точек – ***B*** и ***A*** – какая дальше от $\mathbf{\Pi_3}$?
- из двух точек – ***B*** и ***C*** – какая ближе к $\mathbf{\Pi_1}$?

Задача 17. Верно ли утверждение: «точка ***A*** задана на чертеже своими проекциями» (рис.26)?

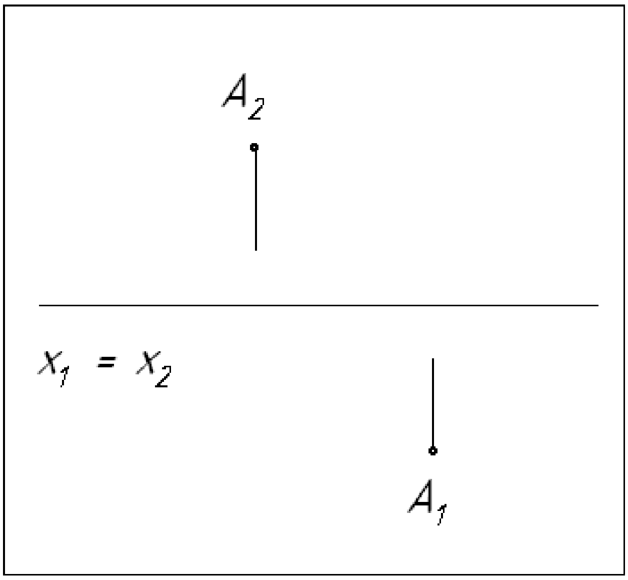


Рис.26

Задача 18. На эпюре Монжа заданы проекции трёх точек ***A***, ***B*** и ***D*** (рис.27). Чертёж какой точки является неполным?

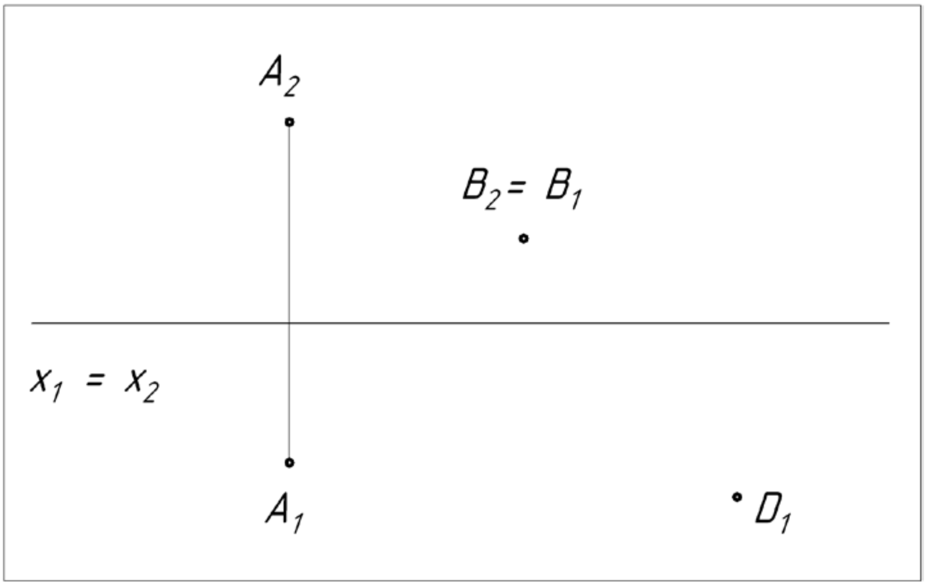


Рис.27

Задача 19. Три точки ***M***, ***P*** и ***F*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.28). Какая из точек расположена дальше (ближе) других точек от фронтальной плоскости проекций? Какая из точек расположена дальше (ближе) других от горизонтальной плоскости проекций? Какая из точек расположена дальше (ближе) других от профильной плоскости проекций?

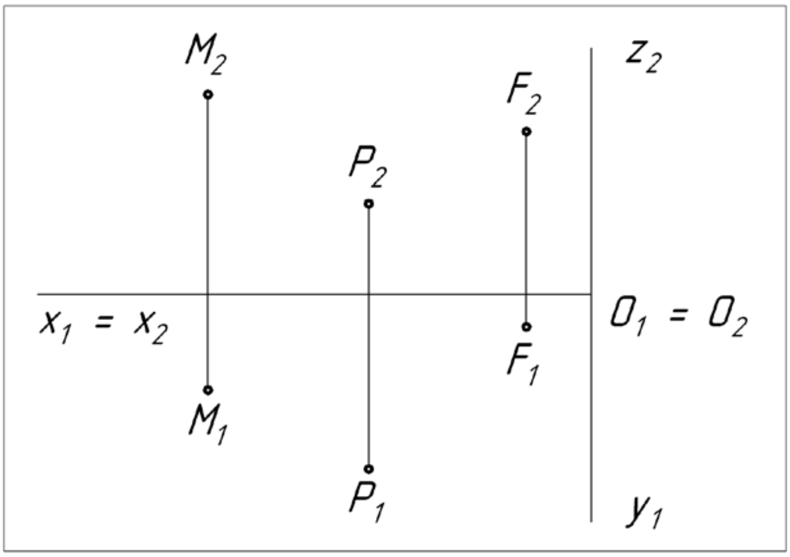


Рис.28

Задача 20. Три точки ***F***, ***D*** и ***B*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.29). Проанализировать чертёж и сделать вывод о положении каждой из точек. Результат представить в символическом виде.

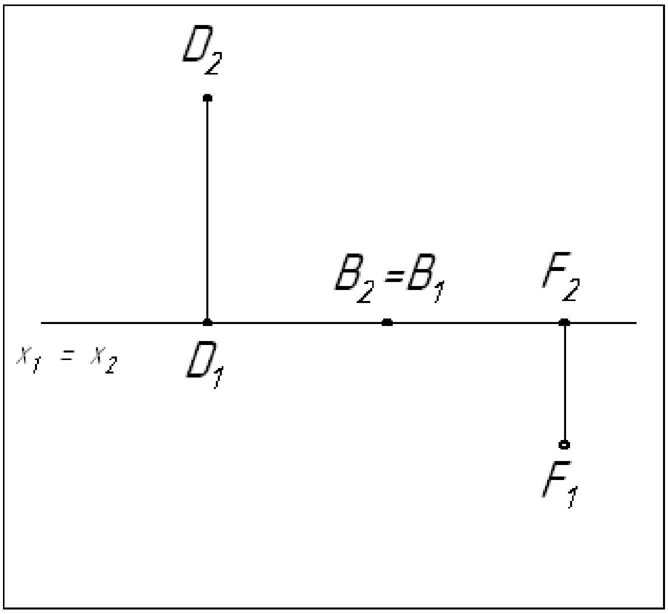


Рис.29

Задача 21. Три точки ***A***, ***M*** и ***D*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.30). В какой четверти пространства находится каждая из точек?

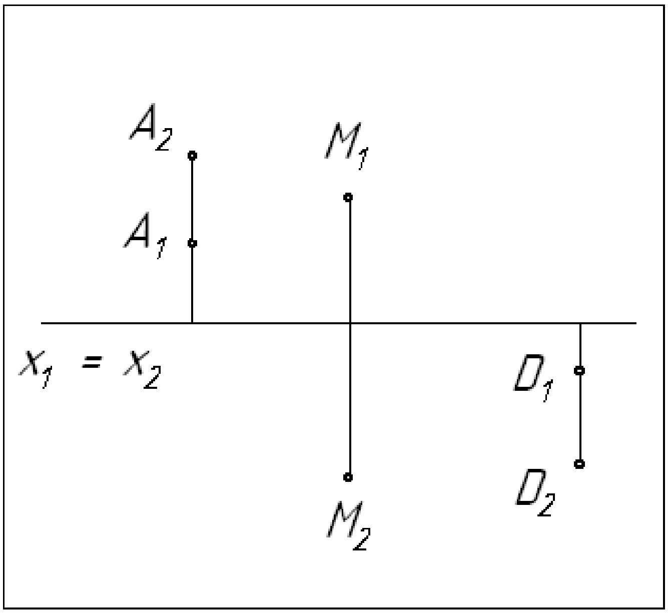


Рис.30

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Конкурирующие точки

Конкурирующими называют точки, инцидентные одной проецирующей прямой.

Две пары точек ***A*** и ***B***, **C** и ***D*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.31).

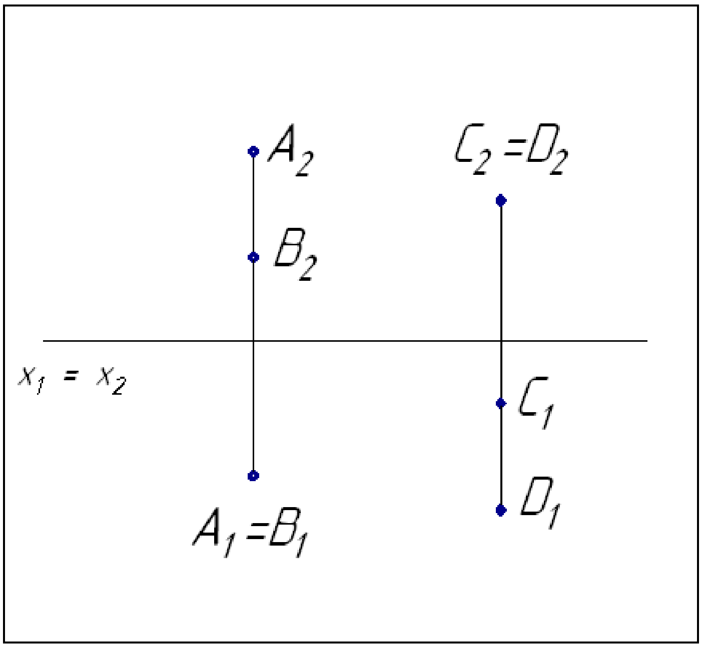


Рис.31

У точек совпадают горизонтальные (точки ***A*** и ***B***) или фронтальные (точки ***C*** и ***D***) проекции. Это происходит потому, что точки ***A*** и ***B*** инцидентны прямой, перпендикулярной к $\mathbf{П_1}$, а точки ***C*** и ***D*** – прямой, перпендикулярной к $\mathbf{П_2}$.

Поскольку для получения эпюра Монжа применяется ортогональное проецирование, то можно сказать, что названные пары точек инцидентны проецирующим прямым, т.е. являются конкурирующими. Конкуренция относится к видимости оригиналов на проекциях.

Видимость элементов оригиналов на чертеже определяется способом конкурирующих точек.

Рассмотрим пару точек ***A*** и ***B*** (рис.32). Требуется определить, проекция какой из точек будет видна на $\mathbf{\Pi_1}$.

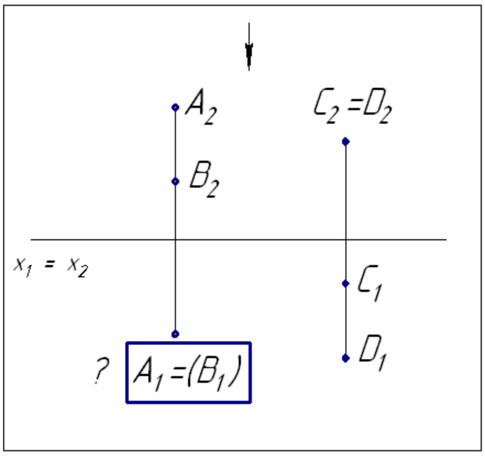


Рис.32

Стрелка показывает направление взгляда наблюдателя при получении горизонтальной проекции. Анализируя фронтальные проекции точек, можно сделать вывод, что точка ***A*** расположена ближе к наблюдателю, у неё больше значение координаты *z*, т.е. она находится выше точки ***B***. Поэтому проекцию точки ***A*** на $\mathbf{\Pi_1}$ мы видим, а проекция точки ***B*** – невидима. Обозначения невидимых проекций точек иногда заключают в скобки.

На рис. 33 положение наблюдателя при получении фронтальной проекции показано нижней стрелкой. Определена видимость фронтальных проекций точек: ***C*** – не видна, а ***D*** - видна. У точки ***D*** больше значение координаты *y*, она расположена ближе к наблюдателю, чем точка ***C***.

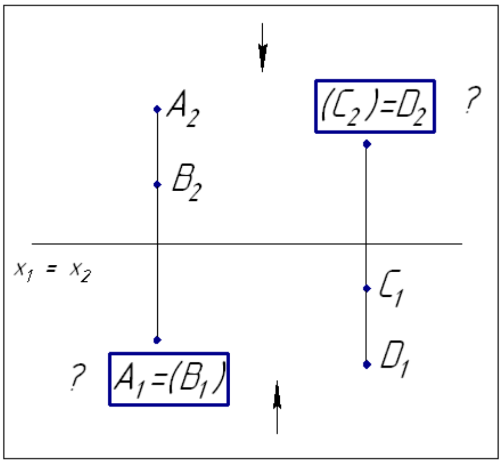


Рис.33

Задача 22. Две пары точек ***A*** и ***D***, ***M*** и ***F*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.34). Какие точки совпадают?

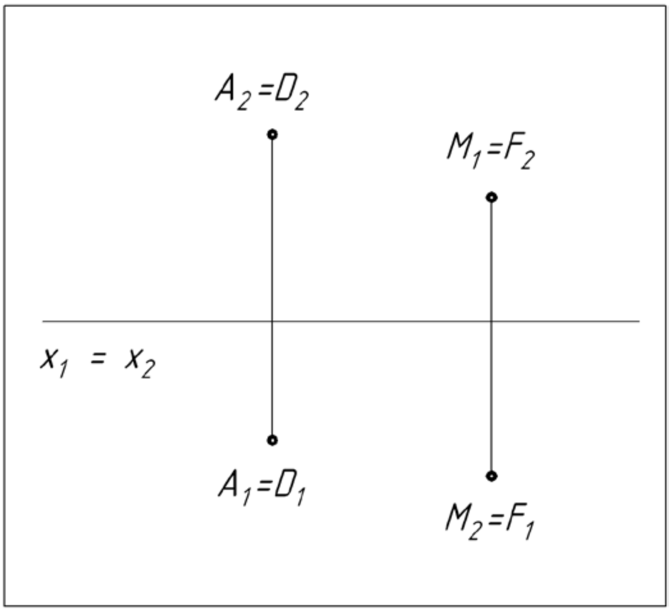


Рис.34

Задача 23. Прямая ***m*** задана своими проекциями на эпюре Монжа (рис.35). Построить проекции фронтального и горизонтального следов прямой ***m***.

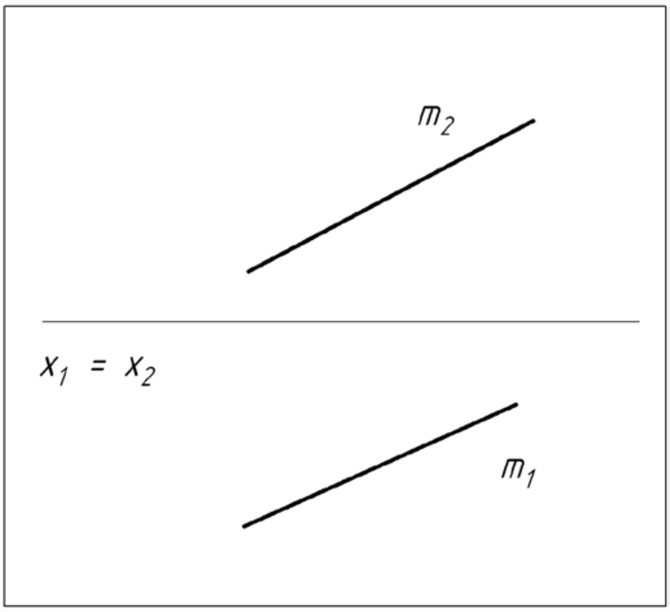


Рис.35

Задача 24. Три отрезка заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.36). Проанализировать чертёж и сделать вывод о положении каждого из отрезков. Результат представить в символическом виде.

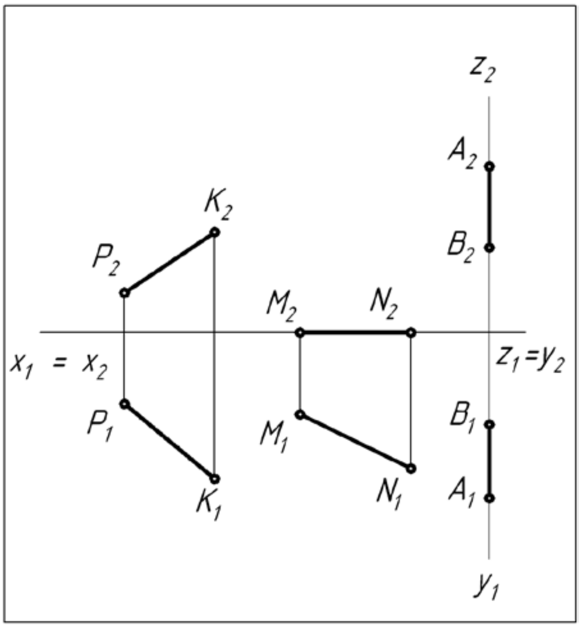


Рис.36

Задача 25. Три отрезка заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.37). Проанализировать чертёж и сделать вывод о положении каждого из отрезков. Результат представить в символическом виде.

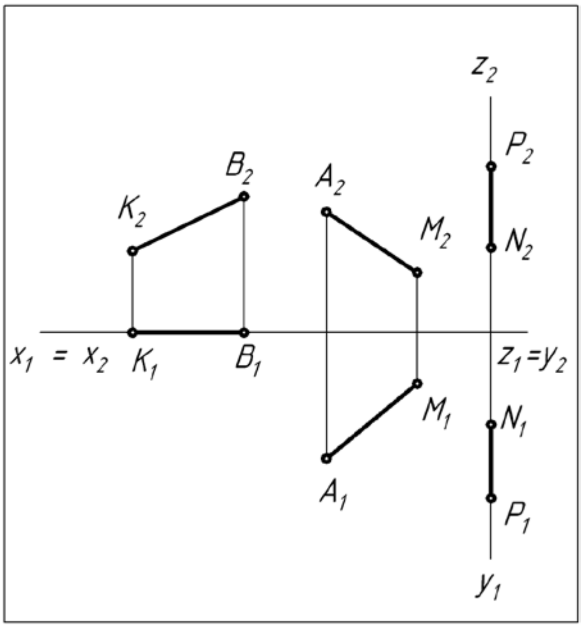


Рис.37

Задача 26. Прямые ***m***, ***p***, ***s***, ***b***, ***d***, ***k*** и ***c*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.38). Определить положение каждой прямой относительно плоскостей проекций. Результат записать в символическом виде.

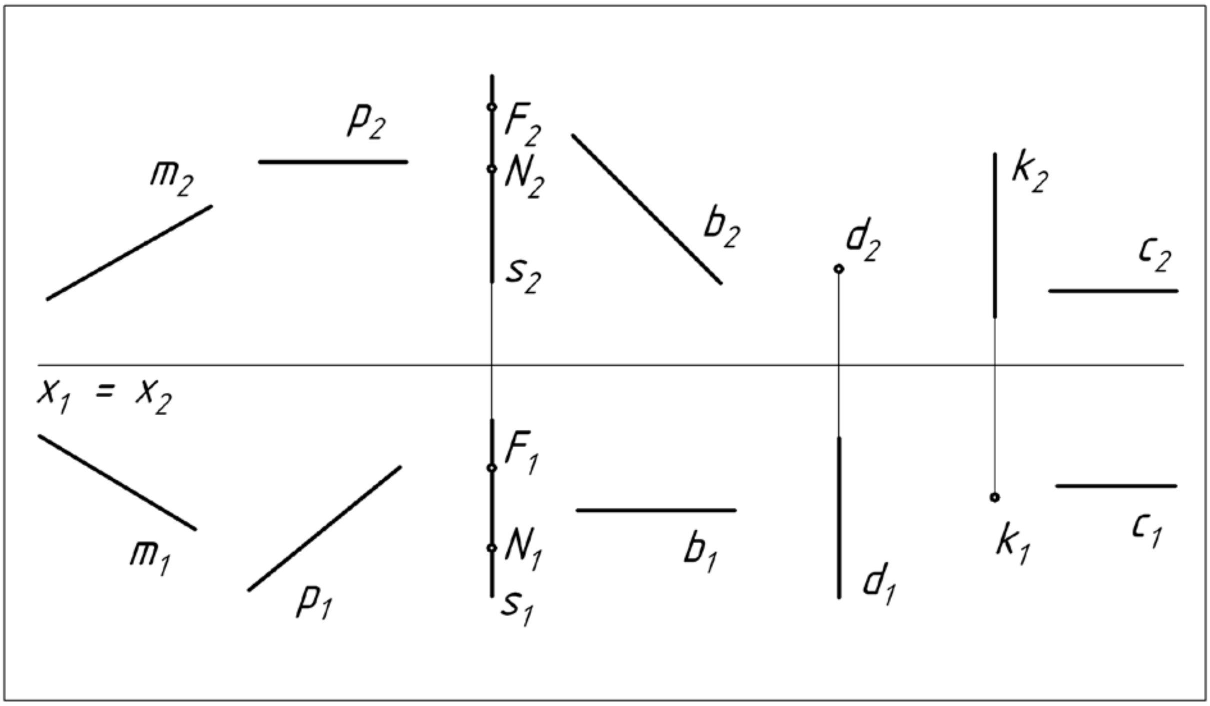


Рис.38

Ответить на вопросы:

- Какие прямые параллельны горизонтальной плоскости проекций?
- Какая прямая параллельна только $\mathbf{П_1}$?
- Какие прямые параллельны фронтальной плоскости проекций?
- Какая прямая параллельна только $\mathbf{П_2}$?
- Какие прямые параллельны профильной плоскости проекций?
- Какая прямая параллельна только $\mathbf{П_3}$?

Задача 27. Прямые ***b, k, d, m, s, p*** и ***n*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.39).

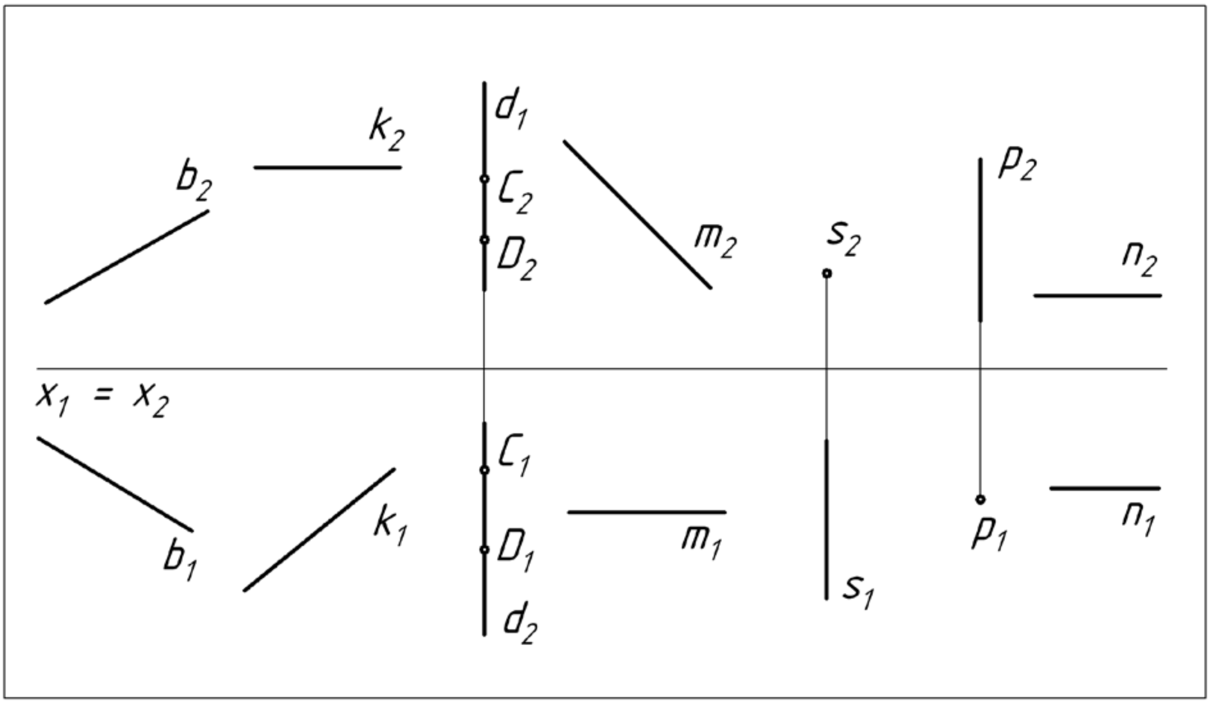


Рис.39

Ответить на вопросы:

- Отрезки каких прямых проецируются в истинную величину на горизонтальную плоскость проекций?
- Отрезки каких прямых проецируются в истинную величину на фронтальную плоскость проекций?
- Отрезки каких прямых проецируются в истинную величину на профильную плоскость проекций?
- Есть ли на чертеже такие прямые, отрезки которых ни на одну из плоскостей проекций не проецируются в истинную величину?
- Отрезки каких прямых проецируются в истинную величину сразу на две плоскости проекций? К какому классу прямых они относятся?

Задача 28. Три отрезка ***p***, ***j*** и ***k*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.40). Отрезки каких прямых проецируются в истинную величину на профильную плоскость проекций?

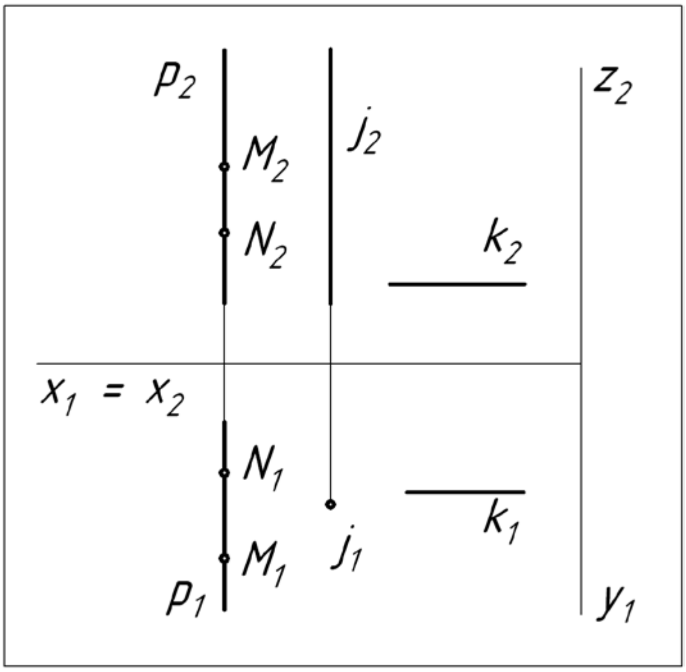


Рис.40

Задача 29. На эпюре Монжа заданы своими проекциями прямая ***p*** и точка ***N***, прямая ***b*** и точка ***F***, прямая ***k*** и точка ***M*** (рис.41). Определить, какие прямая и точка инцидентны?

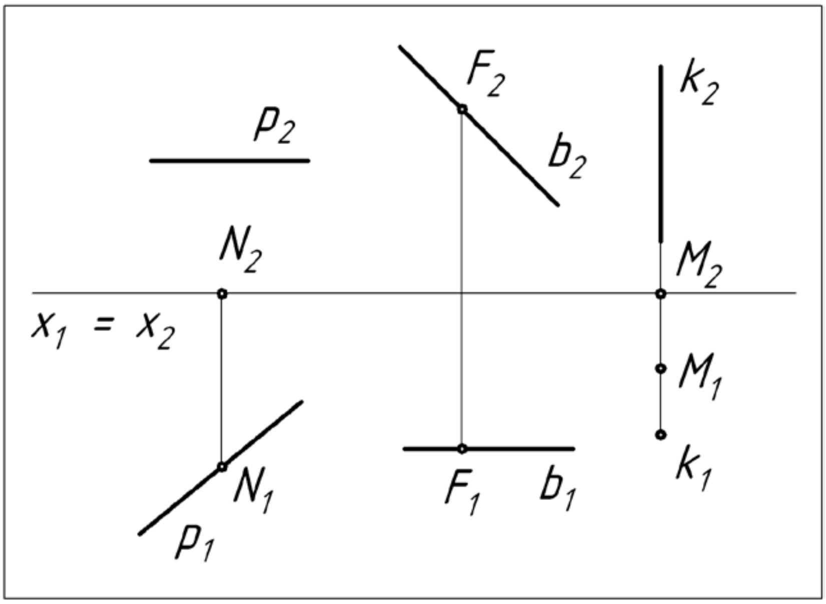


Рис. 41

Задача 30. Прямая $\boldsymbol{m}$ и точки $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{S}$ заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.42).

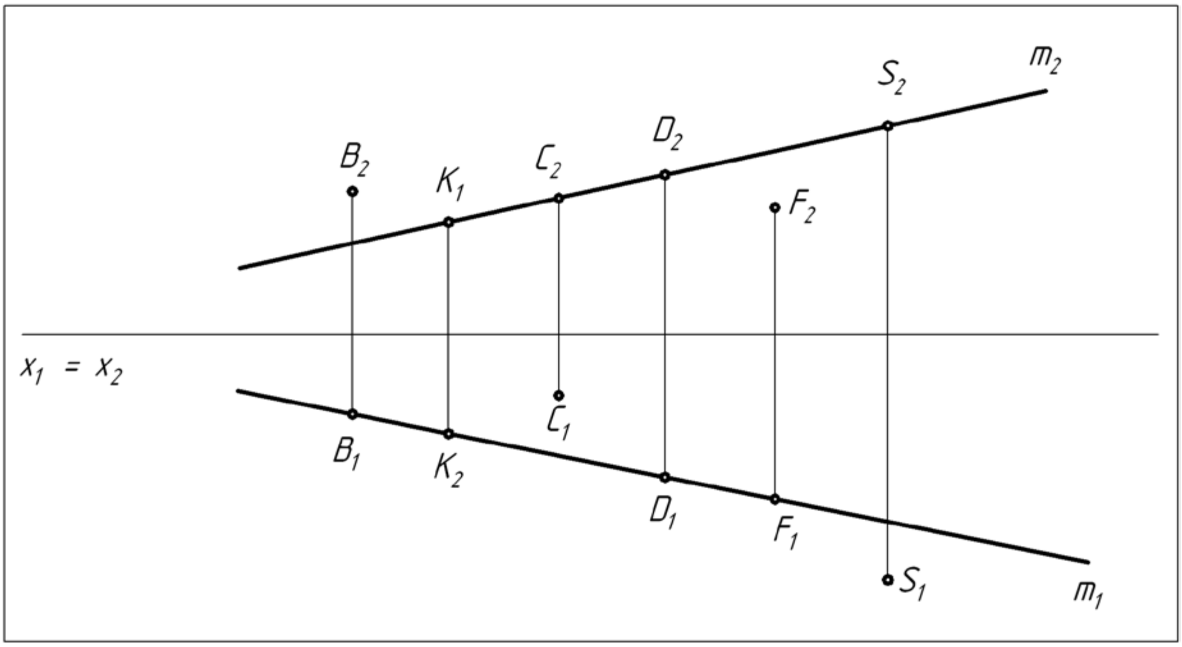


Рис.42

Ответить на вопросы:

- Какая точка инцидентна прямой?
- Какая точка расположена перед прямой (ближе к наблюдателю)?
- Какая точка расположена выше прямой?
- Какая точка расположена за прямой (дальше от наблюдателя)?
- Какая точка расположена ниже прямой?
- Показаны ли на чертеже точки, расположенные в I четверти пространства? Если да, то какие?
- Показаны ли на чертеже точки, расположенные во II четверти пространства? Если да, то какие?
- Показаны ли на чертеже точки, расположенные в III четверти пространства? Если да, то какие?
- Показаны ли на чертеже точки, расположенные в IV четверти пространства? Если да, то какие?

Задача 31. На эпюре Монжа заданы своими проекциями прямая ***k*** и точка ***T***, прямая ***s*** и точка ***R***, прямая ***n*** и точка ***E*** (рис.43). Определить, какие прямая и точка инцидентны?

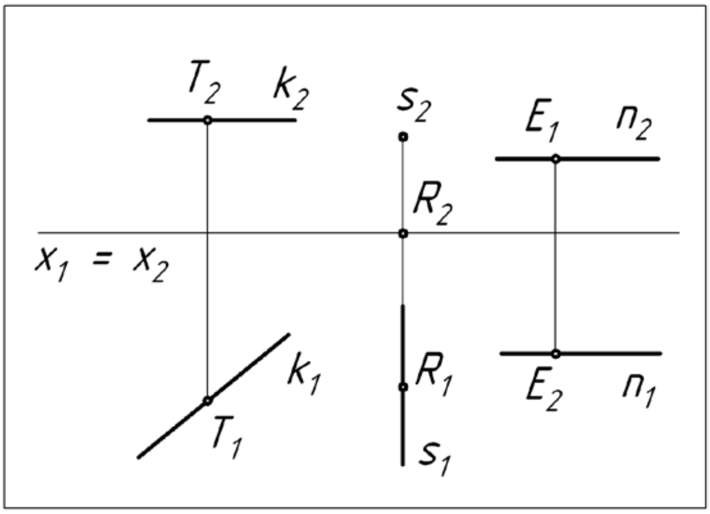


Рис.43

Задача 32. Прямая ***k*** и точки ***M***, ***N***, ***P*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.44). Определить взаимное положение точек и прямой.

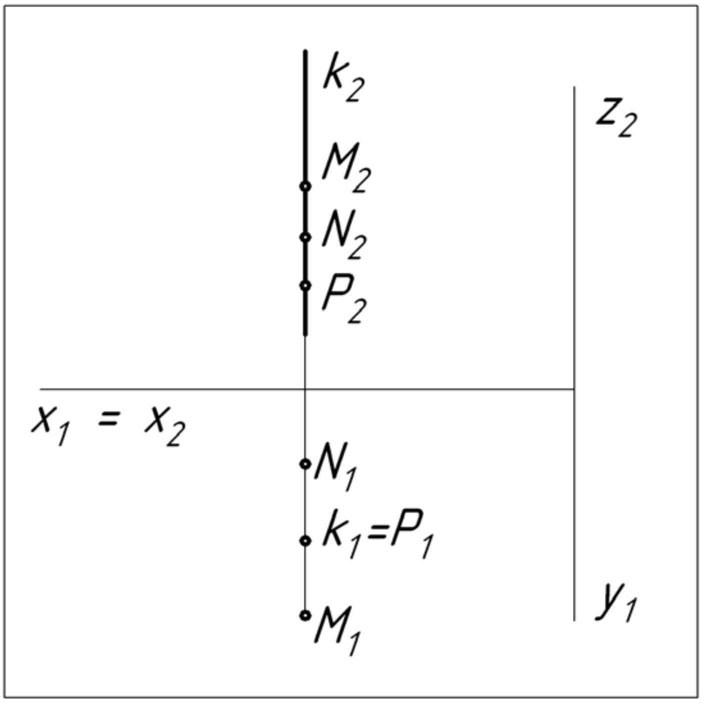


Рис.44

Задача 33. Отрезок ***AB*** и точка ***D*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.45). Определить взаимное положение точки и прямой.

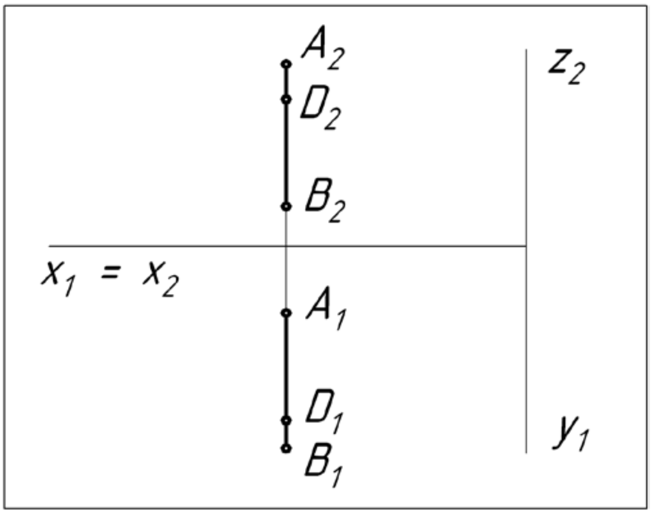


Рис.45

Задача 34. Три пары прямых ***m*** и ***n***, ***c*** и ***d***, ***f*** и ***p*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.46). Какие прямые параллельны?

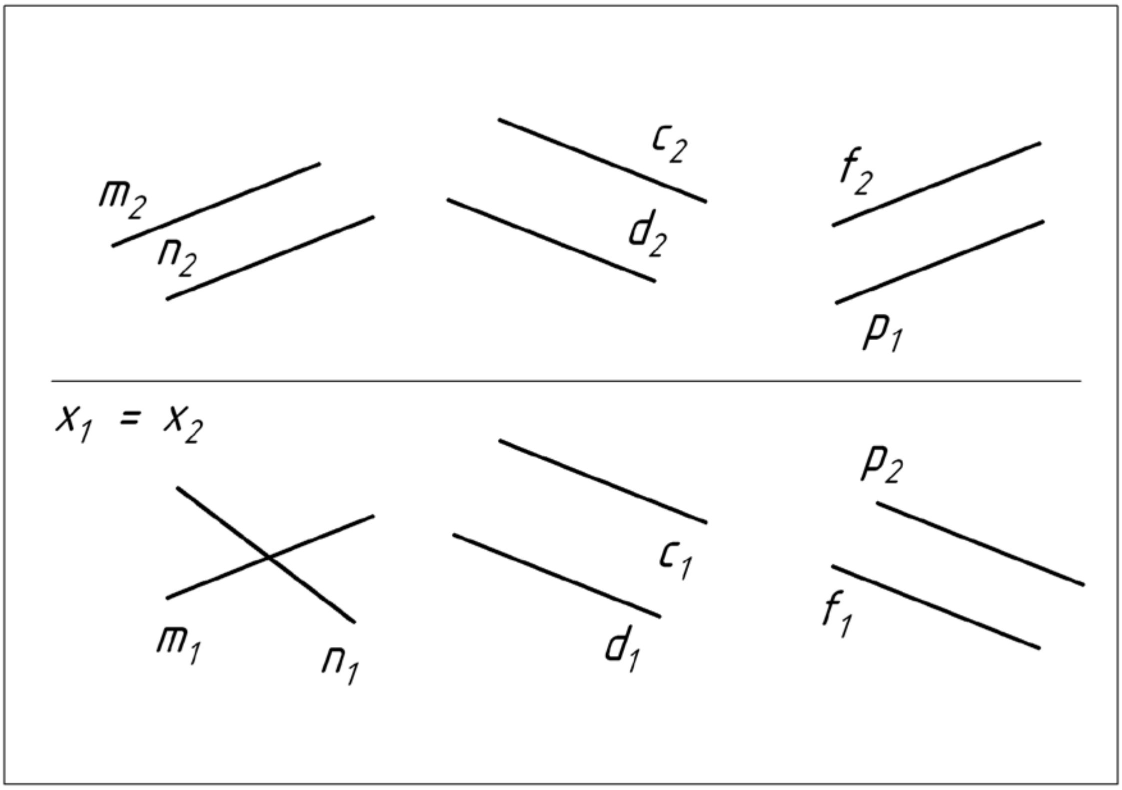


Рис.46

Задача 35. Три пары прямых ***m*** и ***p***, ***a*** и ***b***, ***f*** и ***d*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.47). Какие прямые параллельны?

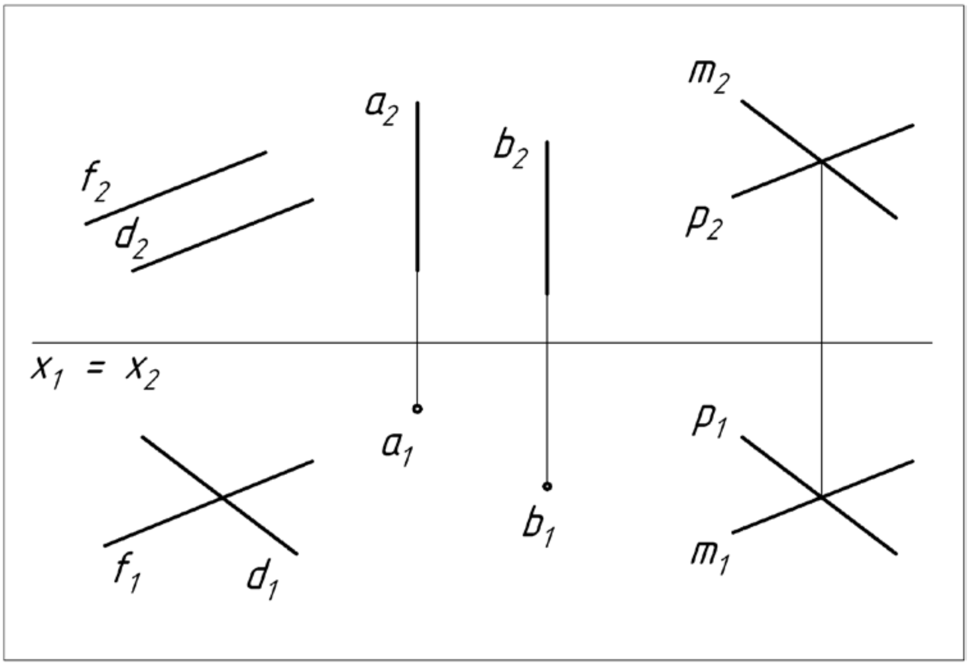


Рис.47

Задача 36. Три пары прямых ***f*** и ***d***, ***p*** и ***q***, ***n*** и ***s*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.48). Какие прямые параллельны?

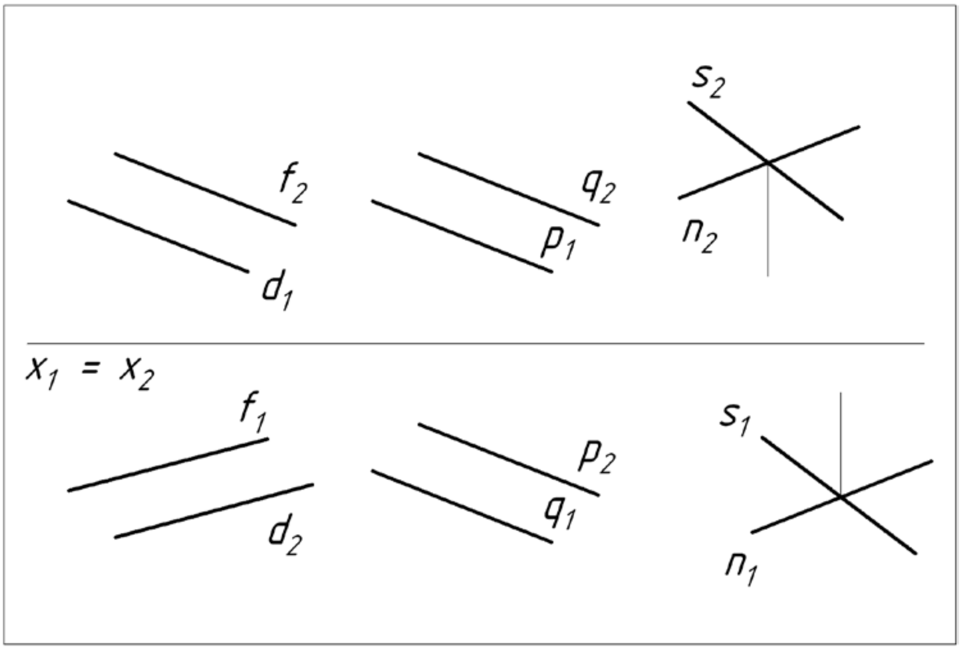


Рис.48

Задача 37. Три пары прямых ***q*** и ***f***, ***p*** и ***d***, ***s*** и ***n*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.49). Какие прямые пересекаются?

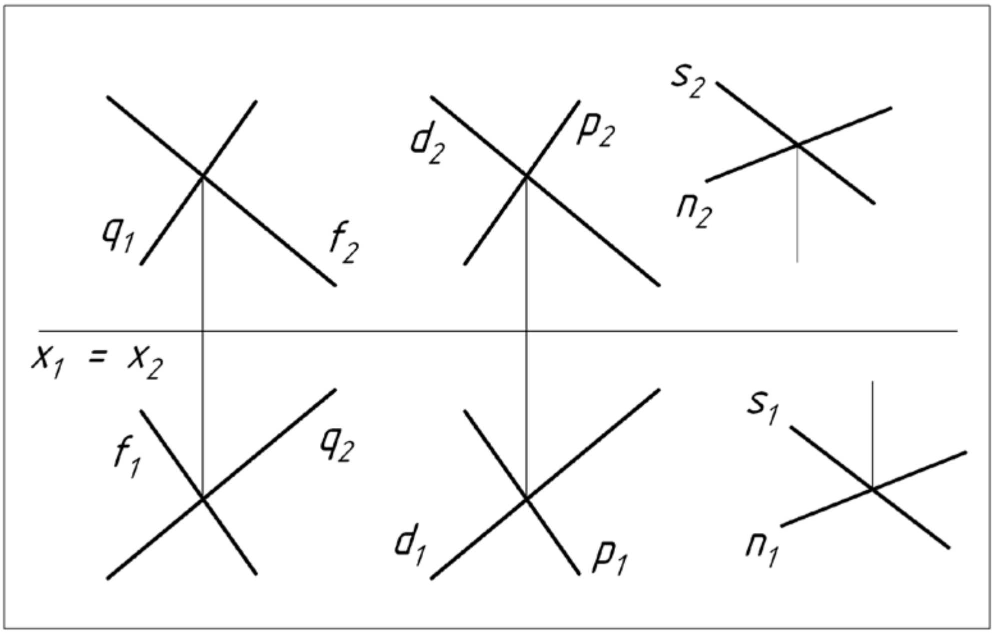


Рис.49

Задача 38. Три пары прямых ***s*** и ***f***, ***p*** и ***d***, ***q*** и ***n*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.50). Какие прямые пересекаются?

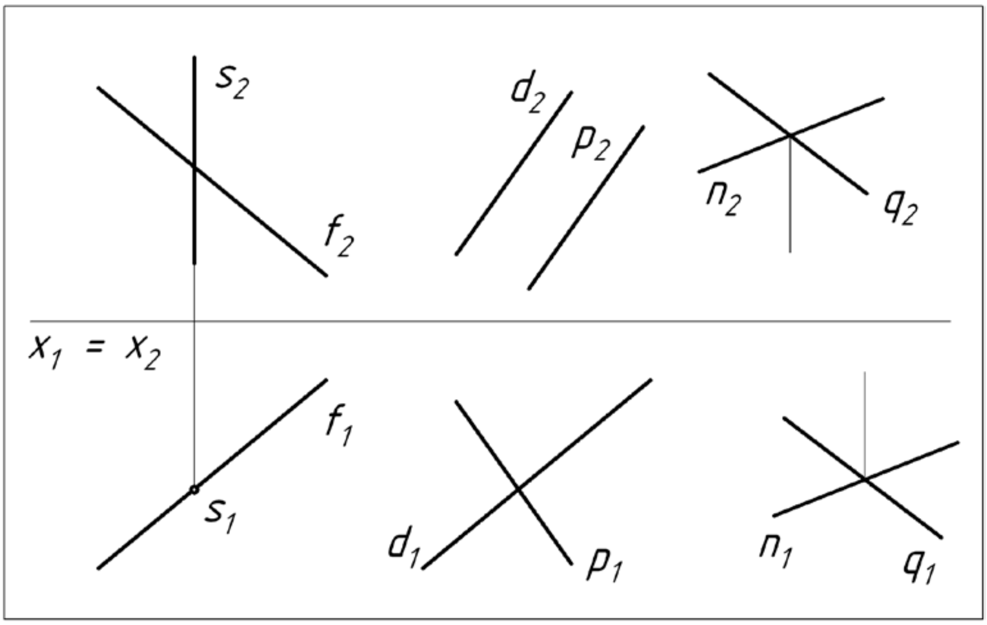


Рис.50

Задача 39. Три пары прямых ***m*** и ***d***, ***p*** и ***n***, ***s*** и ***f*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.51). Какие прямые скрещиваются?

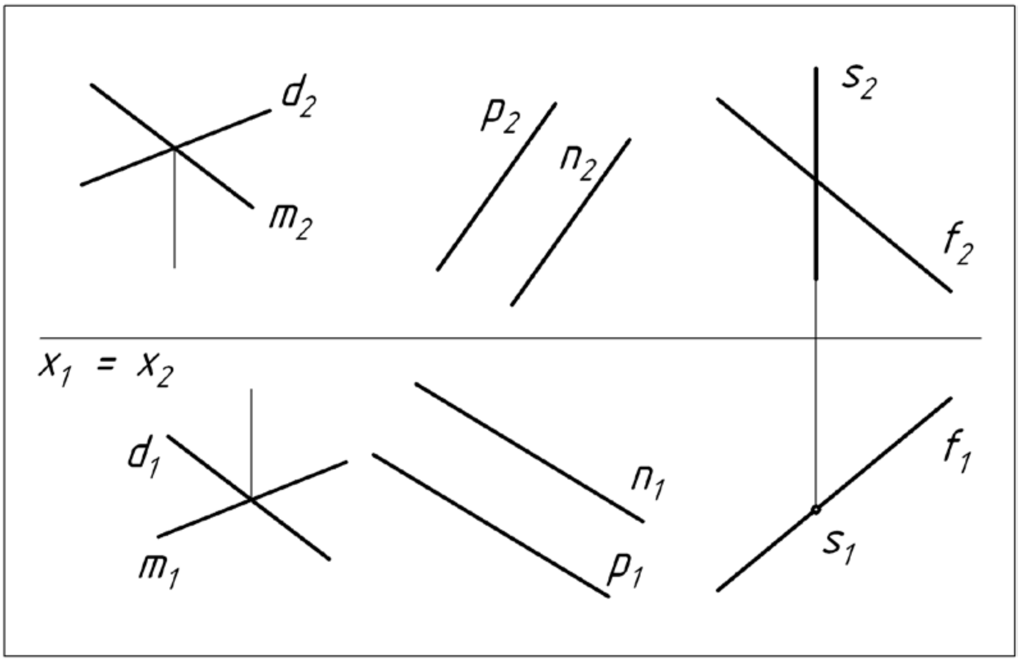


Рис.51

Задача 40. Три пары прямых ***a*** и ***d***, ***f*** и ***b***, ***p*** и ***h*** заданы своими проекциями на эпюре Монжа (рис.52). Какие прямые скрещиваются?

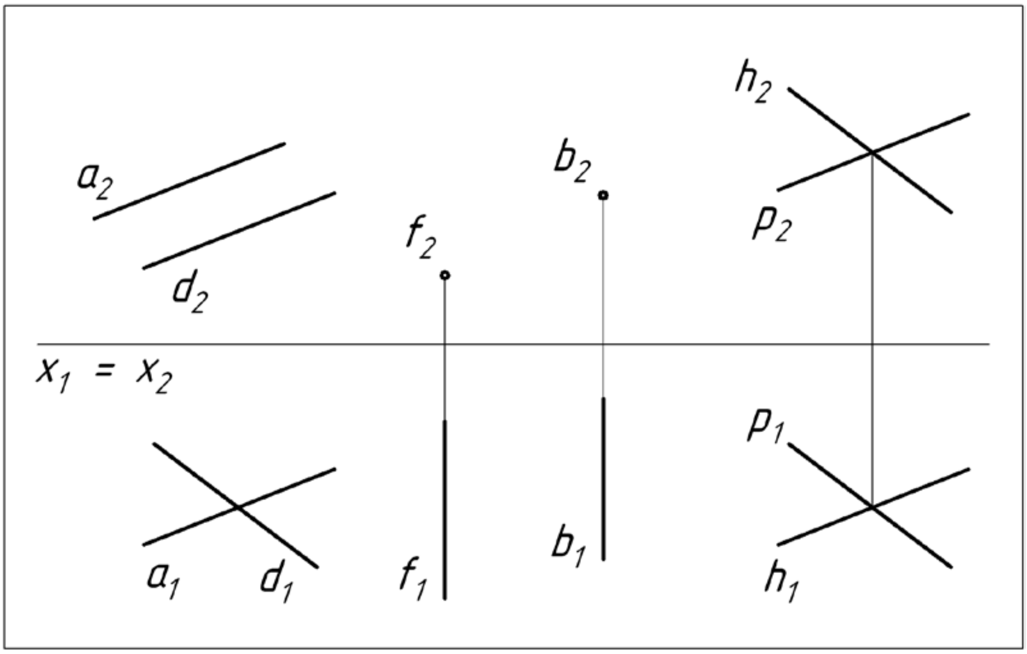


Рис.52

ЗАДАЧИ

Ортогональные проекции плоскостей

Задача 41. Проанализировать чертёж и выписать определители для каждой из плоскостей (рис.53).

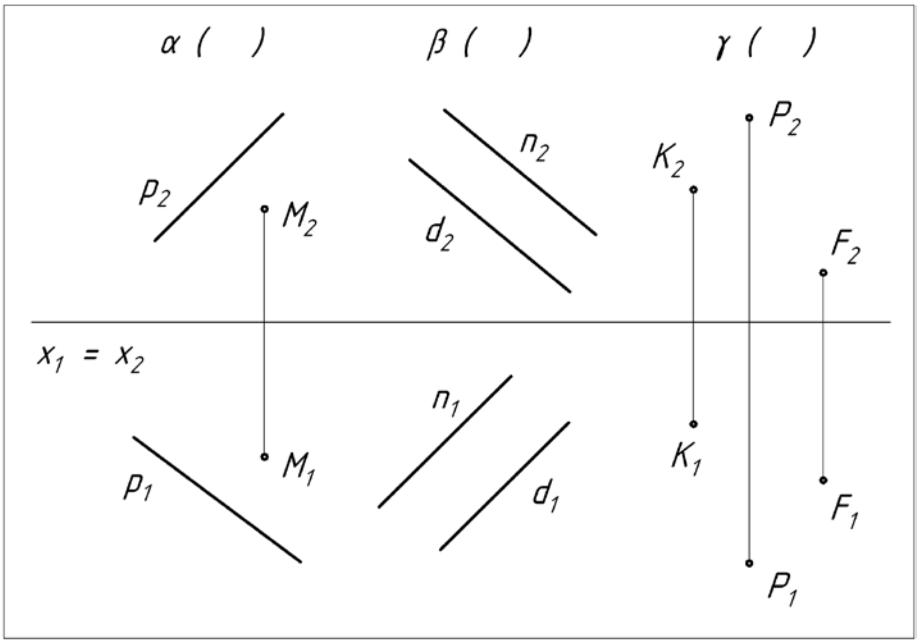


Рис.53

Задача 42. Проанализировать чертёж и выписать определители для каждой из плоскостей (рис.54).

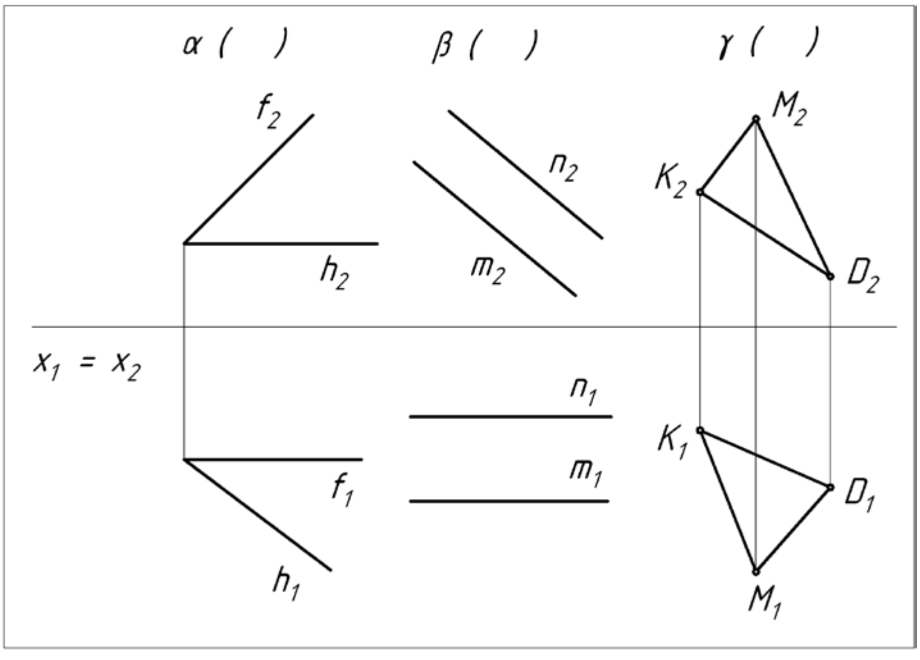


Рис.54

Задача 43. Построить фронтальный и горизонтальный следы плоскости (рис.55).

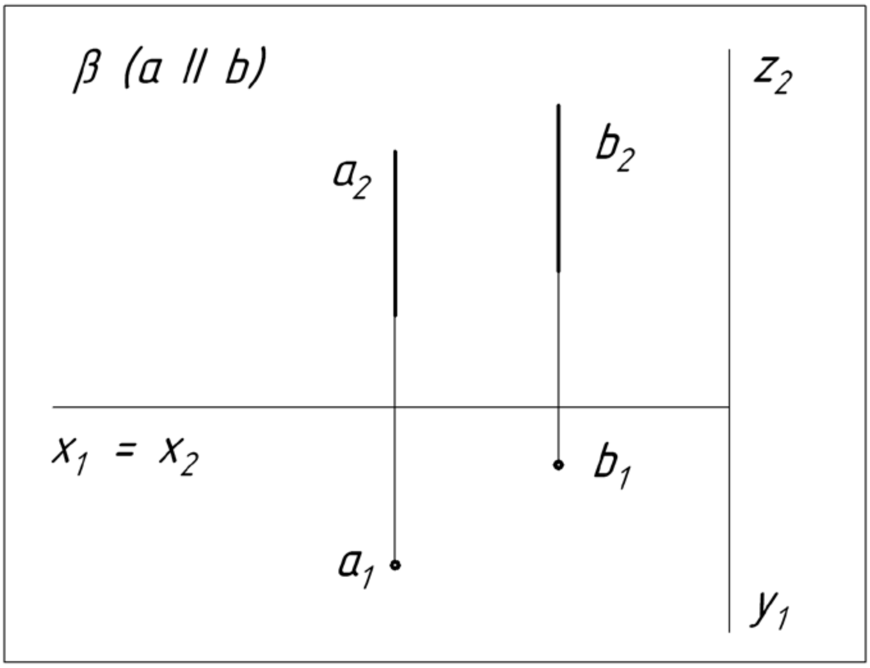


Рис.55

Задача 44. Построить фронтальный и горизонтальный следы плоскости (рис.56).

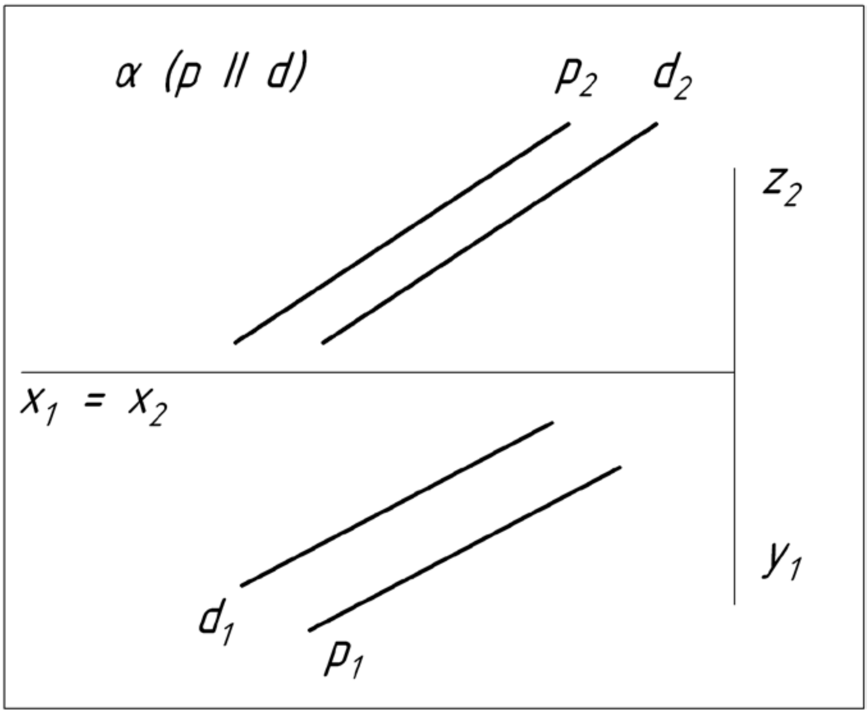


Рис.56

Задача 45. Записать в символическом виде, какое положение по отношению к плоскостям проекций занимает каждая из плоскостей и дать название каждой плоскости (рис.57).

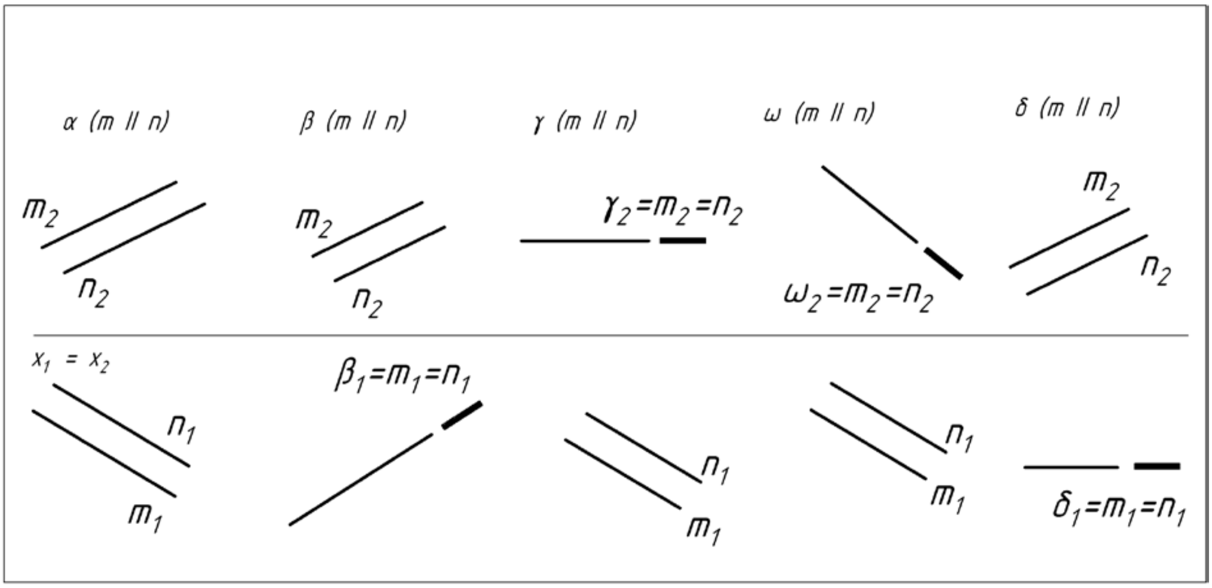


Рис.57

Задача 46. Записать в символическом виде, какое положение по отношению к плоскостям проекций занимает каждая из плоскостей и дать название каждой плоскости (рис.58).

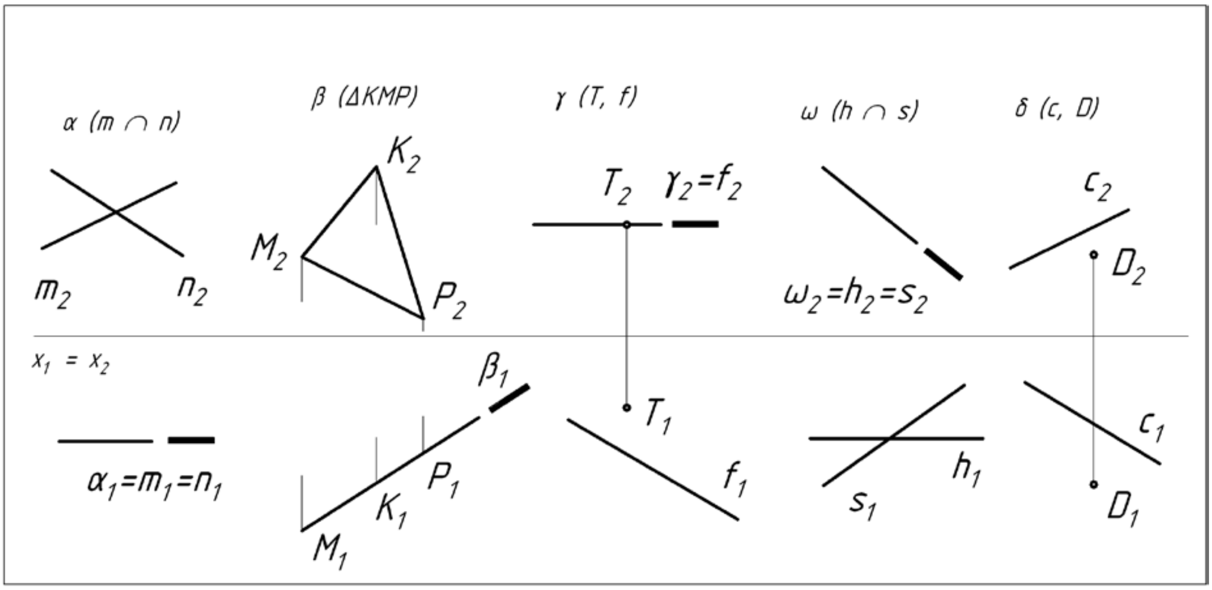


Рис.58

Задача 47. Записать в символическом виде, какое положение по отношению к плоскостям проекций занимает каждая из плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и дать название каждой плоскости (рис.59).

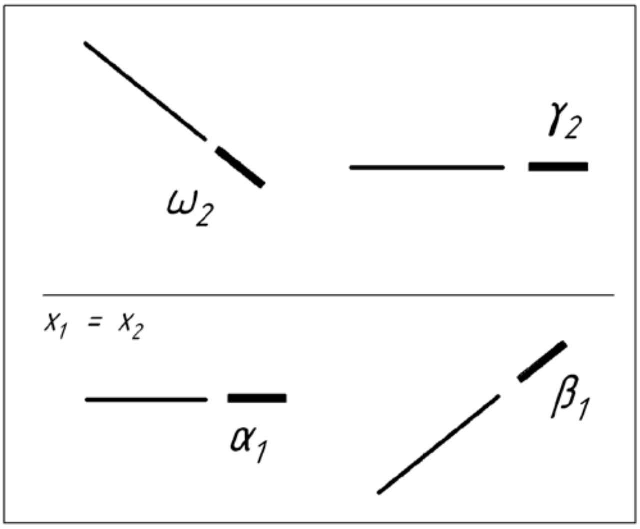


Рис.59

Задача 48. Построить чертежи плоскостей на эпюре Монжа по условиям, представленным в символическом виде:

1. $\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n})$ – общего положения (о.п.)
2. $\boldsymbol{\beta}\ (\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$
3. $\boldsymbol{\omega}\ (\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\Pi_2}$
4. $\boldsymbol{\gamma}\ (\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$
5. $\boldsymbol{\delta}\ (\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{\delta} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$

Задача 49. Построить чертежи плоскостей на эпюре Монжа по условиям, представленным в символическом виде:

1. $\boldsymbol{\alpha}\ (\Delta \boldsymbol{ABC})$ – о.п.
2. $\boldsymbol{\beta}\ (\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$
3. $\boldsymbol{\omega}\ (\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$
4. $\boldsymbol{\gamma}\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{m}),\ \boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$
5. $\boldsymbol{\delta}\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}),\ \boldsymbol{\delta} \parallel \boldsymbol{\Pi_2}$

Задача 50. Построить чертежи плоскостей на эпюре Монжа по условиям, представленным в символическом виде:

1. $\alpha\ (\alpha_1)$
2. $\beta\ (\beta_1),\ \beta \parallel \Pi_2$
3. $\omega\ (\omega_2)$
4. $\gamma\ (\gamma_2),\ \gamma \parallel \Pi_1$
5. $\tau\ (\tau_3)$
6. $\tau\ (\tau_3),\ \tau \parallel \Pi_2$

Задача 51. На эпюре Монжа своими проекциями заданы плоскости и точки (рис.60). Выполнить полную запись исходных данных. Определить, какие точка и плоскость инцидентны?

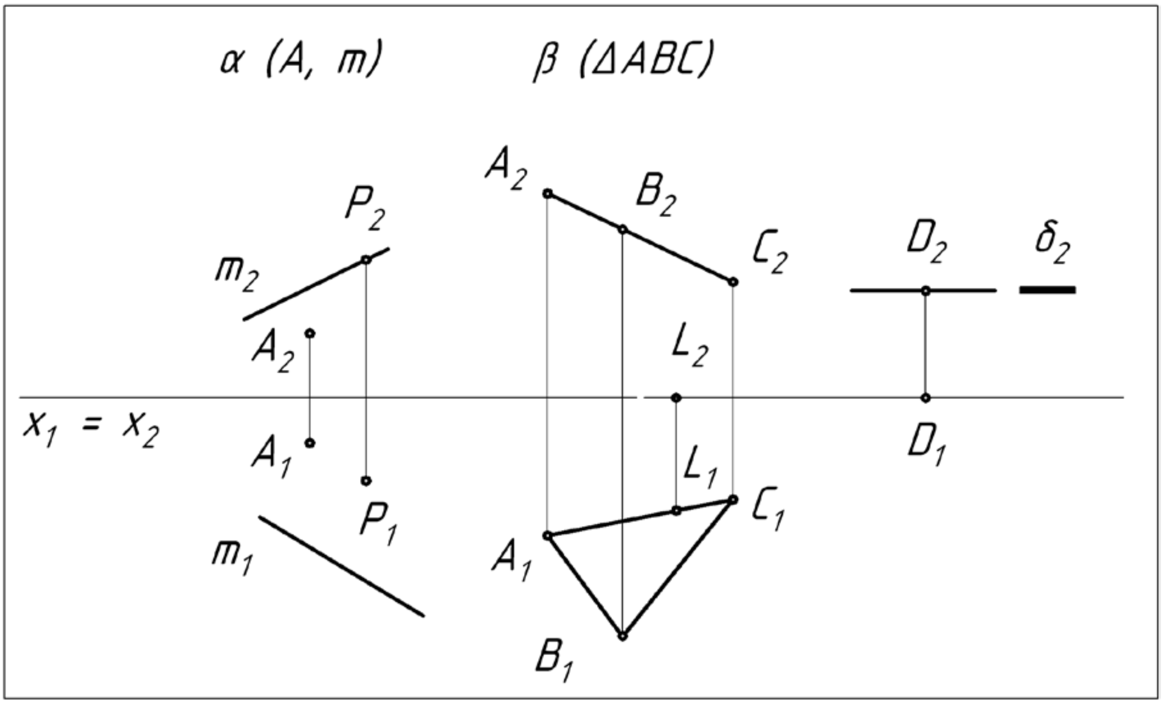


Рис.60

Задача 52. На эпюре Монжа своими проекциями заданы плоскости и точки (рис.61). Выполнить полную запись исходных данных. Определить, какие точка и плоскость инцидентны?

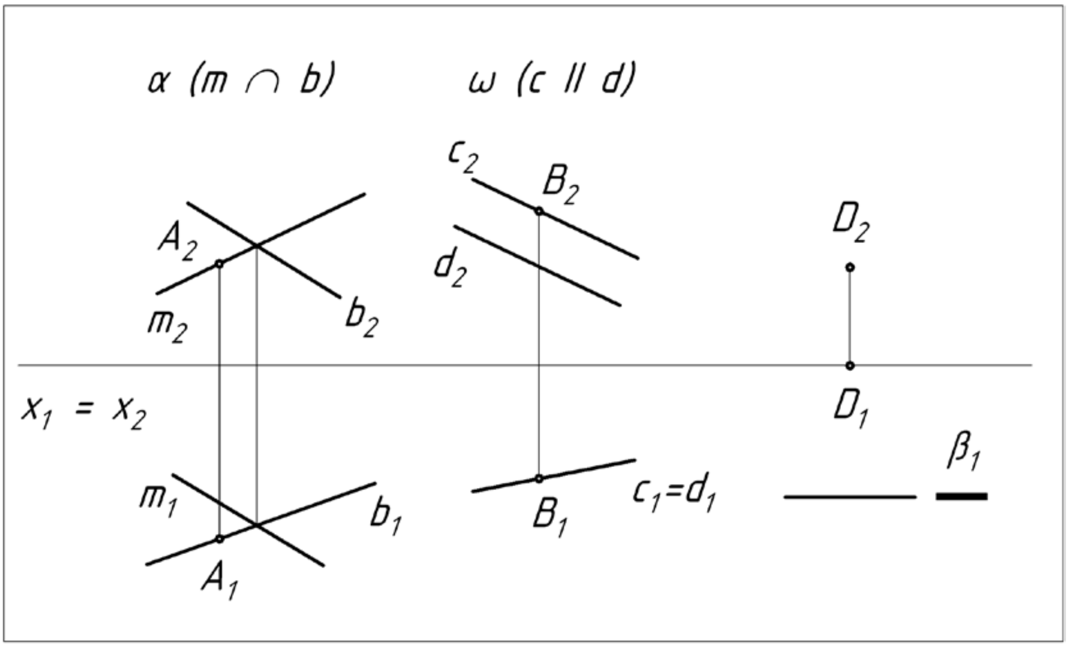


Рис.61

Задача 53. На эпюре Монжа своими проекциями заданы плоскости и точки (рис.62). Выполнить полную запись исходных данных. Определить, какие точка и плоскость инцидентны?

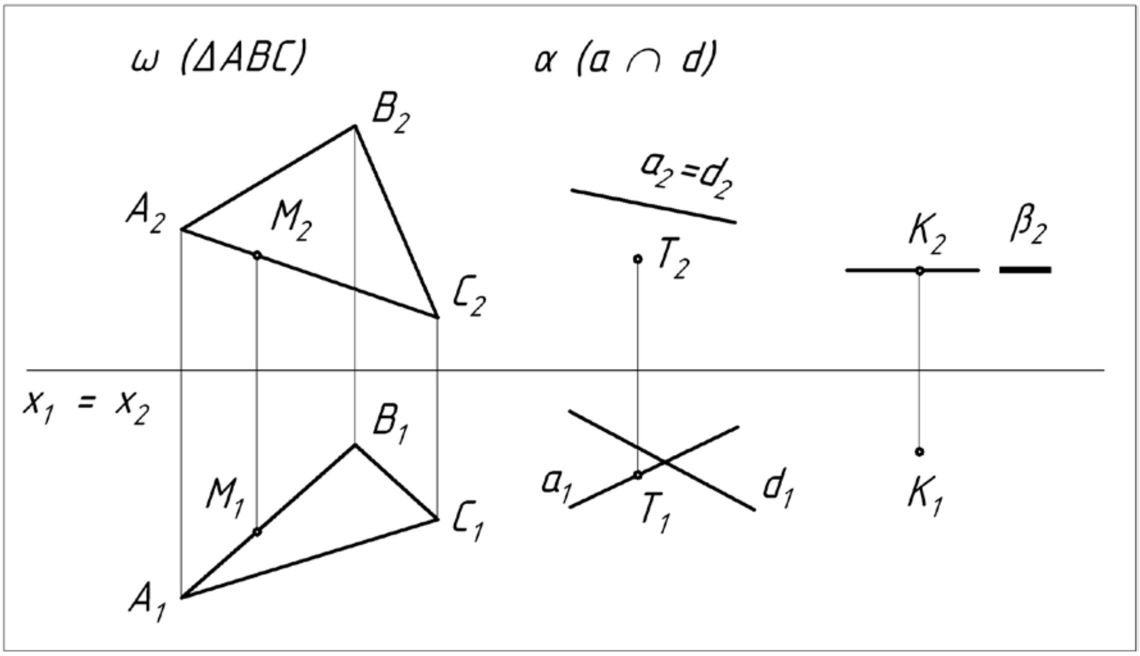


Рис.62

Задача 54. На эпюре Монжа своими проекциями заданы плоскости и прямые (рис.63). Выполнить полную запись исходных данных. Определить, какие прямая и плоскость инцидентны?

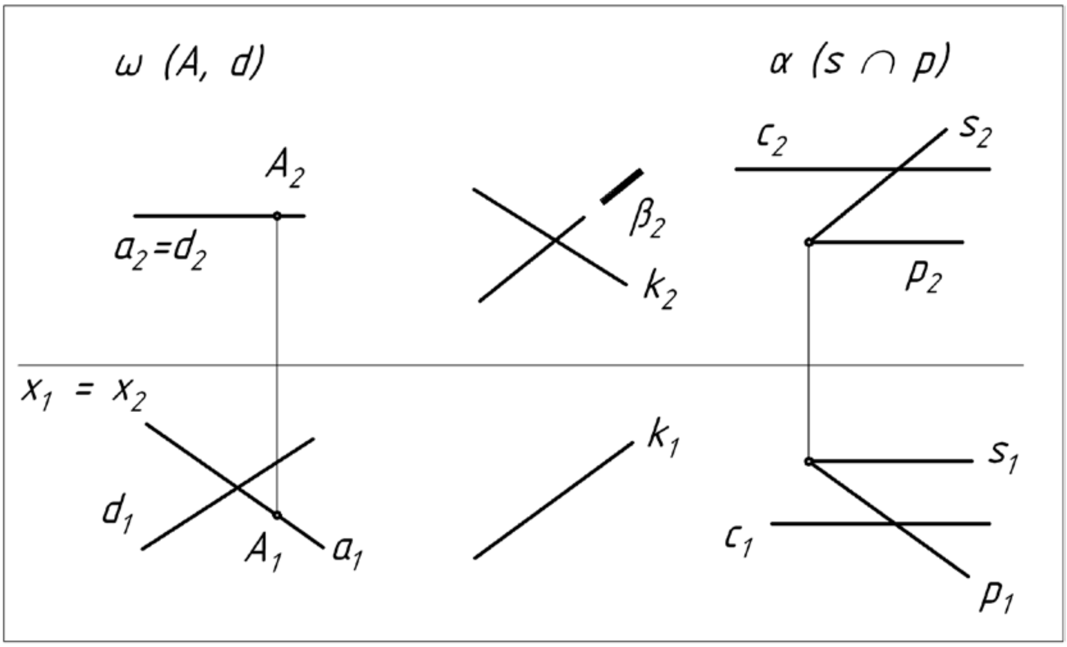


Рис.63

Задача 55. На эпюре Монжа своими проекциями заданы плоскости и прямые (рис.64). Выполнить полную запись исходных данных. Определить, какие прямая и плоскость инцидентны?

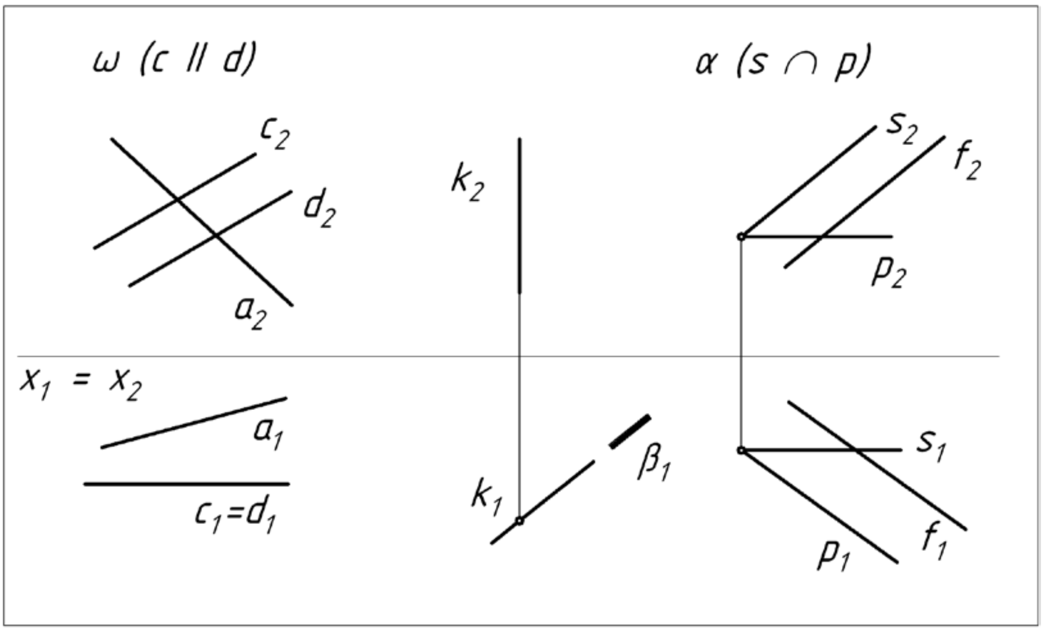


Рис.64

Задача 56. На эпюре Монжа своими проекциями заданы плоскости и прямые (рис.65). Выполнить полную запись исходных данных. Определить, какие прямая и плоскость инцидентны?

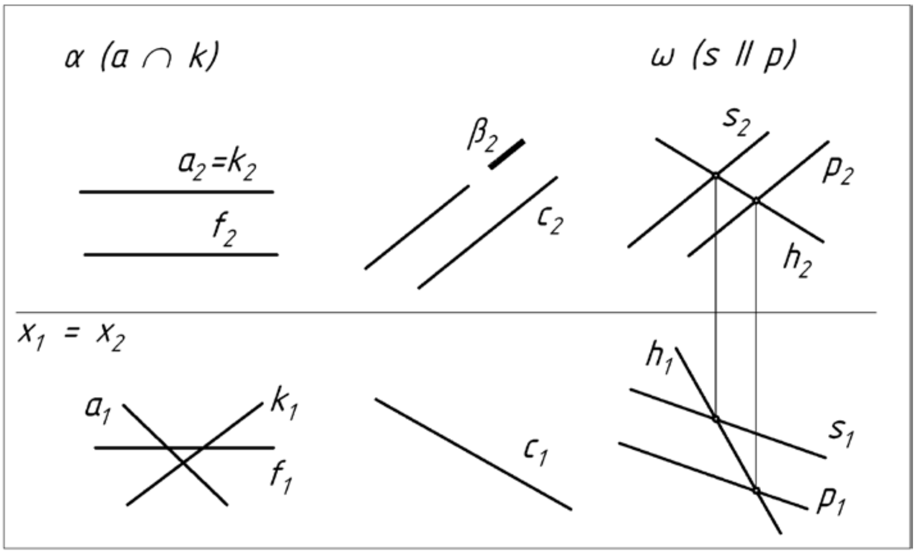


Рис.65

Задача 57. Построить чертежи плоскостей и линий по исходным данным, представленным в символическом виде:

1. Плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{m})$ – о.п.; прямая $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$; $\boldsymbol{k} \subset \boldsymbol{\alpha}$
2. Плоскость $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta_2}$) $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_2}$; прямая $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{\Pi_2}$; $\boldsymbol{p} \subset \boldsymbol{\beta}$
3. Плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{f} \parallel \boldsymbol{f'}$) – о.п.; прямая $\boldsymbol{c}$ – о.п.; $\boldsymbol{c} \subset \boldsymbol{\gamma}$

Задача 58. Построить чертежи плоскостей и линий, инцидентных этим плоскостям:

1. Плоскость общего положения, заданную треугольником, и линию, параллельную горизонтальной плоскости проекций.
2. Горизонтально-проецирующую плоскость, заданную пересекающимися прямыми, и линию, параллельную фронтальной плоскости.
3. Фронтальную плоскость уровня, заданную параллельными прямыми, и линию, параллельную горизонтальной плоскости проекций.
4. Фронтально-проецирующую плоскость, заданную фронтальным следом, и линию, параллельную фронтальной плоскости проекций.
5. Горизонтальную плоскость уровня, заданную фронтальным следом, и линию, параллельную горизонтальной плоскости проекций.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Проекции прямого угла на эпюре Монжа

Угол проецируется на плоскость проекций без искажения (в истинную величину) в том случае, когда две его стороны параллельны этой плоскости. Другими словами, если угол лежит в плоскости, параллельной какой-либо плоскости проекций, то он проецируется на неё в истинную величину.

Для того чтобы прямой угол проецировался без искажения, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна, а другая не перпендикулярна к плоскости проекций.

Пусть сторона ***AB*** прямого угла ***ABC*** параллельна плоскости проекций **П′** (рис.66).

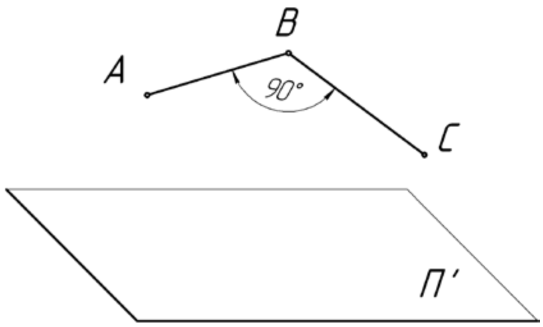


Рис.66

Угол ***A'B'C'*** - ортогональная проекция данного угла (рис.67). Проецирующие отрезки ***AA'***, ***BB'*** и ***CC'*** перпендикулярны к плоскости проекций **П′**.

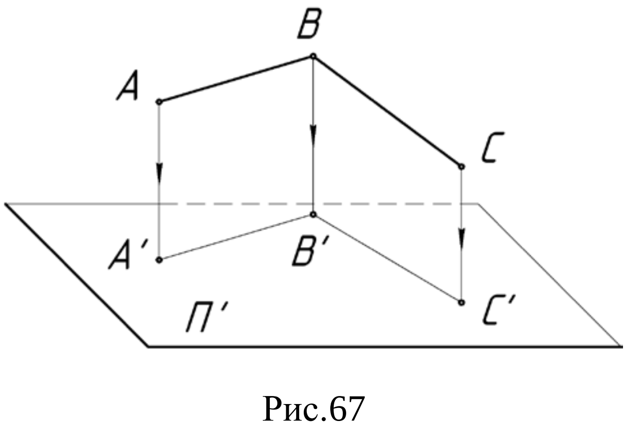


Рис.67

Отрезок ***AB*** перпендикулярен к отрезкам ***BC*** и ***BB'***, т. е. к двум пересекающимся прямым плоскости **β**, следовательно, он перпендикулярен к самой плоскости (рис.68).

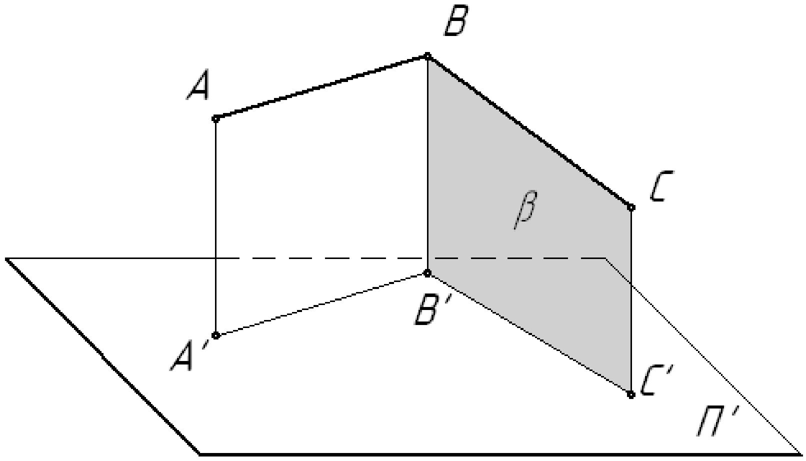


Рис.68

Отрезки ***AB*** и ***AB'*** параллельны. Из стереометрии известно, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая также перпендикулярна к ней. Поэтому отрезок ***AB'*** перпендикулярен к плоскости **β**, а значит, к любой прямой, лежащей в этой плоскости. Таким образом, отрезок ***AB'*** перпендикулярен к ***B'C'***. Угол ***A'B'C'*** - прямой (рис.69).

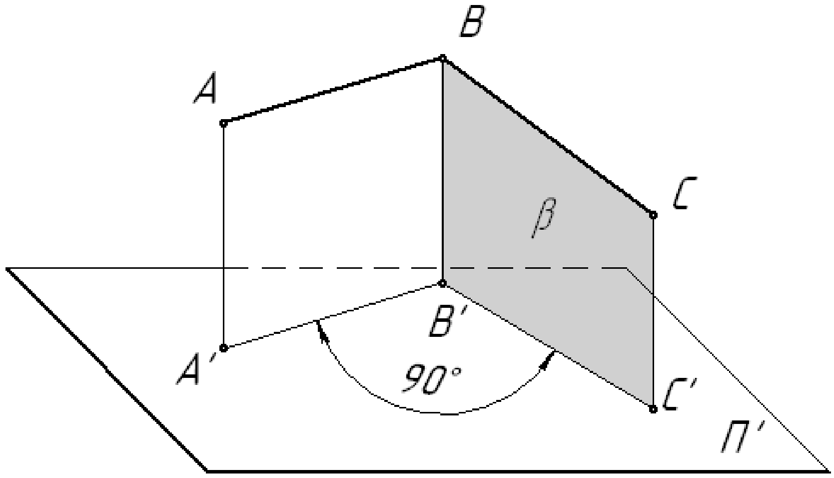


Рис.69

Если одна из сторон прямого угла перпендикулярна к плоскости проекций (**Π′**), то плоскость, в которой лежит угол оказывается перпендикулярной к **Π′**. Проекцией прямого угла в этом случае является прямая линия – след плоскости угла на плоскости проекций (рис.70).

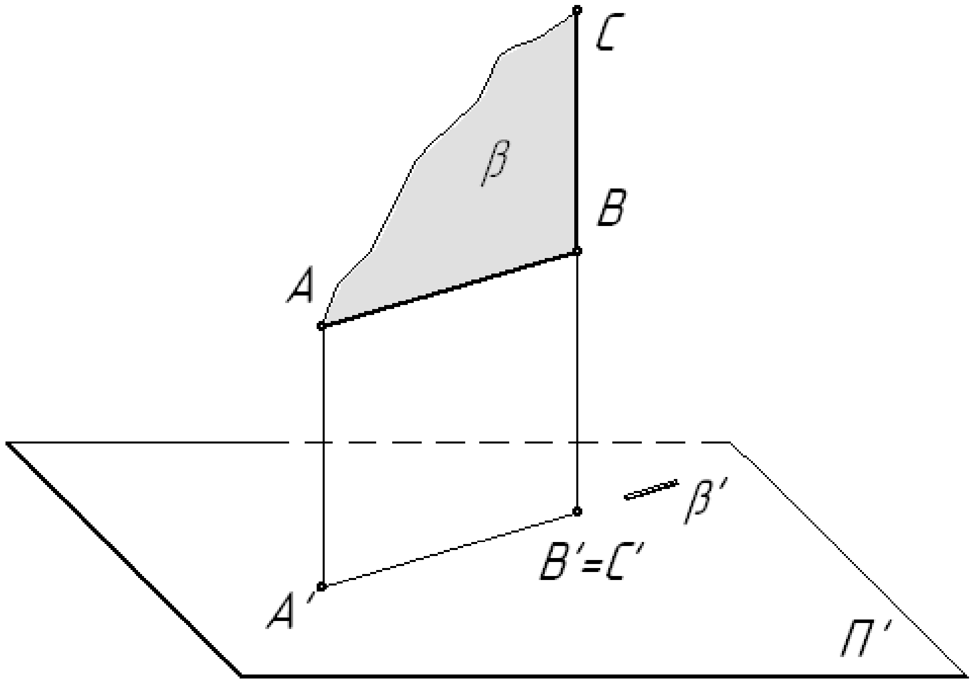


Рис.70

Две взаимно перпендикулярные прямые проецируются на плоскость проекций в виде перпендикулярных прямых тогда и только тогда, когда хотя бы одна из этих прямых является линией уровня, т.е. параллельна плоскости проекций.

Решение многих задач требует построения взаимно перпендикулярных прямых. Например, в задаче на построение проекций линий наибольшего уклона плоскости.

ЗАДАЧИ

Взаимно перпендикулярные прямые

Пример «Линия наибольшего ската»

Условие задачи: построить проекции линии наибольшего ската (л.н.с.) некоторой плоскости общего положения.

Дано: **β** (***c*** || ***d***) – о.п., ***c*** – о.п., ***d*** – о.п.

Найти (построить): ***g*** (***g₁***, ***g₂***) ⊂ **β**, **g** – л.н.с. **β**

Чертёж к задаче: - рис.71.

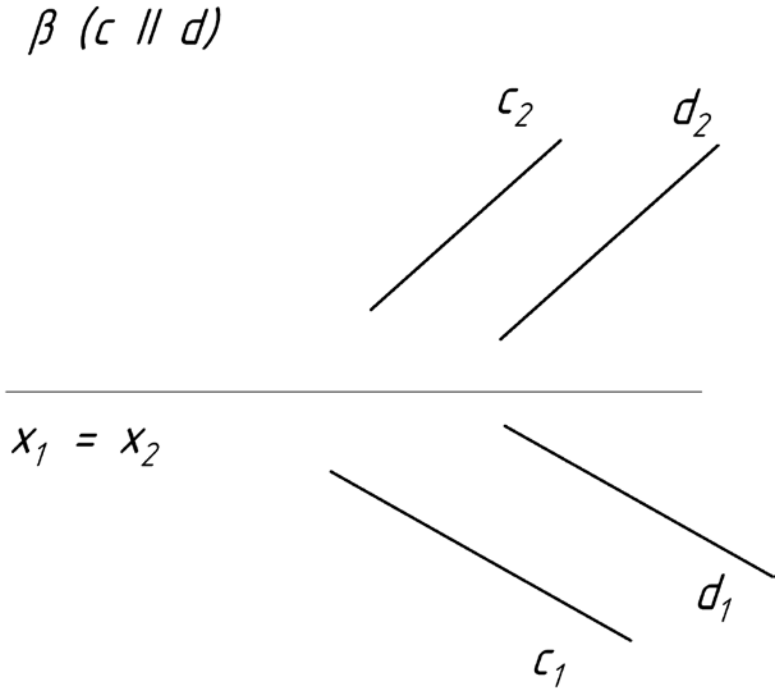


Рис.71

Решение

1. ***h*** ⊂ **β**, ***h*** || **Π_1**

Известно, что л.н.с. плоскости – это линия наибольшего уклона к горизонтальной плоскости проекций (**Π_1**). Она перпендикулярна к горизонталям данной плоскости. Поэтому, решение задачи на чертеже начинаем с построения проекций произвольной горизонтали ***h*** плоскости **β** (рис.72).

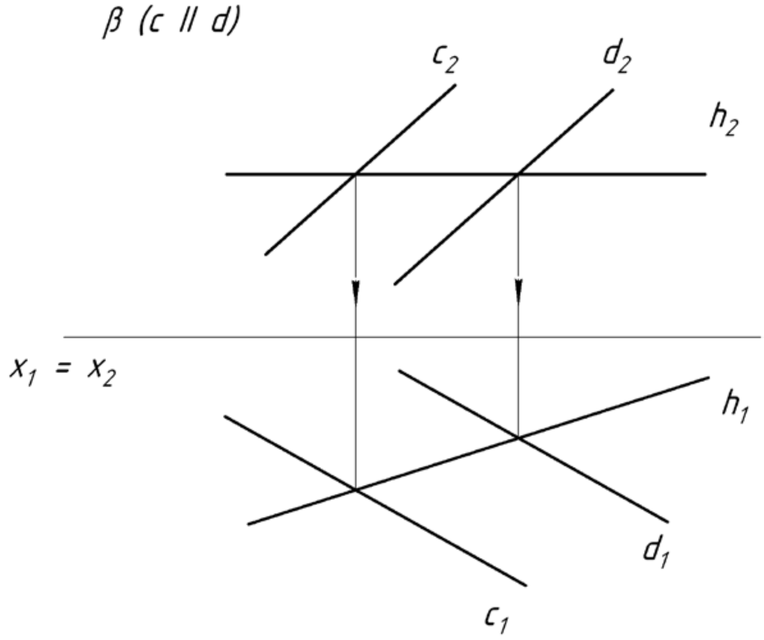


Рис.72

2. $\boldsymbol{g} \perp \boldsymbol{h}$

Прямой угол между линией наибольшего ската $\boldsymbol{g}$ и горизонталью $\boldsymbol{h}$ в истинную величину проецируется на горизонтальную плоскость проекций $\mathbf{\Pi_1}$, т.к. одна из сторон угла – горизонталь $\boldsymbol{h}$ – параллельна $\mathbf{\Pi_1}$ (рис.73).

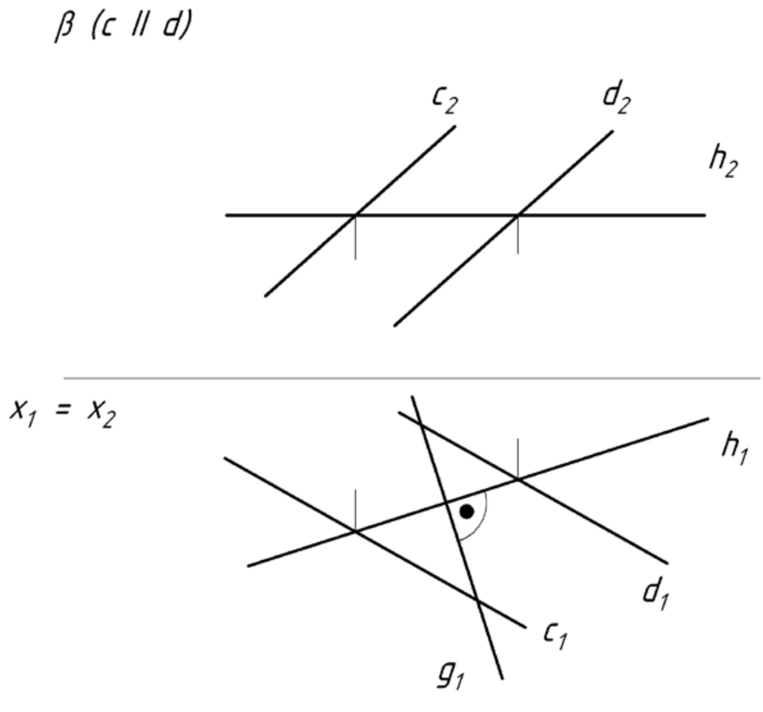


Рис.73

Фронтальную проекцию л.н.с. строим из условия инцидентности линии ***g*** плоскости **β** (рис.74). Задача решена.

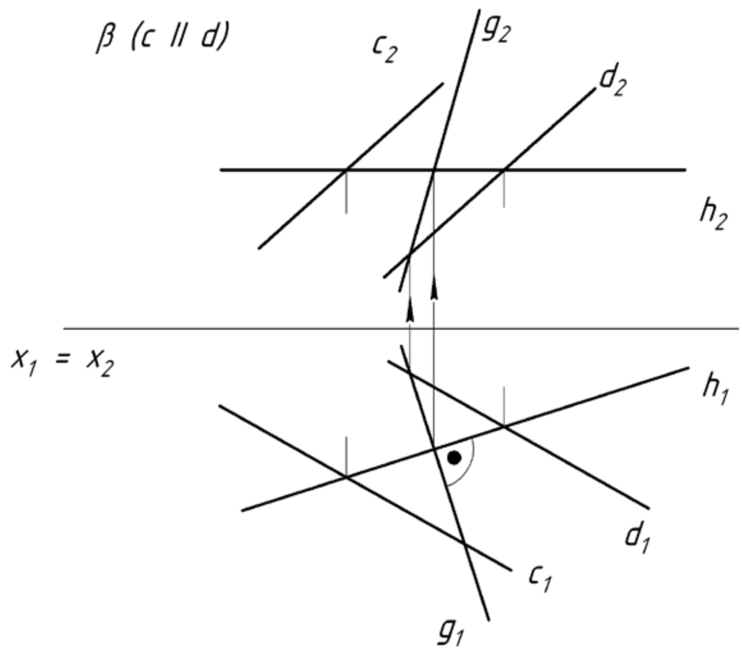


Рис.74

Следует обратить внимание на то, что на фронтальную плоскость проекций $\mathbf{П_2}$ прямой угол между прямыми ***g*** и ***h*** проецируется с искажением, не в истинную величину, т.к. ни одна из его сторон не параллельна $\mathbf{П_2}$.

Задача 59. Опустить из точки ***M*** перпендикуляры ***MC*** и ***MD*** на прямые ***c*** и ***d*** соответственно (рис.75).

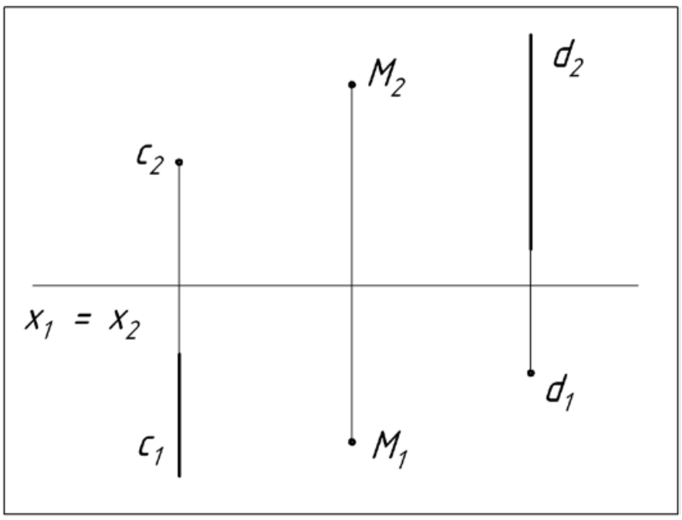


Рис.75

Задача 60. Даны: фронтальная линия уровня ***f***, горизонтальная линия уровня ***h*** и точка ***M***, не инцидентная этим линиям. Построить проекции перпендикуляров ***MF*** и ***MH***, проведённых из точки ***M*** к данным прямым.

Задача 61. Дана плоскость общего положения, определителем которой является треугольник. Построить проекции л.н.с. данной плоскости. Выбрать наиболее рациональное решение с точки зрения упрощения графических построений.

Задача 62. Построить фронтальный и горизонтальный следы плоскости **β**, для которой данная прямая ***g*** является л.н.с. (рис.76).

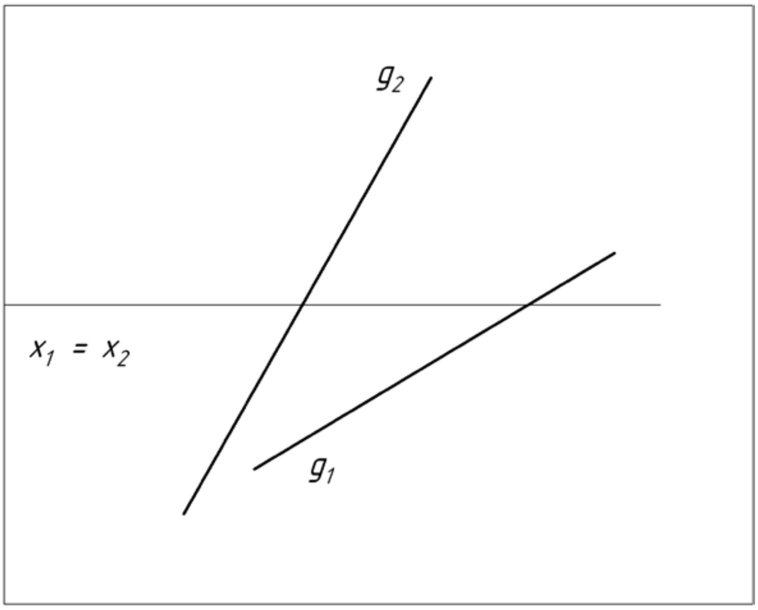


Рис.76

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Перпендикулярность прямой и плоскости

Из стереометрии известен следующий признак: *прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости.*

При построении проекций перпендикуляра к некоторой плоскости, в качестве двух пересекающихся прямых на ней удобно выбирать линии уровня – фронталь и горизонталь. В этом случае можно воспользоваться свойствами проекций прямого угла.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости на эпюре Монжа можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то её горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – к фронтальной проекции фронтали этой плоскости.

ЗАДАЧИ

Перпендикулярность прямой и плоскости

Пример «Перпендикуляр к плоскости»

Условие задачи: построить проекции перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость общего положения, определителем которой являются две параллельные прямые общего положения.

Дано: $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{d}$) – о.п., $\boldsymbol{c}$ – о.п., $\boldsymbol{d}$ – о.п., $\boldsymbol{A} \not\subset \boldsymbol{\beta}$

Найти (построить): $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$) $\subset \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{\beta}$

Чертёж к задаче: рис.77.

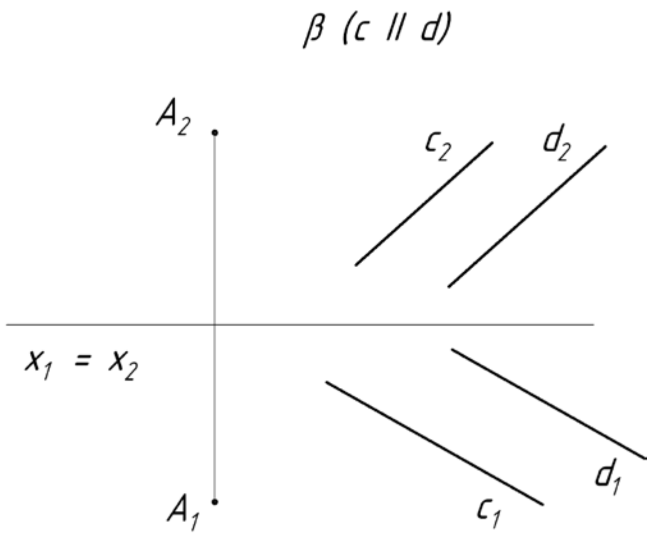


Рис.77

Решение:

1. $\boldsymbol{h} \subset \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{h} \parallel \mathbf{\Pi_1}$

   $\boldsymbol{h} \cap \boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}$

   $\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{f} \parallel \mathbf{\Pi_2}$

Строим проекции двух пересекающихся прямых, принадлежащих плоскости $\boldsymbol{\beta}$ – горизонтали $\boldsymbol{h}$ (рис.78)

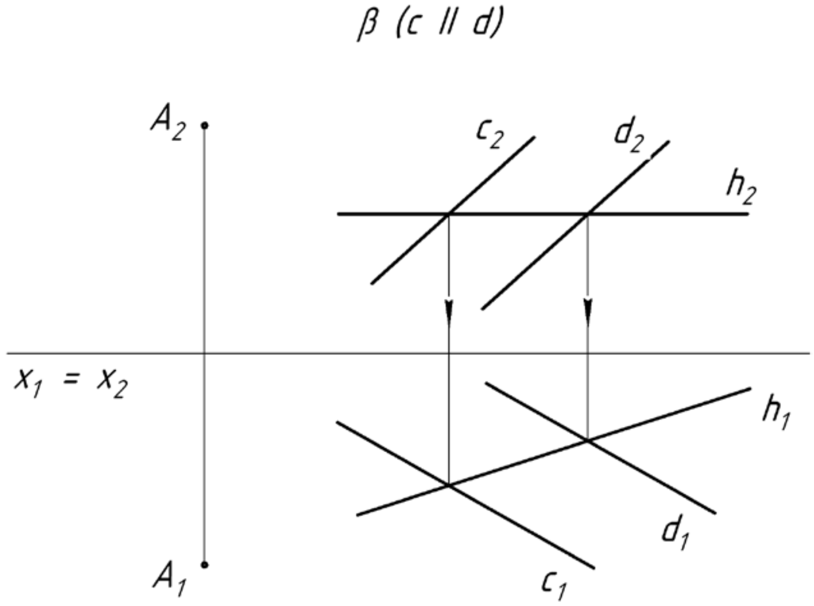


Рис.78

и фронтали $\boldsymbol{f}$ (рис.79).

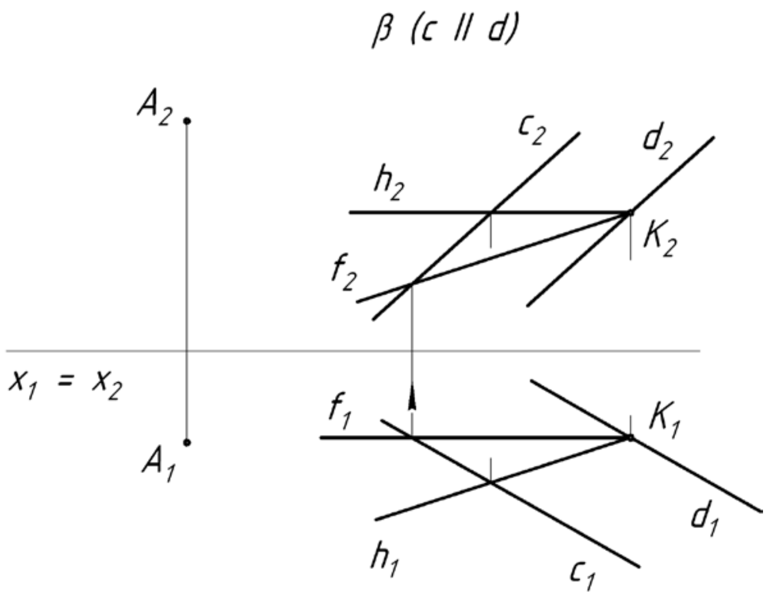


Рис.79

2. $\boldsymbol{p} \subset \boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{f}, \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{h} \Rightarrow \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{\beta}$

На основании теоремы о проекциях перпендикуляра к плоскости строим фронтальную проекцию перпендикуляра $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{p_2} \perp \boldsymbol{f_2}$ (рис.80)

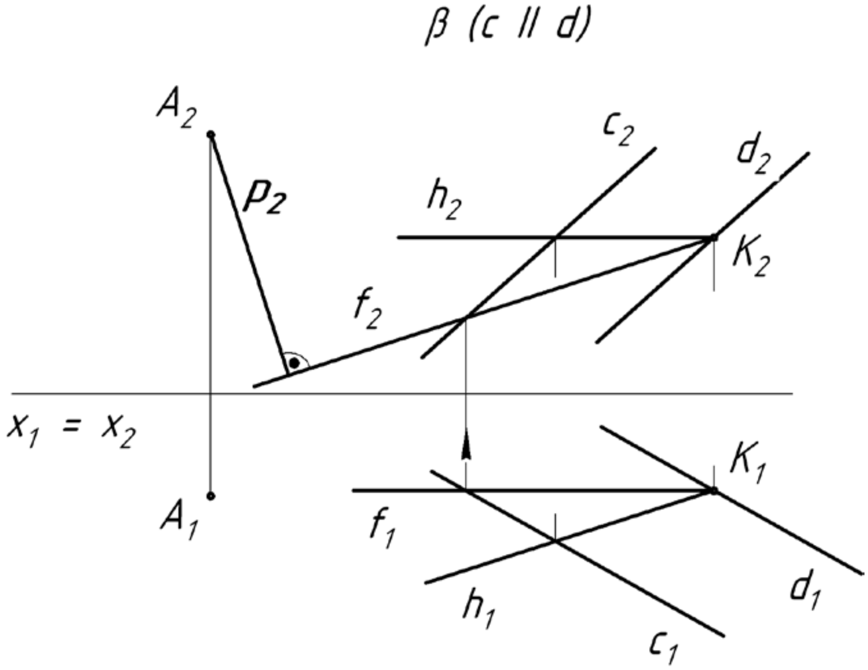


Рис.80

и горизонтальную проекцию перпендикуляра $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{p_1} \perp \boldsymbol{h_1}$ (рис.81).

Задача решена.

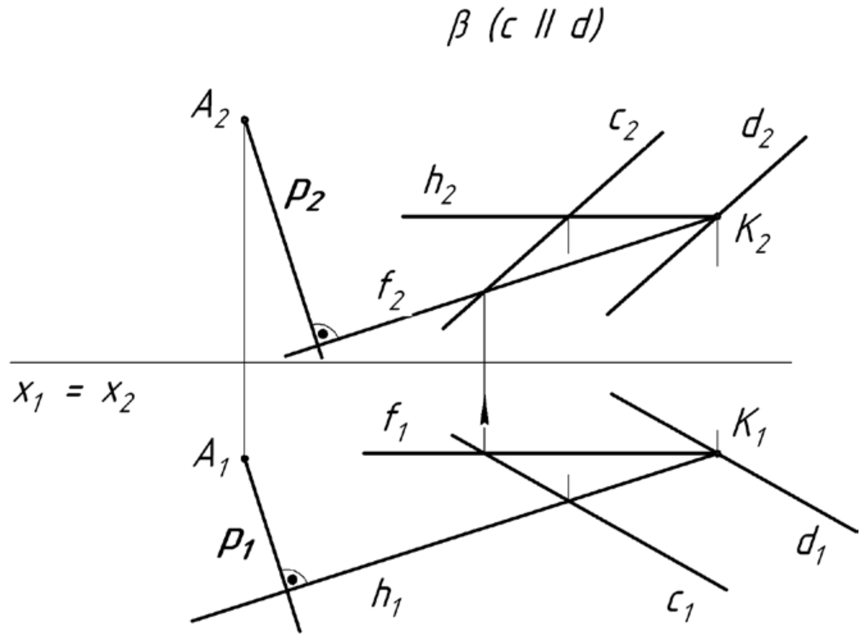


Рис.81

Следует обратить внимание, что в данной задаче не требовалось найти основание перпендикуляра, т.е. проекции точки пересечения перпендикуляра с плоскостью **β**.

Решение задачи построения проекций перпендикуляра к плоскости упрощается, если определителем плоскости являются главные линии – пересекающиеся фронталь и горизонталь (рис.82).

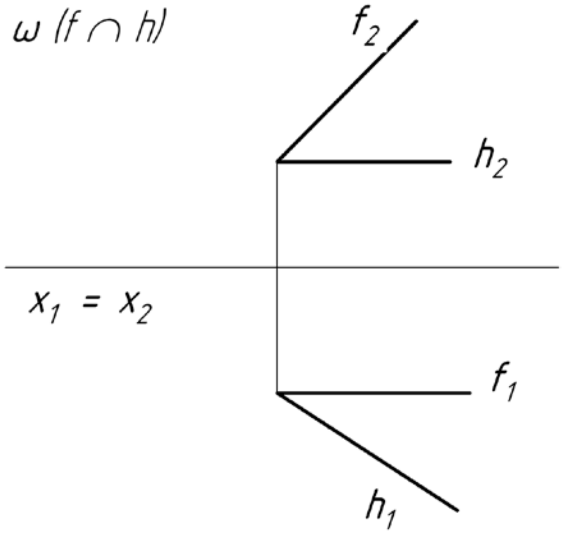


Рис.82

В этом случае требуется выполнить меньше построений (рис.83).

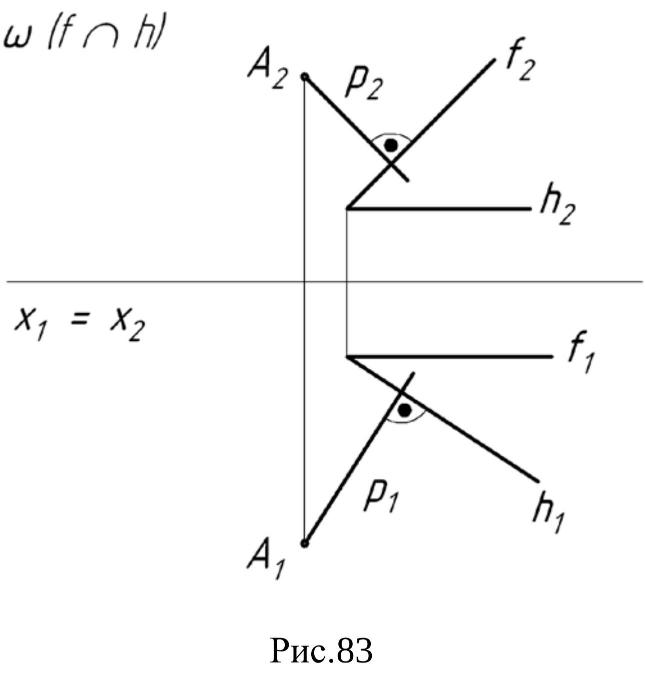


Рис.83

Задача 63. Построить проекции прямой, инцидентной точке ***M*** и перпендикулярной к плоскости **β** (рис.84).

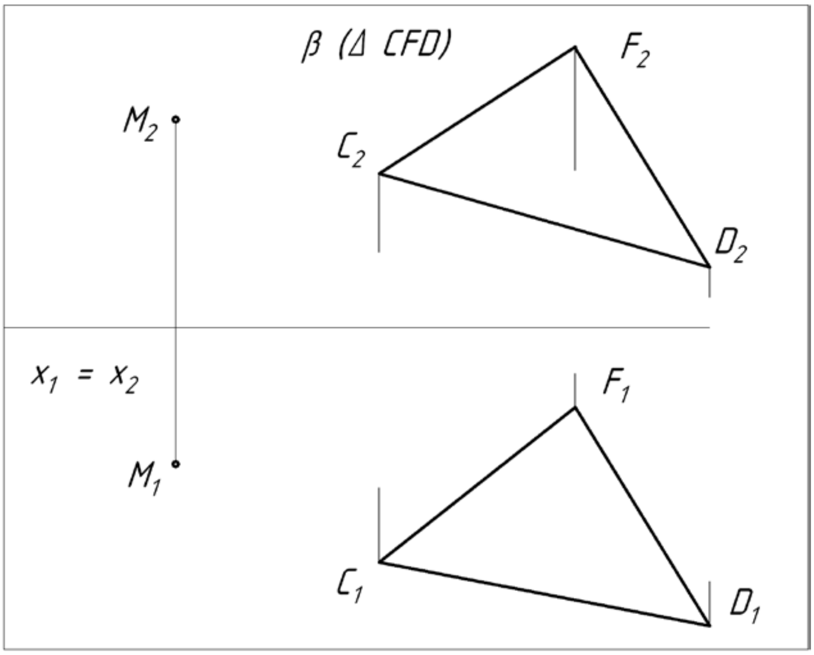


Рис.84

Задача 64. Построить проекции определителя плоскости, инцидентной точке ***P*** и перпендикулярной к данной прямой ***c*** (рис.85).

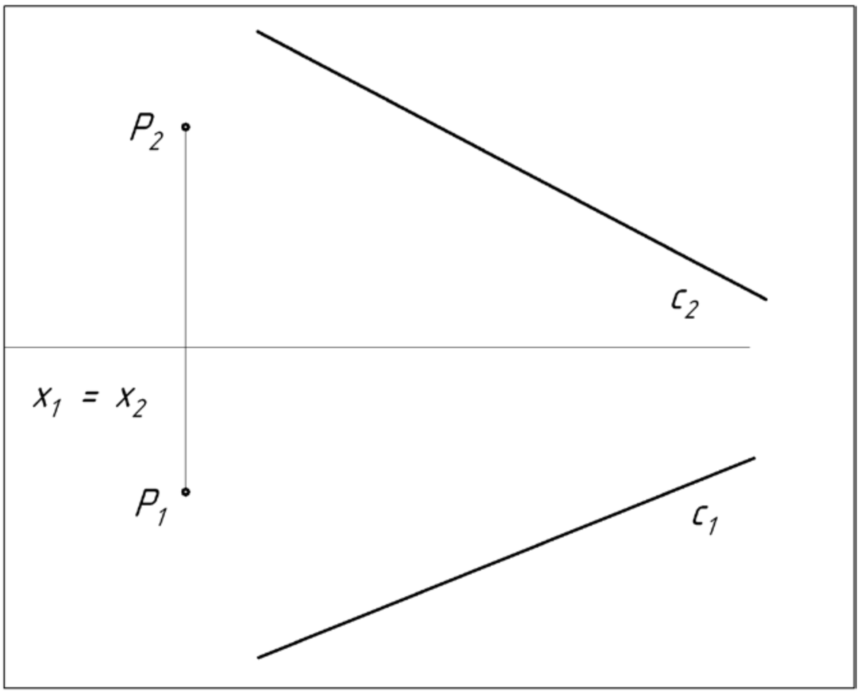


Рис.85

Задача 65. Определить: перпендикулярна прямая к плоскости или нет (рис.86).

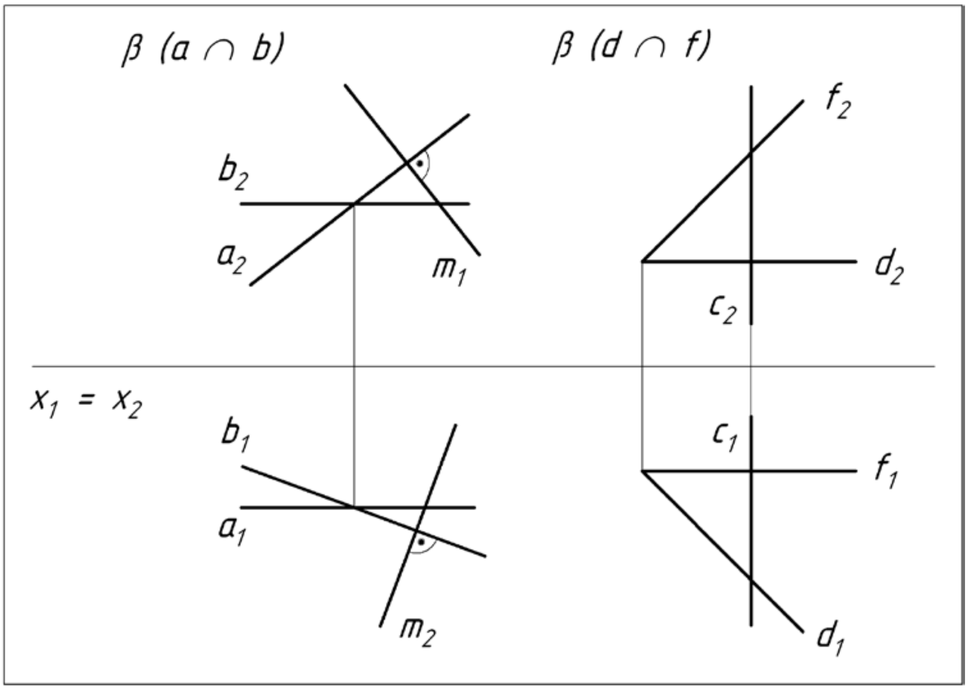


Рис.86

Задача 66. Определить: перпендикулярна прямая к плоскости или нет (рис.87).

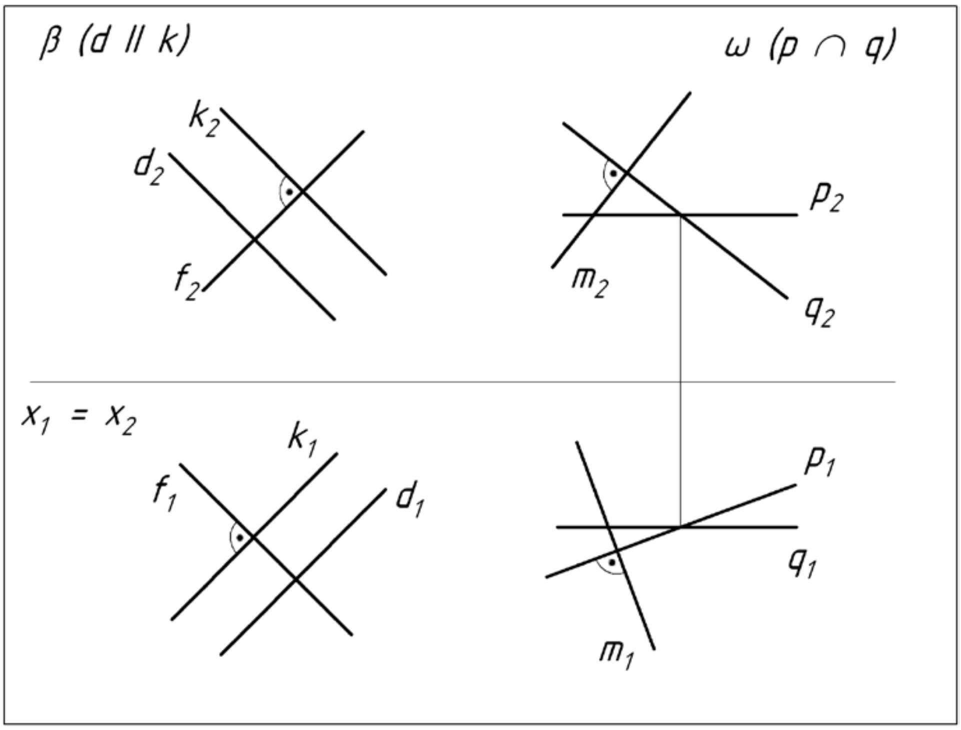


Рис.87

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Взаимно перпендикулярные плоскости

Из стереометрии известно, что *две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой* (признак перпендикулярности двух плоскостей).

Следовательно, для того, чтобы строить проекции взаимно перпендикулярных плоскостей, необходимо уметь выполнять построение перпендикуляра к плоскости.

На рис.88 показано построение плоскости **α**, перпендикулярной заданной плоскости **ω** ($f \cap h$). Сначала построен перпендикуляр p к плоскости **ω**, а затем задана плоскость **α** ($m \parallel p$), проходящая через этот перпендикуляр.

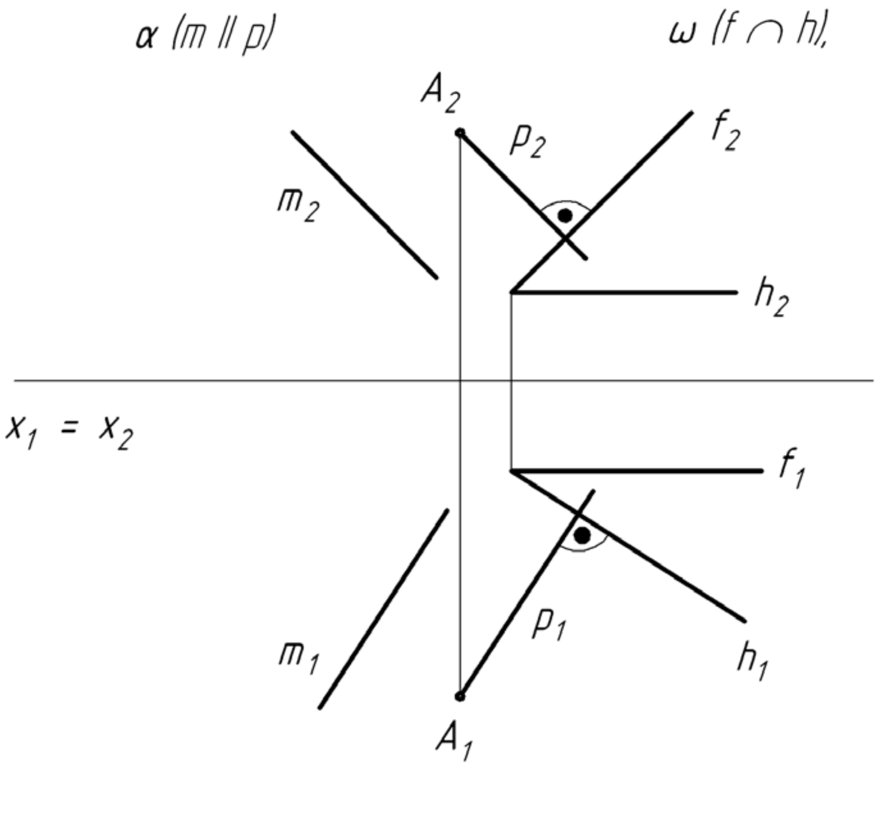


Рис.88

ЗАДАЧИ

Взаимно перпендикулярные плоскости

Задача 67. Построить проекции определителя плоскости, инцидентной точке ***M*** и перпендикулярной к данной плоскости **β** (рис.89).

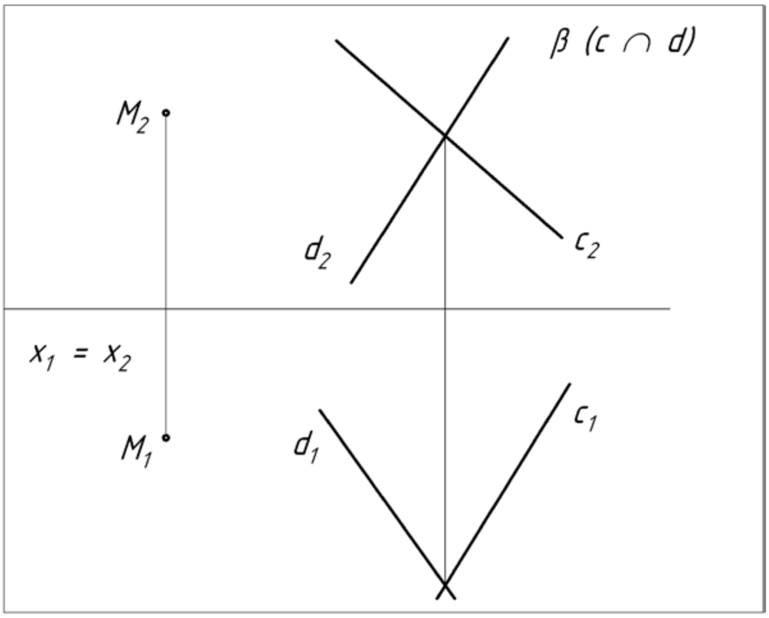


Рис.89

Задача 68. Построить проекции определителя плоскости, инцидентной прямой ***k*** и перпендикулярной к данной плоскости **β** (рис.90).

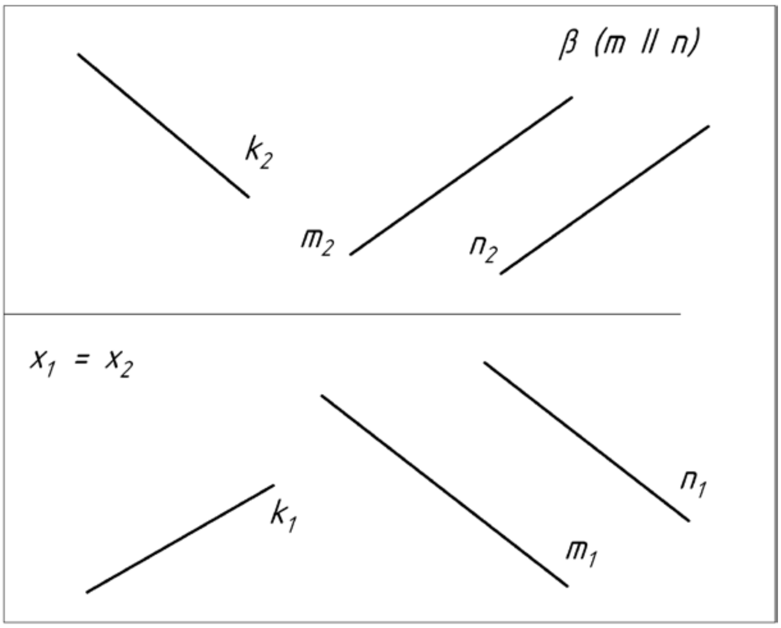


Рис.90

Задача 69. Определить: перпендикулярны плоскости или нет (рис.91).

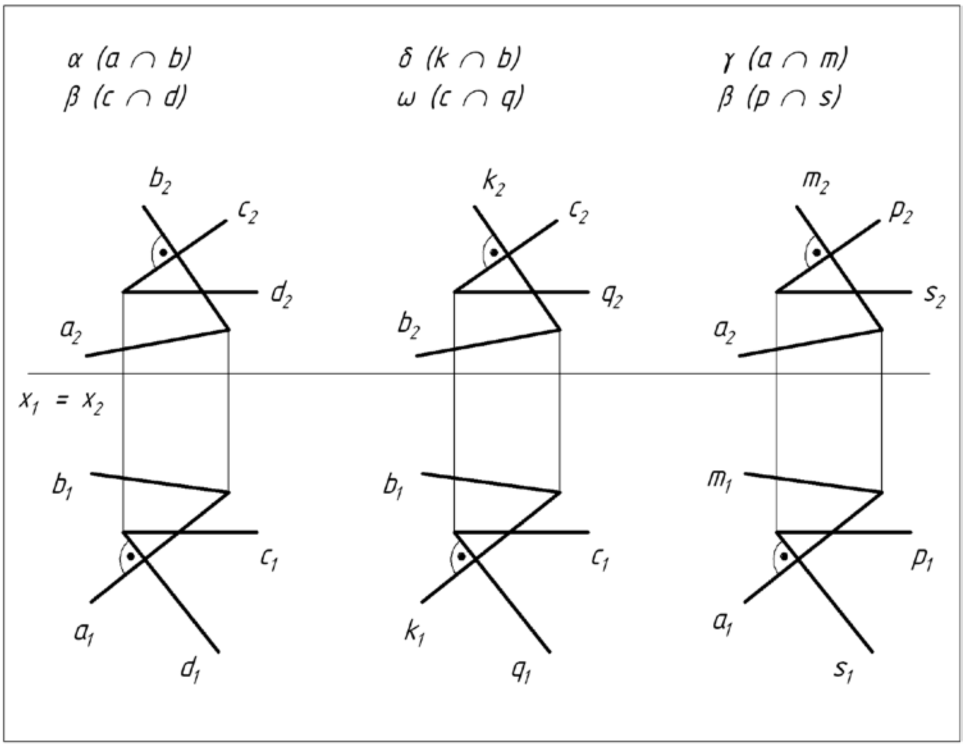


Рис.91

ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Позиционные задачи

В начертательной геометрии задачи на определение взаимного положения заданных оригиналов носят название позиционных (ПЗ).

Во всех позиционных задачах вопрос может быть сформулирован следующим образом: «Определить взаимное положение оригиналов».

Позиционные задачи, в которых участвуют точки, прямые и плоскости называют основными позиционными задачами.

На первом этапе решения задачи необходимо провести полный анализ исходных данных и выразить результаты анализа в символическом виде, т.е. необходимо определить, какие оригиналы участвуют в задаче и какое положение они занимают относительно плоскостей проекций.

Позиционные задачи можно разделять на типы в зависимости от положения заданных оригиналов относительно плоскостей проекций.

ПЗ I типа - **оба** оригинала занимают проецирующее положение. Например, в задаче, чертёж к которой представлен на рис.92, участвуют горизонтально-проецирующая прямая ***s*** и фронтально-проецирующая плоскость **γ**.

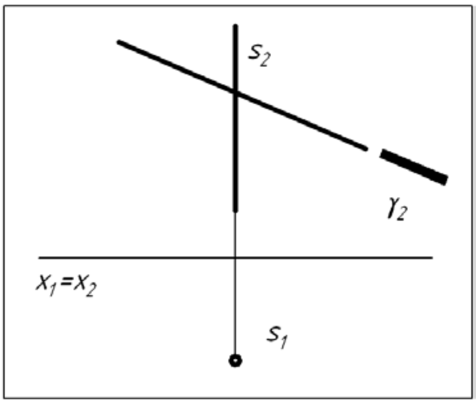


Рис.92

В этом случае можно сразу ответить на вопрос задачи о взаимном положении оригиналов – есть пересечение или нет; определить, какая фигура получится при пересечении и найти проекции этой фигуры на чертеже (рис.93).

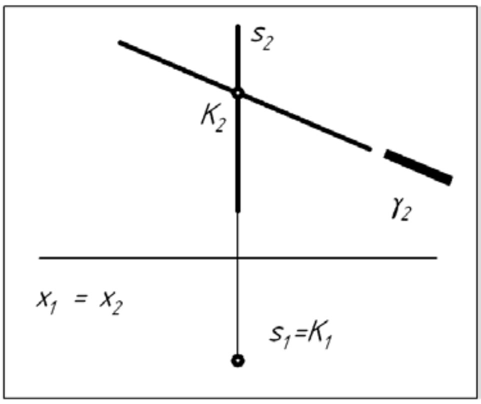


Рис.93.

ПЗ II типа - **один** из оригиналов занимает проецирующее положение. На рис.94 своим горизонтальным следом (γ_1) задана горизонтально-проецирующая плоскость γ. Плоскость α, определителем которой является треугольник ABC, занимает общее положение относительно плоскостей проекций.

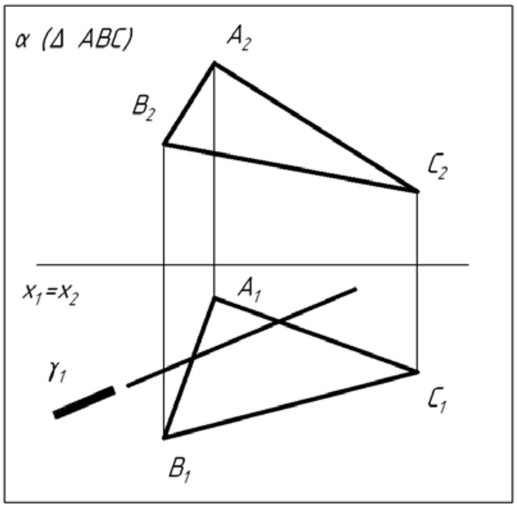


Рис.94

В ПЗ II типа также можно ответить на вопрос задачи и найти на чертеже одну из проекций фигуры, получающейся в результате пересечения оригиналов. Вторую проекцию этой фигуры требуется построить (рис.95).

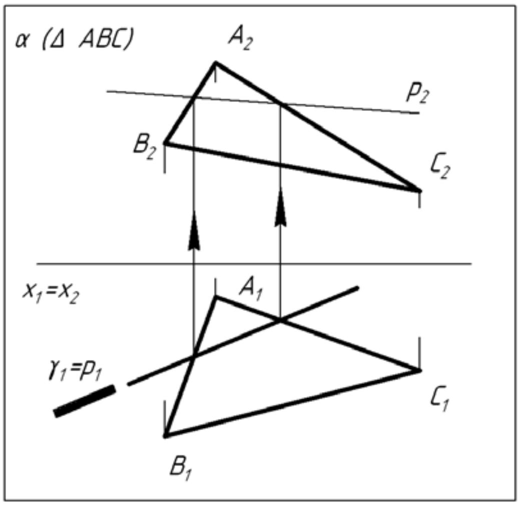


Рис.95

ПЗ III типа - **ни один** из оригиналов не занимает проецирующее положение. Плоскости **α** и **γ** на рис.96 занимают общее положение. Без дополнительных построений невозможно дать полный ответ на вопрос о взаимном положении оригиналов.

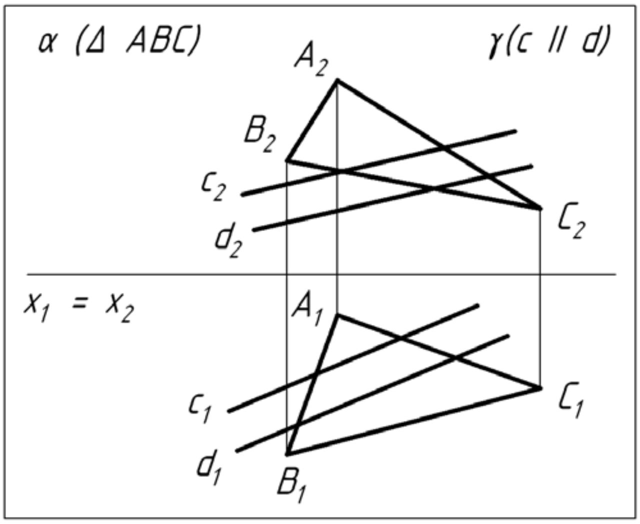


Рис.96

ЗАДАЧИ

Основные позиционные задачи

Задача 70. Определить тип каждой из позиционных задач (рис.97).

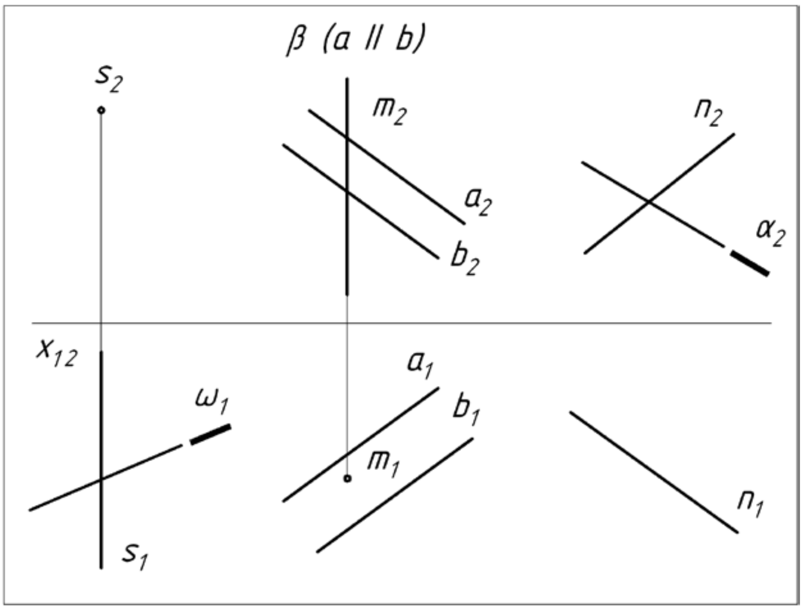


Рис.97

Задача 71. Определить: параллельна прямая плоскости или нет (рис.98).

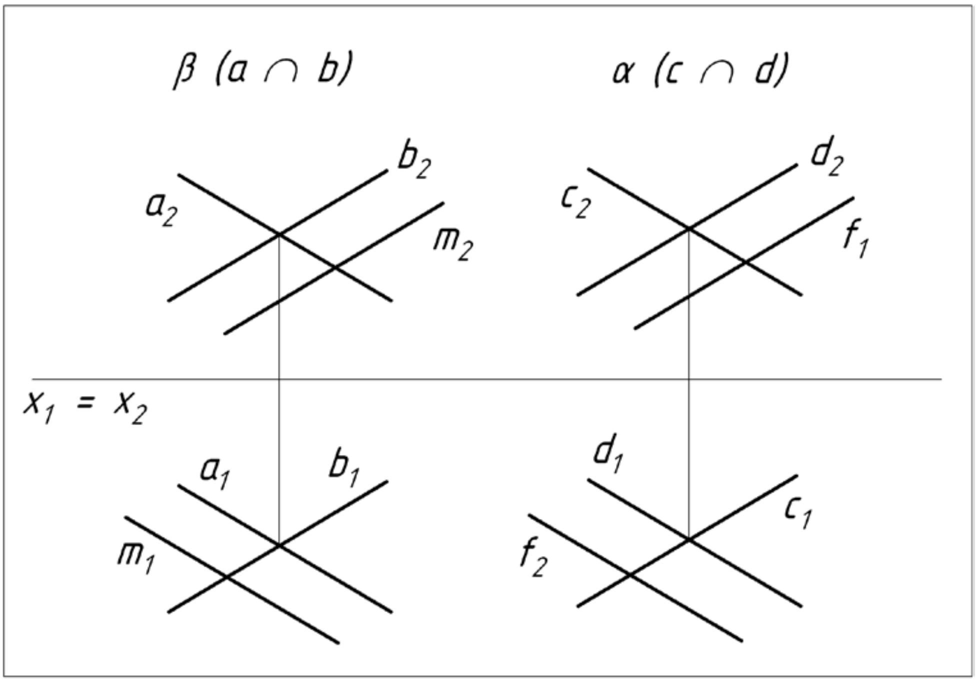


Рис.98

Задача 72. Определить: параллельна прямая плоскости или нет (рис.99).

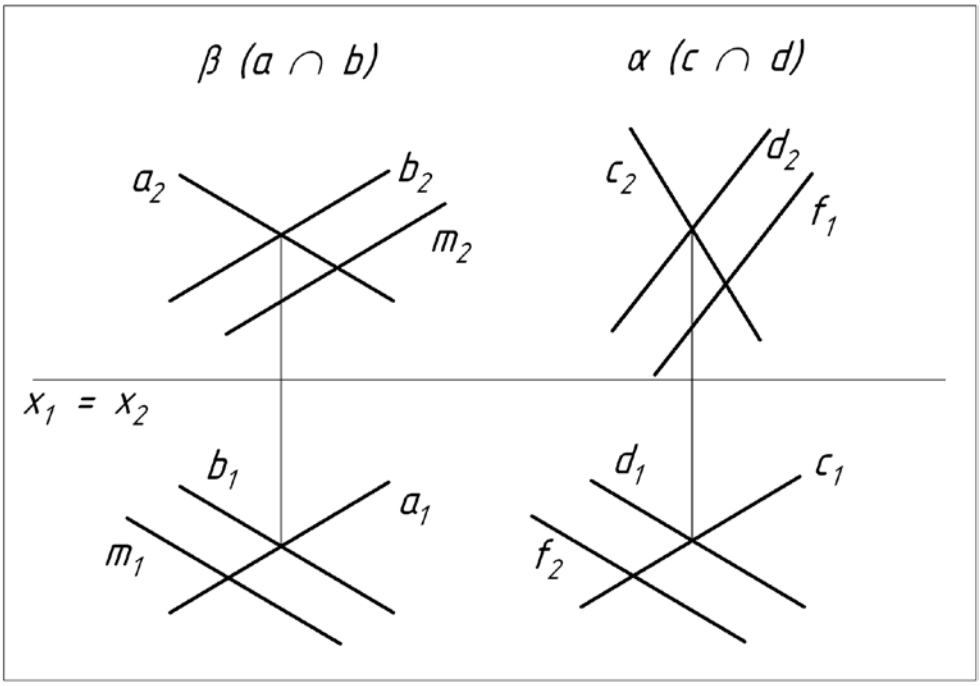


Рис.99

Задача 73. Определить: параллельна прямая плоскости или нет (рис.100).

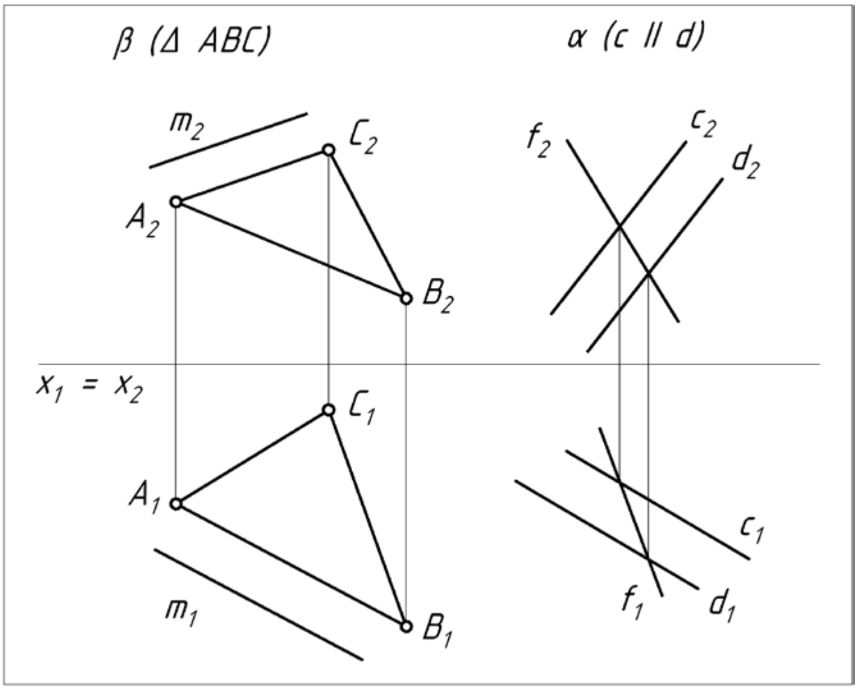


Рис.100

Задача 74. Построить проекции плоскости, инцидентной точке ***A*** и параллельной данной прямой ***m*** (рис.101), так, чтобы плоскость была:

1) горизонтально-проецирующей;
2) профильно-проецирующей;
3) общего положения.

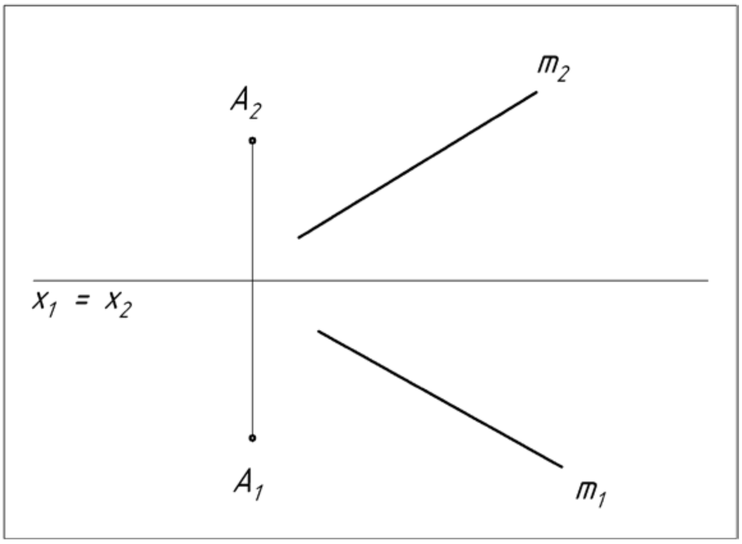


Рис.101

Задача 75. Определить: параллельны плоскости или нет (рис.102).

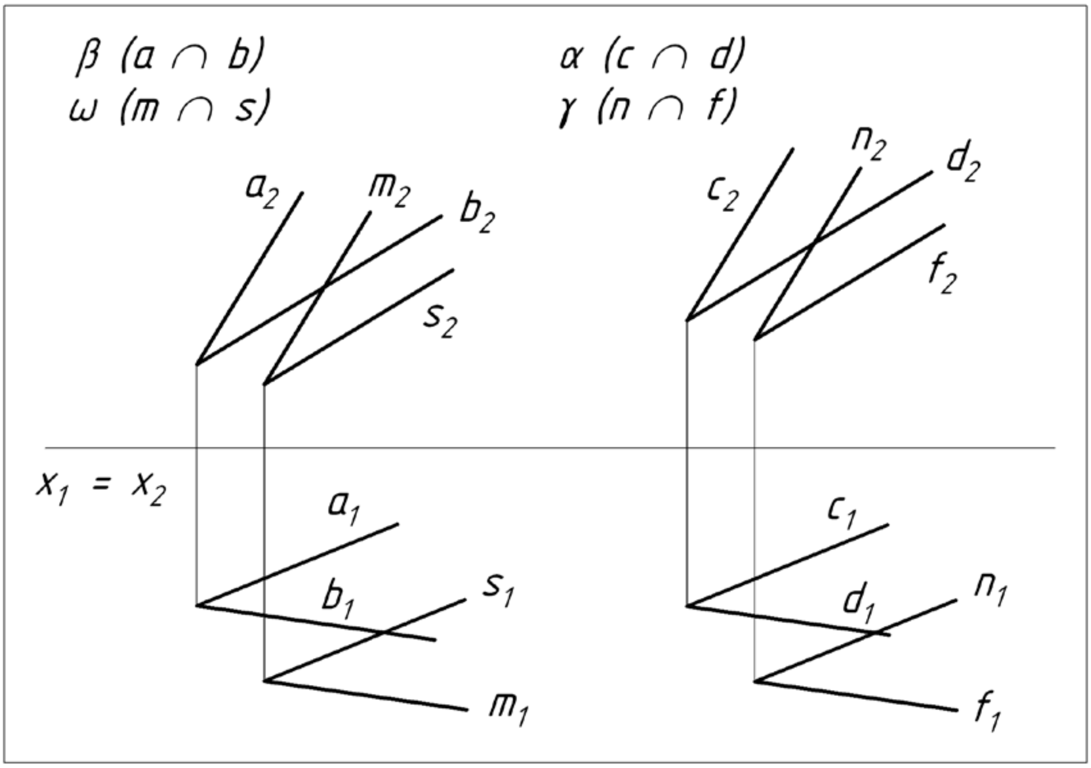


Рис.102

Пример «Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения»

Условие задачи: определить взаимное положение заданных оригиналов.

Дано: β (Δ $\boldsymbol{ABC}$) – о.п., $\boldsymbol{AB}$ – о.п., $\boldsymbol{BC}$ – о.п., $\boldsymbol{AC}$ – о.п.

$\boldsymbol{m}$ – о.п.

Найти: $\boldsymbol{m} \cap \beta$ = ?

Варианты ответа:

1. $\boldsymbol{m} \subset \beta$, тогда $\boldsymbol{m} \cap \beta = \boldsymbol{m}$
2. $\boldsymbol{m} \parallel \beta$, тогда $\boldsymbol{m} \cap \beta = \varnothing$
3. $\boldsymbol{m} \cap \beta = \boldsymbol{F}$

Чертёж к задаче: рис.103.

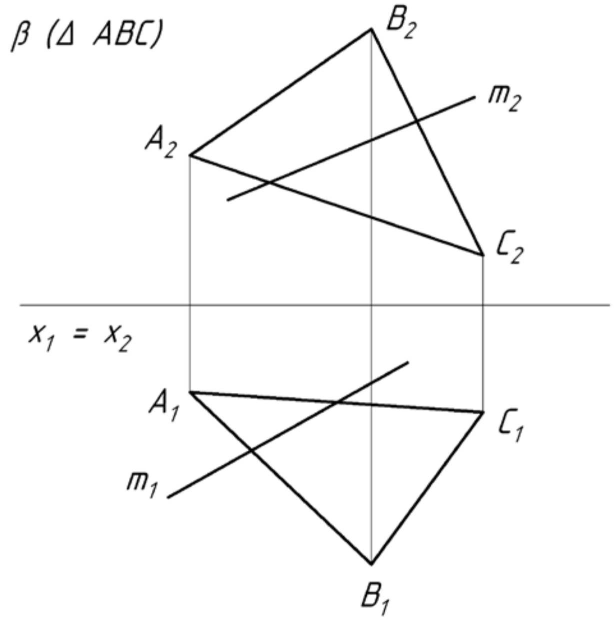


Рис.103

Решение: ПЗ III типа

1. $\boldsymbol{m} \not\subset \boldsymbol{\beta}$

Из чертежа (рис.104) следует, что у прямой ***m*** и плоскости **β** нет двух общих точек, следовательно, прямая не инцидентна плоскости. Для того, чтобы определить, параллельна прямая плоскости или пересекает её, а в случае пересечения показать на чертеже проекции общей точки прямой и плоскости, необходимы дополнительные построения.

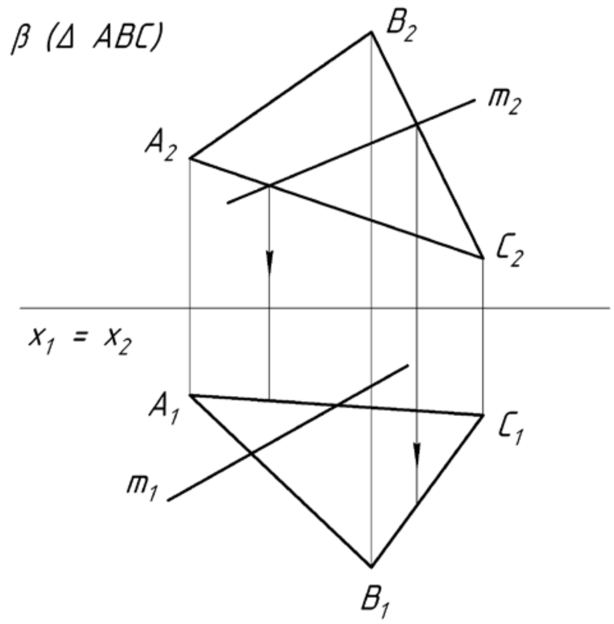


Рис.104

2. Универсальный метод решения позиционных задач – **метод посредника**.

Посредниками могут быть различные фигуры – прямые, плоскости, сферы и др. Выбор вида посредника определяется условиями задачи. В рассматриваемом примере посредником служит плоскость, в которую заключают данную прямую. Плоскость-посредник может быть общего или частного положения. Выбор положения посредника также определяется условиями задачи. Критериями служат количество и сложность дополнительных геометрических построений.

В данном случае в качестве посредника взята фронтально-проецирующая плоскость $\boldsymbol{\omega}$, заданная на чертеже фронтальным следом $\boldsymbol{\omega_2}$. След плоскости-посредника совпадает с фронтальной проекцией прямой $\boldsymbol{m}$ (рис.105).

$\boldsymbol{m} \subset \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ $(\boldsymbol{\omega_2})$, $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$

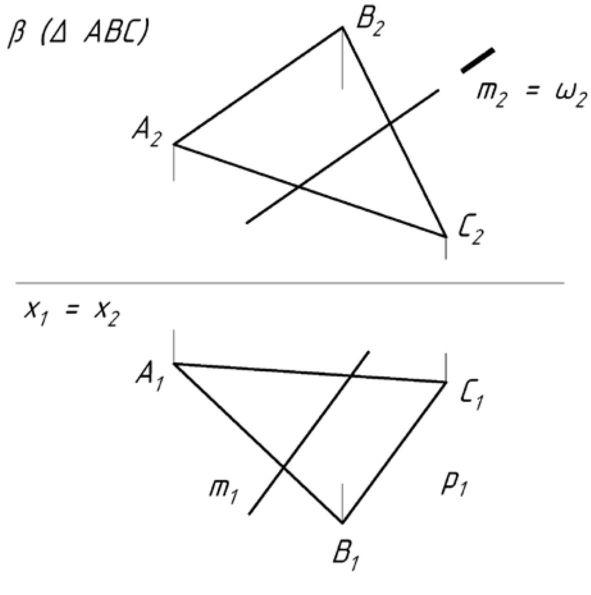


Рис.105

3. Теперь следует решить позиционную задачу, в которой участвуют две плоскости: фронтально-проецирующая плоскость-посредник $\boldsymbol{\omega}$ и плоскость общего положения $\boldsymbol{\beta}$, т.е. $\boldsymbol{\omega} \cap \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$. Эта **ПЗ - II типа**, т.к. только один оригинал занимает проецирующее положение.

Фронтальная проекция линии пересечения двух плоскостей совпадает со следом одной из них - **ω**. Горизонтальную проекцию строят, исходя из условия инцидентности этой прямой плоскости **β** (рис.106).

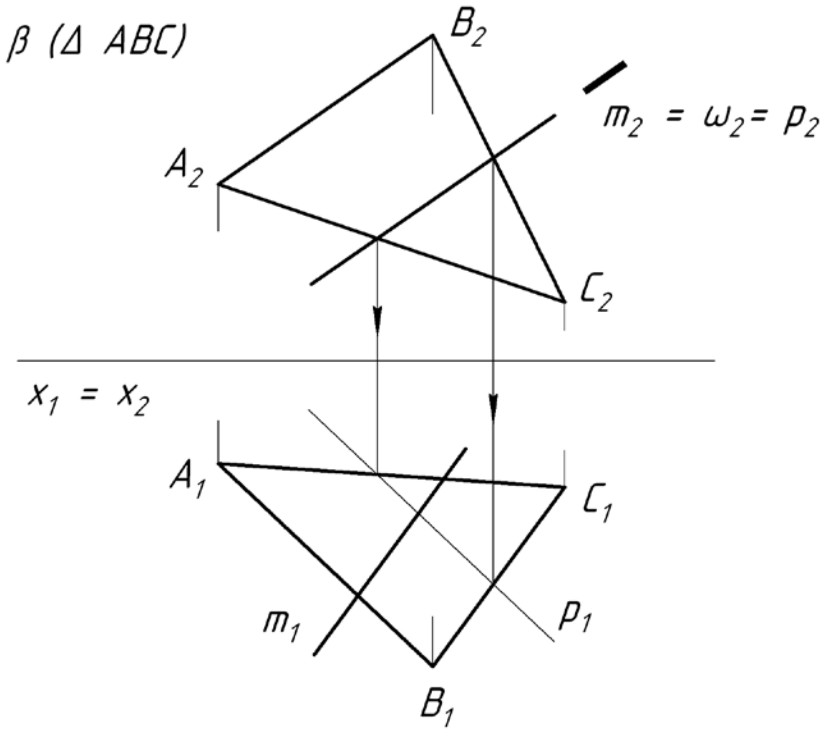


Рис.106

4. Вновь следует решить позиционную задачу, в которой участвуют две прямые: данная ***m*** и построенная линия пересечения ***p***. Эти две прямые инцидентны одной плоскости **ω**. Об их взаимном положении можно судить по горизонтальным проекциям. Эти прямые не параллельны, следовательно, ***m*** и **β** также не параллельны.

Прямые ***m*** и ***p*** пересекаются в точке ***F***. На чертеже определена сначала горизонтальная проекция точки, затем – по линии связи – фронтальная проекция этой точки (рис.107).

$\boldsymbol{m \cap p = F}$

5. Точка ***F*** является точкой пересечения прямой ***m*** с плоскостью **β**.

Ответ: $\boldsymbol{m \cap \beta = F}$

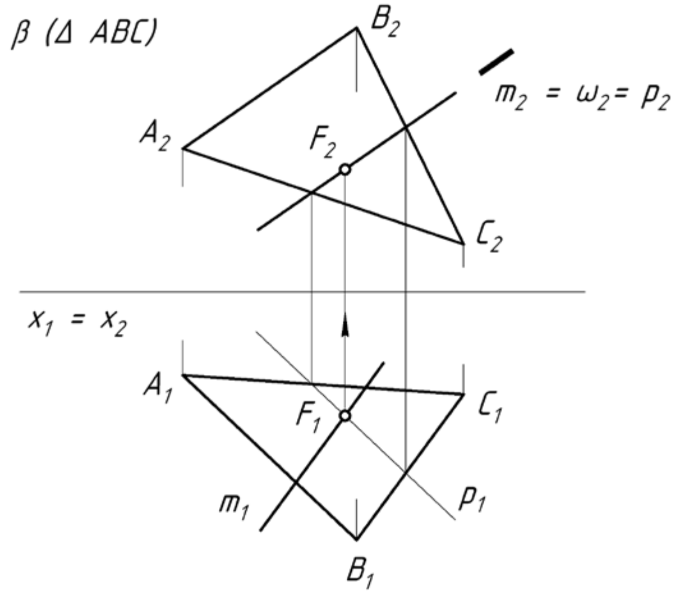


Рис.107

6. В заключение, следует определить видимость прямой ***m*** по отношению к плоскости **β**. Предполагаем, что плоскость непрозрачна и безгранична. Границей видимости прямой будет являться найденная точка пересечения – ***F***. Видимость определена способом конкурирующих точек сначала на фронтальной проекции (рис.108 и 109),

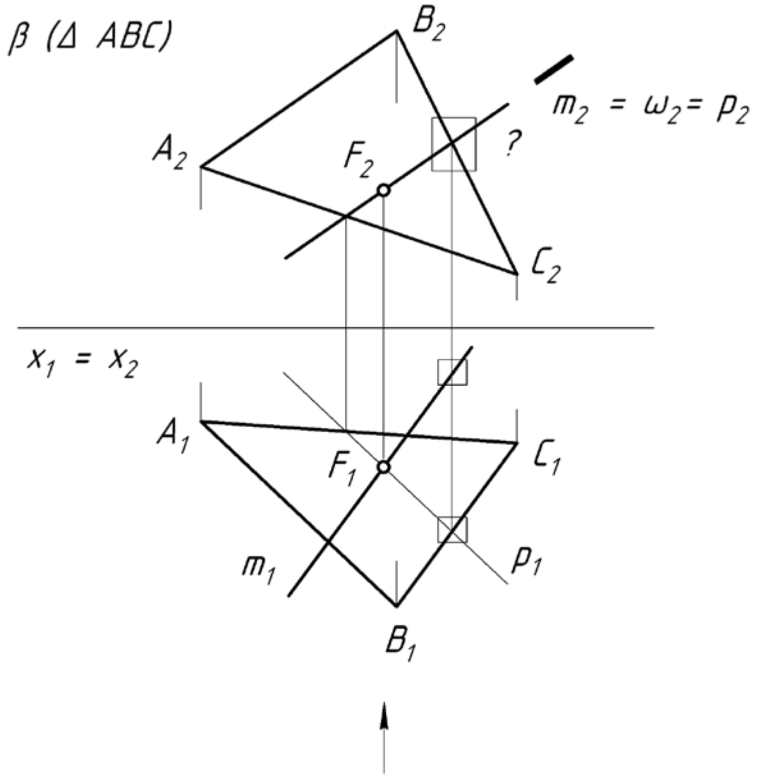


Рис.108

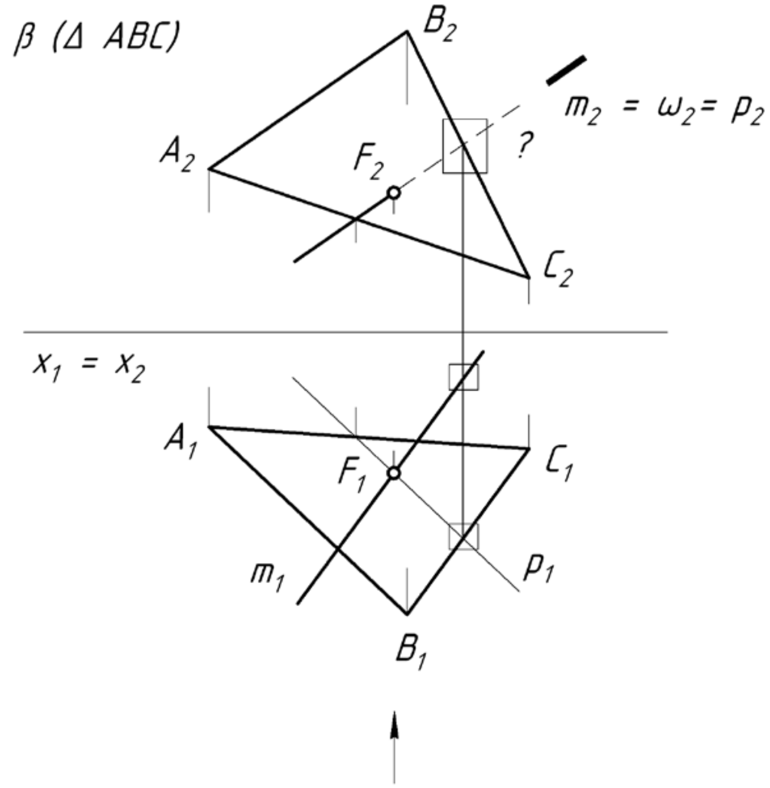


Рис.109

а затем на горизонтальной проекции (рис.110, 111).

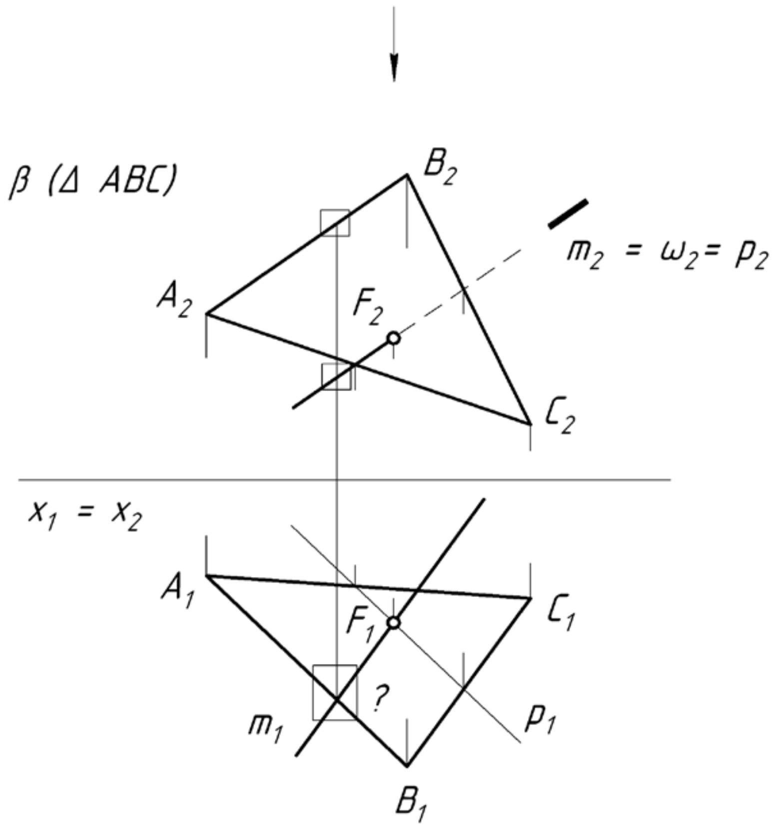


Рис.110

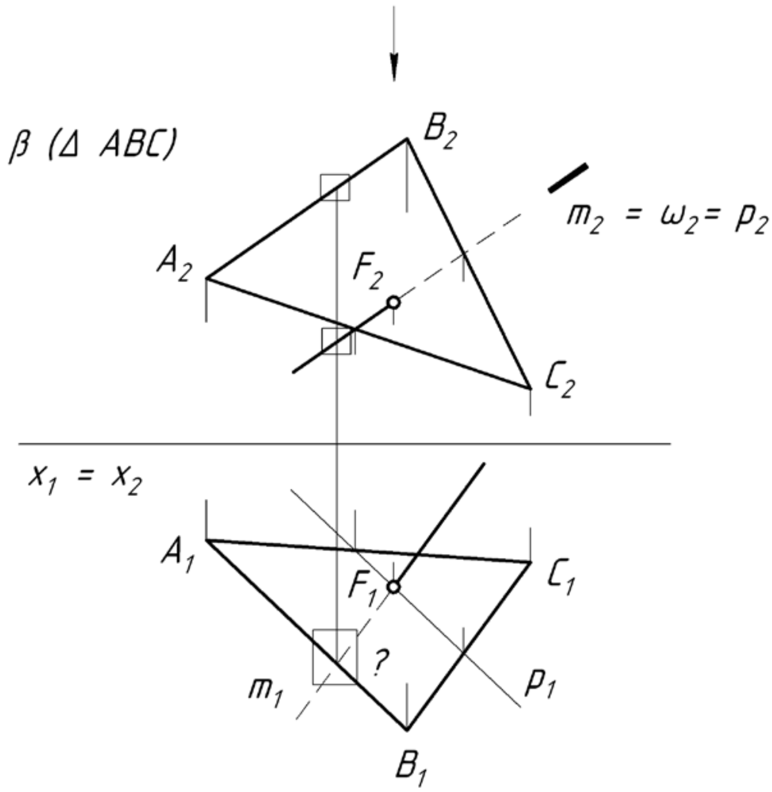


Рис.111

Задача решена (рис.112).

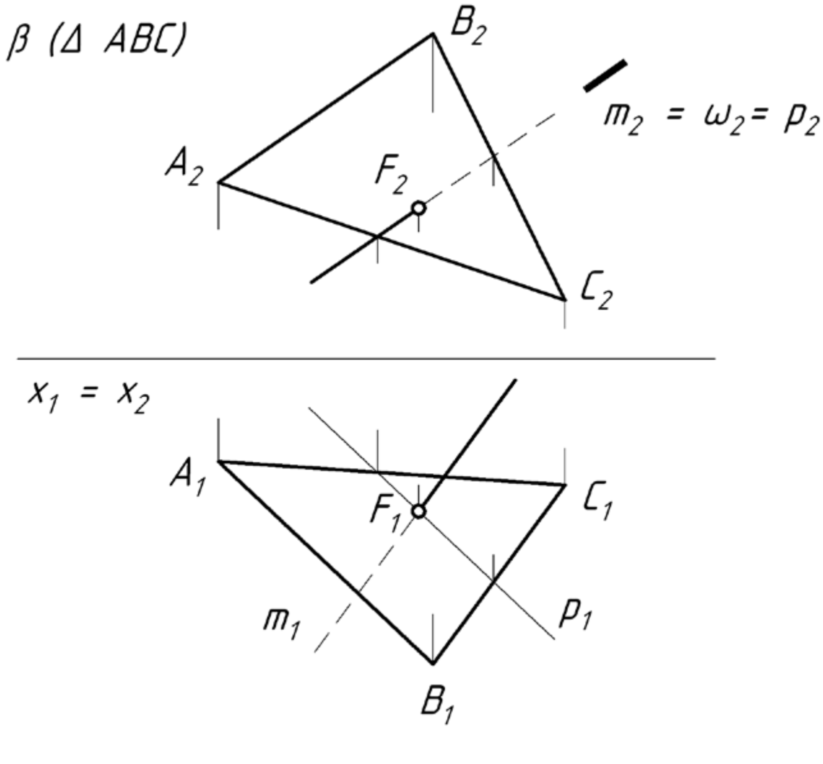


Рис.112

Задача 76. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.113).

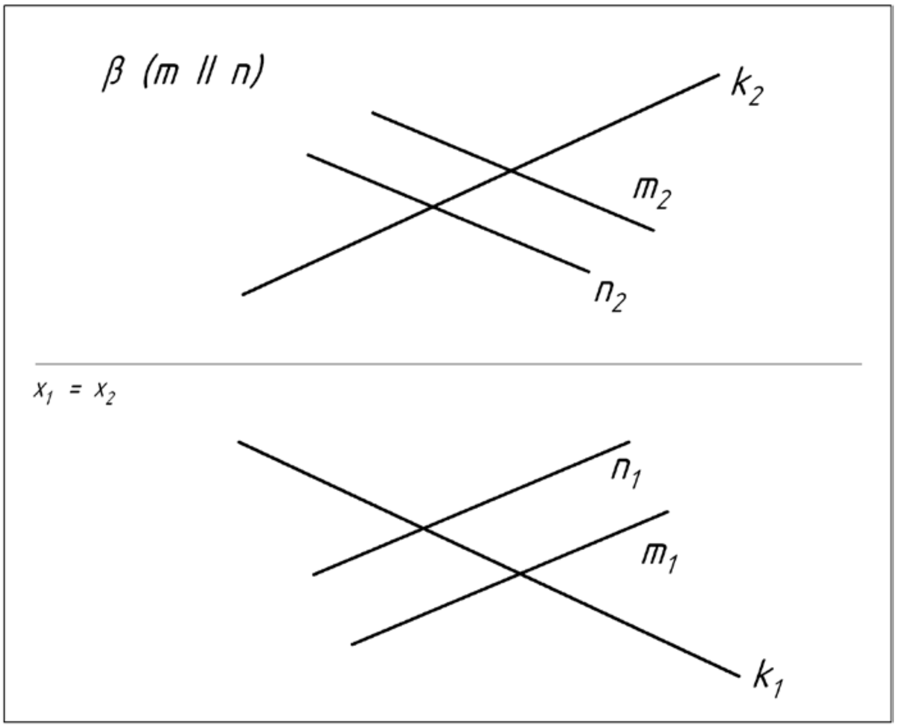


Рис.113

Задача 77. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.114).

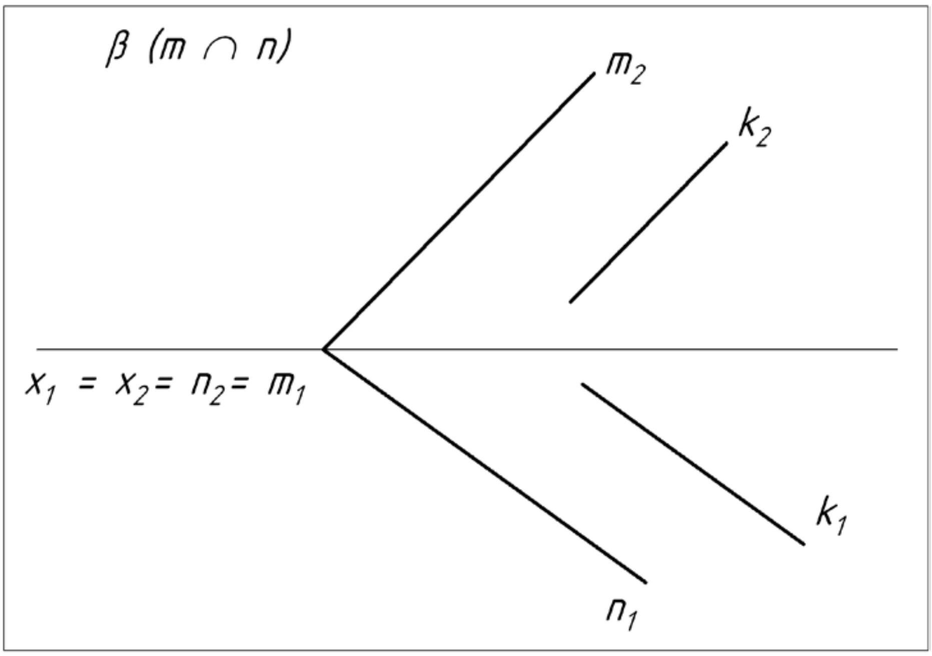


Рис.114

Задача 78. Даны плоскость **ω (*a* || *b*)** и прямая ***m*** (рис.115). Для определения их взаимного положения используется метод посредника. Посредником является плоскость **γ**. Определить, на каком чертеже – 1), 2) или 3) – фронтальная и горизонтальная проекции точки ***К*** – точки пересечения прямой и плоскости – определены верно.

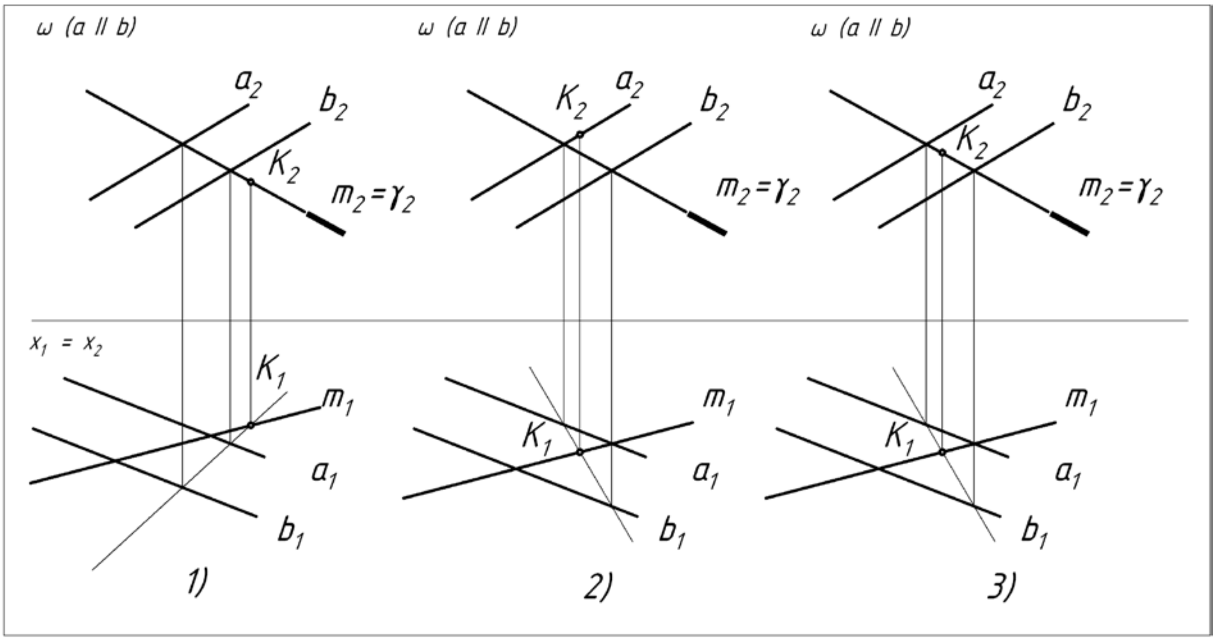


Рис.115

Задача 79. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.116).

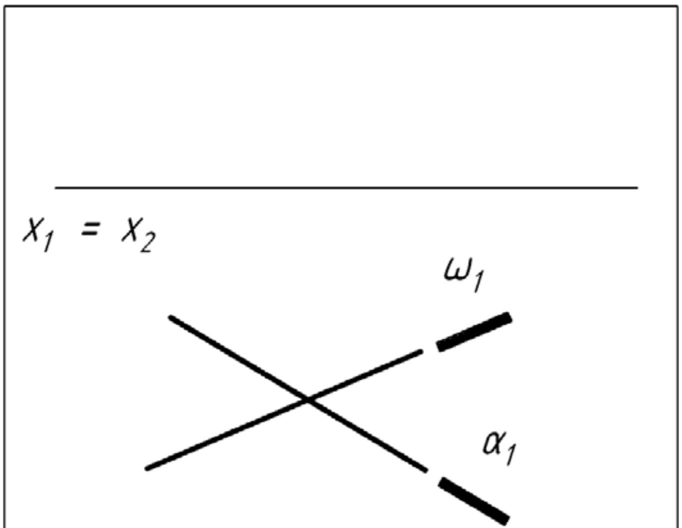


Рис.116

Задача 80. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.117).

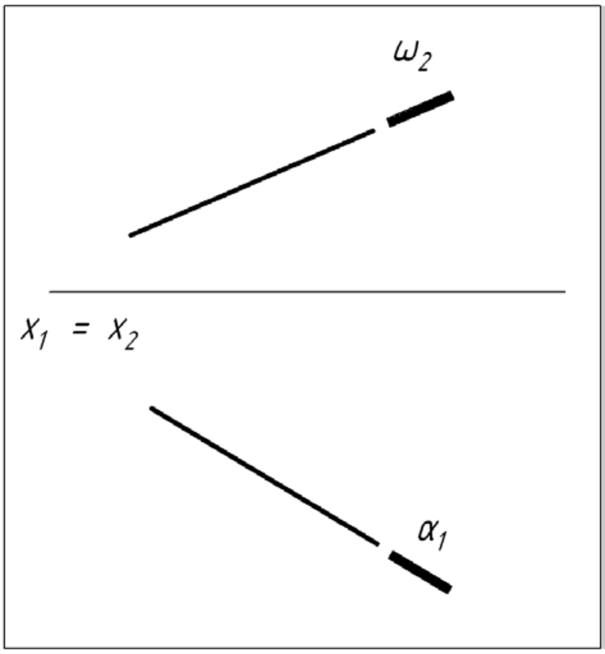


Рис. 117

Задача 81. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.118).

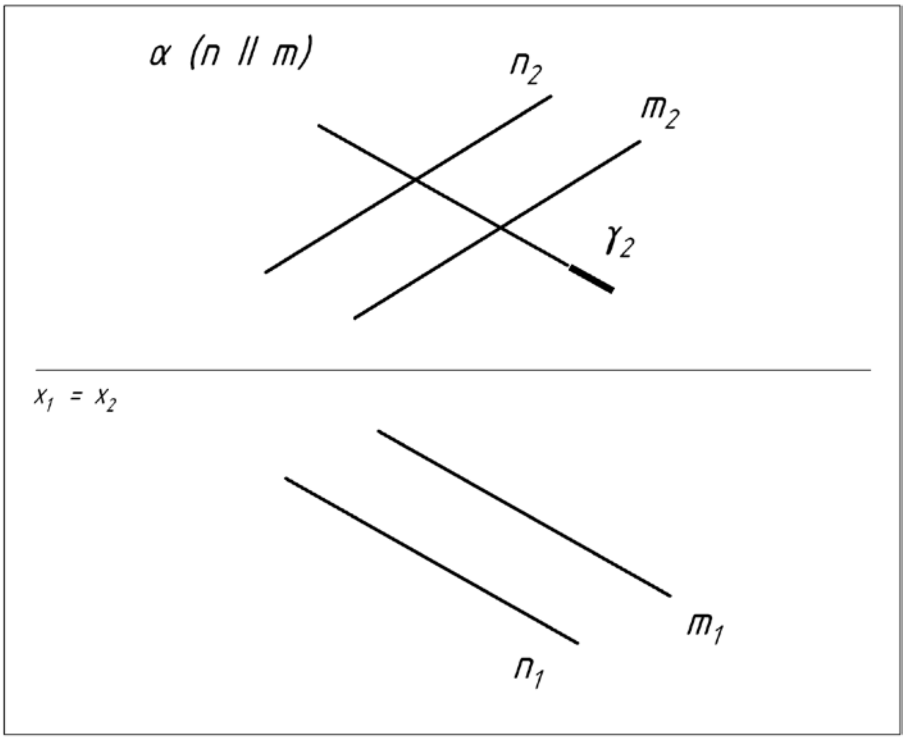


Рис.118

Задача 82. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.119).

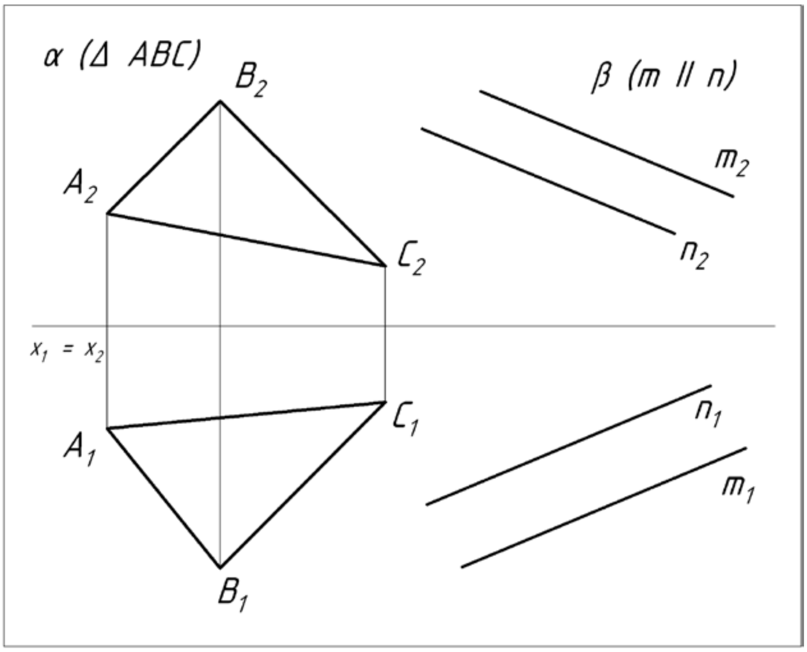


Рис.119

Задача 83. Определить взаимное положение заданных оригиналов (рис.120).

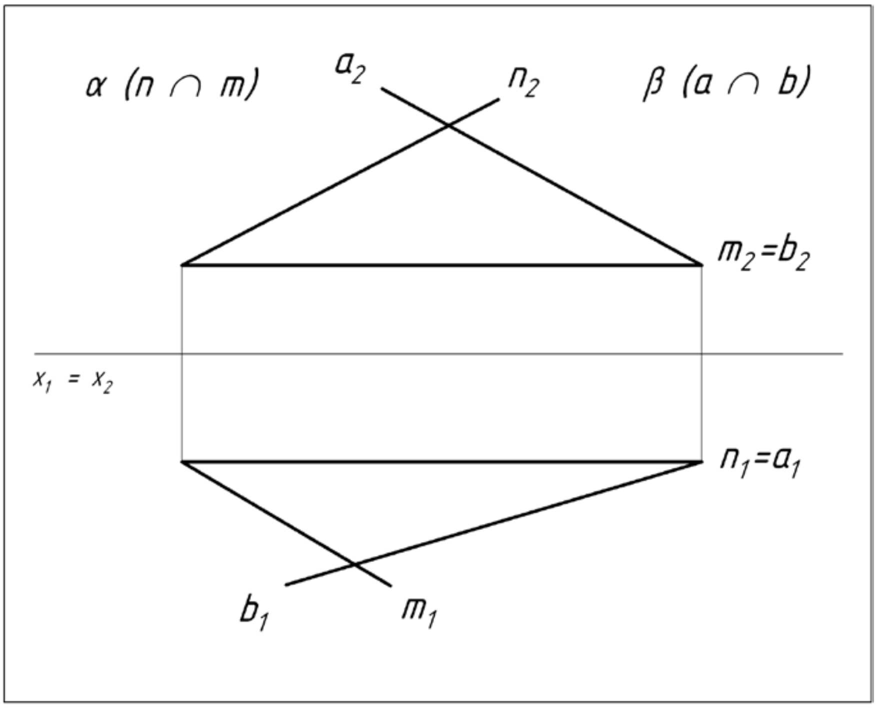


Рис.120

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие виды задач, связанных с оригиналами, рассматривает начертательная геометрия?
2. Какова область применения способов преобразования проекций? Другими словами: при решении каких задач применяют способы преобразования проекций?
3. Каковы цели применения способов преобразования проекций в различных случаях?

ЗАДАЧИ

Способ замены плоскостей проекций

1. Изучить сущность способа по учебникам.

Пример «Преобразование плоскости общего положения способом замены плоскостей проекций»

Условие задачи: способом замены плоскостей проекций (заменить горизонтальную плоскость) преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения, определителем которой являются две параллельные прямые общего положения, стала плоскостью уровня.

Дано: $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{d}$) – о.п., $\boldsymbol{c}$ – о.п., $\boldsymbol{d}$ – о.п.

Найти: $\boldsymbol{\beta \parallel \Pi'}$

Чертёж к задаче: рис.121.

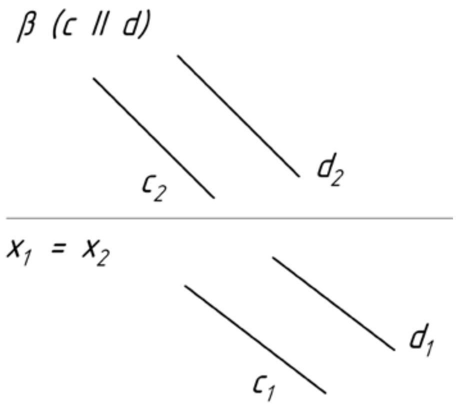


Рис.121

Решение: 4 основная задача на преобразования

Способом замены плоскостей проекций плоскость общего положения можно сделать плоскостью уровня, выполнив два преобразования. В результате первого преобразования плоскость займёт проецирующее положение, т.е. будет перпендикулярна к первой новой плоскости проекций. В результате второго преобразования – станет параллельна второй новой плоскости проекций.

Для простоты графического решения можно построить в плоскости **β** треугольник (рис.122).

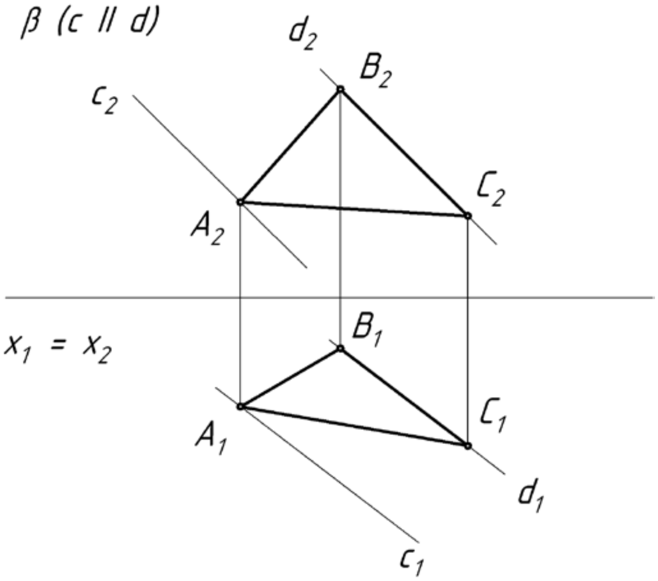


Рис.122

В условии задачи указано, что требуется заменить горизонтальную плоскость проекций $\mathbf{П_1}$. Введем вместо неё новую плоскость проекций, обозначив её $\mathbf{П_7}$. Нумерация дополнительных плоскостей проекций начинается с цифры 7, т.к. проекции оригиналов на плоскости $\mathbf{П_1}$ – $\mathbf{П_6}$ включительно являются шестью основными видами, принятыми в соответствии с государственным стандартом.

Новая плоскость проекций $\mathbf{П_7}$ должна удовлетворять следующим двум условиям. Во-первых, она должна быть перпендикулярна к незаменяемой плоскости $\mathbf{П_2}$ также, как в исходной системе перпендикулярны плоскости $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ (в ходе преобразований система плоскостей проекций всегда будет ортогональной). Во-вторых, новая плоскость $\mathbf{П_7}$ должна быть перпендикулярна к данной плоскости $\boldsymbol{\beta}$.

Если плоскость перпендикулярна к двум другим плоскостям, она перпендикулярна к линии их пересечения. Следовательно, чтобы задать на чертеже новую плоскость проекций $\mathbf{П_7}$ необходимо построить проекции линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{П_2}$, т.е. фронтальный след плоскости $\boldsymbol{\beta}$. Фронтальный след является одной из главных линий плоскости, принадлежащих к семейству фронтальных линий уровня, инцидентных этой плоскости. Все фронтали какой-либо плоскости параллельны между собой. Поэтому нет необходимости строить именно след плоскости на $\mathbf{П_2}$, достаточно построить какую-нибудь из линий этого семейства – инцидентных данной плоскости и параллельных $\mathbf{П_2}$ (рис.123).

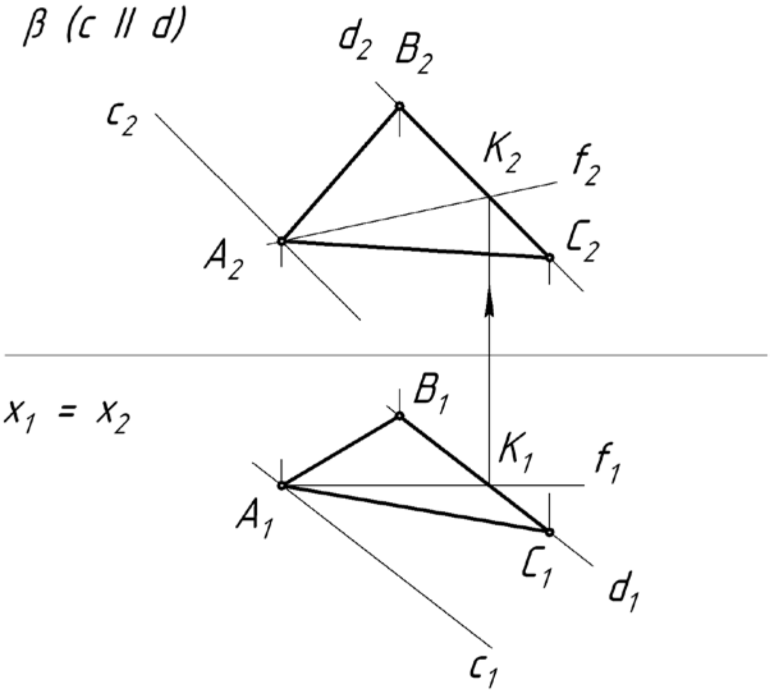


Рис.123

$\boldsymbol{AK} \subset \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{AK} \parallel \mathbf{П_2}$

Можно уменьшить количество выполняемых построений, если одну из сторон треугольника ***ABC*** задать параллельной $\mathbf{П_2}$.

Затем на чертеже могут быть показаны проекции линии пересечения плоскостей **П**$_2$ и **П**$_7$ - новой оси $\boldsymbol{0x}$. Эта линия перпендикулярна к отрезку ***АК*** – фронтали плоскости **β** (рис.124).

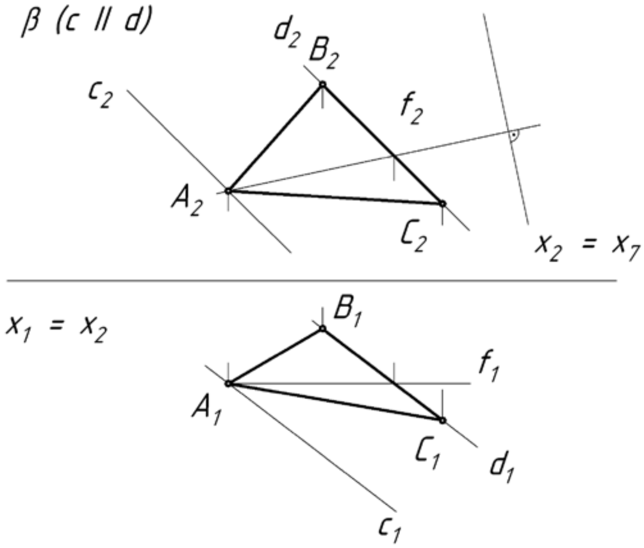


Рис.124

Новые проекции точек строятся с помощью линий связи, перпендикулярных к проекции новой оси $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_7}$. Т.к. плоскость **П**$_2$ осталась неизменной, сохранились расстояния от точек до этой плоскости, т.е. значение координаты **y** для каждой из точек. Поэтому расстояние от новой оси ($\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_7}$) до новой проекции точки ($\boldsymbol{C_7}$) равно расстоянию от заменяемой оси ($\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$) до заменяемой проекции точки ($\boldsymbol{C_1}$) (рис.125).

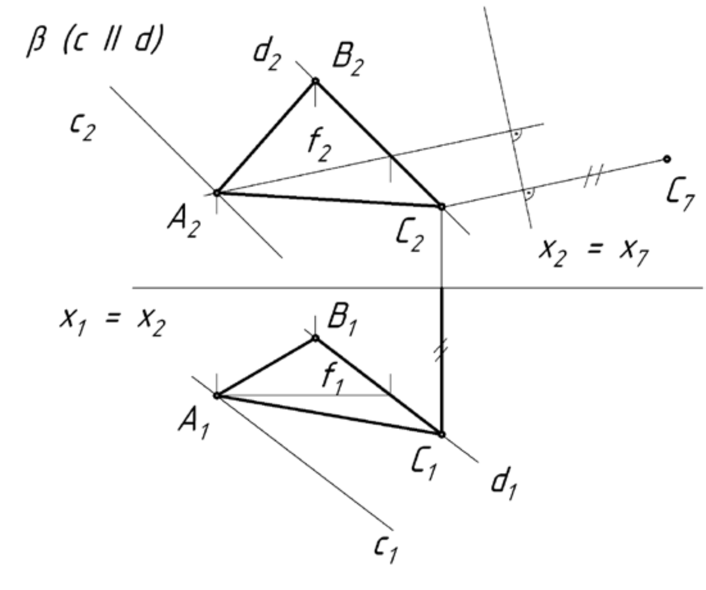


Рис.125

Проекцией плоскости β на Π_7 является прямая – след плоскости. На рис.126 обозначен β_7.

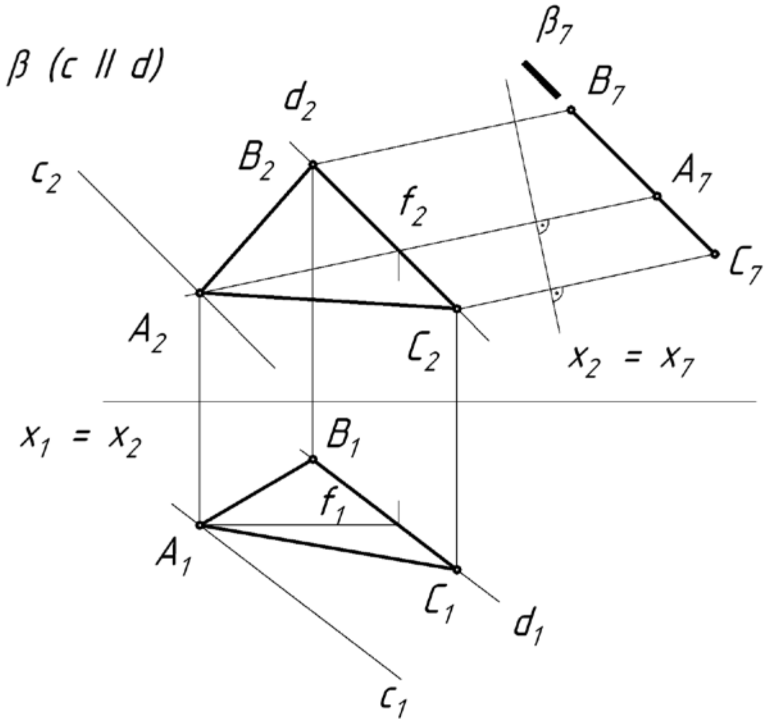


Рис.126

$\Pi_2 / \Pi_1 \rightarrow \Pi_2 / \Pi_7, \ \beta \perp \Pi_7$

Следующее преобразование влечёт за собой введение новой ортогональной системы плоскостей проекций. Плоскость Π_2 заменяется на Π_8. Новая плоскость проекций перпендикулярна к незаменяемой плоскости Π_7 и параллельна плоскости β.

$\Pi_2 / \Pi_7 \rightarrow \Pi_8 / \Pi_7, \ \beta \parallel \Pi_8$

Проекция линии пересечения плоскостей Π_7 и Π_8 ($x_7 = x_8$) параллельна следу плоскости β на Π_7, т.к. все точки плоскости β лежат на одинаковом расстоянии от плоскости Π_8. Проекция оси $x_7 = x_8$ может совпадать со следом плоскости β (β_7).

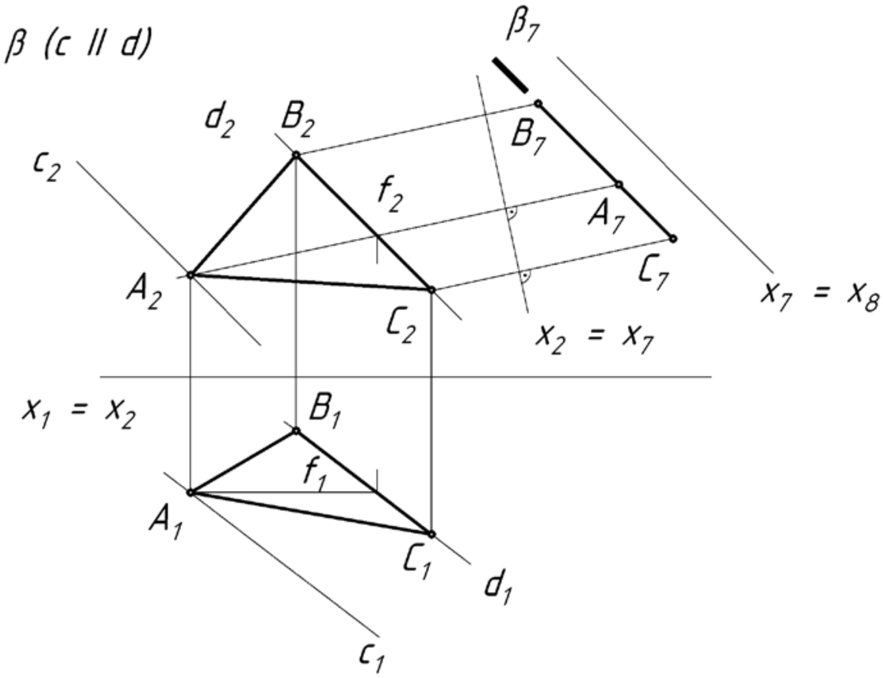


Рис.127

Линии связи от проекций точек на **П**$_7$ проводятся перпендикулярно к проекции оси $\boldsymbol{x_7} = \boldsymbol{x_8}$ (рис.128).

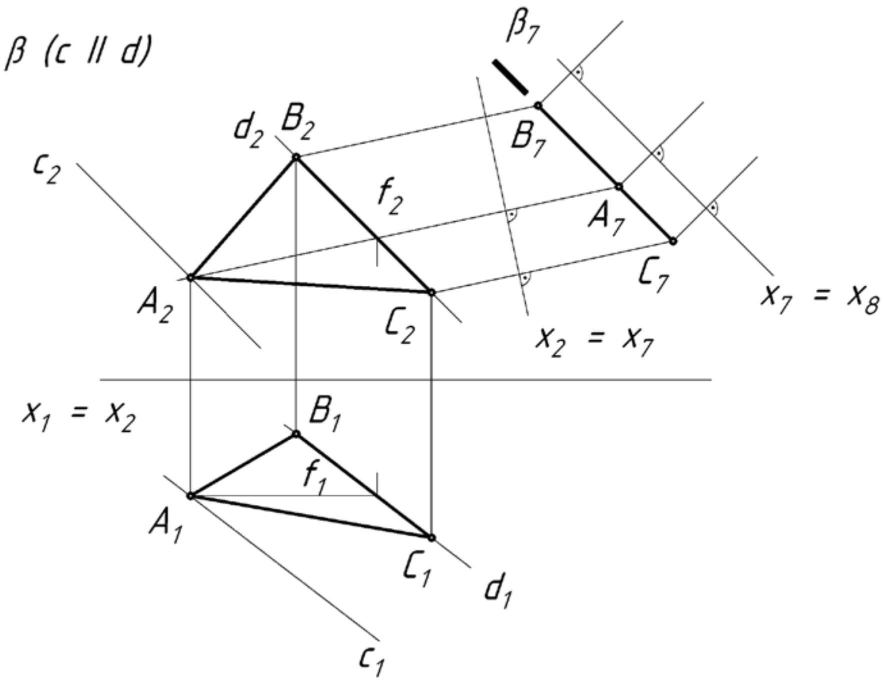


Рис.128

Расстояние от новой оси ($x_7 = x_8$) до новой проекции точки (B_8) равно расстоянию от заменяемой оси ($x_2 = x_7$) до заменяемой проекции точки (B_2) (рис.129).

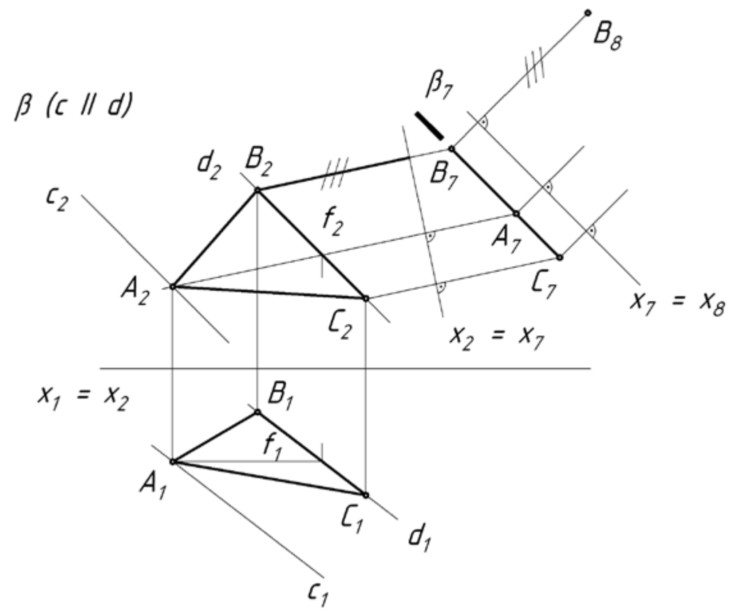


Рис.129

На рис.130 показан окончательный вид решённой задачи. Проекция треугольника $\boldsymbol{ABC}$ на плоскость проекций $\mathbf{\Pi_8}$ является истинной величиной этой фигуры.

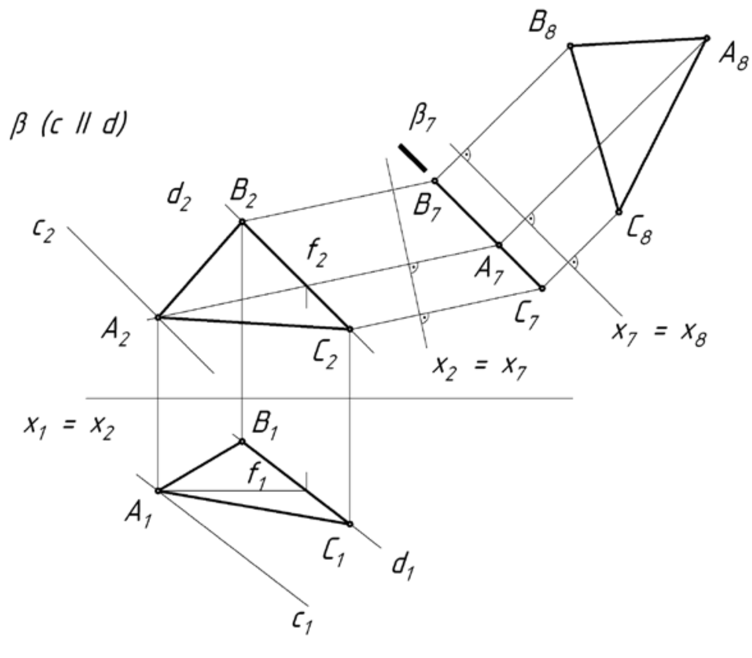


Рис.130

2. Решить задачи:

Задача 84. Способом замены плоскостей проекций преобразовать чертёж так, чтобы отрезок прямой общего положения стал проецирующим (рис.131).

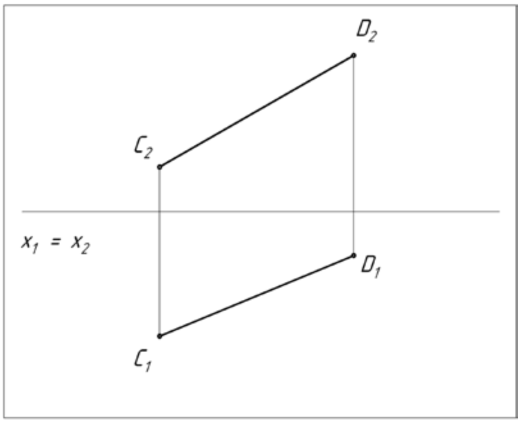


Рис.131

Задача 85. Способом замены плоскостей (заменить горизонтальную плоскость проекций) проекций преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня (рис.132).

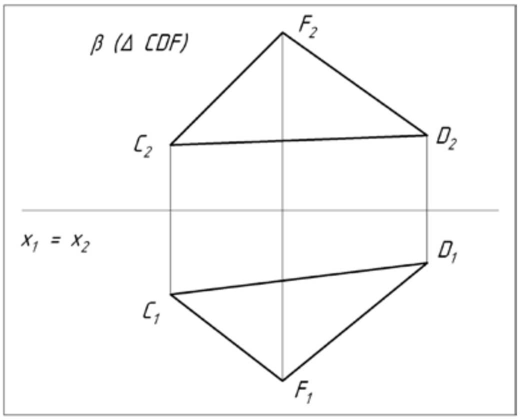


Рис.132

Задача 86. Дана плоскость общего положения, определителем которой являются две параллельные прямые общего положения. Способом замены плоскостей (заменить фронтальную плоскость проекций) проекций преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня.

3. Ответить на следующие вопросы:

1. Каким условиям должна удовлетворять новая плоскость проекций?

2. Чему равно расстояние от новой проекции точки до новой оси?

3. Назвать четыре основные задачи, к решению которых можно свести разнообразные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.

ЗАДАЧИ

Способ плоскопараллельного перемещения

1. Изучить сущность способа по учебникам.

Пример «Преобразование плоскости способом плоскопараллельного перемещения»

Условие задачи: способом плоскопараллельного перемещения преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения, определителем которой являются прямая общего положения и точка, не инцидентная данной прямой, стала фронтальной плоскостью уровня.

Дано: β (*A, m*) – о.п., ***m*** – о.п.

Найти: β || Π_2

Чертёж к задаче: рис.133.

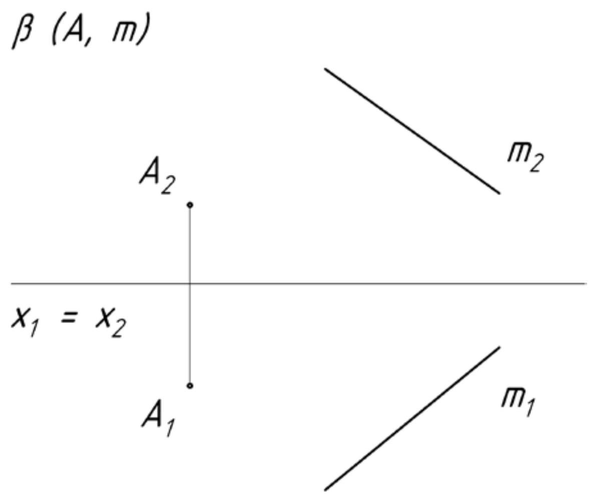


Рис.133

Для простоты графического решения можно построить в плоскости **β** треугольник (рис.134).

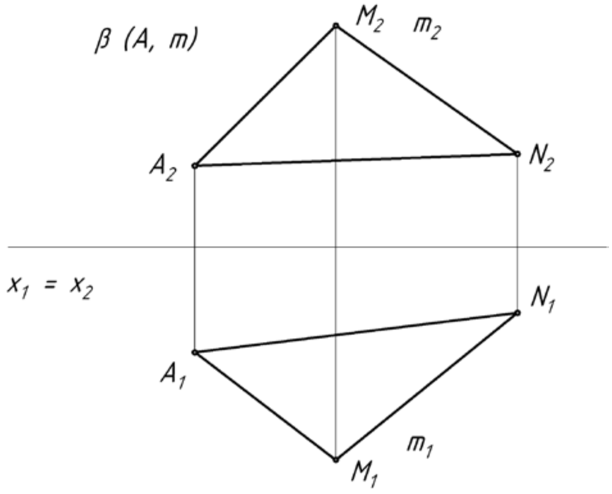


Рис.134

Для преобразования плоскости общего положения во фронтальную плоскость уровня способом плоскопараллельного перемещения требуется выполнить два преобразования. В результате первого перемещения плоскость **β** должна стать проецирующей по отношению к $\mathbf{П_1}$. Две плоскости перпендикулярны, когда одна из них содержит перпендикуляр к другой. Поэтому в плоскости **β** проводят фронтальную линию уровня, которая затем займёт положение перпендикуляра к $\mathbf{П_1}$ (рис.135).

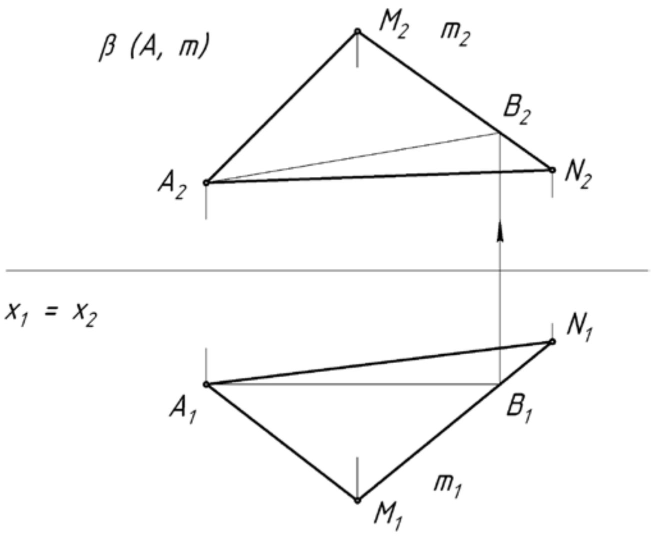


Рис.135

$\mathbf{AB \subset \beta,\ AB \parallel П_2}$

Можно уменьшить количество выполняемых построений, если одну из сторон треугольника ***AMN*** задать параллельной $\mathbf{П_2}$.

Первое плоскопараллельное перемещение плоскость **β** совершает относительно плоскости $\mathbf{П_2}$. На рис.136 показаны следы фронтальных плоскостей уровня, в которых движутся точки ***A***, ***N*** и ***M***.

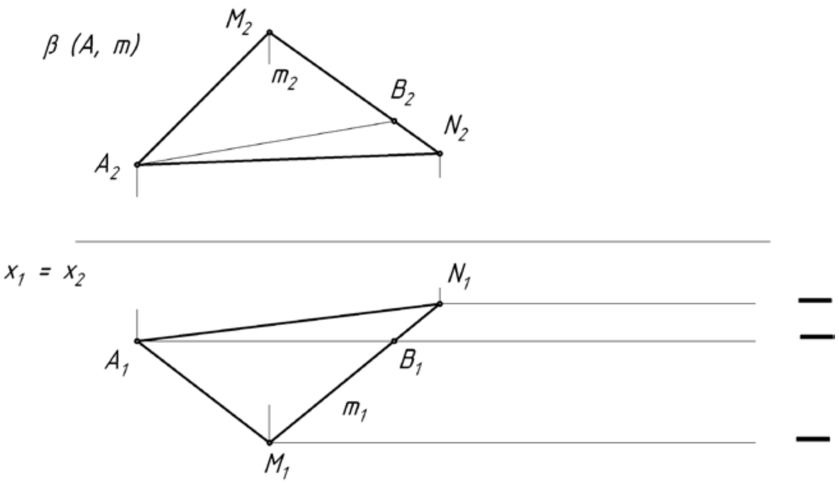


Рис.136

При плоскопараллельном перемещении оригинала относительно $\mathbf{П_2}$ его фронтальная проекция остаётся равной самой себе, изменяя лишь своё положение на поле чертежа. На рис.137 новая фронтальная проекция отрезка ***AB*** построена перпендикулярно к проекции оси ***0x***.

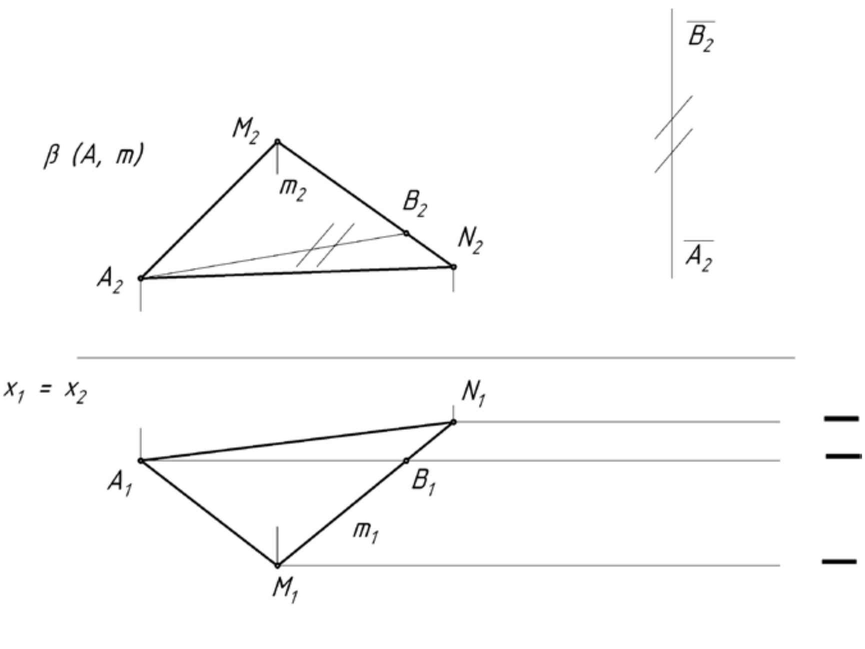


Рис.137

На рис.138 показаны построения, необходимые для нахождения новой фронтальной проекции точки ***M***.

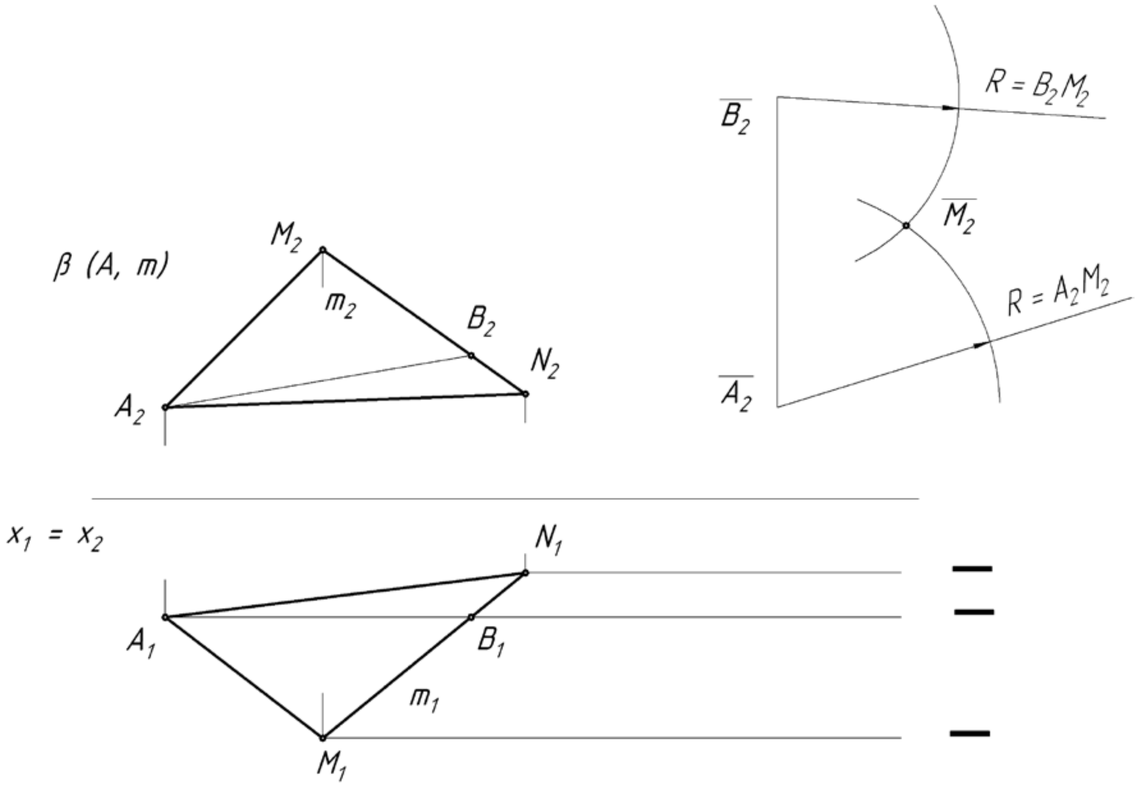


Рис.138

Закрашенные на рис.139 треугольники равны между собой.

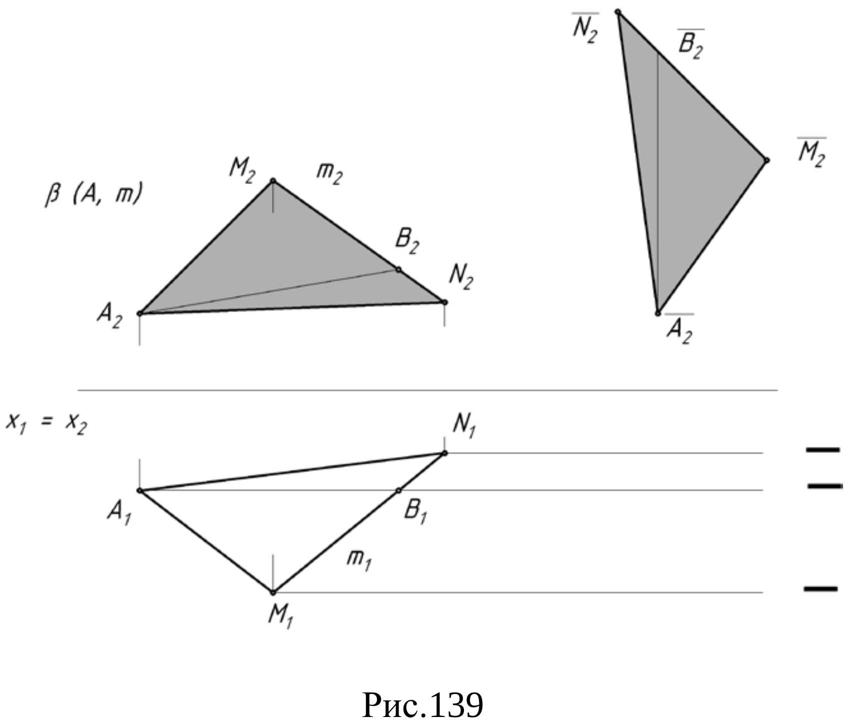


Рис.139

Новые горизонтальные проекции точек ***A***, ***M*** и ***N*** находятся в пересечении линий связи со следами плоскостей уровня, в которых движутся точки (рис.140).

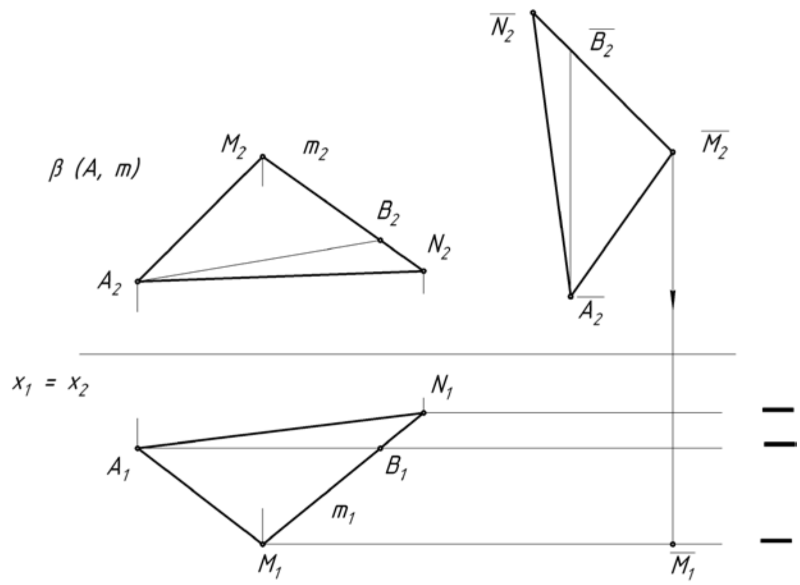


Рис.140

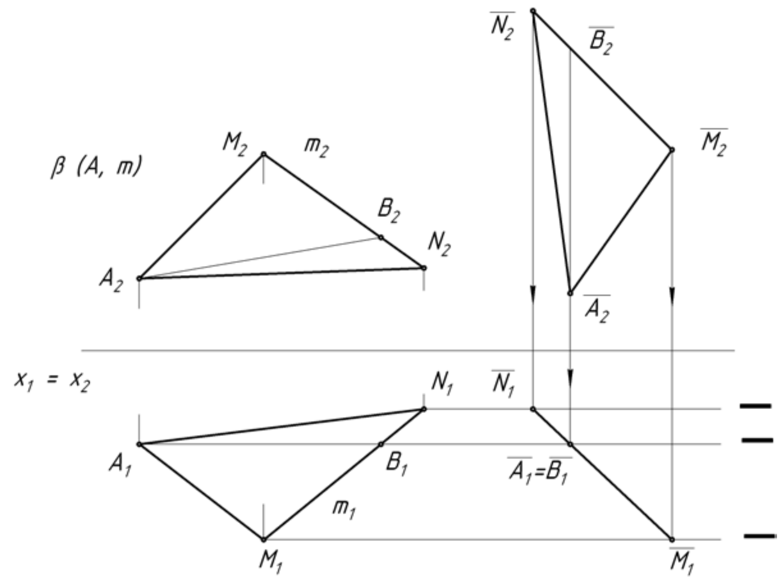


Рис.141

Новая проекция треугольника ***AMN*** на **$П_1$** представляет собой отрезок прямой, т.к. плоскость **β** занимает теперь горизонтально-проецирующее положение.

ППП_ $П_2 \rightarrow \beta \perp П_1$

Второе плоскопараллельное перемещение плоскость **β** совершает относительно Π_1. На рис.142 показаны следы горизонтальных плоскостей уровня, в которых движутся точки ***A***, ***M*** и ***N***. Проекция треугольника на Π_1 (отрезок прямой) остаётся равной самой себе, занимая положение параллельное Π_2.

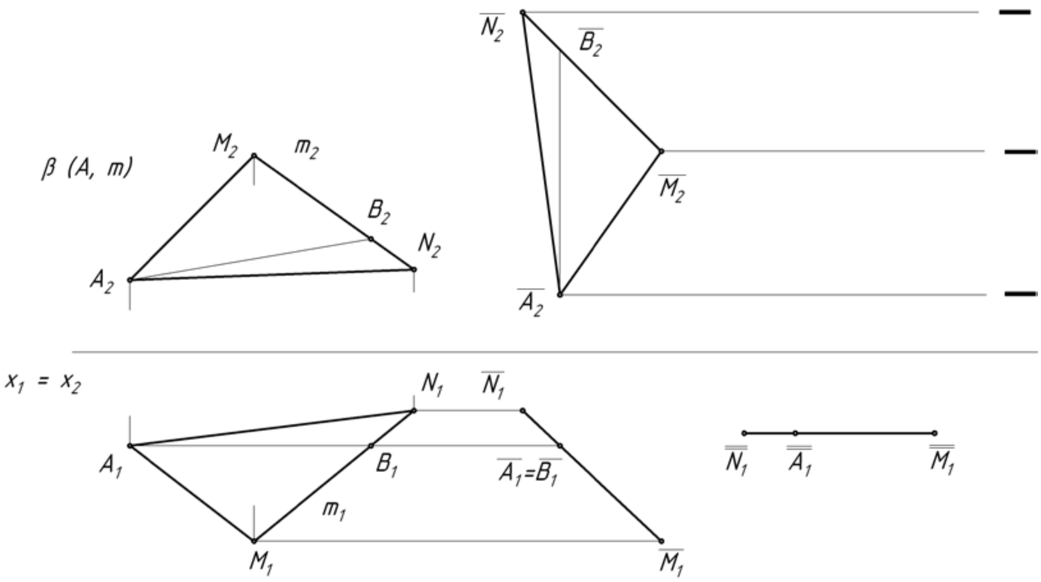


Рис.142

На рис.143 показан окончательный вид решённой задачи. Проекция треугольника ***AMN*** на плоскость проекций Π_2 является истинной величиной этой фигуры.

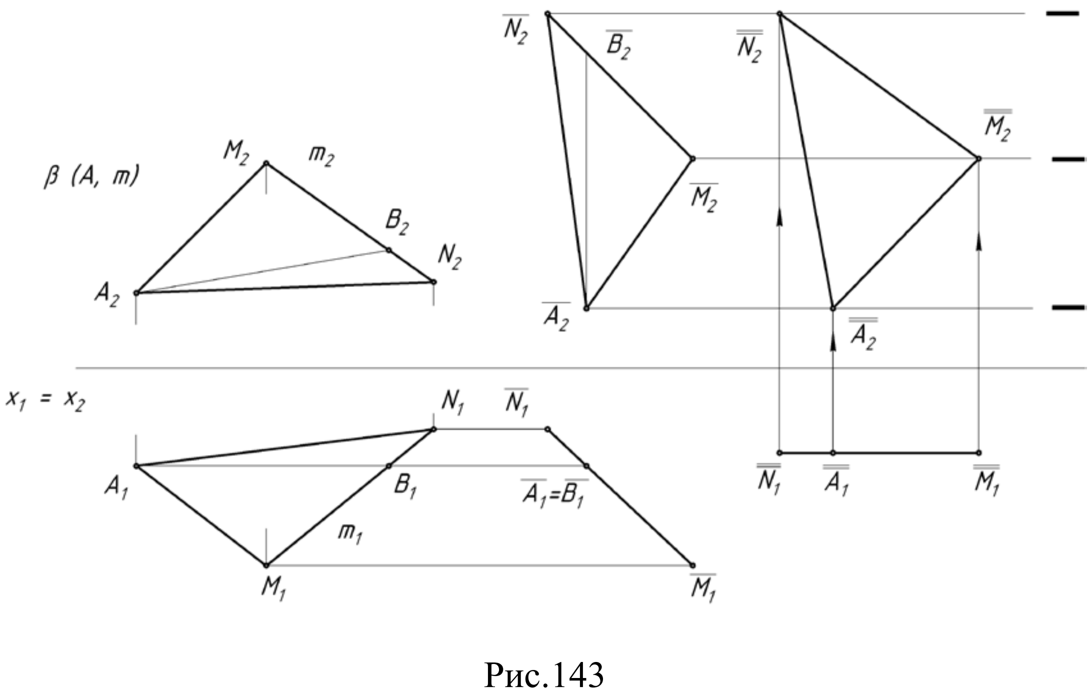


Рис.143

2. Решить задачи:

Задача 87. Способом плоскопараллельного перемещения преобразовать чертёж (рис.144) так, чтобы отрезок прямой общего положения стал:

- горизонтально-проецирующим;
- фронтально-проецирующим.

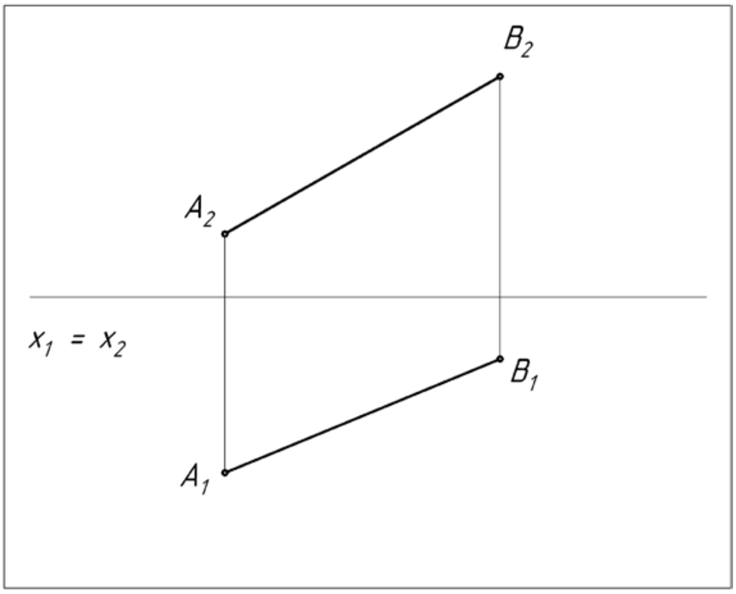


Рис.144

Задача 88. Способом плоскопараллельного перемещения преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала фронтальной плоскостью уровня (рис.145).

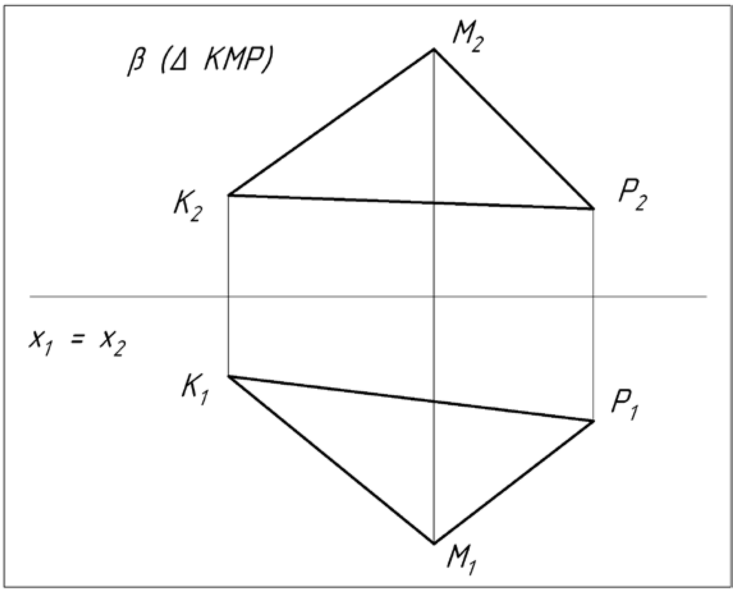


Рис.145

Задача 89. Дана плоскость общего положения, определителем которой являются две параллельные прямые общего положения. Способом плоскопараллельного перемещения преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала горизонтальной плоскостью уровня.

Задача 90. Способом плоскопараллельного перемещения преобразовать чертёж так, чтобы диагональ куба ***AB*** стала проецирующей (рис.146).

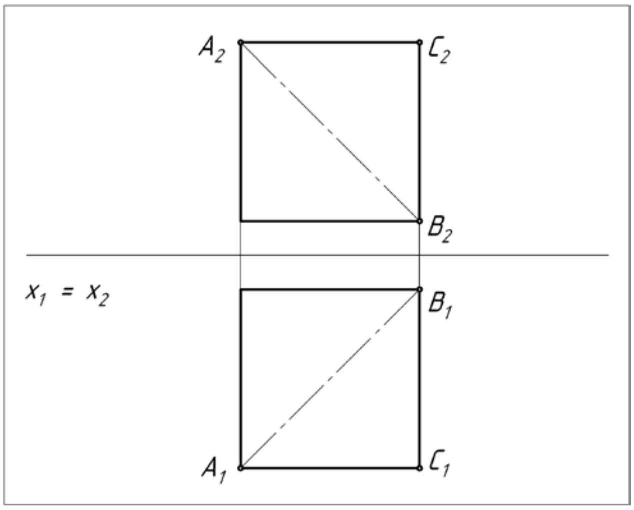


Рис.146

3. Ответить на следующие вопросы:

1. Какое движение называется плоскопараллельным?
2. Относительно каких плоскостей осуществляется перемещение оригинала?
3. Какое положение относительно плоскостей проекций занимают плоскости, в которых движутся точки оригинала?
4. Расстояния между какими проекциями любой пары точек оригинала остаются постоянными при перемещении, параллельном горизонтальной плоскости проекций?
5. Расстояния между какими проекциями любой пары точек оригинала остаются постоянными при перемещении, параллельном фронтальной плоскости проекций?
6. Назвать четыре основные задачи, к решению которых можно свести разнообразные задачи, решаемые способом плоскопараллельного перемещения.

ЗАДАЧИ

Способ вращения

1. Ответить на вопрос: как расположена плоскость вращения точки относительно оси вращения?

Способ вращения вокруг проецирующей прямой

2. Изучить сущность способа по учебникам.
3. Ответить на следующие вопросы:

I. Точка вращается вокруг горизонтально-проецирующей прямой.

1) Какое положение относительно плоскостей проекций занимает плоскость вращения точки?

2) Какая линия является траекторией движения точки?

3) Каковы проекции линии, являющейся траекторией движения точки на фронтальную и горизонтальную плоскости проекций?

II. Точка вращается вокруг фронтально-проецирующей прямой.

1) Какое положение относительно плоскостей проекций занимает плоскость вращения точки?

2) Какая линия является траекторией движения точки?

3) Каковы проекции линии, являющейся траекторией движения точки на фронтальную и горизонтальную плоскости проекций?

4. Решить задачи:

Задача 91. Способом вращения вокруг проецирующей прямой преобразовать чертёж так, чтобы отрезок прямой общего положения стал фронтально-проецирующим (рис.147).

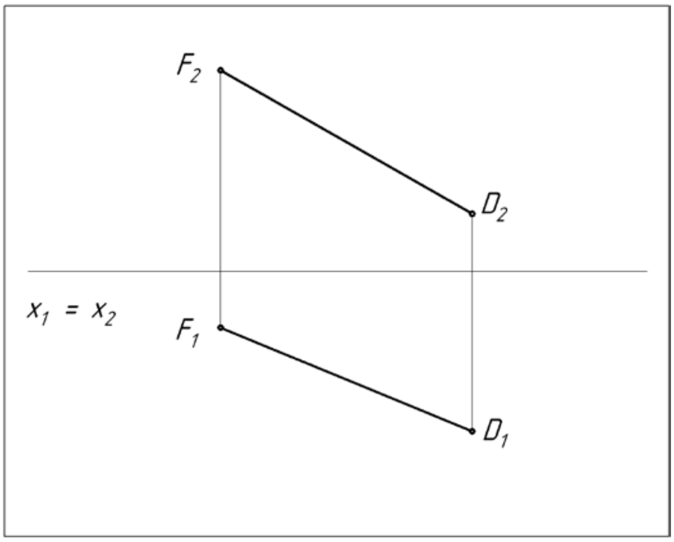


Рис.147

Задача 92. Способом вращения вокруг проецирующей прямой преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала горизонтальной плоскостью уровня (рис.148).

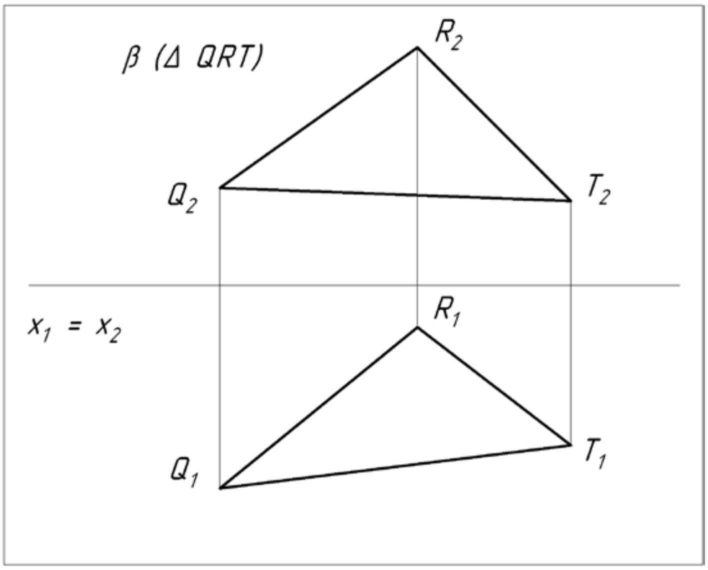


Рис.148

5. Ответить на следующие вопросы:

1. Назвать четыре основные задачи, к решению которых можно свести разнообразные задачи, решаемые способом вращения вокруг проецирующей прямой.

2. Сколько требуется преобразований проекций (вращений вокруг проецирующей прямой) для того, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня?

Способ вращения вокруг линии уровня

1. Изучить сущность способа по учебникам.
2. Ответить на следующие вопросы:

1. Какое положение относительно плоскостей проекций занимает плоскость вращения точки вокруг горизонтальной линии уровня?

2. Какое положение относительно плоскостей проекций занимает плоскость вращения точки относительно фронтальной линии уровня?

3. Сколько требуется преобразований проекций (вращений вокруг линии уровня) для того, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня?

4. Как должна быть расположена ось вращения относительно плоскостей проекций, чтобы вращением вокруг линии уровня преобразовать плоскость общего положения в горизонтальную плоскость уровня?

5. Как должна быть расположена ось вращения относительно плоскостей проекций, чтобы вращением вокруг линии уровня плоскость общего положения стала фронтальной плоскостью уровня?

6. Какова особенность способа совмещения?

Пример «Вращение плоскости вокруг линии уровня»

Условие задачи: вращением вокруг линии уровня преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения, определителем которой являются две пересекающиеся прямые общего положения, стала горизонтальной плоскостью уровня.

Дано: β $(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b})$ – о.п., $\boldsymbol{a}$ – о.п., $\boldsymbol{b}$ – о.п.

Найти (построить): $\beta \parallel \Pi_1$

Чертёж к задаче: - рис.149.

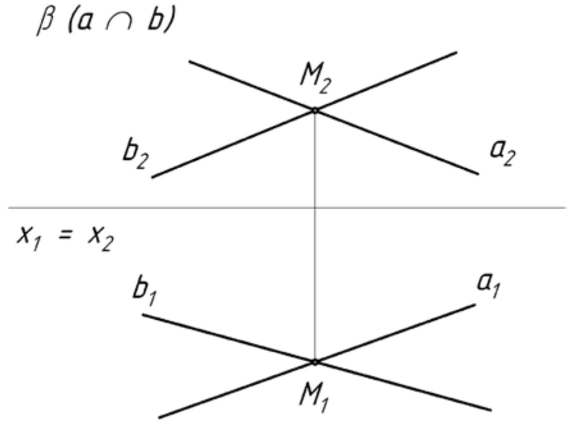


Рис.149

Решение:

1. Ось вращения

Условием задачи определено, что плоскость β должна стать параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1, поэтому ось вращения также должна быть параллельна Π_1 (рис.150).

Ось вращения - $\boldsymbol{i} \subset \beta$, $\boldsymbol{i} \parallel \Pi_1$

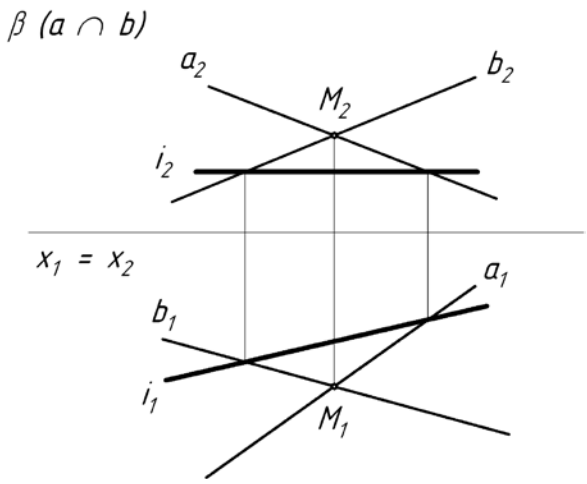


Рис.150

2. Объект вращения

Две точки плоскости, принадлежащие оси, при вращении останутся на своих местах (рис.150). Необходимо выполнить поворот точки пересечения прямых.

Объект вращения – точка $M = a \cap b$

3. Плоскость вращения

Плоскость вращения перпендикулярна к оси вращения. Ось параллельна Π_1, следовательно плоскость вращения перпендикулярна к Π_1. Горизонтально-проецирующая плоскость вращения задаётся на чертеже своим горизонтальным следом (рис.151).

Плоскость вращения – ω (ω_1), $\omega \perp \Pi_1$, $\omega \perp i$

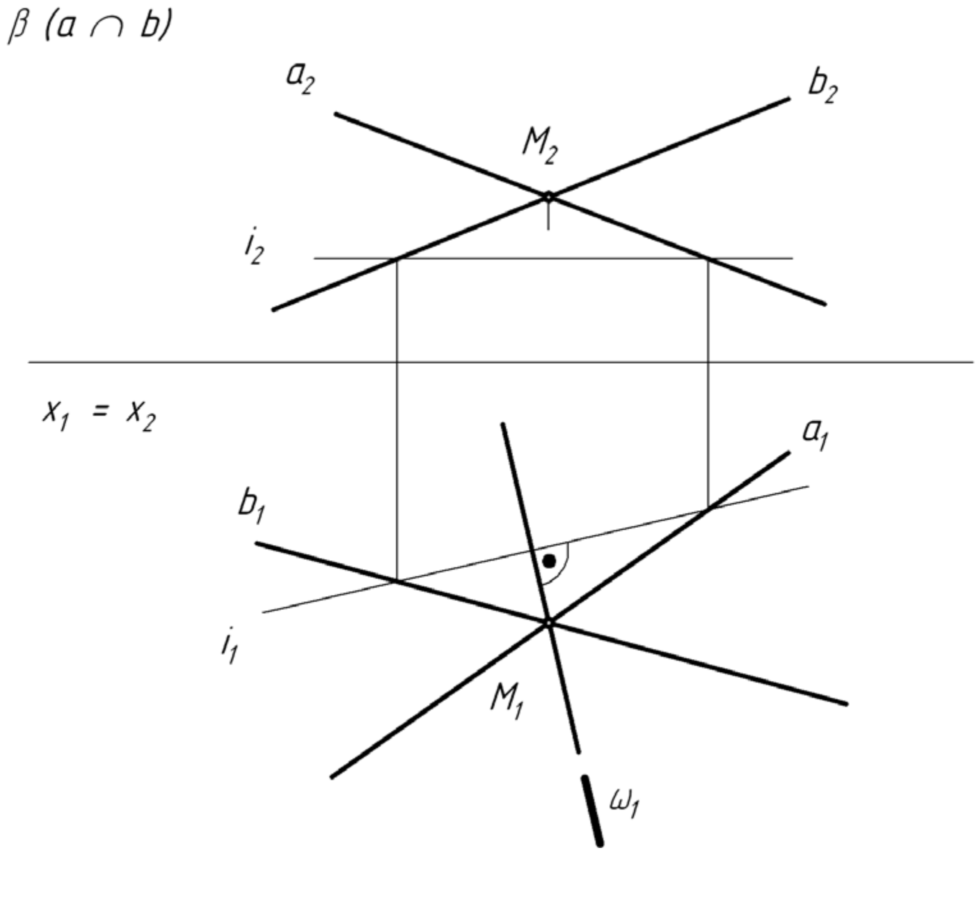


Рис.151

4. Центр вращения

Центром вращения является точка пересечения плоскости и оси вращения. Фронтальная проекция центра строится из условия инцидентности этой точки оси вращения (рис.152).

Центр вращения – точка *O* = ω ∩ *i*

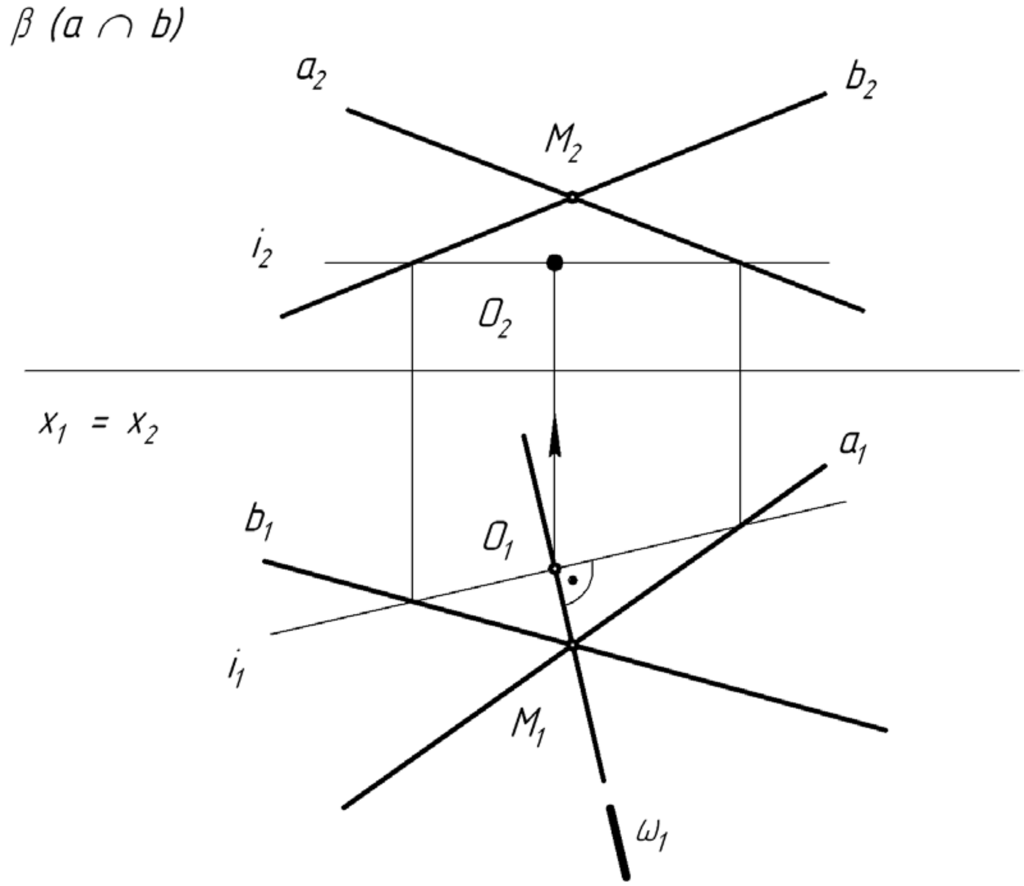


Рис.152

5. Радиус вращения

Радиус вращения – отрезок ***OM*** – занимает общее положение, следовательно, проецируется с искажением (рис.153). Необходимо найти его истинную величину. Когда плоскость **β**, совершив поворот, станет параллельна $\mathbf{П_1}$, точка ***M*** будет отстоять от центра вращения ***O*** на расстоянии, равном величине радиуса.

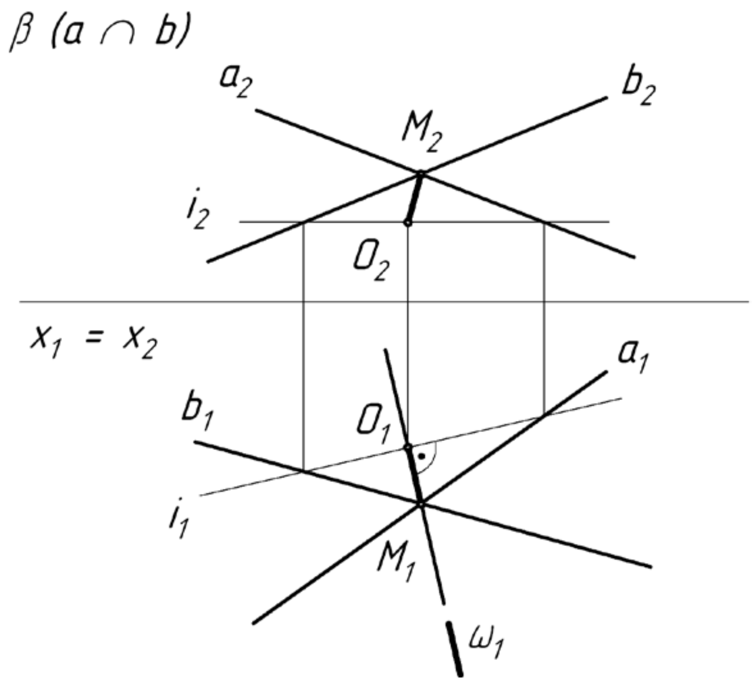


Рис.153

Истинная величина отрезка ***OM*** может быть найдена различными способами. В рассматриваемом примере использован способ прямоугольного треугольника, т.к. в данном случае он требует минимума дополнительных построений (рис.154).

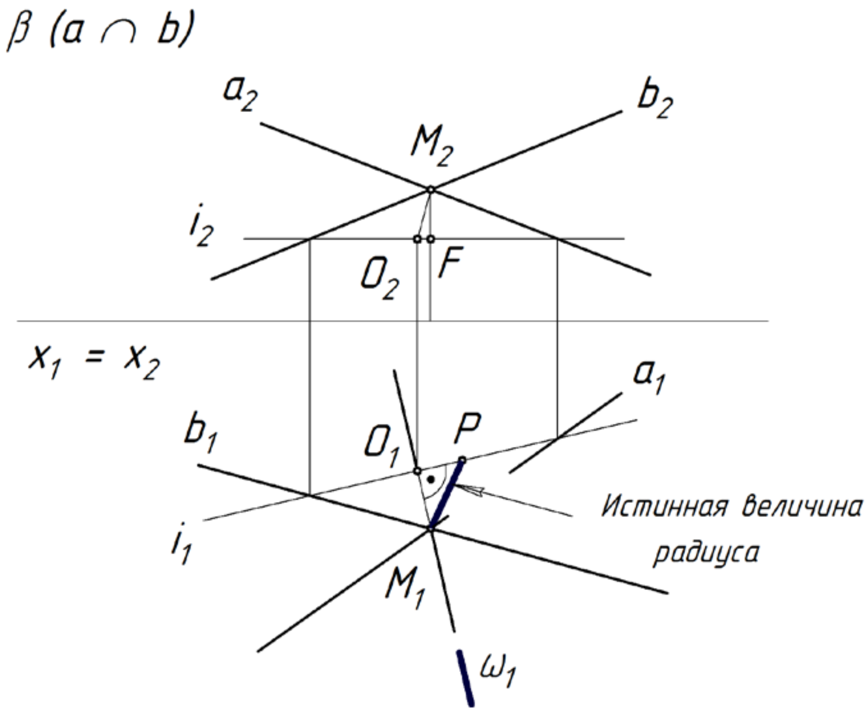


Рис.154

В прямоугольном треугольнике $\boldsymbol{O_1M_1P}$ катет $\boldsymbol{O_1M_1}$ – горизонтальная проекция отрезка $\boldsymbol{OM}$. Катет $\boldsymbol{O_1P}$ равен разности расстояний точек $\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{M}$ до $\mathbf{\Pi_1}$, т.е. разности координат **z** этих точек. Определяется эта величина на фронтальной проекции. Она равна длине отрезка $\boldsymbol{M_2F}$, т.е. $|\boldsymbol{O_1P}| = |\boldsymbol{M_2F}|$

Истинная величина радиуса равна по величине гипотенузе треугольника $\boldsymbol{O_1M_1P}$.

На рис.155 показаны новые горизонтальные проекции точки $\boldsymbol{M}$ и прямых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в положении, когда $\boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{\Pi_1}$. Расстояние $\boldsymbol{O_1\overline{M}_1}$ равно расстоянию $\boldsymbol{M_1P}$.

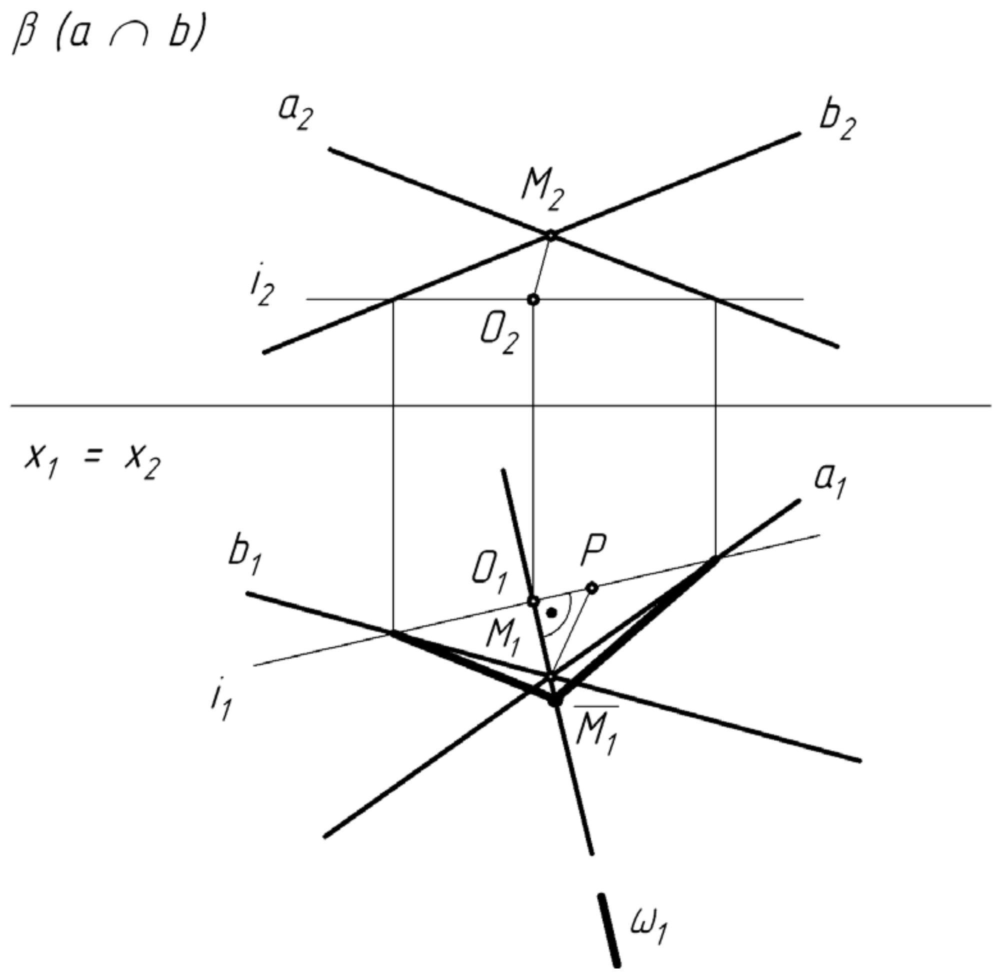


Рис.155

Ответ: $\boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{\Pi_1}$

3. Решить задачу

Задача 93. Способом вращения вокруг линии уровня преобразовать чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала фронтальной плоскостью уровня (рис.156).

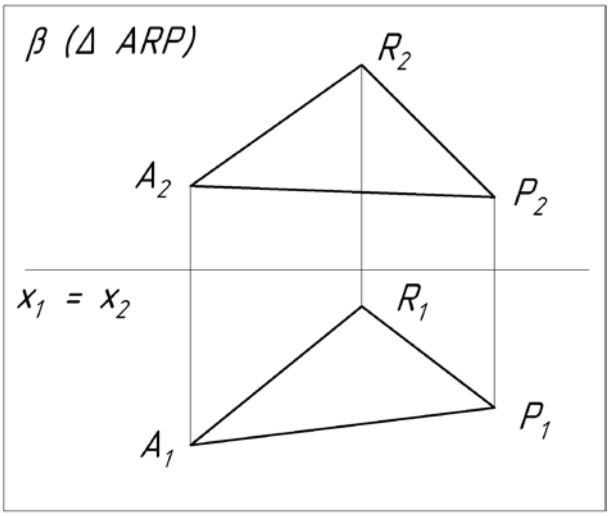


Рис.156

ЗАДАЧИ

Способ вспомогательного проецирования

1. Изучить сущность способа по учебникам.
2. Ответить на следующие вопросы:

1. Какие проекции оригиналов получают с помощью вспомогательного проецирования?

2. Какой вид проецирования может быть использован для получения вспомогательных проекций?

3. В каких случаях целесообразно применять способ вспомогательного проецирования?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Привести названия способов, при применении которых оригинал остаётся неподвижным относительно исходных плоскостей проекций.

2. Привести названия способов, при использовании которых оригинал изменяет своё положение в пространстве.

3. Назвать частный случай плоскопараллельного перемещения.
4. Назвать четыре основные задачи на преобразование проекций.

ЗАДАЧИ

Задача 94. Определить, какой из способов преобразования проекций был использован для определения истинной величины каждого из отрезков ***AB*** и ***CD*** (рис.157).

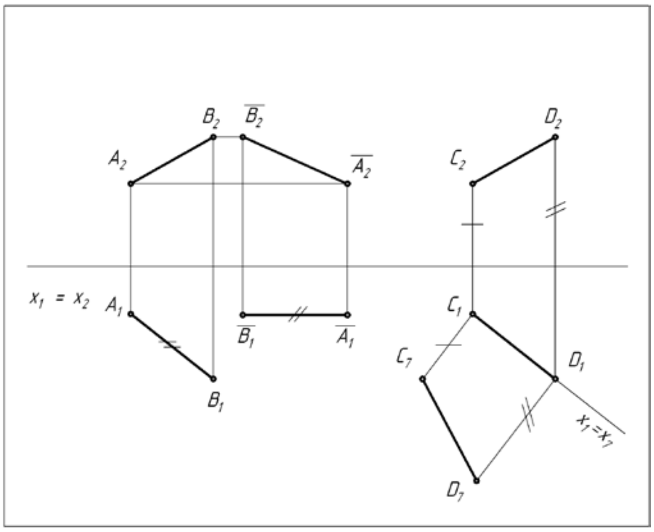


Рис.157

Задача 95. Определить, какой из способов преобразования проекций был использован для определения истинной величины каждого из отрезков ***MN*** и ***CD*** (рис.158).

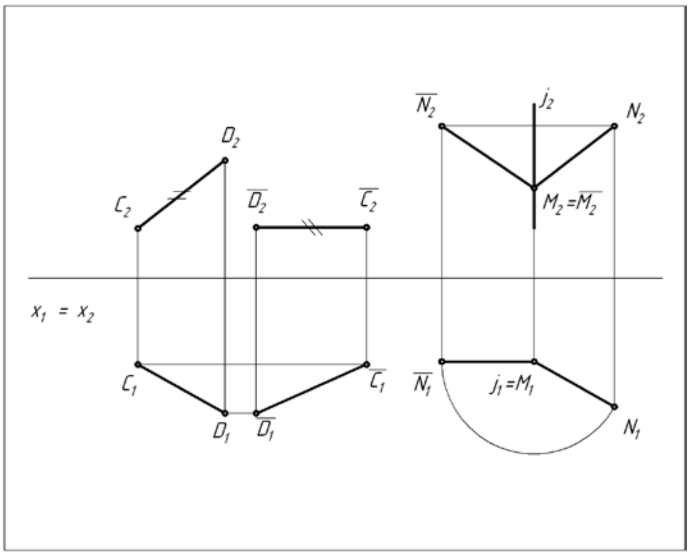


Рис.158

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОВЕРХНОСТИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Фигура считается заданной на обратимом чертеже, если…
2. Из каких частей состоит определитель фигуры?
3. Дать определение контурной линии.
4. Дать определение очерка фигуры.
5. Дать определения точечного и линейного каркасов.
6. Дать определение кинематической поверхности.
7. По каким основаниям производится классификация поверхностей в начертательной геометрии?
8. Какая поверхность называется линейчатой?
9. Сколько направляющих определяют линейчатую поверхность в общем случае?
10. Перечислить классы линейчатых поверхностей.
11. Привести примеры линейчатых поверхностей различных классов.
12. Какая поверхность называется криволинейной?
13. Какие кривые могут быть образующими криволинейных поверхностей?
14. Какая поверхность называется каналовой?
15. Какая поверхность называется циклической?
16. Какая поверхность называется трубчатой?
17. Какие существуют классы поверхностей в зависимости от закона образования?
18. Какая линия может быть образующей поверхности вращения?
19. Привести примеры поверхностей вращения с указанием образующей.
20. Какое движение называется винтовым?

21. Какая линия может быть образующей винтовой поверхности?

22. Какие поверхности называются геликоидами?

23. Какие существуют виды геликоидов?

24. Что является основанием для классификации геликоидов?

25. Привести примеры поверхностей, образование которых не подчиняется математическим законам?

ЗАДАЧИ

Линии на поверхности

Задача 96. Определить: инцидентна или нет линия поверхности (рис.159).

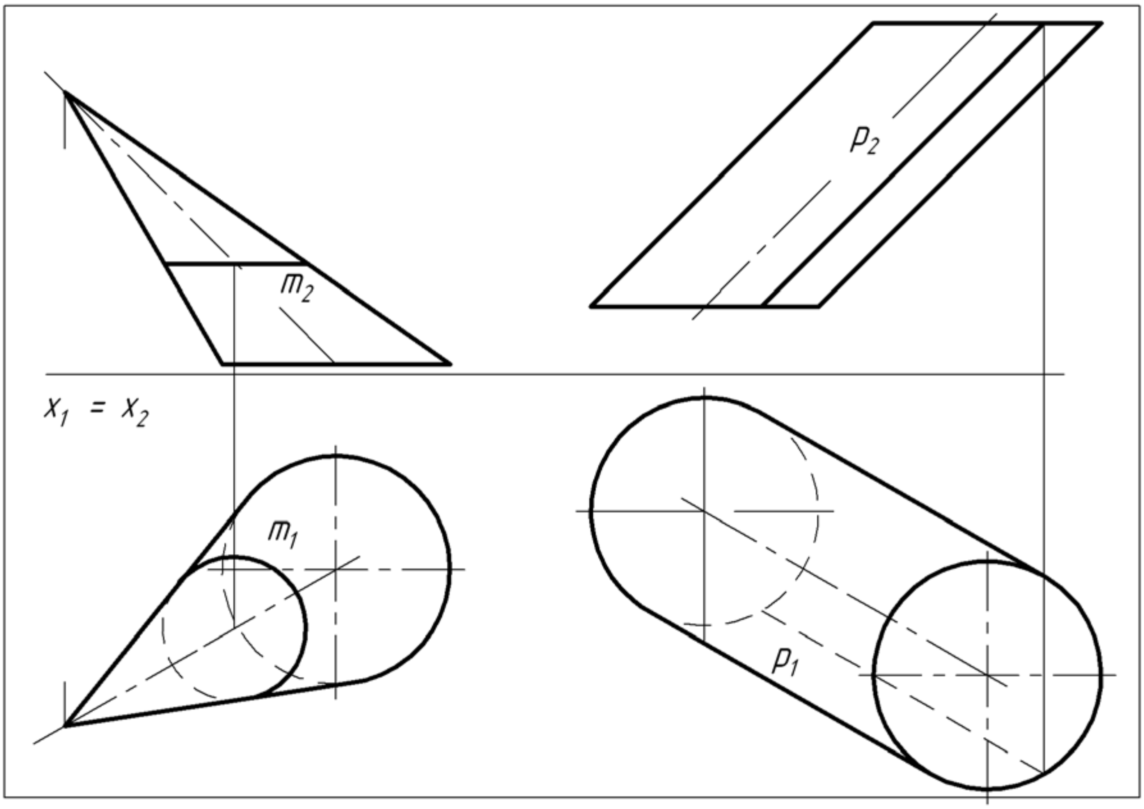


Рис.159

Задача 97. Определить: инцидентна или нет линия поверхности (рис.160).

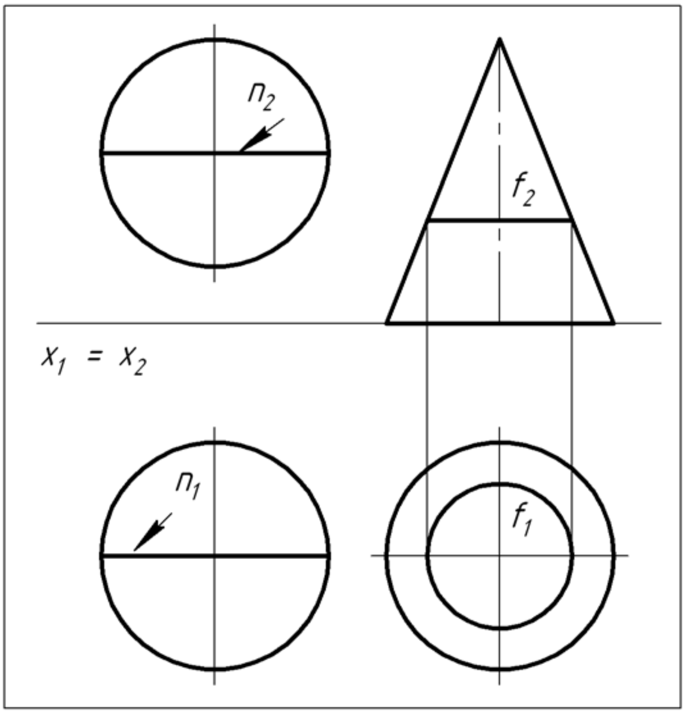


Рис.160

Задача 98. Определить: инцидентна или нет линия поверхности (рис.161).

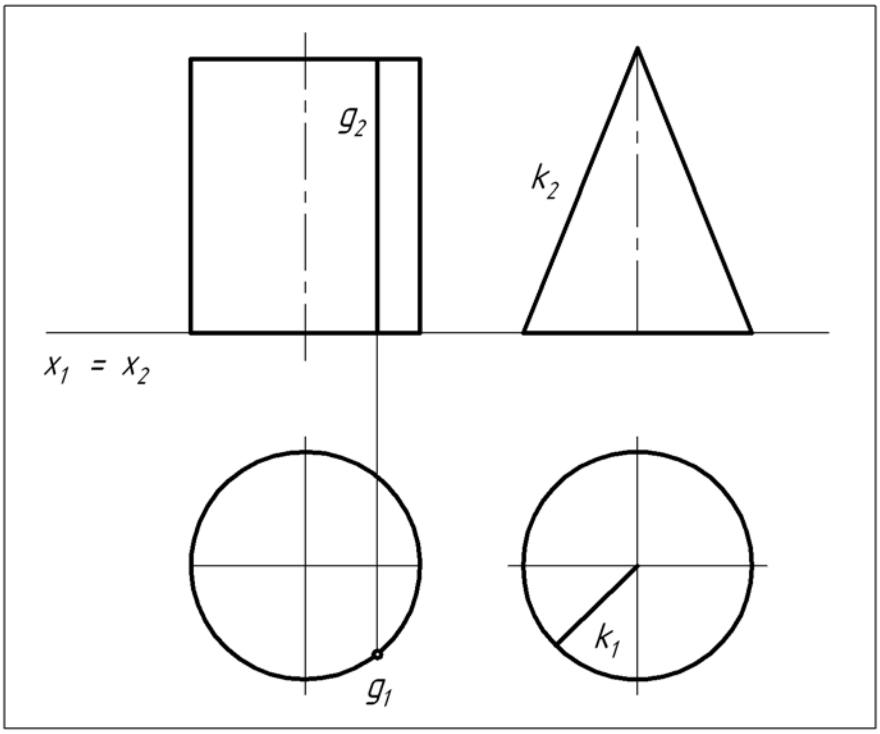


Рис.161

Задача 99. Определить: какая из точек инцидентна поверхности (рис.162).

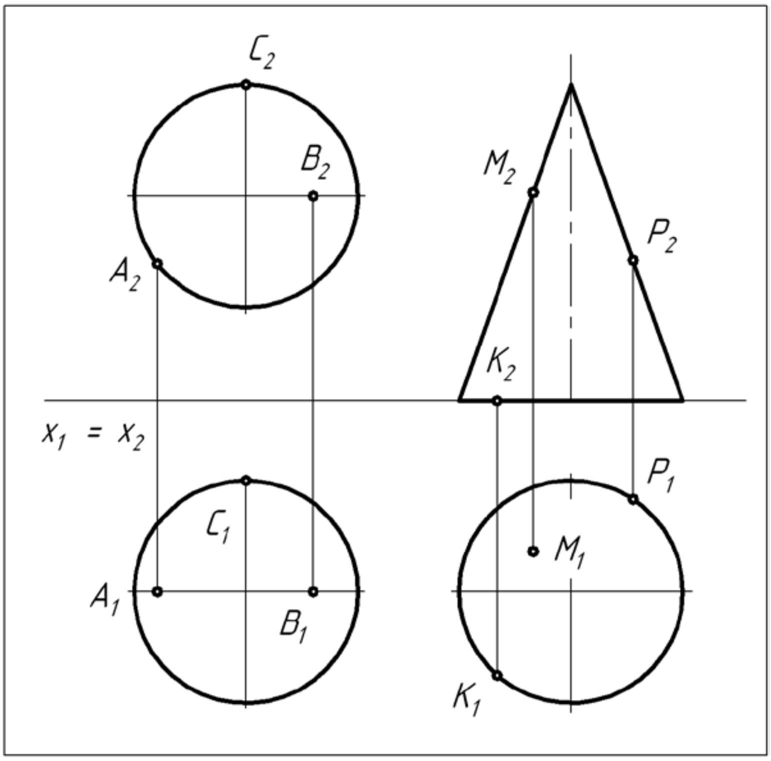


Рис.162

Задача 100. Определить: какая из точек инцидентна поверхности (рис.163).

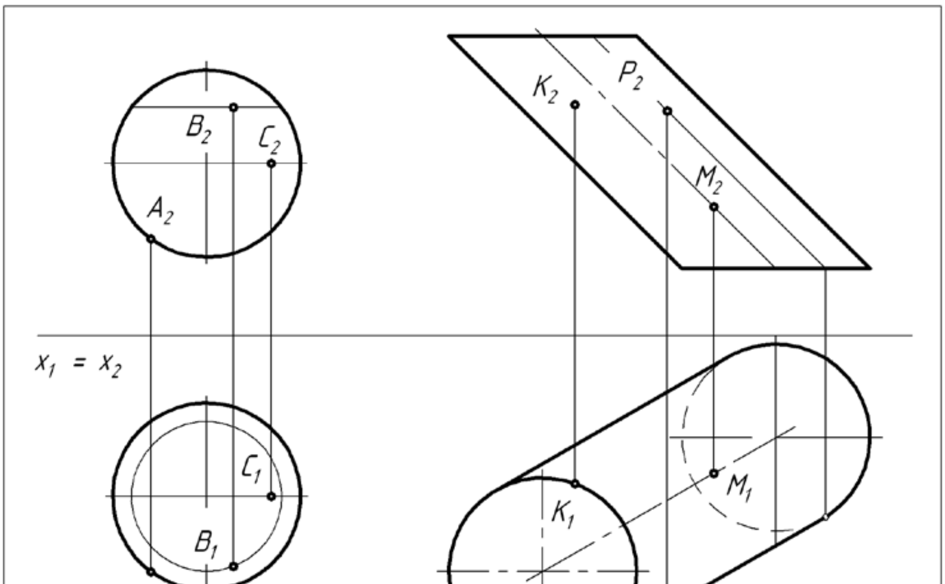


Рис.163

Задача 101. Определить: какая из точек инцидентна поверхности (рис.164).

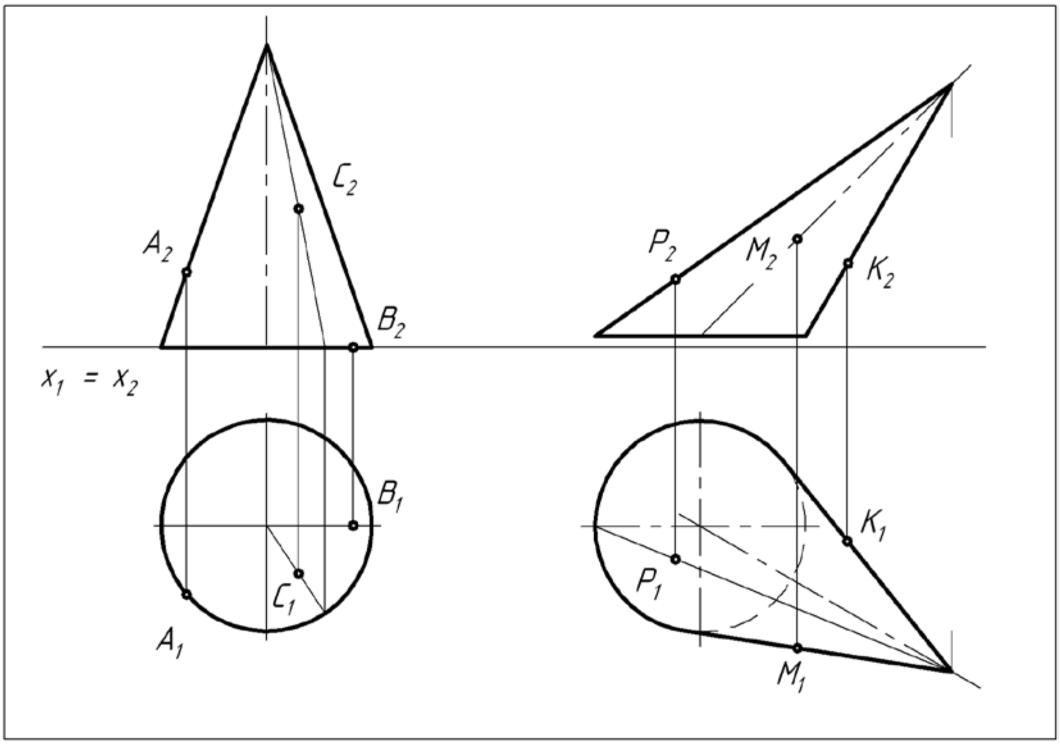


Рис.164

Задача 102. Определить: какая из точек инцидентна поверхности (рис.165).

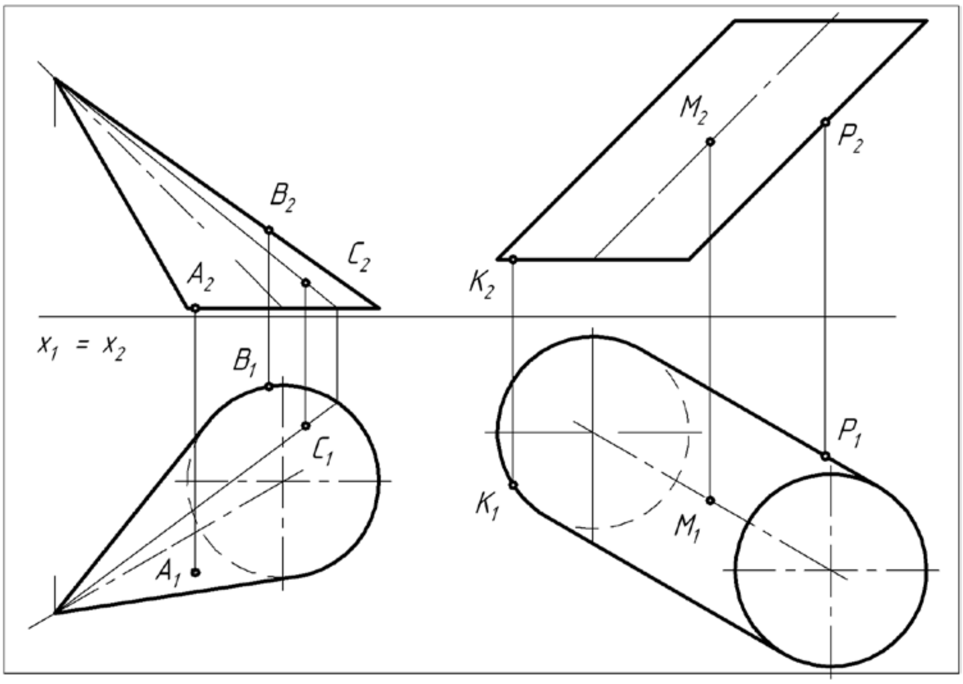


Рис.165

ЗАДАЧИ

Многогранники

Важно: решая позиционные задачи с участием многогранников, необходимо определить видимость боковых рёбер и сторон основания.

Задача 103. Пирамида задана своими проекциями на эпюре Монжа (рис.166). Определить, на каком чертеже – 1, 2 или 3 – верно определена видимость рёбер пирамиды и на фронтальной, и на горизонтальной проекциях.

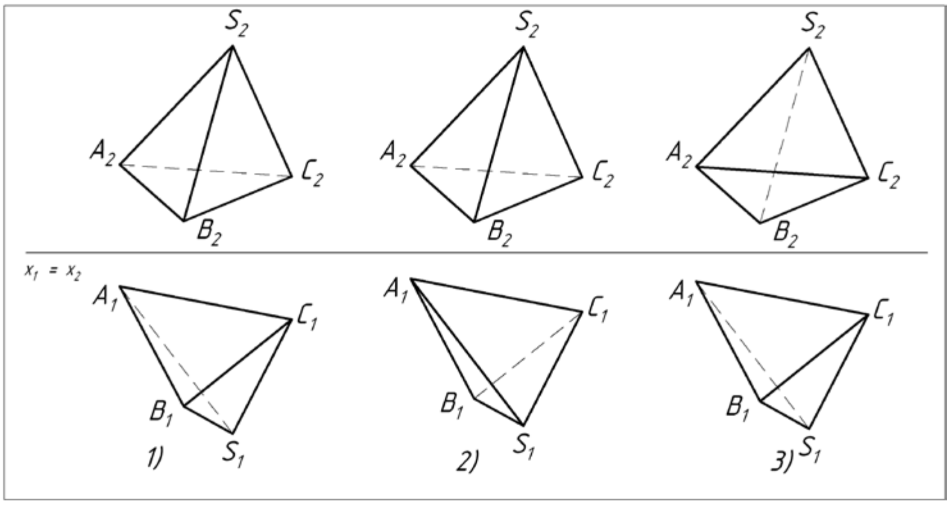


Рис.166

Задача 104. Определить взаимное положение оригиналов (рис.167).

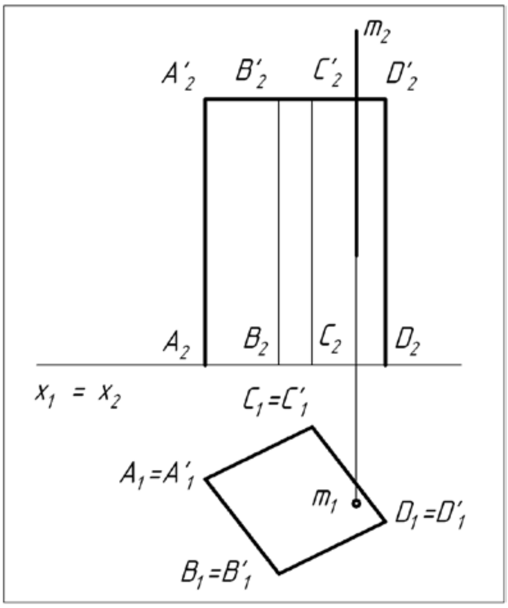


Рис.167

Задача 105. Определить взаимное положение оригиналов (рис.168).

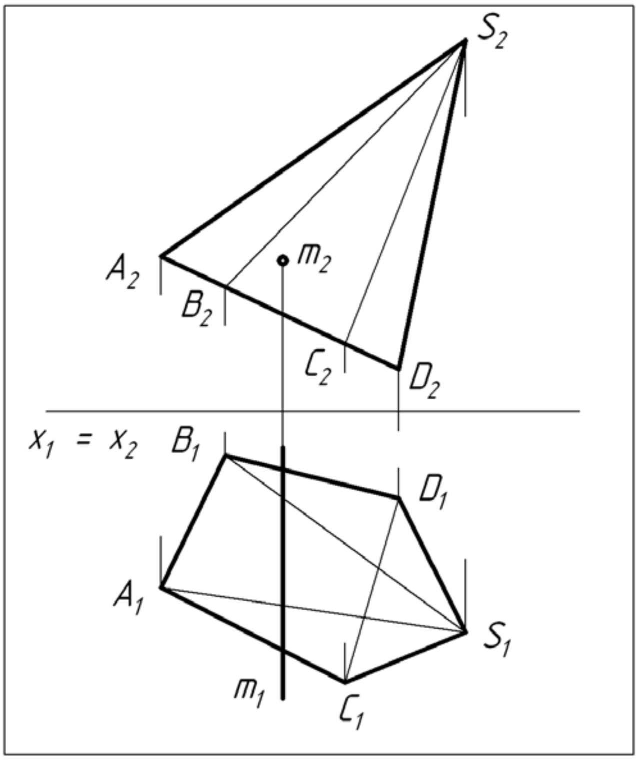


Рис.168

Задача 106. Определить взаимное положение оригиналов (рис.169).

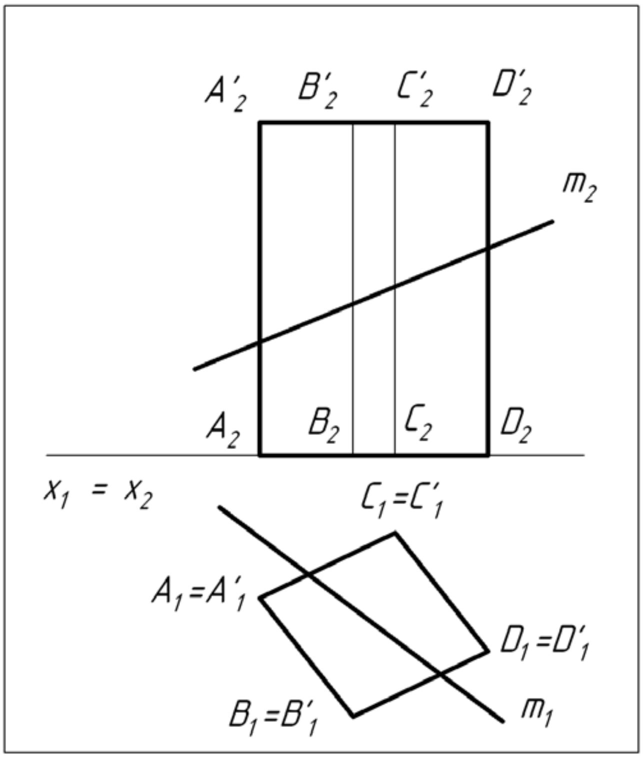


Рис.169

Задача 107. Определить взаимное положение оригиналов (рис.170).

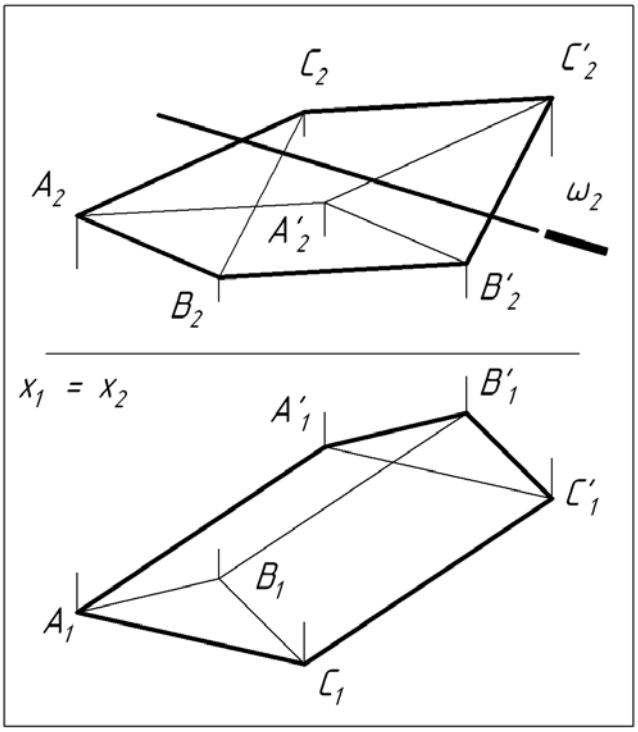


Рис.170

Задача 108. Определить взаимное положение оригиналов (рис.171).

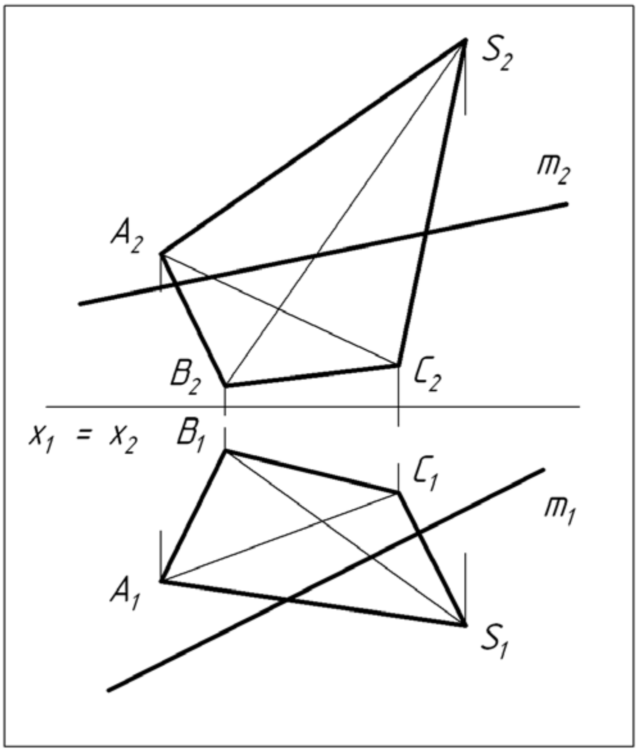


Рис.171

Задача 109. Определить взаимное положение оригиналов (рис.172).

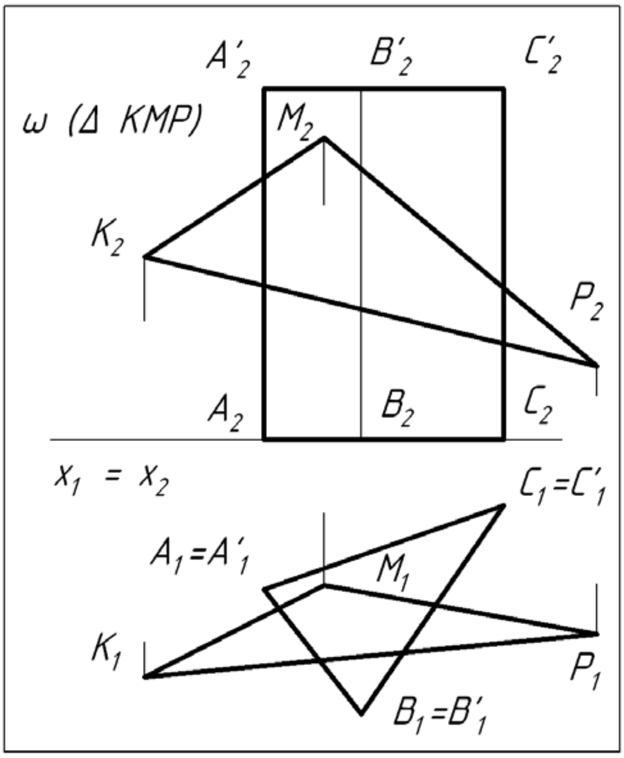


Рис.172

Задача 110. Определить взаимное положение оригиналов (рис.173).

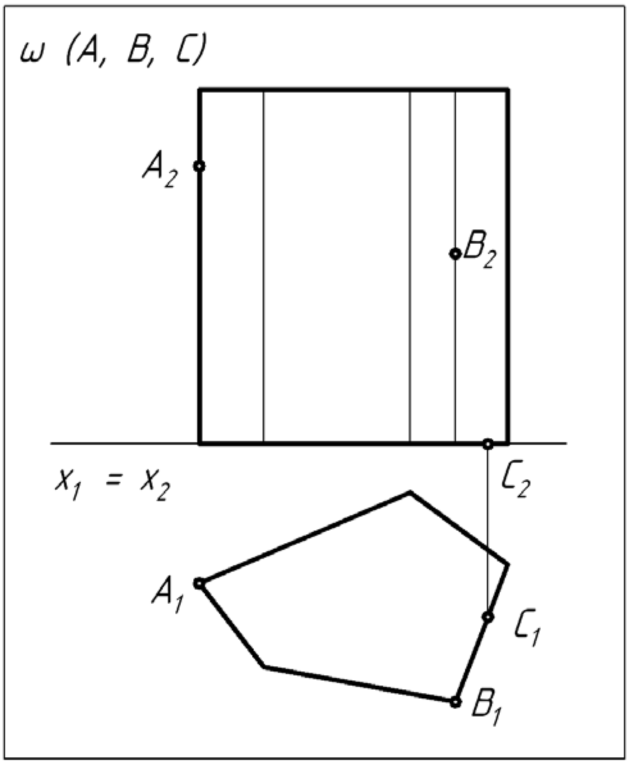


Рис.173

Задача 111. Определить взаимное положение оригиналов (рис.174).

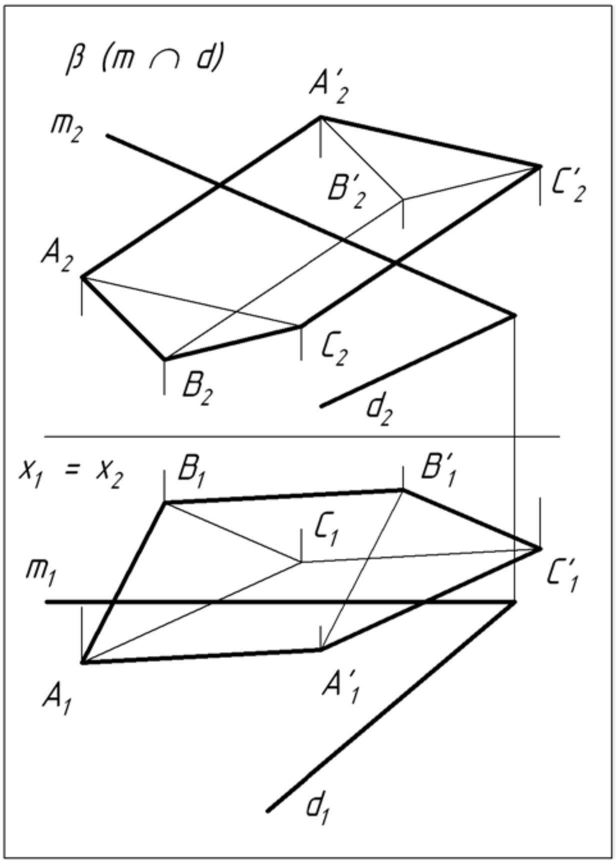


Рис.174

Задача 112. Пирамида ***SABC*** и плоскость **ω (Δ *LMN*)** заданы координатами соответствующих точек.

S (130; 50; 10); ***A*** (50; 70; 110); ***B*** (0; 35; 75); ***C*** (40; 15; 75);

L (35; 85; 0); ***M*** (75; 25; 5); ***N*** (110; 65; 110).

Определить взаимное положение оригиналов:

- методом посредника;

- применяя способ преобразования чертежа – замену плоскостей проекций.

ЗАДАЧИ

Сфера

Пример «Построение проекций сферы с вырезами»

Условие задачи: построить горизонтальную и профильную проекции сферы с вырезами по заданной фронтальной проекции

Чертёж к задаче: рис.175.

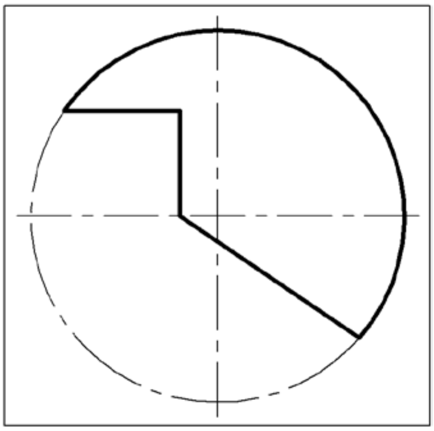


Рис.175

Решение

1. Линией пересечения сферы и плоскости является окружность. В зависимости от положения плоскости относительно плоскостей проекций – параллельно, перпендикулярно или под произвольным углом (общее положение) – проекциями окружности будут соответственно являться: окружность, отрезок прямой или эллипс.

В данном примере сферу рассекают три плоскости - $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ (рис.176). Плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ является горизонтальной плоскостью уровня (|| $\mathbf{П_1}$, $\perp\mathbf{П_2}$, $\perp\mathbf{П_3}$), плоскость $\boldsymbol{\beta}$ – профильной плоскостью уровня (|| $\mathbf{П_3}$, $\perp$ $\mathbf{П_1}$, $\perp$ $\mathbf{П_2}$), плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ - фронтально-проецирующей плоскостью (не параллельна ни $\mathbf{П_1}$, ни $\mathbf{П_2}$, ни $\mathbf{П_3}$).

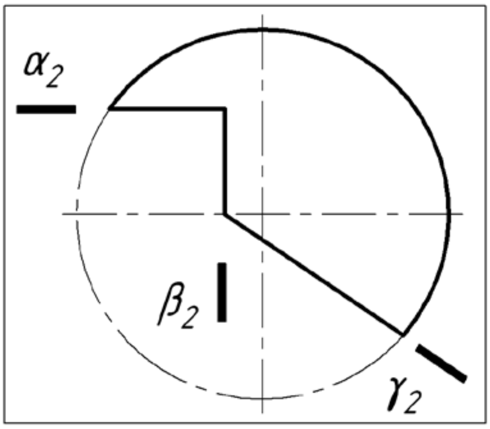


Рис.176

2. Можно начать решение с построения горизонтальной проекции сферы с вырезами. В сечении сферы плоскостью **α** получится окружность ***a***, которая проецируется на $\mathbf{\Pi_1}$ в виде окружности. Радиус её – ***R*** – равен расстоянию от оси до очерка (рис.177).

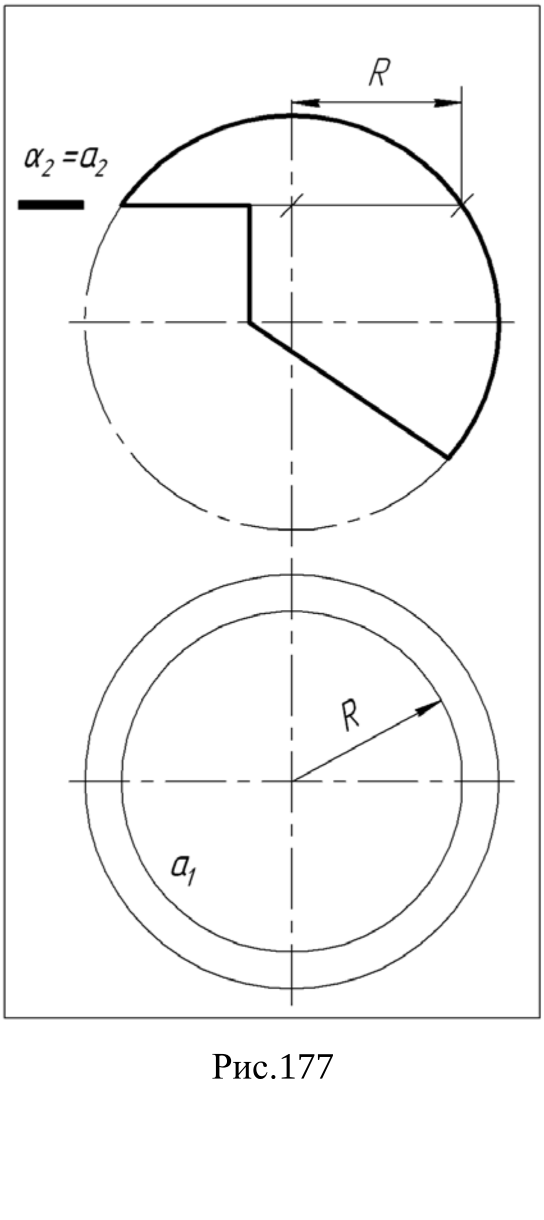


Рис.177

3. Окружность ***b***, являющаяся линией пересечения сферы и плоскости **β**, проецируется на $\mathbf{П_1}$ в виде отрезка прямой (рис.178), т.к. плоскость **β** перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций.

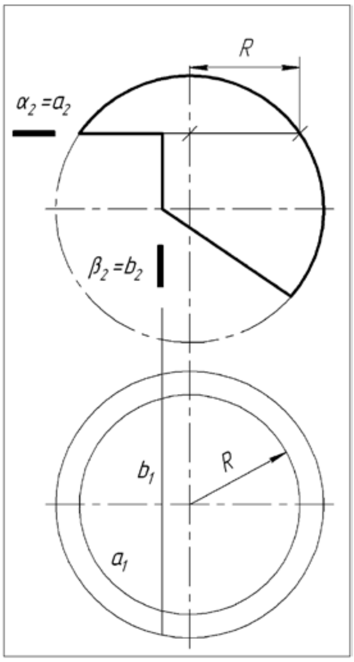


Рис.178

4. Далее следует определить проекции точек пересечения окружностей ***a*** и ***b***, а также часть окружности ***a***, принадлежащей линии сечения (рис.179).

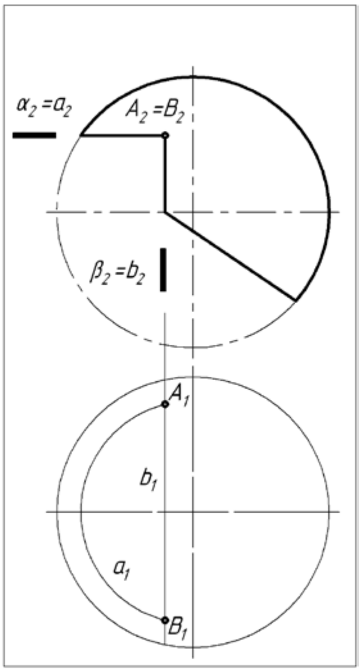


Рис.179

5. Окружность $\boldsymbol{d}$, которая получается при пересечении сферы и плоскости $\boldsymbol{\gamma}$, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в виде эллипса, т.к. плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ не параллельна и не перпендикулярна к $\mathbf{\Pi_1}$. Эллипс строится по точкам. Точки делятся на опорные и промежуточные. Начинать построения следует с определения опорных точек. К опорным, например, относятся точки, инцидентные очерковым образующим. В данном случае, это точки $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{F}$, инцидентные экватору сферы $\boldsymbol{e}$, и точка $\boldsymbol{C}$, инцидентная главному по отношению к $\mathbf{\Pi_2}$ меридиану сферы - $\boldsymbol{m}$. Проекция этого меридиана на $\mathbf{\Pi_2}$ является фронтальным очерком сферы. На рис.180 показаны фронтальные проекции точек $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{C}$.

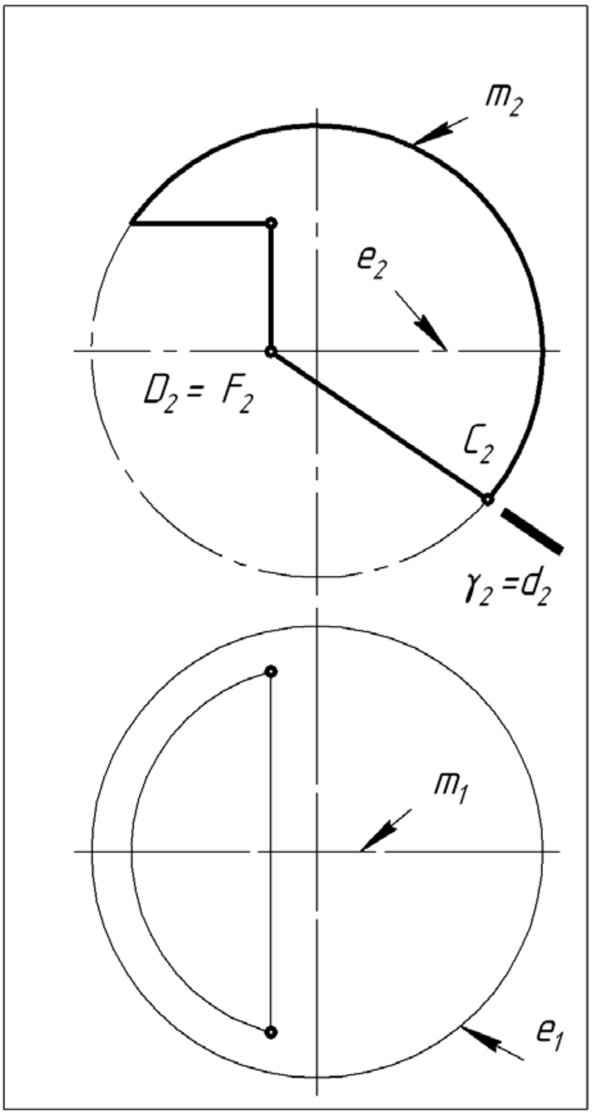


Рис.180

Горизонтальные проекции точек ***D***, ***F*** и ***C*** находят с помощью линий связи на проекциях экватора и главного меридиана соответственно, руководствуясь инвариантом проецирования: если точка инцидентна линии, то инцидентны одноименные проекции точки и линии (рис.181).

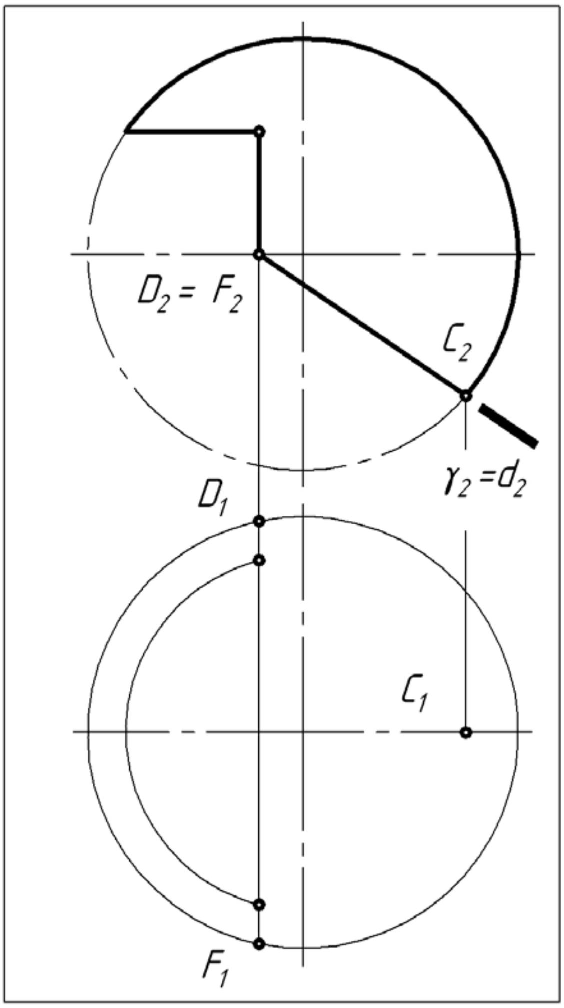


Рис.181

6. Для более точного построения эллипса следует найти несколько промежуточных точек. Их положение произвольно. Точки ***1*** и ***2*** (рис.182) инцидентны поверхности сферы, значит, через них можно провести линии, составляющие каркас поверхности. В данном случае проведена одна из параллелей сферы. Она проецируется на $\mathbf{\Pi_1}$ в виде окружности, радиуса ***R1***.

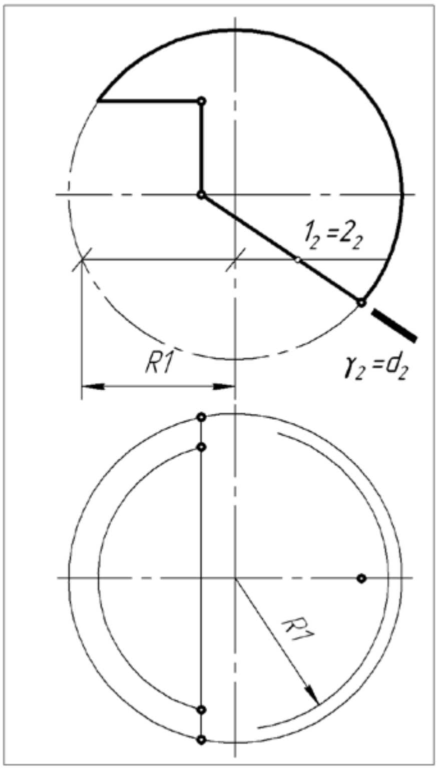


Рис.182

Горизонтальные проекции промежуточных точек ***1*** и ***2*** находят с помощью линий связи (рис.183).

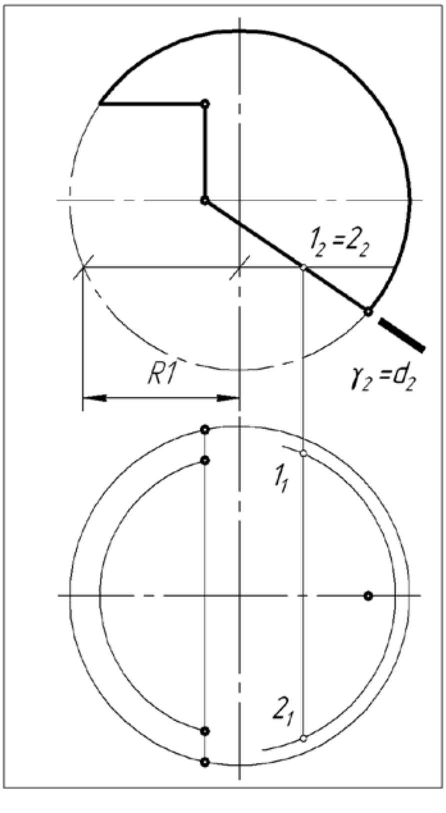


Рис.183

Через найденные горизонтальные проекции точек ***D***, ***1***, ***C***, ***2*** и ***F*** проводят плавную кривую (рис.184).

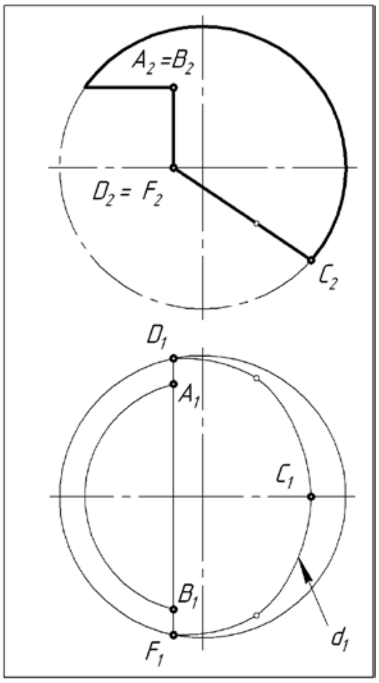


Рис. 184

7. Далее следует определить видимость линии сечения. Очерковые образующие той части сферы, которая была отрезана, выполняются типом линии «штрихпунктирная»; оставшейся части – типом линии «основная», невидимые линии – штриховой линией (рис.185).

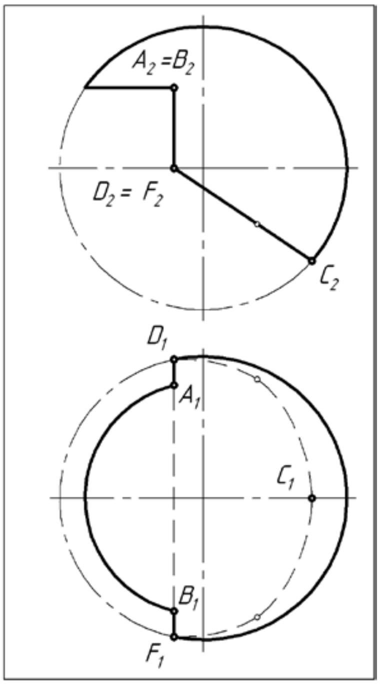


Рис.185

8. Построение профильной проекции сферы выполняется в той же последовательности. Окружность ***a*** проецируется на **П₃** в виде отрезка прямой; окружность ***b*** – в виде окружности, радиусом ***R2***. Далее находятся профильные проекции точек пересечения этих окружностей - ***A*** и ***B*** (рис.186).

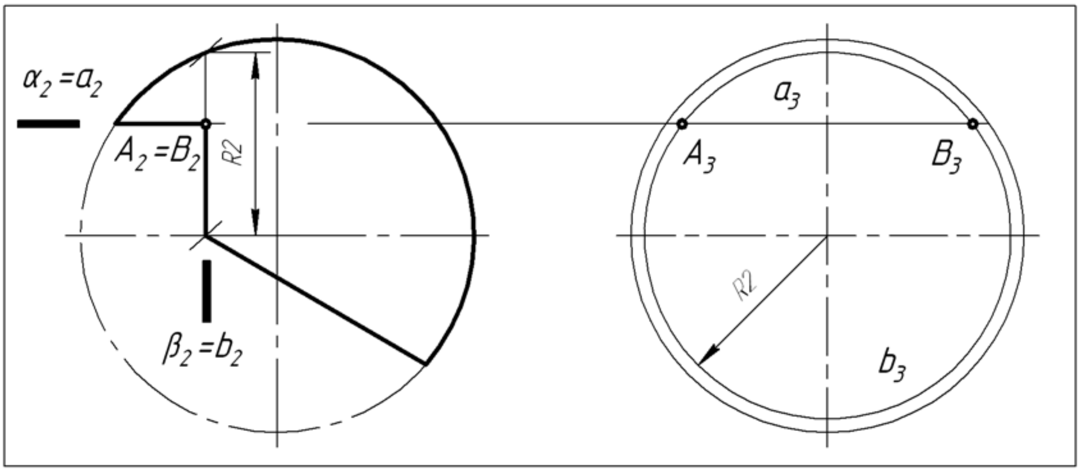


Рис.186

9. Окружность ***d*** проецируется на **П₃** в виде эллипса. Опорными являются точки: ***D*** и ***F*** – инцидентные экватору сферы; ***P*** и ***T*** – инцидентные ***p*** - главному меридиану по отношению к **П₃**; точка ***C*** – инцидентная главному по отношению к **П₂** меридиану ***m***. Точка ***C*** является низшей точкой сечения. Профильные проекции опорных точек строят, исходя из инцидентности их проекциям соответствующих линий (рис.187).

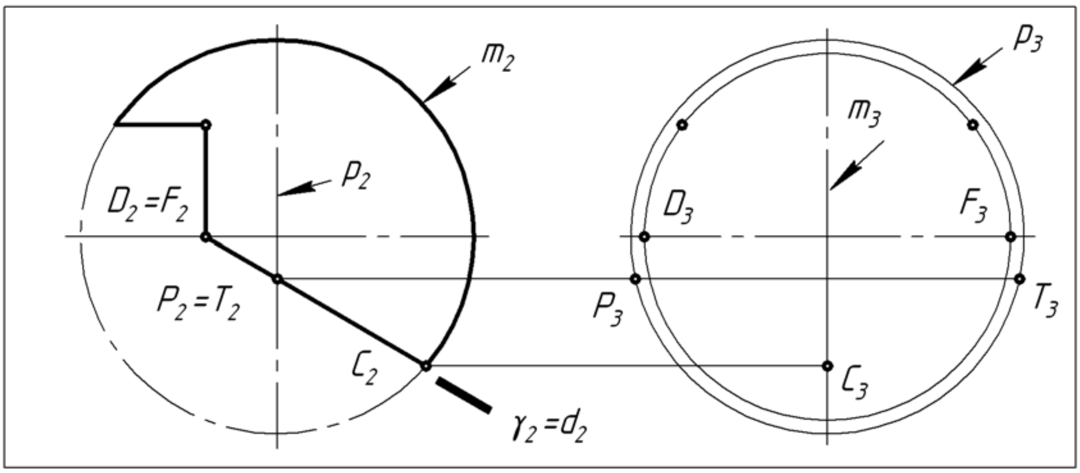


Рис.187

10. На рис.188 показано построение профильных проекций промежуточных точек ***1*** и ***2***.

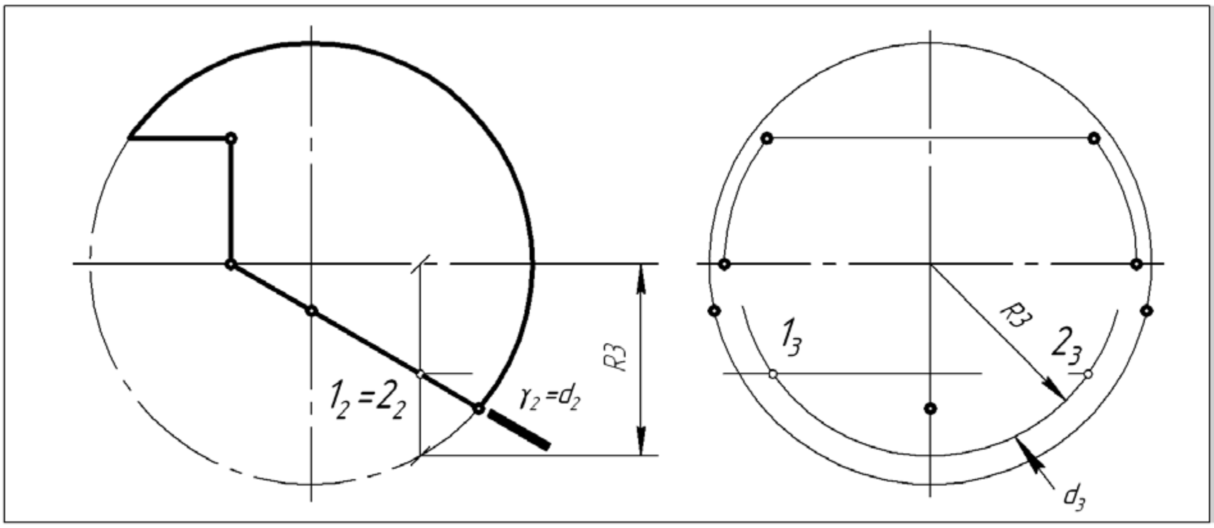


Рис.188

11. Через найденные профильные проекции точек ***D***, ***P***, ***1***, ***C***, ***2, T*** и ***F*** проводят плавную кривую (рис.189).

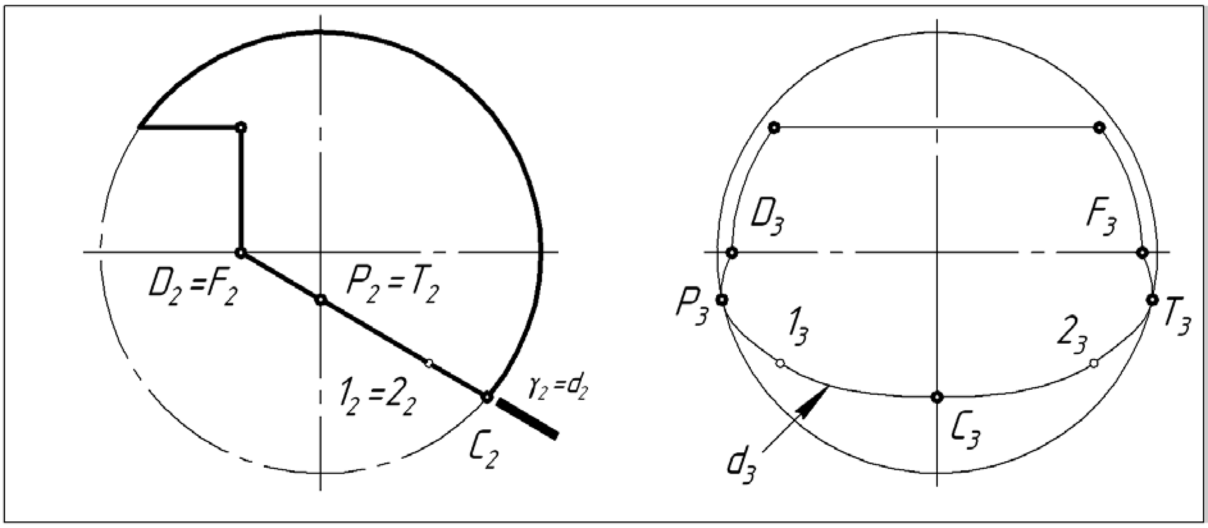


Рис.189

12. Далее следует определить видимость линии сечения (рис.190).

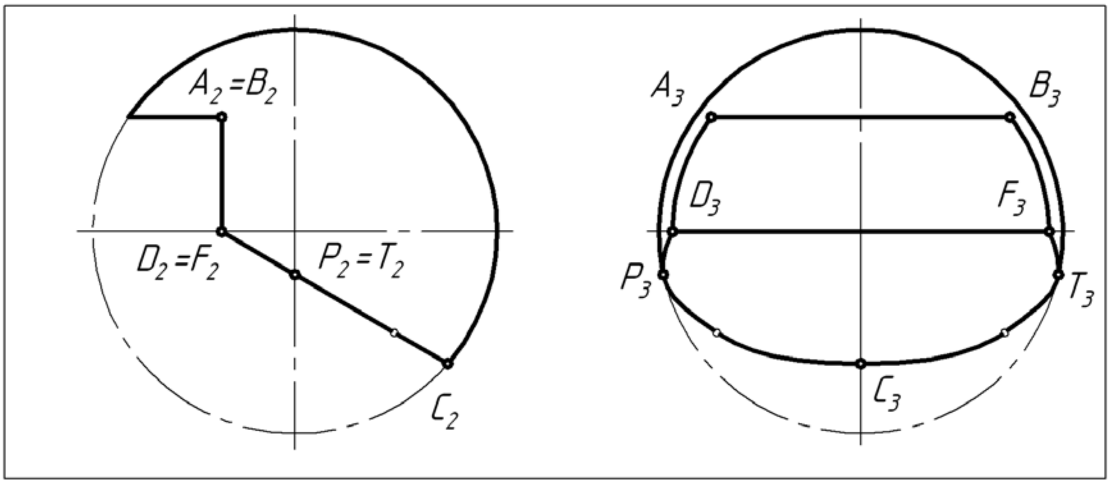


Рис.190

13. Окончательный вид выполненного задания приведен на рис.191.

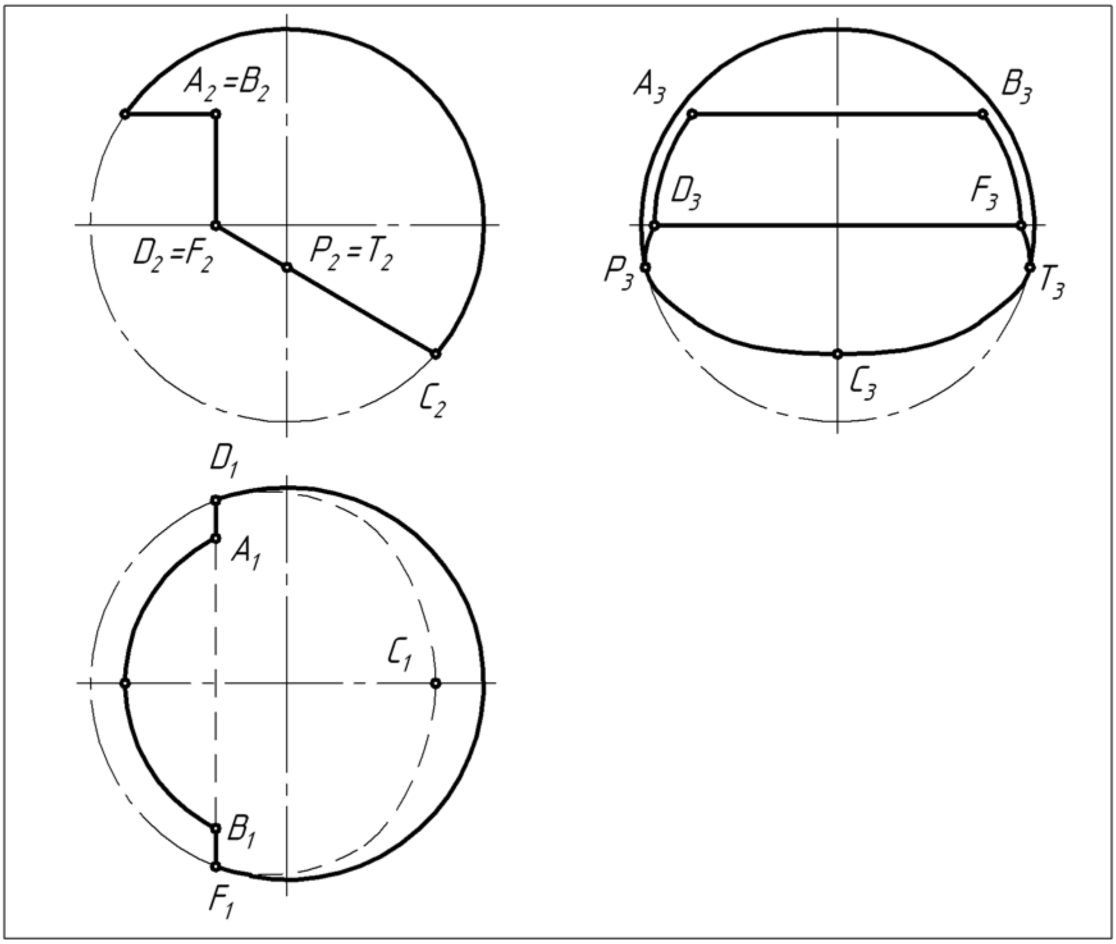


Рис.191

Задача 113. Определить взаимное положение оригиналов (рис.192).

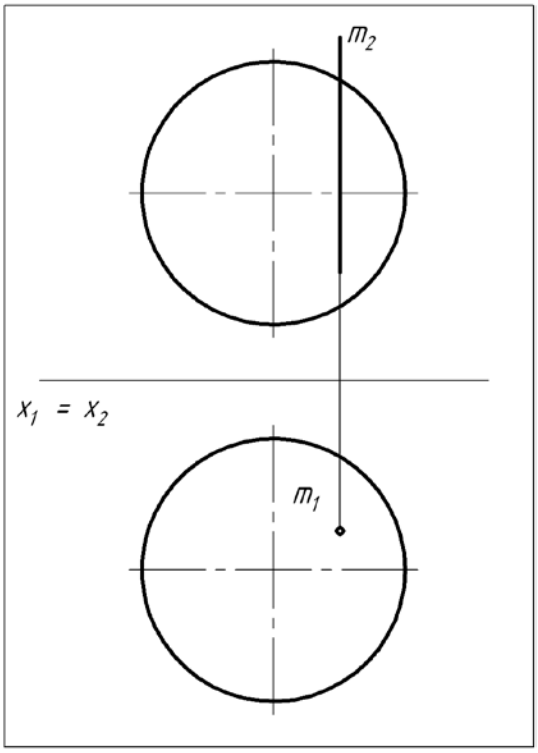


Рис.192

Задача 114. Определить взаимное положение оригиналов (рис.193).

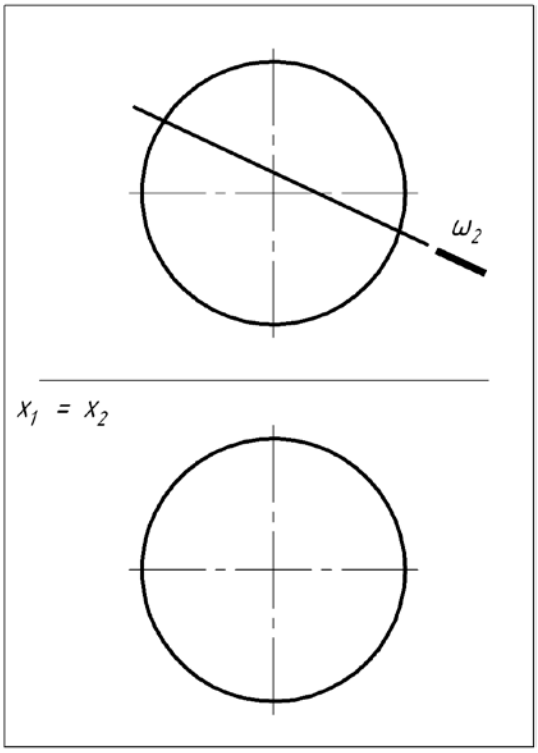


Рис.193

Задача 115. Определить взаимное положение оригиналов (рис.194).

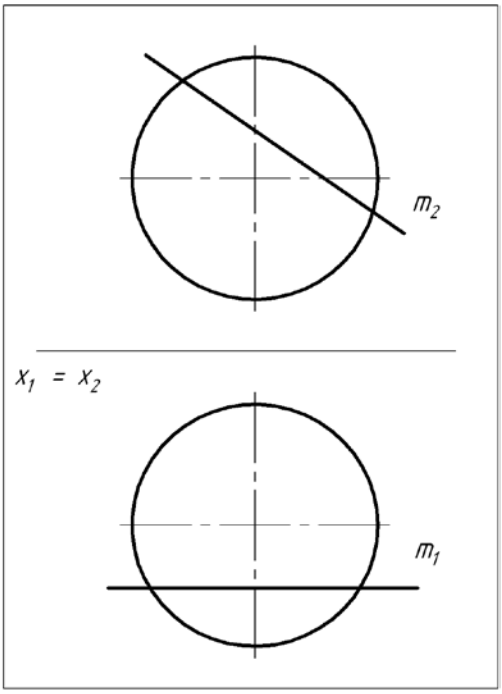


Рис.194

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Точность графических построений

В своем учебнике начертательной геометрии Гаспар Монж писал: «…известно, что изящество и простота графических построений зависят от системы способов, применяемых для получения каждого элемента результата». Этой фразой автор подчёркивает необходимость выбирать тот способ решения, который приводит к получению наиболее точных результатов графических расчетов в инженерном деле[4].

В учебнике начертательной геометрии Н.С. Кузнецова точность построений определяется следующим образом: «Будем считать приемлемыми в инженерных целях такое решение задачи, которое найдено путем построений, соответствующих определению фигур, использованных при решении. К достаточно точным могут быть отнесены построения,

[4] Монж, Г. Начертательная геометрия [Текст] / Г. Монж ; перевод под ред. Д. И. Каргина. – М. : Изд. АН СССР, 1947. – 273 с.

которые выполняются с помощью прямых и окружностей. Любое решение задачи, полученное с помощью лекальных кривых, которые можно построить только по отдельным точкам, будем считать менее точным»[5].

Пример «Пересечение сферы с прямой»

Условие задачи: определить взаимное положение заданных оригиналов.

Дано: $\mathbf{Ф}_{\textbf{сферич.}}$ (буквой **Ф** – читается «фи» - обозначается произвольная поверхность)

$\boldsymbol{m}$ – прямая о.п.

Найти: $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{Ф} = ?$

Варианты ответа:

1. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{Ф} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ – если прямая пересекает поверхность в двух точках (***A*** и ***B***).
2. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{Ф} = \boldsymbol{K}$ – если прямая касается (обозначение: $\boldsymbol{m}\ \underline{\Omega}\ \mathbf{Ф}$) поверхности сферы в какой-либо точке (***K***).
3. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{Ф} = \varnothing$ (знак пустого множества) – если прямая и сфера не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

Чертёж к задаче: - рис.195.

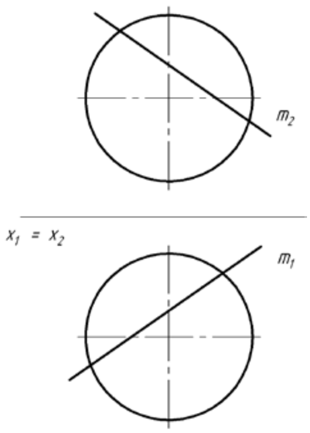


Рис.195

[5] Кузнецов, Н. С. Начертательная геометрия [Текст] / Н. С. Кузнецов. – М. Высш. шк., 1969. – 496 с.

Позиционная задача III типа

Универсальным методом решения позиционных задач (ПЗ) является метод посредника. Заключаем прямую ***m*** в плоскость-посредник **ω**. Посредник занимает горизонтально-проецирующее положение (рис.196).

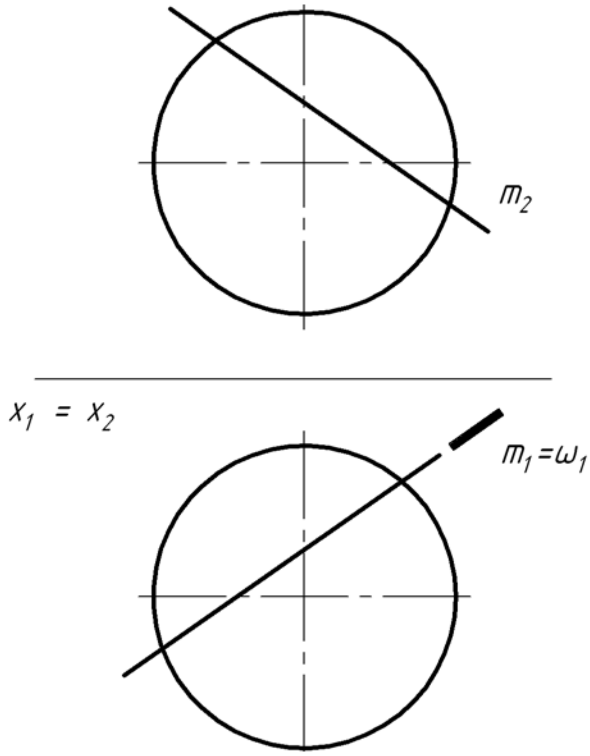


Рис.196

Варианты решения:

1. **Метод посредника**
2. ***Другие возможные варианты решения задачи.***

$\boldsymbol{m \subset \omega,\ \omega\ (\omega_1),\ \omega \perp \Pi_1}$

В сечении сферы плоскостью-посредником получается окружность.

$\boldsymbol{\omega \cap \Phi = p}$

Горизонтальная проекция этой окружности (***p*₁**) представляет собой отрезок прямой, совпадающий со следом плоскости **ω**. Фронтальная – представляет собой эллипс.

На рис.197 показано построение опорных точек эллипса.

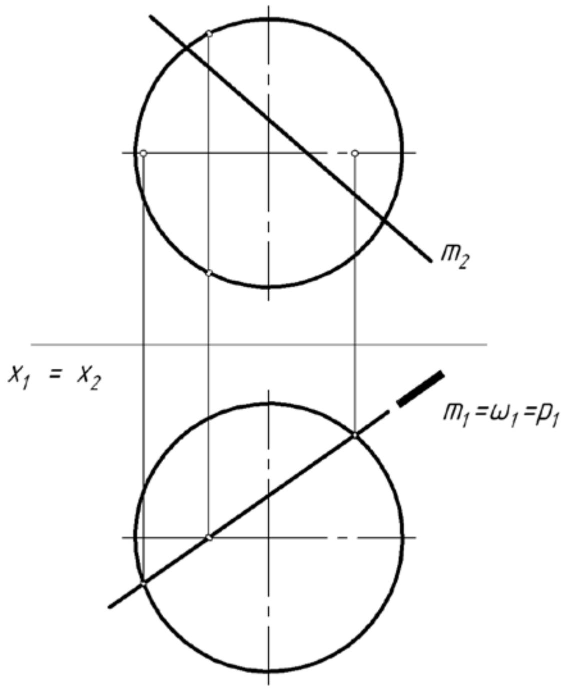


Рис.197

На рис.198 показано построение промежуточных точек.

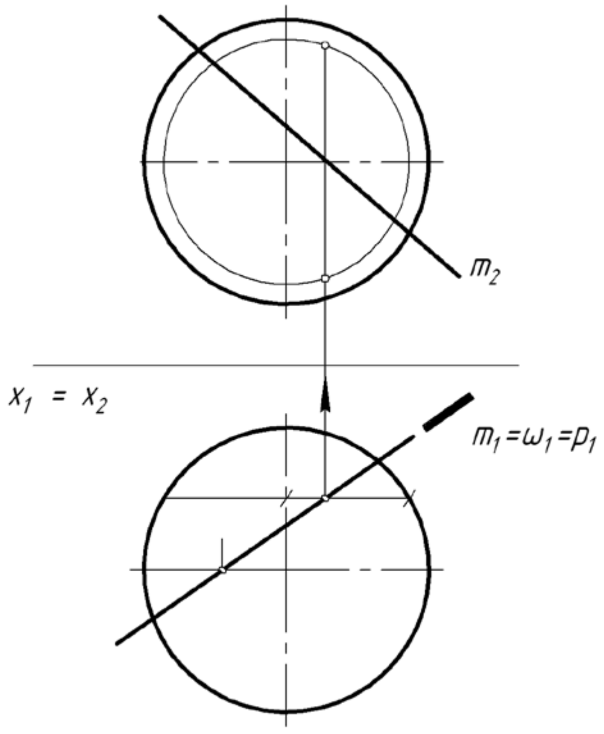


Рис.198

Полученные точки соединяются плавной кривой. Построена фронтальная проекция $\boldsymbol{p_2}$ окружности $\boldsymbol{p}$ (рис.199).

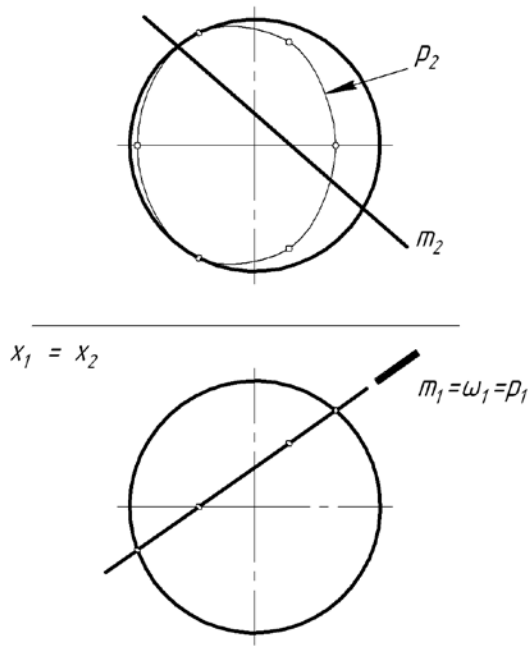


Рис.199

Фронтальная проекция позволяет судить о взаимном положении окружности $\boldsymbol{p}$ и прямой $\boldsymbol{m}$. В данном случае они пересекаются в двух точках (рис.200): $\boldsymbol{m \cap p = \{A, B\}}$

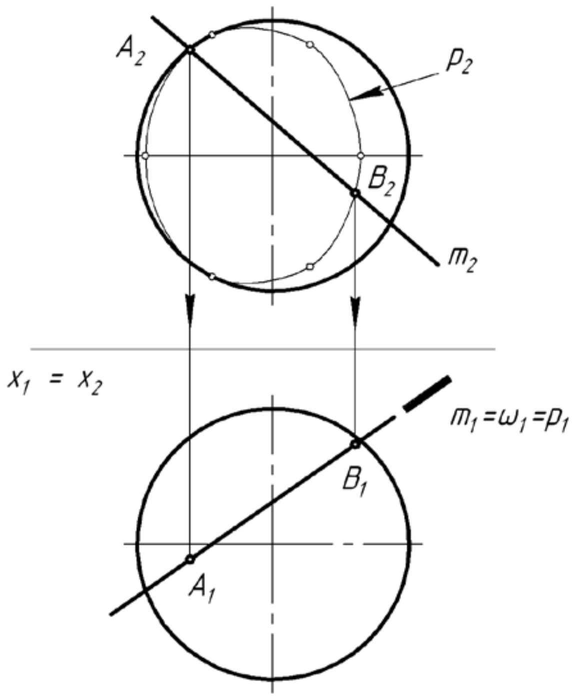


Рис.200

Найденные точки ***A*** и ***B*** являются точками пересечения прямой ***m*** с поверхностью сферы.

Если бы прямая касалась сферы, то фронтальная проекция прямой касалась бы фронтальной проекции окружности ***p*** ($m_2 \,\Omega\, p_2$). Если у прямой и окружности не было бы общих точек, это означало бы, что прямая и сфера не пересекаются.

Ответ: $m \cap \Phi = \{A, B\}$

В заключение следует определить видимость прямой ***m*** по отношению к поверхности сферы. Предполагаем, что сфера непрозрачна. Видимость определена способом конкурирующих точек сначала на горизонтальной проекции (рис.201),

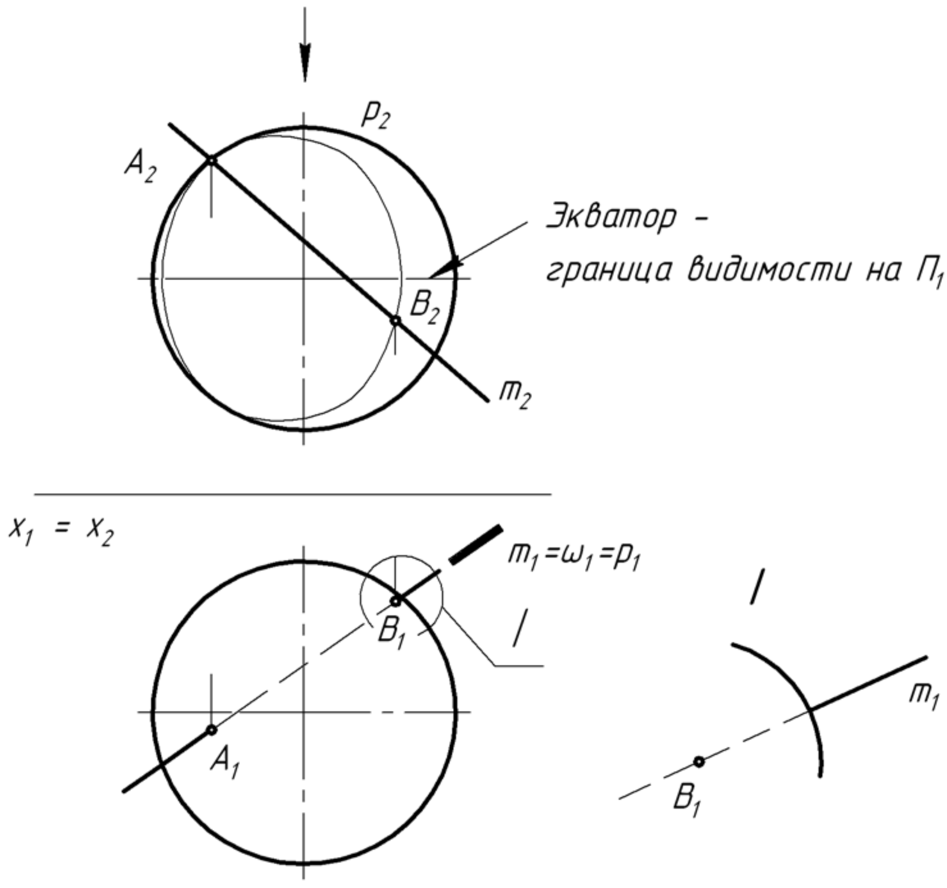


Рис.201

затем на фронтальной проекции (рис.202).

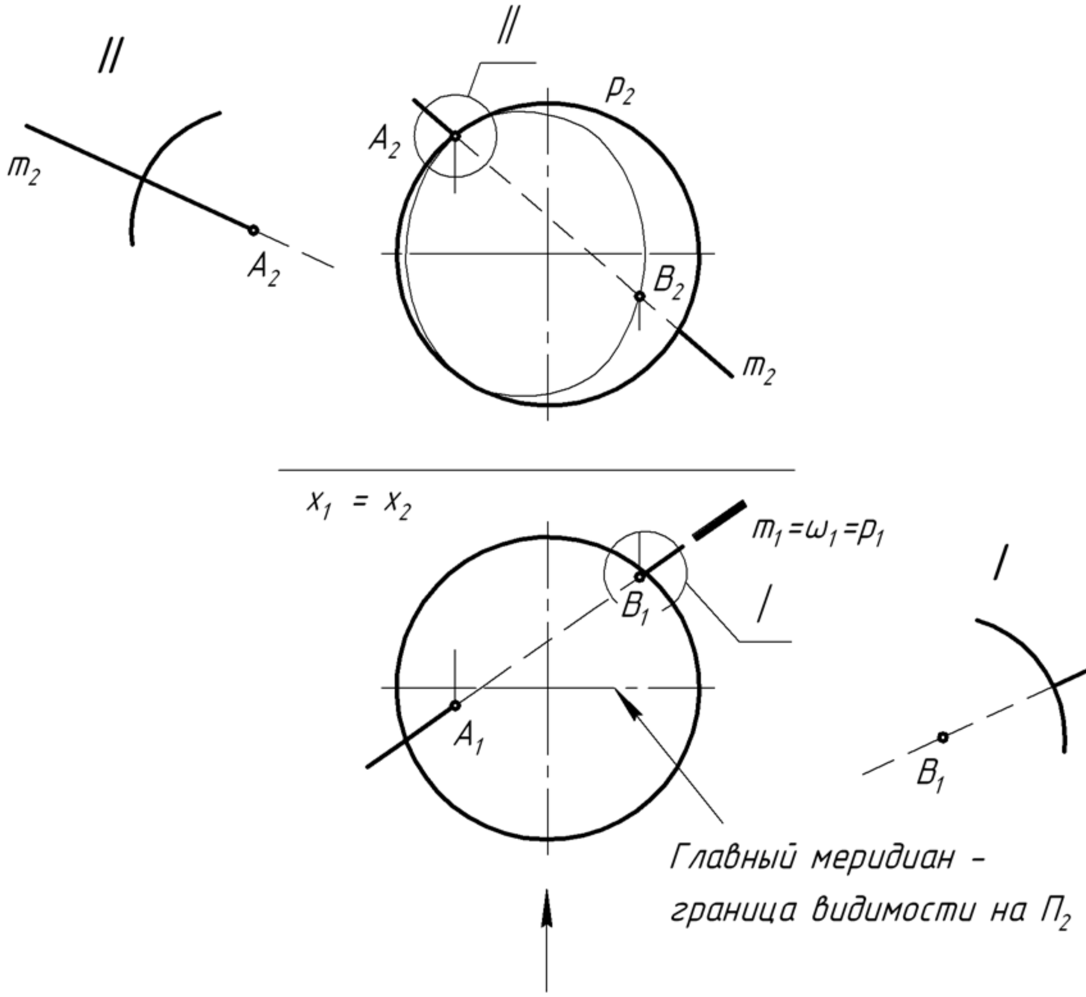


Рис.202

Горизонтальная проекция точки ***B*** (***B₁***) и фронтальная проекция точки ***A*** (***A₂***) расположены слишком близко к очерку сферы. Для того, чтобы показать видимость прямой ***m*** на участках от точек ***A*** и ***B*** до очерка, следует выполнить выносной элемент в произвольном увеличенном масштабе (рис.201 и 202).

В процессе решения задачи пришлось построить лекальную кривую - эллипс. В соответствии с определенными выше требованиями к точности построений, можно утверждать, что данный способ решения неприемлем в инженерных целях, т.к. положение точек ***A*** и ***B*** определено не точно.

Рассмотрим ещё один способ решения той же задачи.

Варианты решения:

1. **Метод посредника**
2. **Преобразование проекций + метод посредника**

Цель преобразований: $\boldsymbol{m}$ – о.п. $\rightarrow$ $\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{\Pi'}$

Первая задача на преобразования.

Способы: ЗПП (замена плоскостей проекций)**,**

ППП (плоско-параллельный перенос)**,**

ВрПр (вращение вокруг проецирующей прямой). При использовании любого из указанных способов требуется выполнить 1 преобразование.

Решение:

ЗПП

$\boldsymbol{\Pi_2 / \Pi_1 \rightarrow \Pi_2 / \Pi_7,\ m \parallel \Pi_7}$.

Применим способ замены плоскостей проекций. Новая плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_7}$ перпендикулярна к незаменяемой – $\boldsymbol{\Pi_2}$ – и параллельна данной прямой $\boldsymbol{m}$. В новой системе плоскостей проекций прямая $\boldsymbol{m}$ занимает уже не общее положение, а является линией уровня.

Линия пересечения плоскостей $\boldsymbol{\Pi_2}$ и $\boldsymbol{\Pi_7}$ параллельна проекции прямой $\boldsymbol{m}$, т.е. $\boldsymbol{x_2 = x_7 \parallel m_2}$ (рис.203).

Выполняя замену плоскостей проекций, следует помнить основное правило: расстояние от новой оси до новой проекции точки равно расстоянию от заменяемой оси до заменяемой проекции точки. Линии связи перпендикулярны к проекциям осей.

На рис.203 показано построение новой проекции сферы.

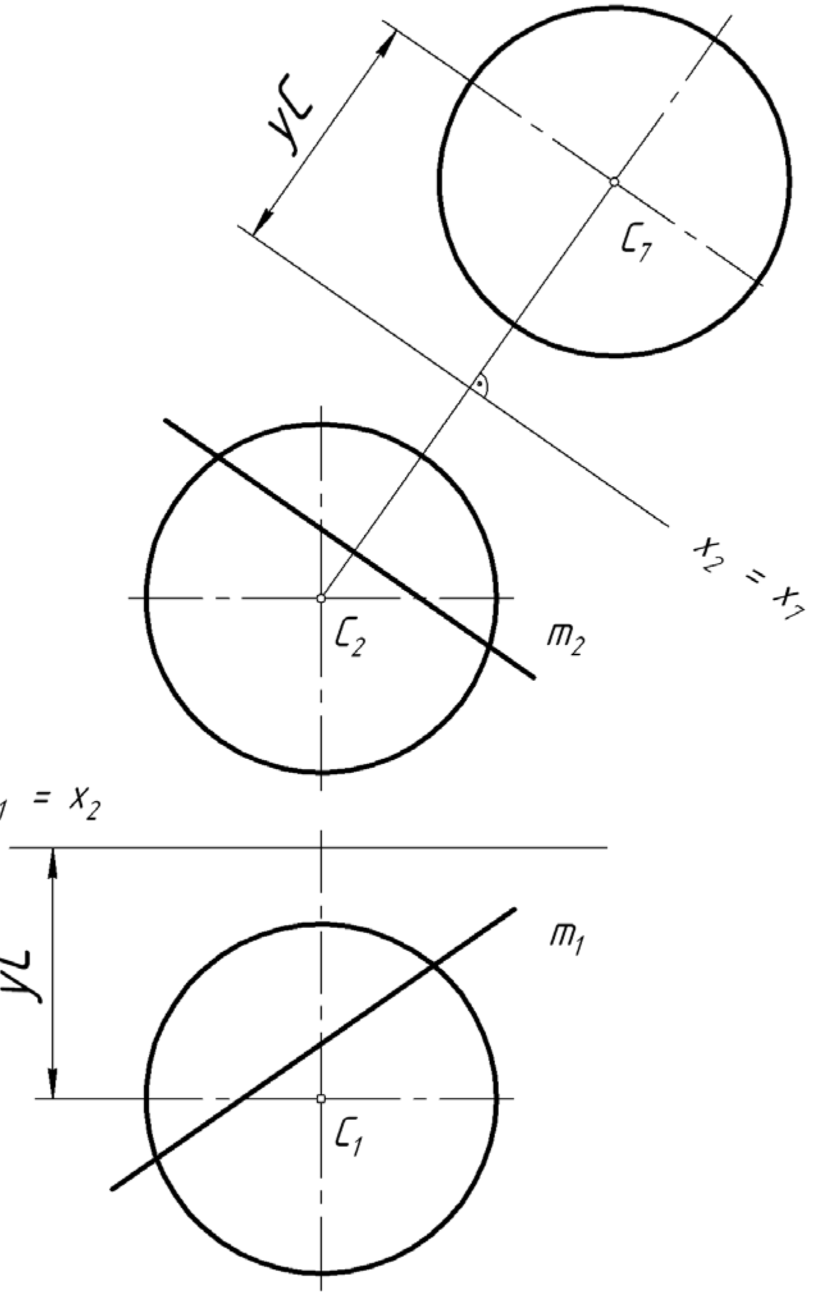


Рис.203

Далее следует построить проекцию прямой ***m*** на плоскость **П₇**.

Для этого необходимо задать на прямой две точки, положение которых произвольно, и затем построить новые проекции этих точек.

На рис. 204 показано построение точки ***T***. Сначала на фронтальной проекции прямой в произвольном месте задана фронтальная проекция точки (***T₂***). Далее с помощью линии связи на горизонтальной проекции прямой находят горизонтальную проекцию точки (T_1). Линия связи T_2T_7 перпендикулярна проекции новой оси $x_2 = x_7$. Расстояние от этой оси до новой проекции точки (T_7) равно расстоянию от заменяемой оси – $x_1 = x_2$ – до заменяемой проекции точки (T_1), т.е. значению координаты **y** точки T.

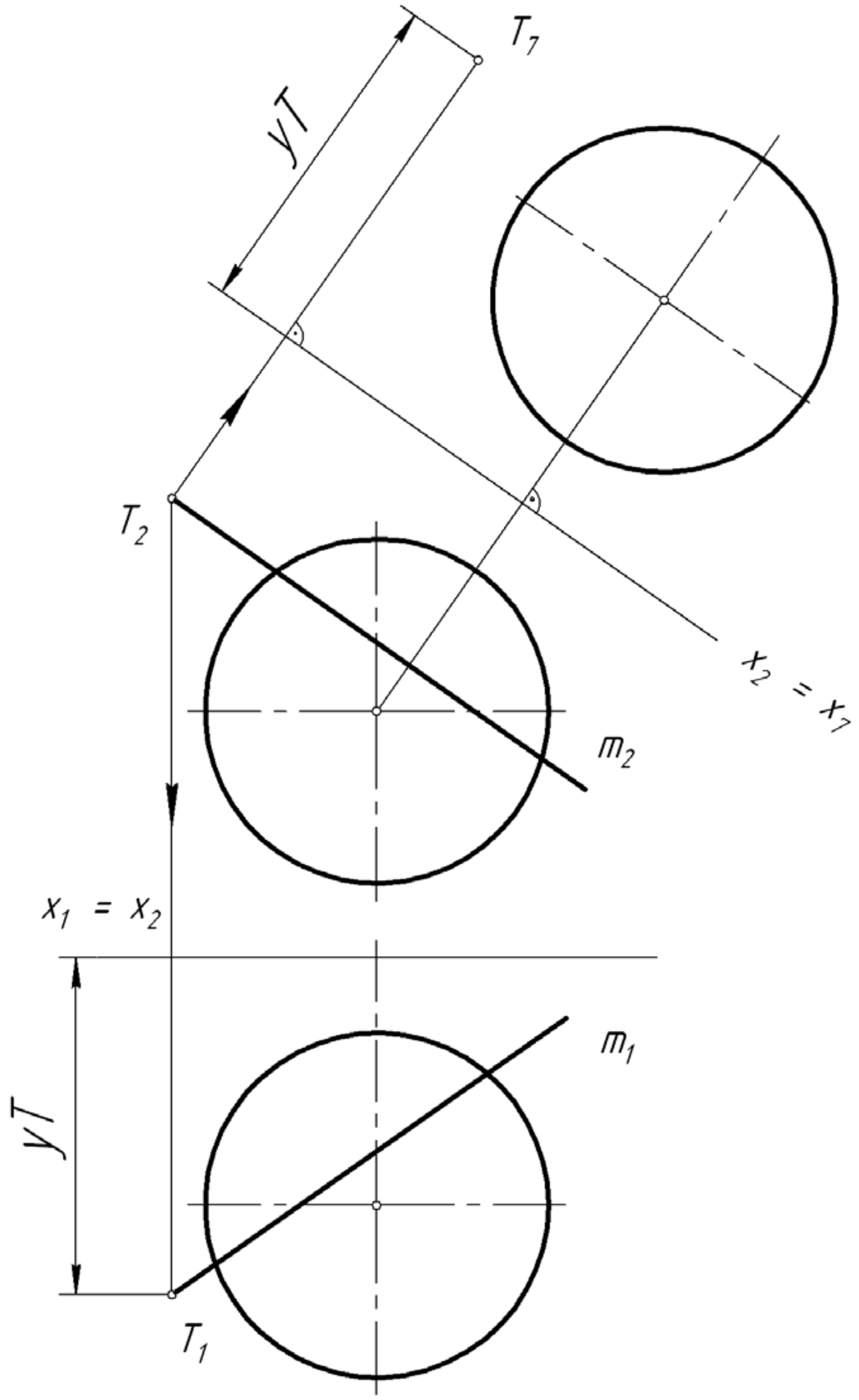


Рис.204

На рис.205 показано построение проекций другой точки прямой - ***T'***. С целью уменьшения количества построений в качестве второй точки взят след прямой ***m*** на плоскости **П**$_1$, т.е. точка, у которой значение ординаты равно ***0***. Через полученные новые проекции точек ***T*** и ***T'*** проходит проекция прямой ***m*** на плоскость **П**$_7$.

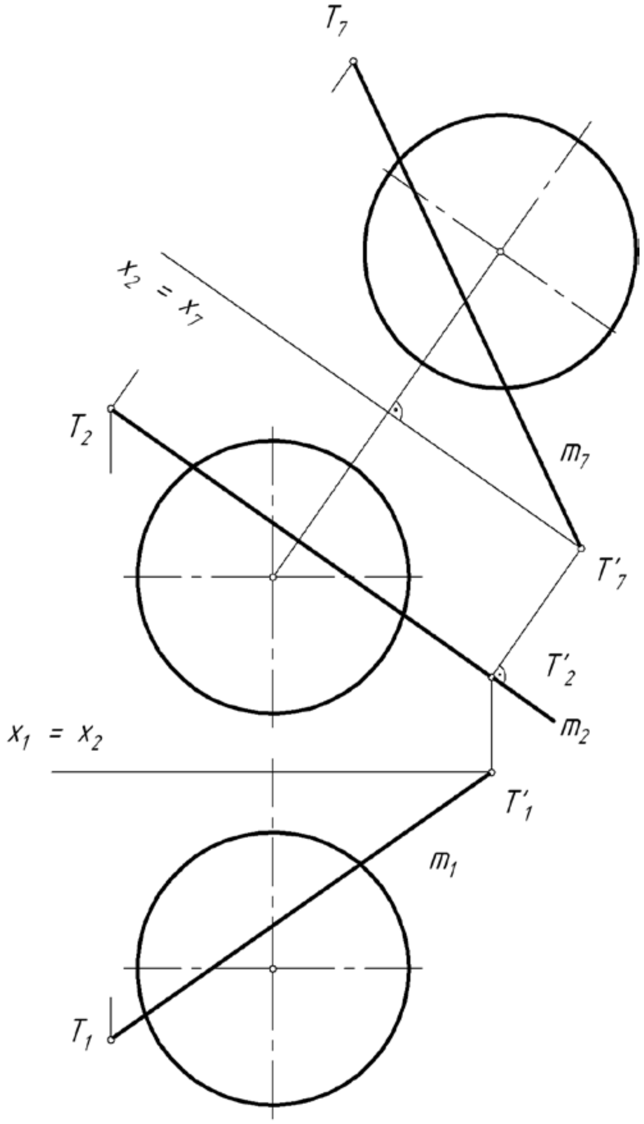


Рис.205

Преобразование проекций завершено. Возвращаемся к решению позиционной задачи. Оригиналы те же – сфера и прямая. Изменилось положение прямой относительно плоскостей проекций – теперь она является линией уровня.

По-прежнему, это ПЗ III типа (ни один из оригиналов не занимает проецирующее положение). Универсальный метод решения подобных задач – метод посредника. Заключаем прямую $\boldsymbol{m}$ в плоскость-посредник $\boldsymbol{\omega}$. Посредник занимает положение плоскости уровня (|| $\mathbf{\Pi_7}$). В сечении сферы посредником получается окружность $\boldsymbol{p}$. Проекция этой окружности на $\mathbf{\Pi_2}$ представляет собой отрезок прямой, совпадающий со следом плоскости $\boldsymbol{\omega}$, проекция на $\mathbf{\Pi_7}$ – окружность радиусом $\boldsymbol{R}$ – от оси до очерка (рис.206).

$\boldsymbol{m} \subset \omega,\ \omega\ (\omega_2),\ \omega \parallel \Pi_7$

$\omega \cap \Phi = \boldsymbol{p}$

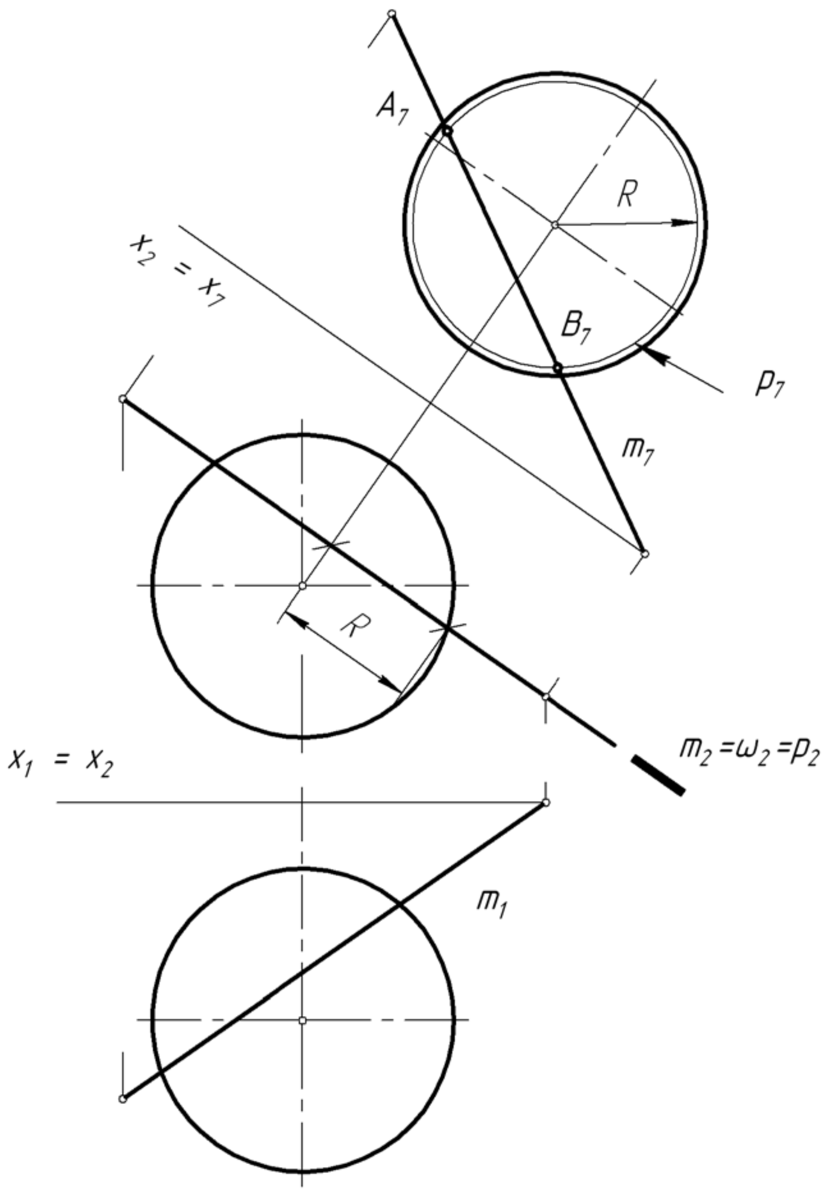


Рис.206

$\boldsymbol{m \cap p} = \{\boldsymbol{A, B}\}$

Ответ: $\boldsymbol{m \cap \Phi} = \{\boldsymbol{A, B}\}$ (см. рис.207).

Положение точек пересечения прямой и сферы определено более точно, т.к. в ходе решения не пришлось строить лекальные кривые; использовались только прямые и окружности.

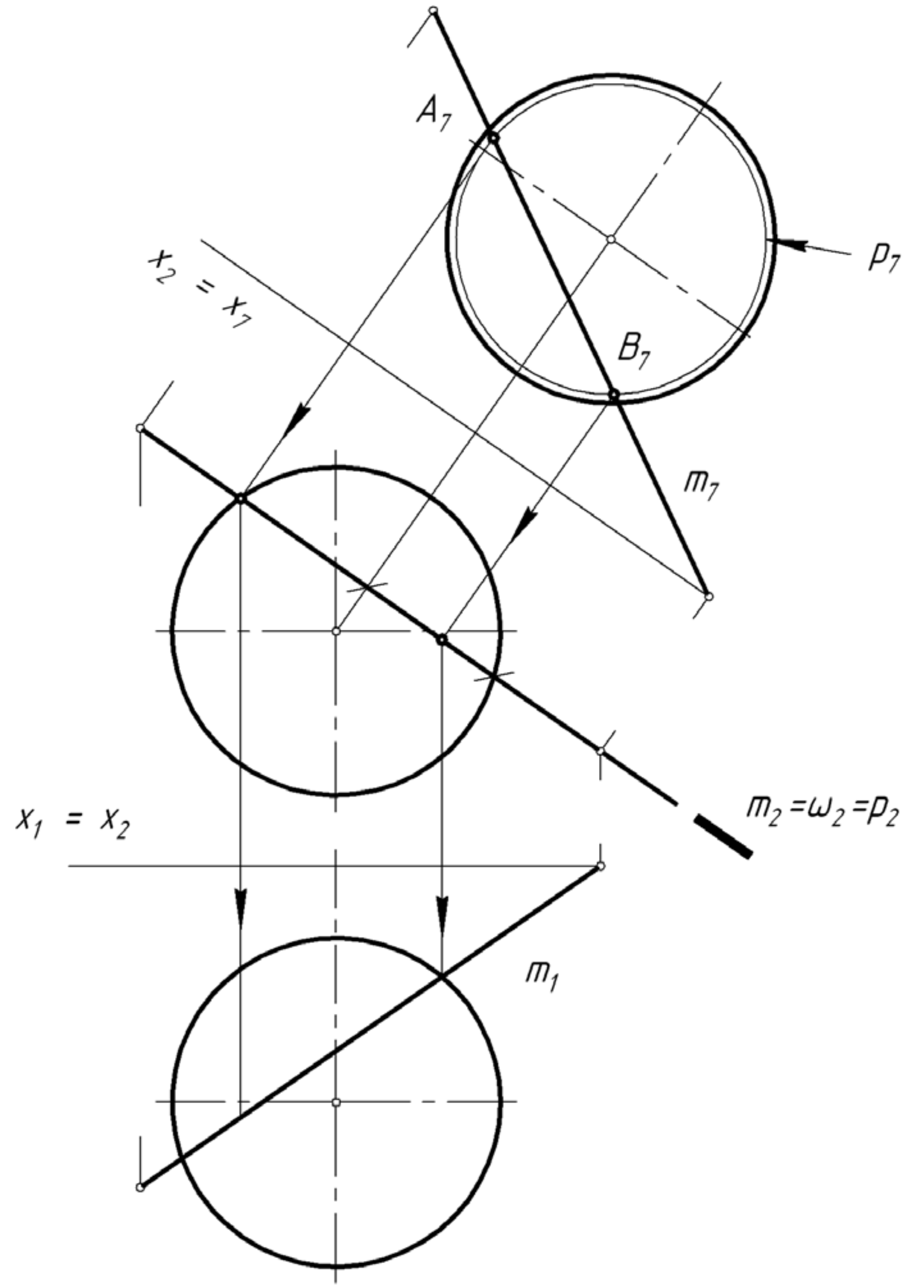


Рис.207

На рис.208 показан окончательный вид полностью решенной задачи, с определенной видимостью прямой по отношению к непрозрачной сфере.

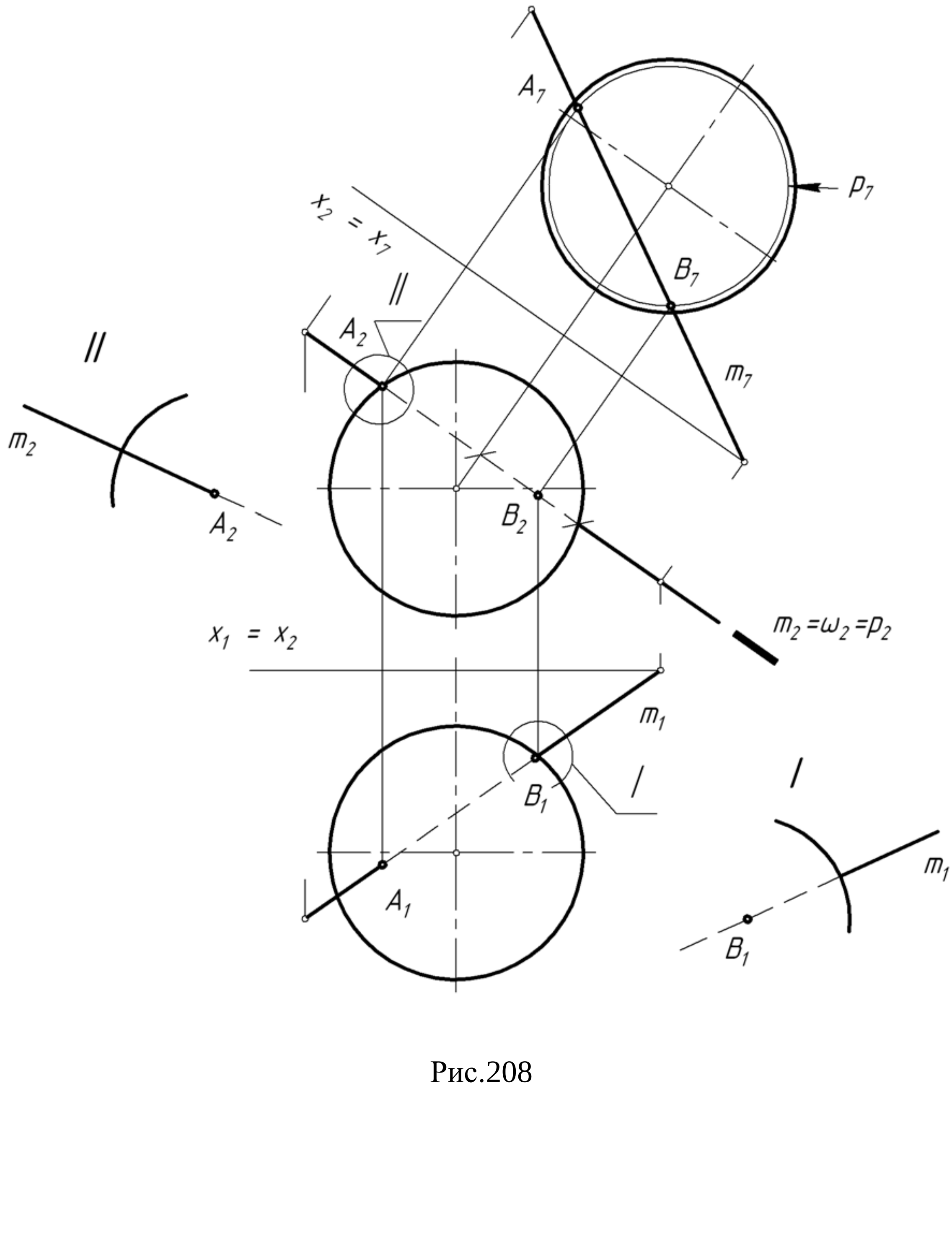


Рис.208

Задача 116. Определить взаимное положение оригиналов (рис.209).

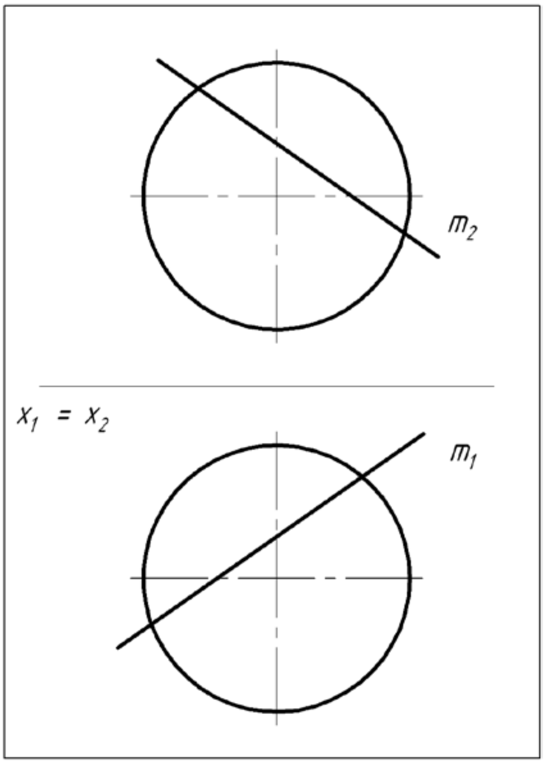


Рис.209

Задача 117. Определить взаимное положение оригиналов (рис.210).

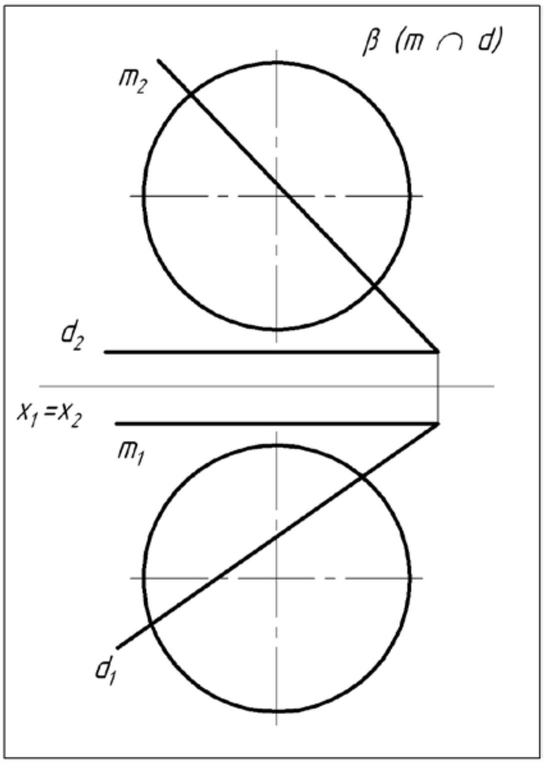


Рис.210

ЗАДАЧИ

Конусы и цилиндры

Пример «Построение чертежей конуса и цилиндра»

Успешность решения позиционных задач с участием конусов и цилиндров напрямую зависит от правильности выполнения чертежей этих оригиналов.

Дано: $\mathbf{\Phi_{кон}}$., плоскость основания || $\mathbf{\Pi_1}$, ось $\boldsymbol{i}$ – о.п.

Первый этап выполнения чертежа конуса показан на рис.211. Диаметр окружности основания рекомендуется задавать не менее ***60*** мм. Углы наклона проекций оси и положение вершины конуса задаются произвольно.

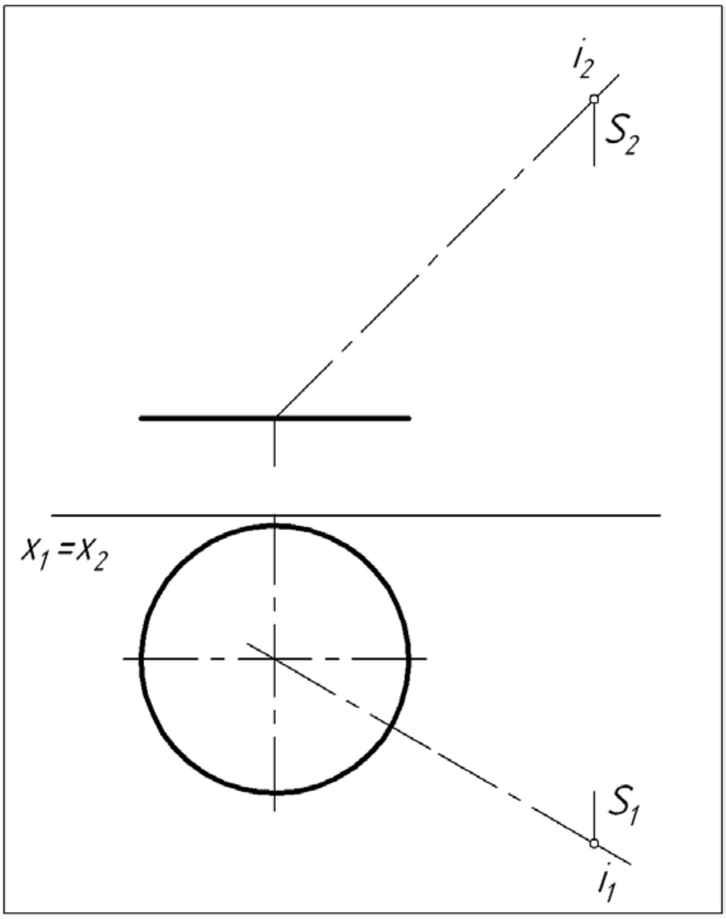


Рис.211

Фронтальный очерк конуса представляет собой треугольник. Необходимо построить горизонтальные проекции образующих, являющимися очерковыми на $\mathbf{П_2}$. Эти построения выполняются с помощью линий связи (рис.212). Очевидно, что эти образующие не являются очерковыми на $\mathbf{П_1}$. Их проекции проводятся тонкими линиями.

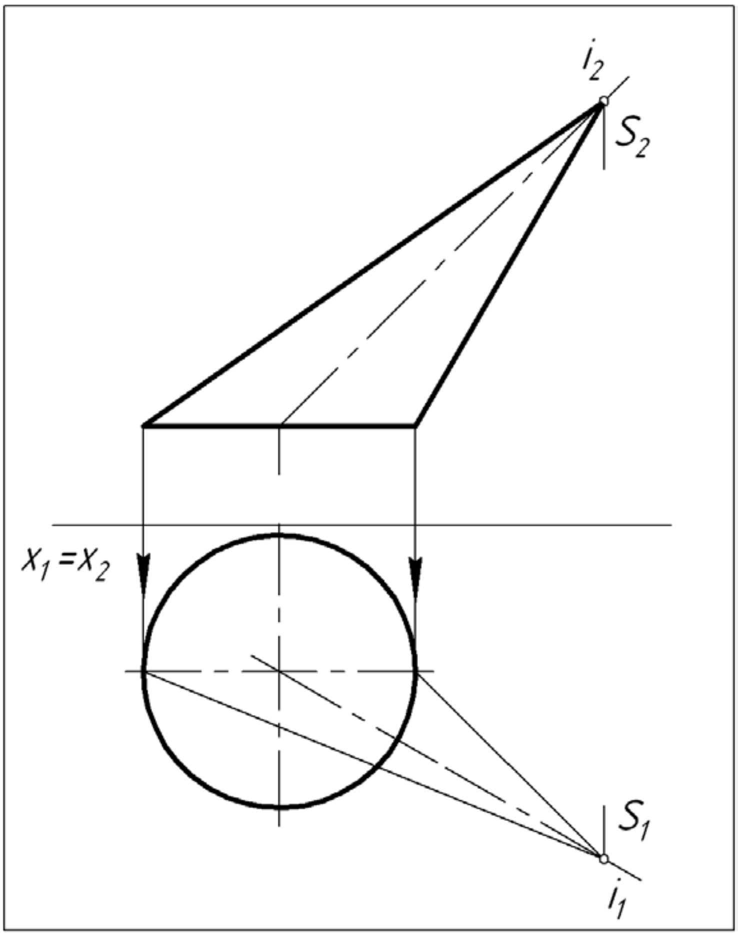


Рис.212

Далее следует построить очерковые образующие конуса на горизонтальной плоскости проекций. Эти линии будут являться касательными к окружности – проекции основания, проведенными из внешней точки – проекции вершины конуса.

Необходимо найти середину отрезка, соединяющего точку, из которой проводят касательные и центр окружности. В данном случае, отрезка $\boldsymbol{S_1C_1}$ (рис.213).

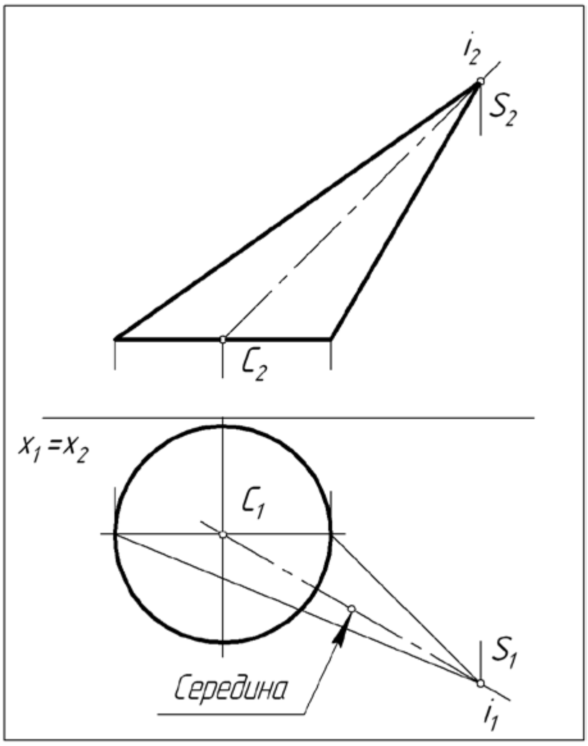


Рис.213

Найденная точка является центром дуги окружности, радиус которой – $\boldsymbol{R}$ – равен половине отрезка $\boldsymbol{S_1C_1}$. Пересечение этой дуги с окружностью основания определяет положение точек касания $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (рис.214).

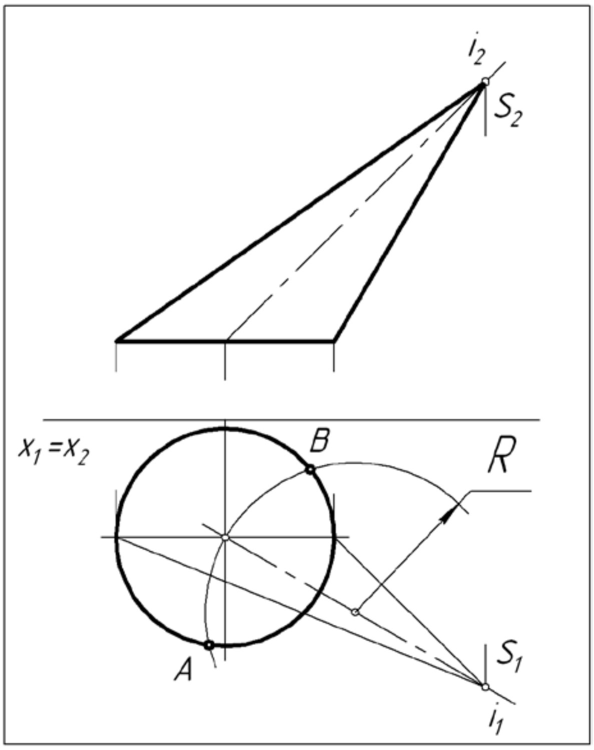


Рис.214

Соединив горизонтальную проекцию вершины конуса S_1 с найденными точками ***A*** и ***B***, достраивают горизонтальный очерк конуса. С помощью линий связи необходимо построить фронтальные проекции этих образующих (рис. 215).

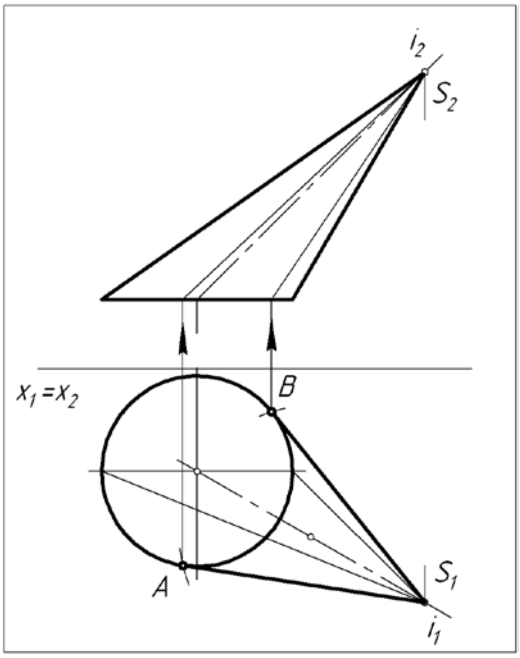


Рис.215

Наконец, необходимо определить на чертеже видимость основания конуса (рис.216).

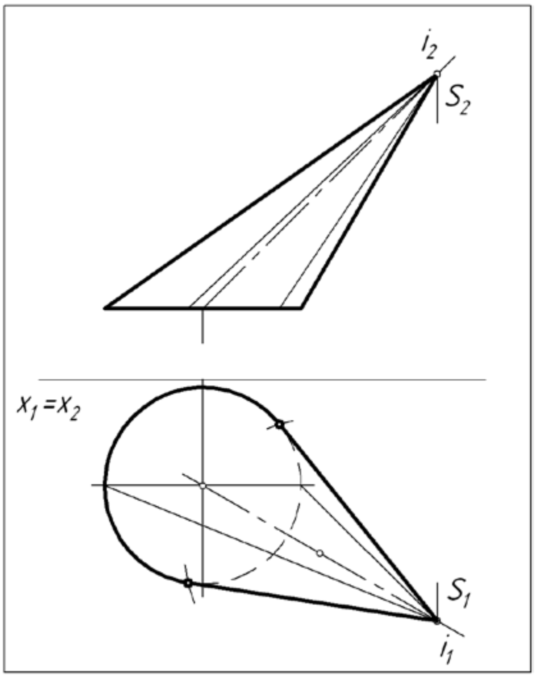


Рис.216

Выполняя чертеж цилиндра, следует помнить, как определяются точки касания прямой с двумя окружностями (рис.217).

Через центр любой окружности (***C_1***) проводят перпендикуляр к прямой, соединяющей центры (***i_1***). Пересечение этого перпендикуляра с окружностью определяет положение точек касания (точки ***A*** и ***K***).

Очерковые образующие параллельны проекции оси цилиндра.

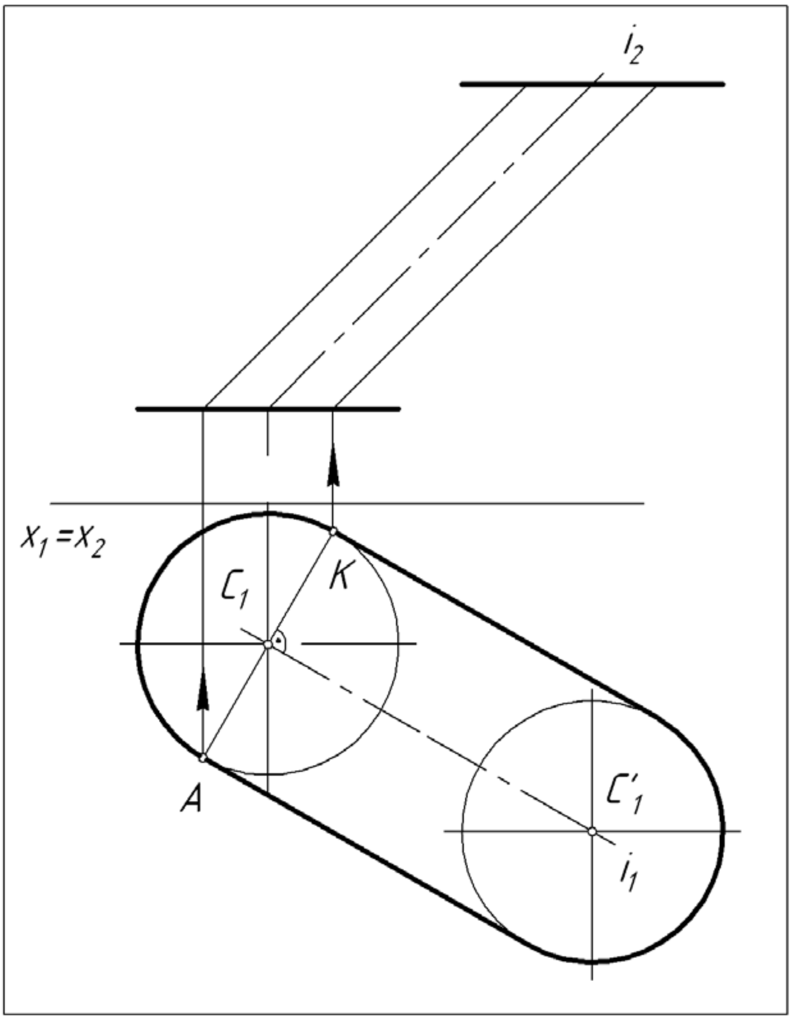


Рис.217

Фронтальные проекции построенных образующих строят по линиям связи. Построение проекций образующих, являющихся очерковыми на **$П_2$,** показано на рис.218.

В завершение следует определить на чертеже видимость оснований цилиндра (на рис.218 не определена).

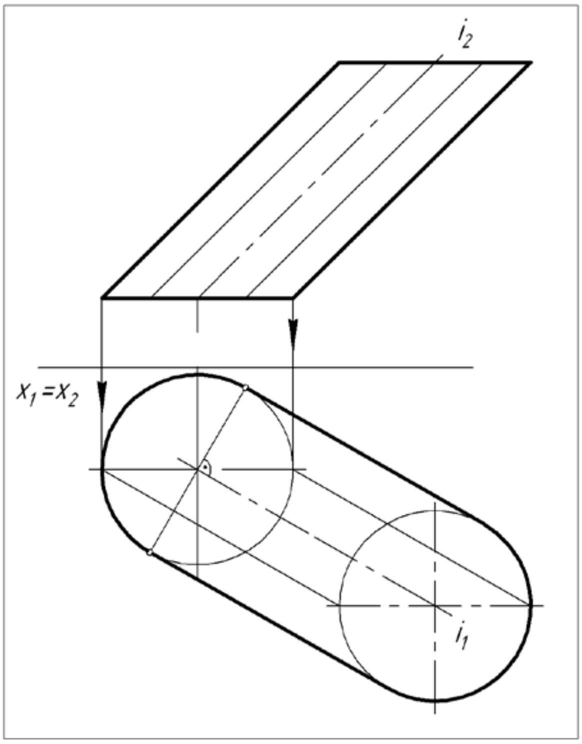


Рис.218

Задача 118. Определить взаимное положение оригиналов (рис.219).

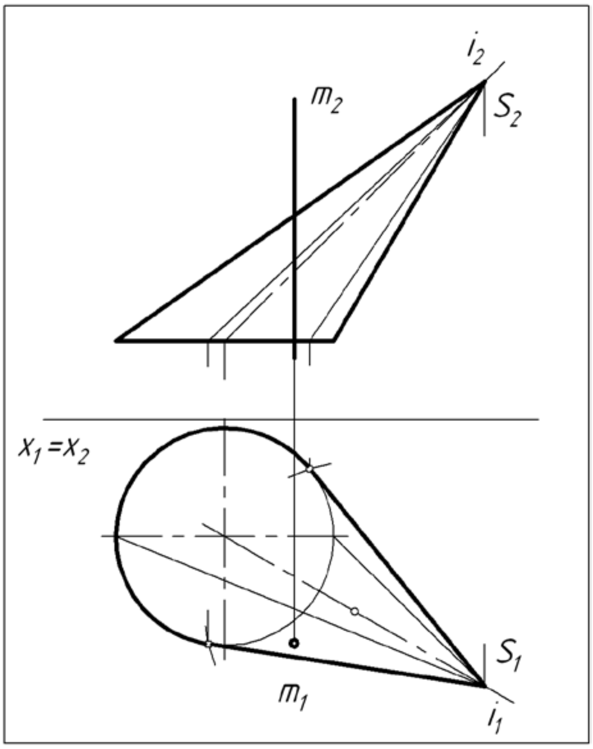


Рис.219

Задача 119. Определить взаимное положение оригиналов (рис.220).

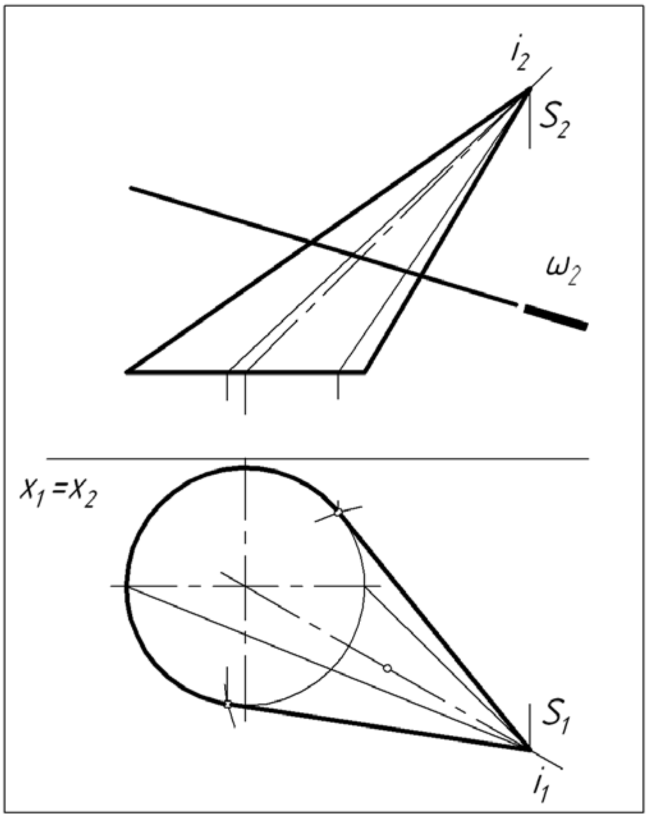


Рис.220

Задача 120. Определить вид конического сечения в каждом случае (рис.221).

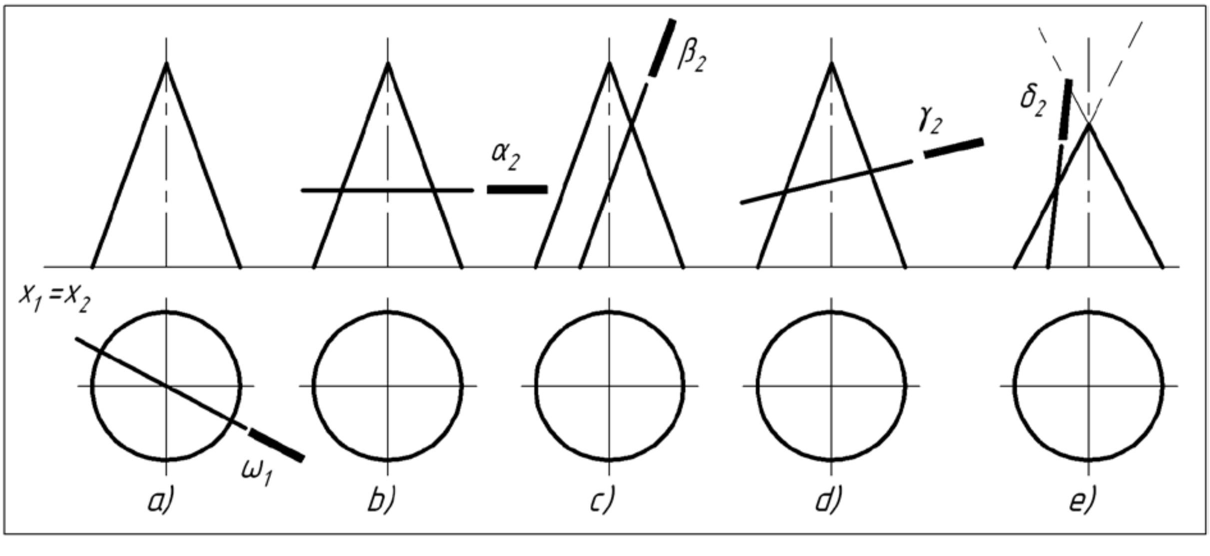


Рис.221

Задача 121. Определить взаимное положение оригиналов (рис.222).

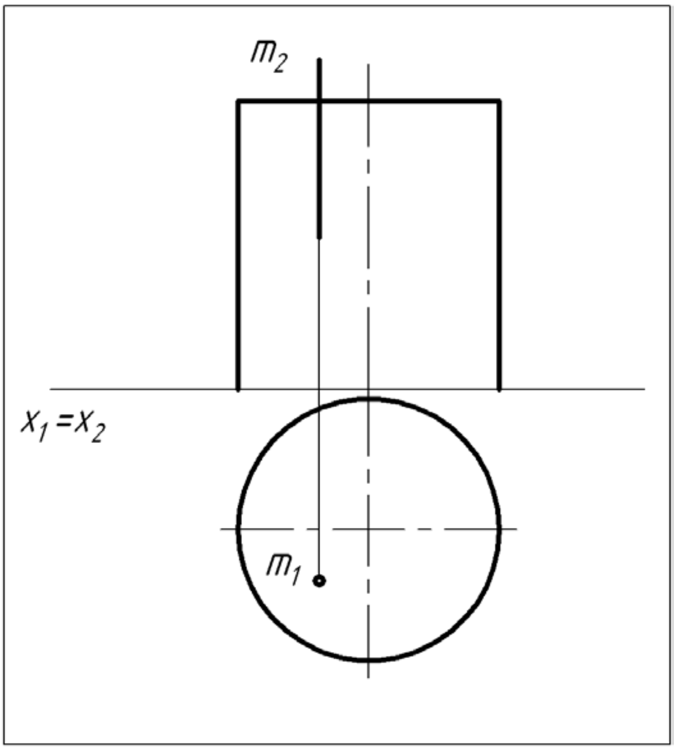


Рис.222

Задача 122. Определить взаимное положение оригиналов (рис.223).

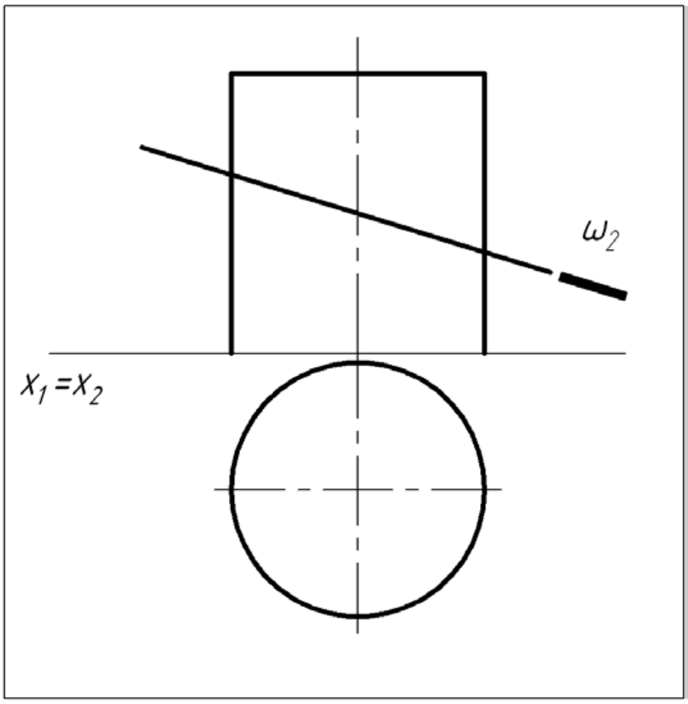


Рис.223

Задача 123. Определить взаимное положение оригиналов (рис.224).

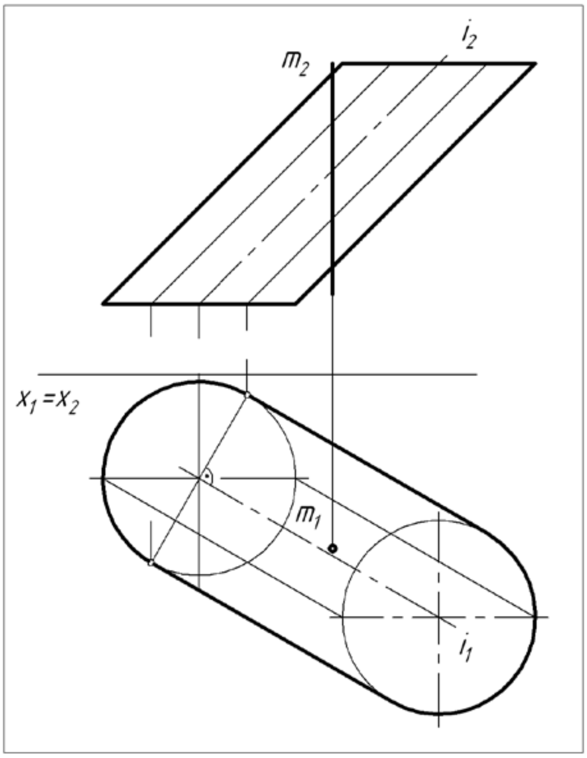


Рис.224

Задача 124. Определить взаимное положение оригиналов (рис.225).

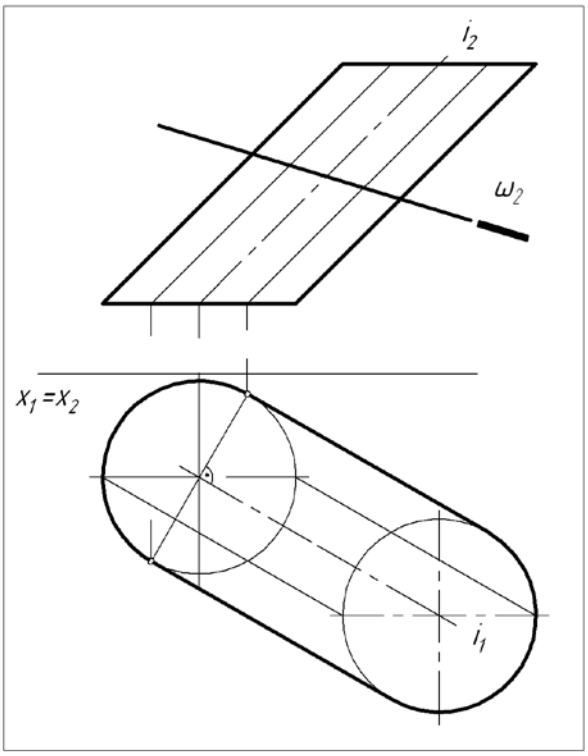


Рис.225

Задача 125. Даны три пары оригиналов (рис.226). Для определения взаимного положения конуса и прямой используется метод посредника. Плоскости-посредники заданы на чертежах своими следами. Оцените дальнейшее решение задач с точки зрения целесообразности в инженерных целях.

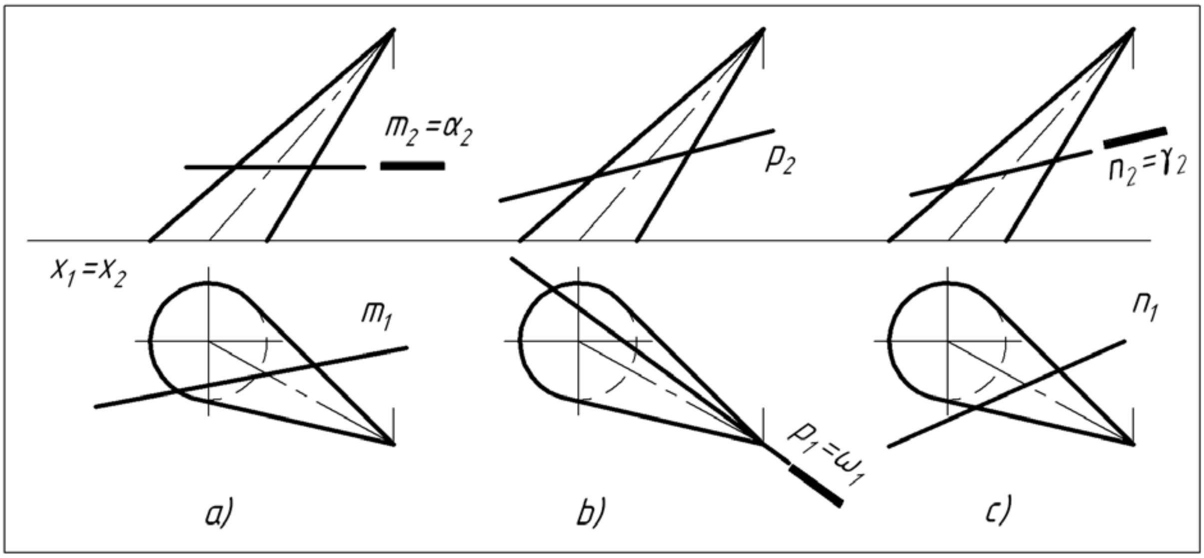


Рис.226

Пример «Пересечение прямой с поверхностью цилиндра»

Условие задачи: определить взаимное положение заданных оригиналов.

Дано: $\mathbf{\Phi}$ **цилиндр.**, $\boldsymbol{i}$ – о.п., основания || $\mathbf{П_1}$

$\boldsymbol{m}$ – о.п.

Найти: $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi}$ = ?

Варианты ответа:

1. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi} = \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{T}\}$ – если прямая пересекает поверхность в двух точках (***R*** и ***T***).
2. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi} = \boldsymbol{F}$ – если прямая касается (обозначение: $\boldsymbol{m}$ ⩍ $\mathbf{\Phi}$) поверхности цилиндра в какой-либо точке (***F***).

3. $\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{\Phi} = \varnothing$ (знак пустого множества) – если прямая и цилиндр не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

Чертёж к задаче - рис.227.

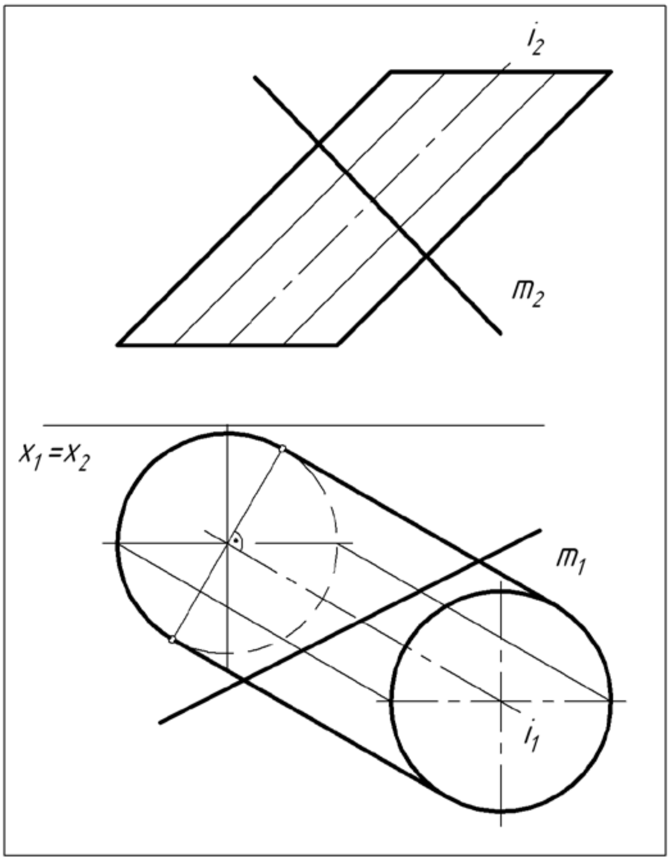


Рис.227

ПЗ III типа

Варианты решения:

1. Метод посредника

Выбор вида и положения посредника определяется условиями задачи. Критериями выбора являются рациональность решения, в том числе, в инженерных целях; простота и количество графических построений.

Рассмотрим различные варианты. Прямую $\boldsymbol{m}$ можно заключить в плоскость-посредник, занимающую как фронтально-проецирующее (рис.228 a), так и горизонтально-проецирующее (рис.228 b) положение. И в том и в другом случае в сечении цилиндра плоскостью-посредником получится эллипс. Следовательно, решение задачи не может считаться приемлемым в инженерных целях, т.к. не обойтись без построения лекальной кривой.

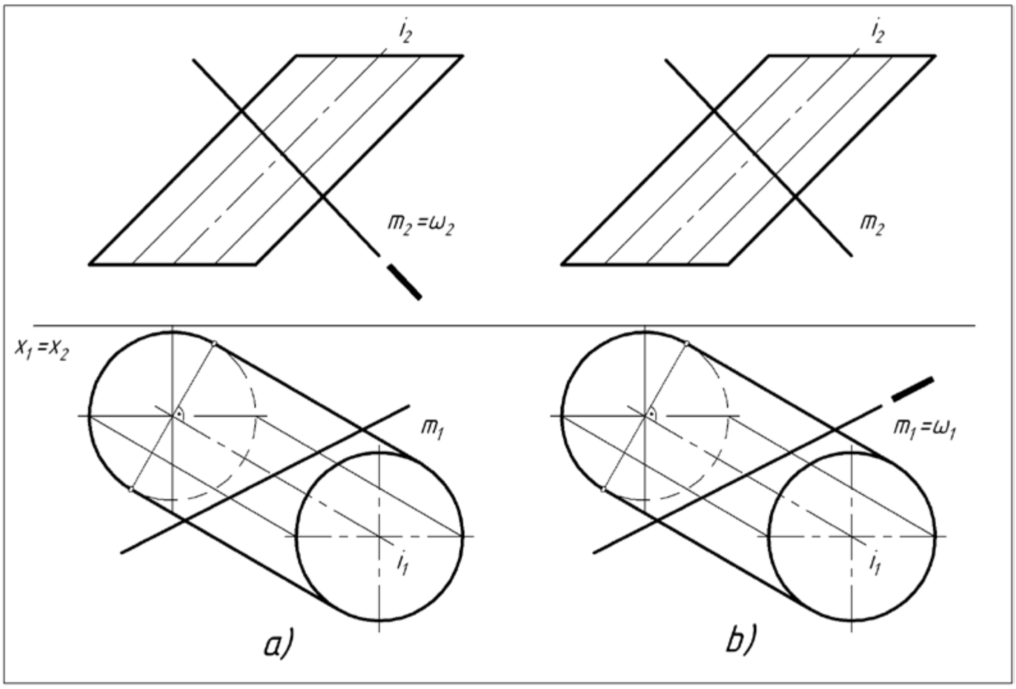


Рис.228

Необходимо выбрать такую плоскость-посредник, чтобы при пересечении её с цилиндром получились окружность или четырёхугольник.

Очевидно, что в данном случае нельзя получить в сечении окружность, т.к. прямая $\boldsymbol{m}$ занимает общее положение.

Четырехугольник в сечении цилиндра можно получить в том случае, когда секущая плоскость параллельна оси поверхности.

Заключим прямую $\boldsymbol{m}$ в плоскость, параллельную оси цилиндра $\boldsymbol{i}$. Такая плоскость занимает общее положение по отношению к плоскостям проекций (рис.229).

$\boldsymbol{m \subset \beta}$**,** $\boldsymbol{\beta\ (m \cap n)}$**,** $\boldsymbol{n \parallel i}$**,** $\boldsymbol{\beta}$ **- о.п.**

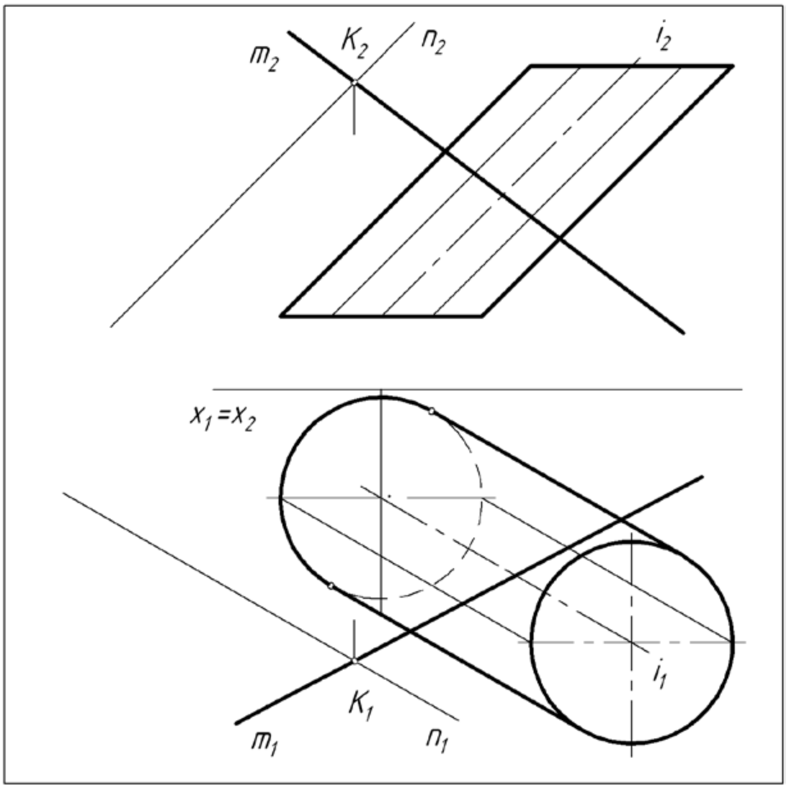


Рис.229

Плоскость-посредник задается двумя пересекающимися прямыми, одна из которых - данная прямая ***m***, другая – произвольная прямая, параллельная оси цилиндра ($n_2 \parallel i_2$, $n_1 \parallel i_1$). Прямые ***m*** и ***n*** пересекаются в точке ***K***. Проекции точки ***K*** лежат на одной линии связи.

В сечении цилиндра плоскостью **β**, будет четырёхугольник. Вершины его инцидентны основаниям цилиндра. Для нахождения проекций вершин следует построить линию пересечения плоскости-посредника **β** и плоскости **ω**, которой инцидентно нижнее основание цилиндра (рис.230).

Эта задача на пересечение двух плоскостей относится к II типу, так как плоскость **ω** является горизонтальной плоскостью уровня и занимает проецирующее положение по отношению к $\mathbf{\Pi_2}$.

Одна из проекций линии пересечения ***p*** совпадает со следом плоскости **ω**, а вторую проекцию строят с помощью линий связи по двум точкам ***D*** и ***F***, инцидентным прямым ***n*** и ***m*** соответственно.

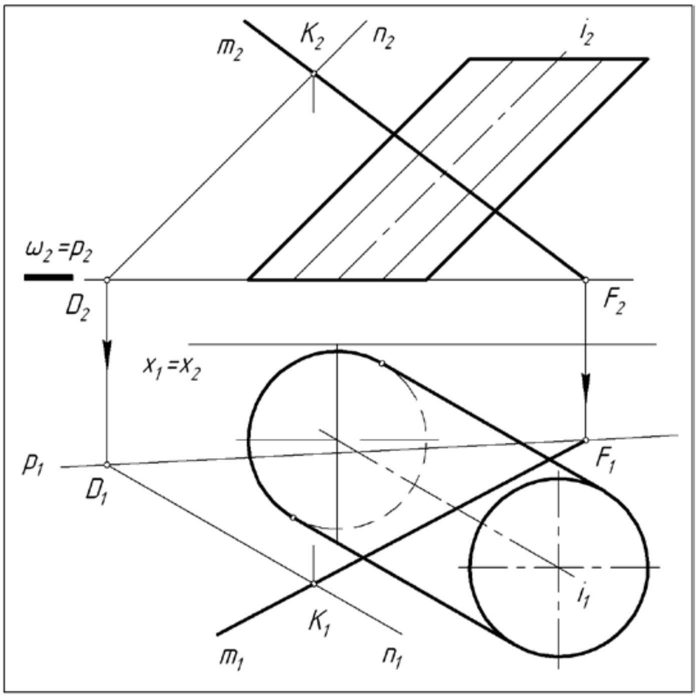


Рис.230

Пересечение прямой $\boldsymbol{p}$ с окружностью основания определяет положение вершин $\boldsymbol{A}$ и **В** четырёхугольника сечения (рис.231).

Вершины $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{B'}$ инцидентны верхнему основанию. Стороны четырёхугольника $\boldsymbol{AA'}$ и $\boldsymbol{BB'}$ параллельны оси поверхности.

$\boldsymbol{\omega \cap \Phi = ABB'A'}$

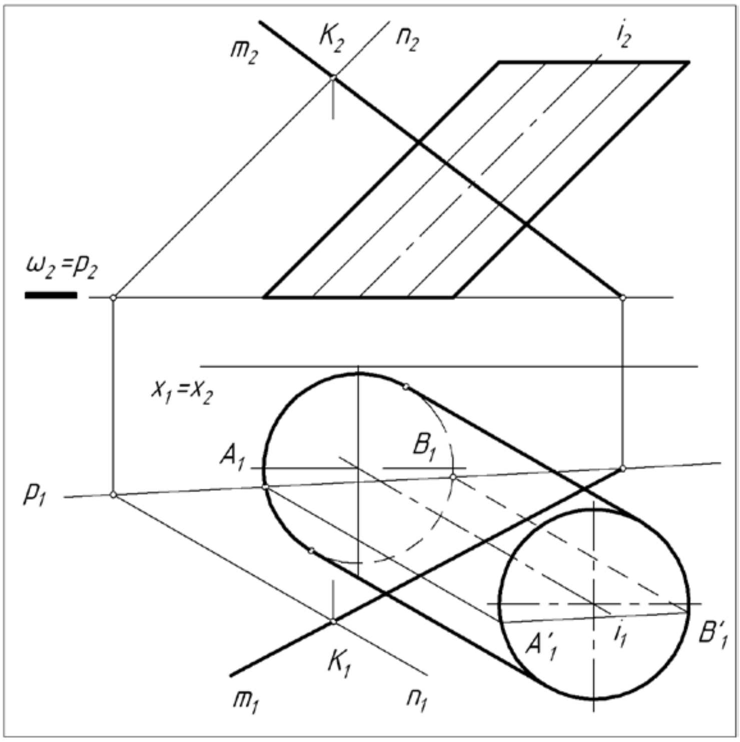


Рис.231

Прямая $\boldsymbol{m}$ и четырёхугольник $\boldsymbol{ABB'A'}$ пересекаются в двух точках (рис.232). Эти точки – $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{T}$ – являются точками пересечения прямой с поверхностью цилиндра.

$\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{ABB'A'} = \boldsymbol{R}$ **и** $\boldsymbol{T}$

Ответ: $\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{R}$ **и** $\boldsymbol{T}$

Положение точек пересечения прямой с поверхностью определено достаточно точно, так как в ходе решения не использовались лекальные кривые.

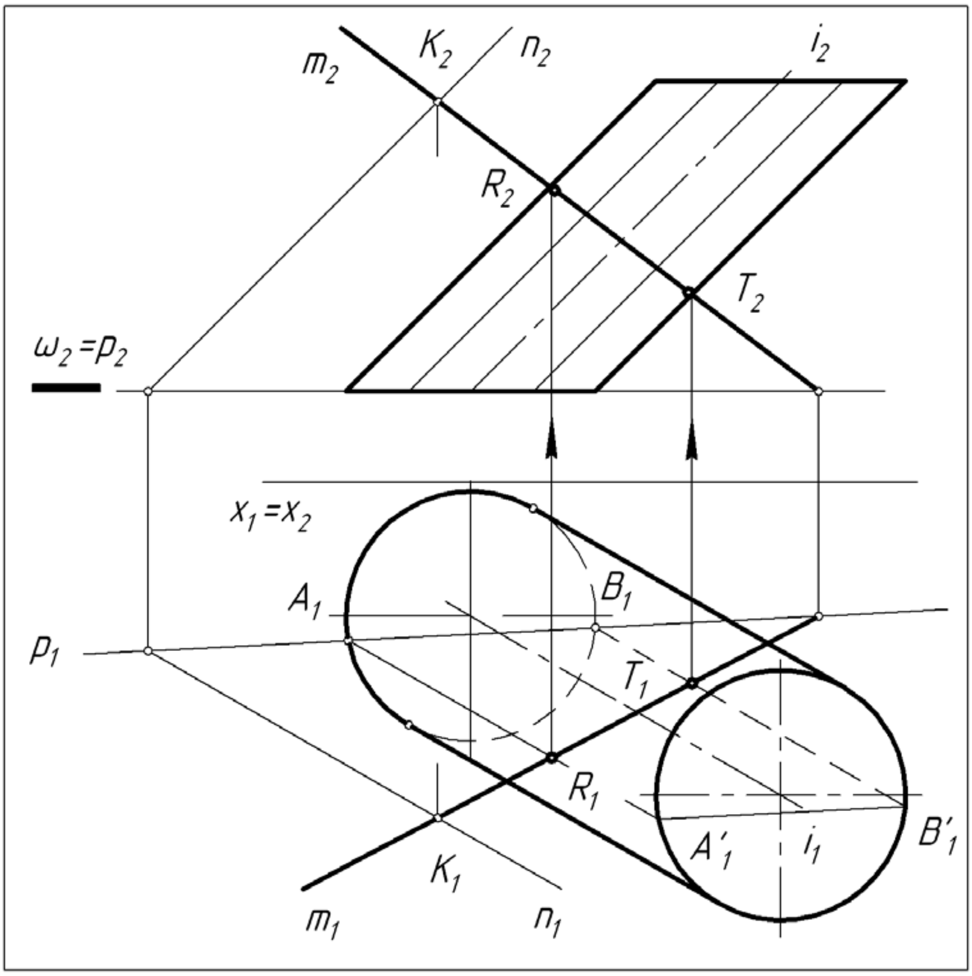


Рис.232

На заключительном этапе решения задачи следует определить видимость прямой $\boldsymbol{m}$ по отношению к непрозрачному цилиндру.

На рис.233 и 234 показано определение видимости прямой способом конкурирующих точек на горизонтальной проекции.

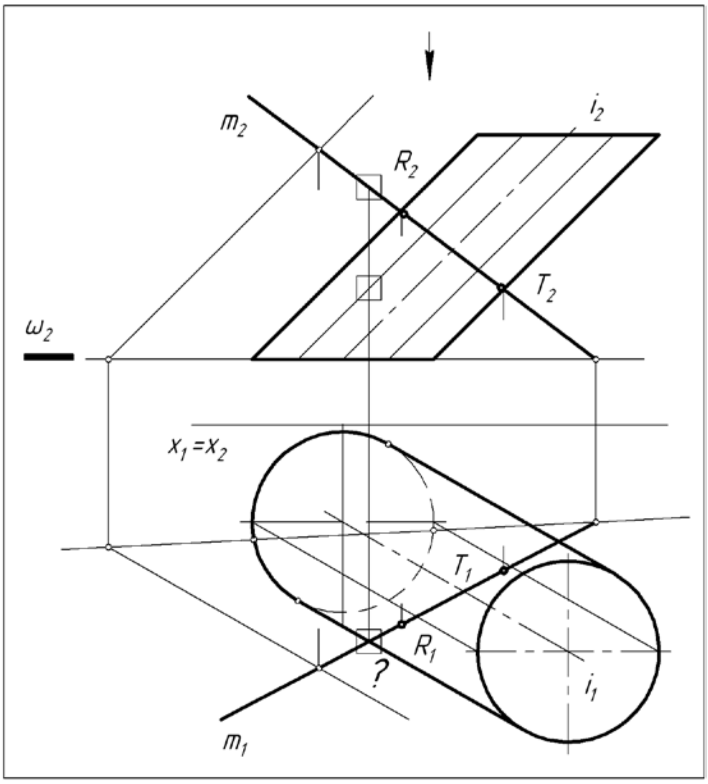


Рис.233

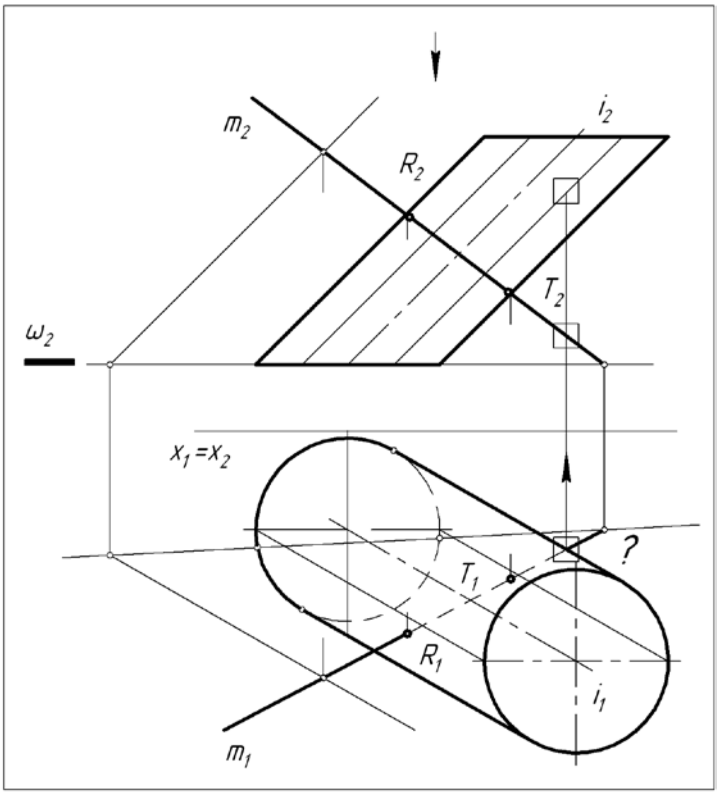


Рис.234

Окончательный вид решённой задачи, с определённой видимостью прямой на фронтальной проекции показан на рис.235.

Под римскими цифрами I и II показаны выносные элементы. Они необходимы для полного показа видимости, так как точки ***R*** и ***T*** оказались расположены очень близко к фронтальным очерковым образующим цилиндра.

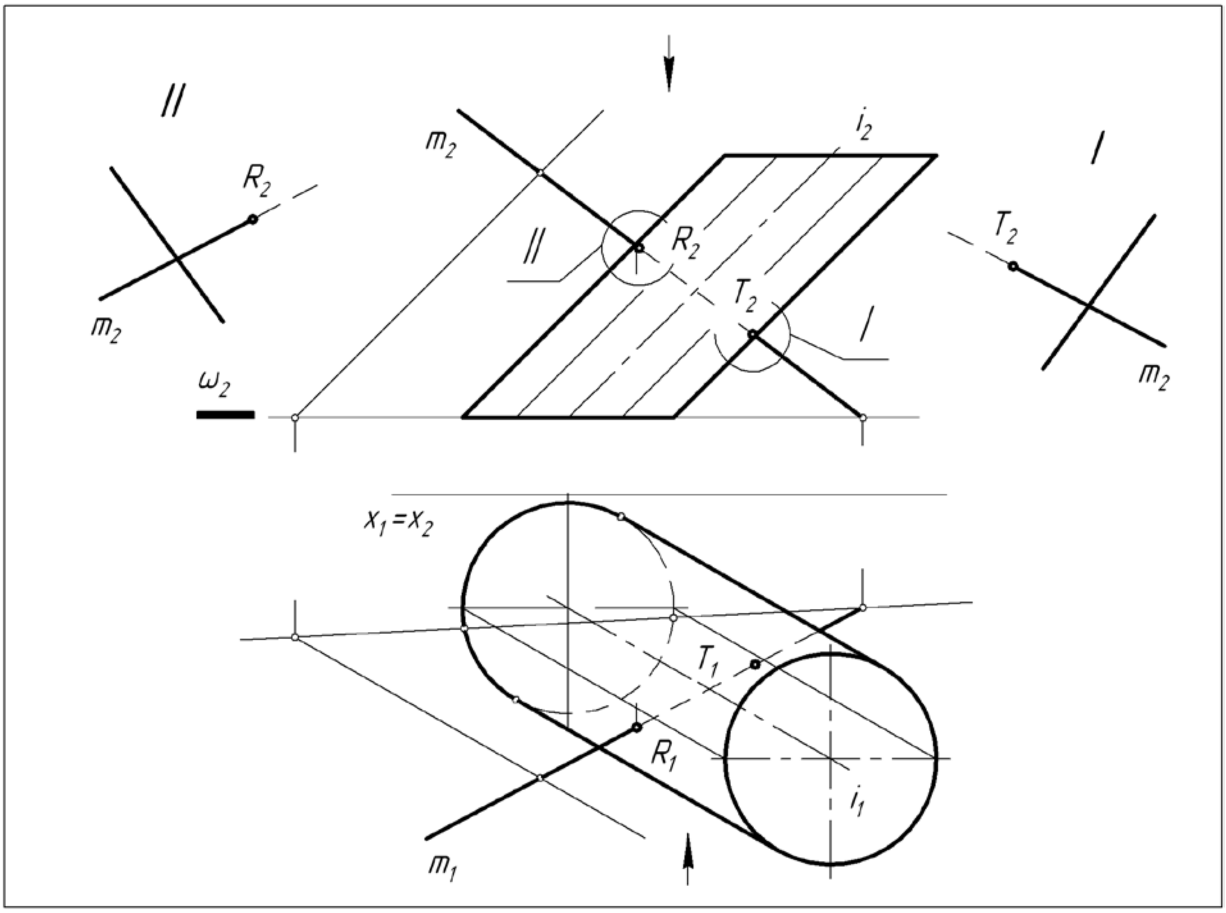


Рис.235

При решении задач на определение взаимного положения прямой и конической поверхности рациональнее выбирать плоскость-посредник, чтобы в сечении конуса получались либо окружность, либо треугольник, избегая, таким образом, построения лекальных кривых.

Пример «Пересечение прямой с поверхностью конуса»

Условие задачи: определить взаимное положение заданных оригиналов.

Дано: $\mathbf{\Phi}_{\text{конич.}}$, $\boldsymbol{i}$ – о.п., основание || $\mathbf{П}_1$

$\boldsymbol{m}$ – о.п.

Найти: $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi}_{\text{конич.}}$ = ?

Варианты ответа:

1. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi}_{\text{конич.}} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ – если прямая пересекает поверхность в двух точках (***A*** и ***B***).

2. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi}_{\text{конич.}} = \boldsymbol{K}$ – если прямая касается (обозначение: $\boldsymbol{m}$ ⍝ $\mathbf{\Phi}$) поверхности конуса в какой-либо точке (***K***).

3. $\boldsymbol{m} \cap \mathbf{\Phi}_{\text{конич.}} = \varnothing$ (знак пустого множества) – если прямая и конус не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

Чертёж к задаче: - рис.236.

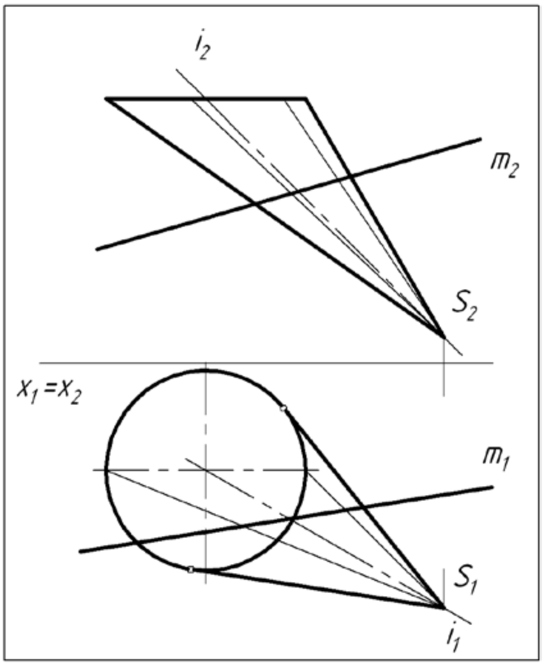


Рис.236

ПЗ III типа

Варианты решения:

1. Метод посредника

2. Вспомогательное проецирование

С помощью вспомогательного проецирования получают вырожденные проекции оригиналов (для прямой – точку, для плоскости – прямую и т.д.). Работа с вырожденными проекциями оригиналов делает графическое решение задачи проще и точнее.

Вспомогательное проецирование бывает центральным и параллельным. Если в задаче участвуют конус или пирамида, вспомогательные проекции будут центральными, а центр проецирования будет инцидентен вершине конуса или пирамиды. Если в задаче участвуют призма или цилиндр, то следует применить параллельное проецирование. Направление проецирования в этом случае должно быть параллельно рёбрам призмы или оси цилиндра соответственно. В этих случаях можно получить вырожденные проекции поверхностей на плоскостях оснований.

В рассматриваемом примере перейдём от ортогонального проецирования на $\mathbf{П_2}$ и $\mathbf{П_1}$ к центральному. Плоскость вспомогательных проекций совместим с плоскостью основания конуса (рис.237).

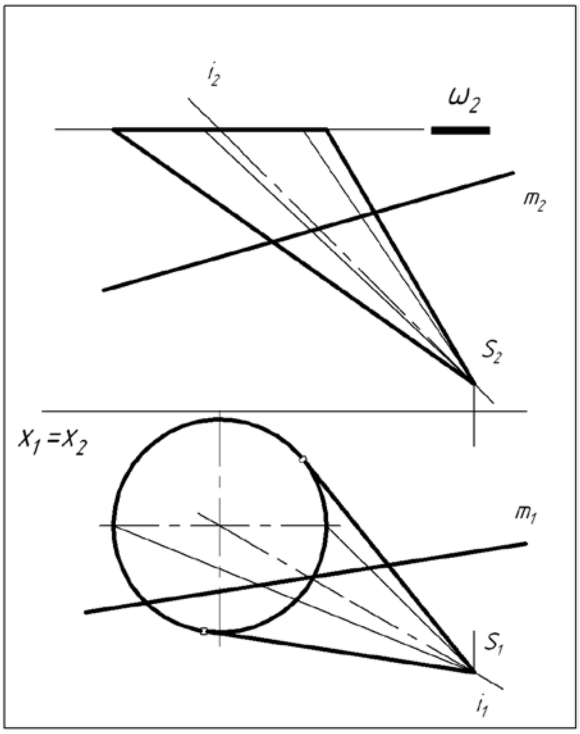


Рис.237

ОП (ортогональное проецирование) $\rightarrow$ **ЦП** (центральное проецирование);

центр проецирования – точка $\boldsymbol{S}$;

$\mathbf{\Pi'}$ (плоскость проекций) $\subset \boldsymbol{\omega}$ (плоскость основания конуса).

Вспомогательная проекция конуса на новую плоскость проекций будет представлять собой окружность. Т.к. основание конуса в данной задаче параллельно $\mathbf{\Pi_1}$, то новая проекция поверхности совпадёт с окружностью - горизонтальной проекцией основания (рис.238).

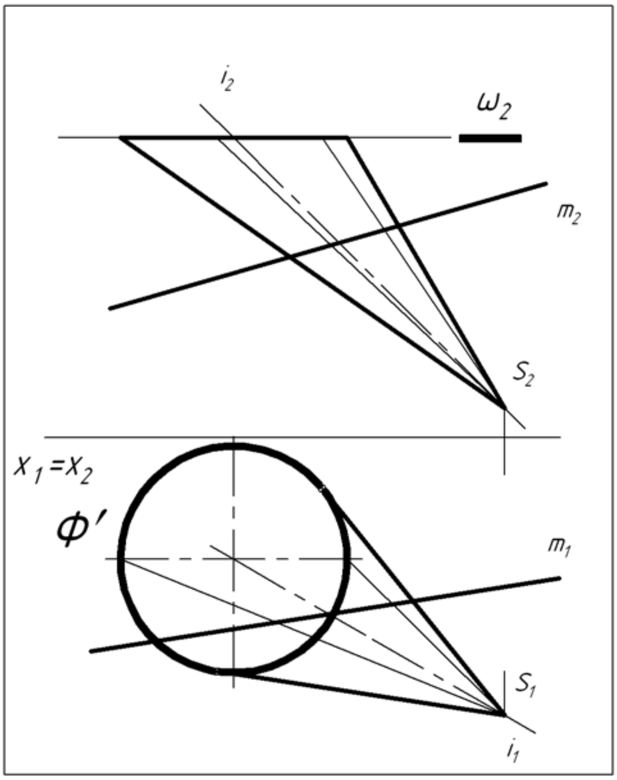


Рис.238

Далее следует построить вспомогательную центральную проекцию прямой. Для этого зададим на прямой две произвольные точки своими фронтальными и горизонтальными проекциями (рис.239).

Для более компактного решения рекомендуется задавать фронтальные проекции точек достаточно близко к очерковым образующим.

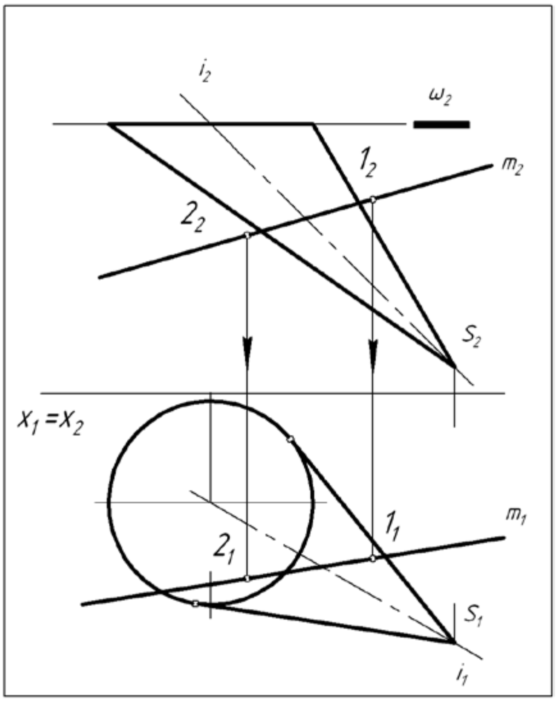


Рис.239

Для получения центральной проекции точки ***1*** проведём через неё проецирующий луч (***S₂1₂ S₁1₁***) из центра проецирования – точки ***S*** – до пересечения с плоскостью проекций - **ω** (рис.240). ***1′*** - центральная проекция точки ***1*** найдена на горизонтальной проекции луча ***S₁1₁*** с помощью линии связи.

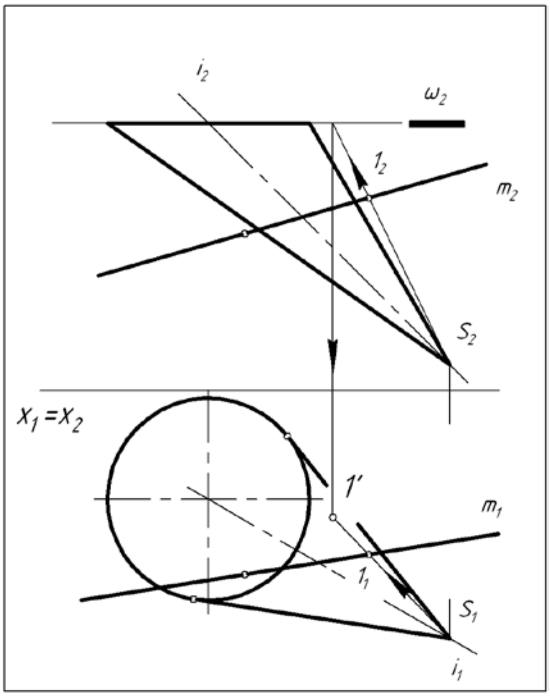


Рис.240

Центральная проекция точки ***2*** получена аналогично (рис.241).

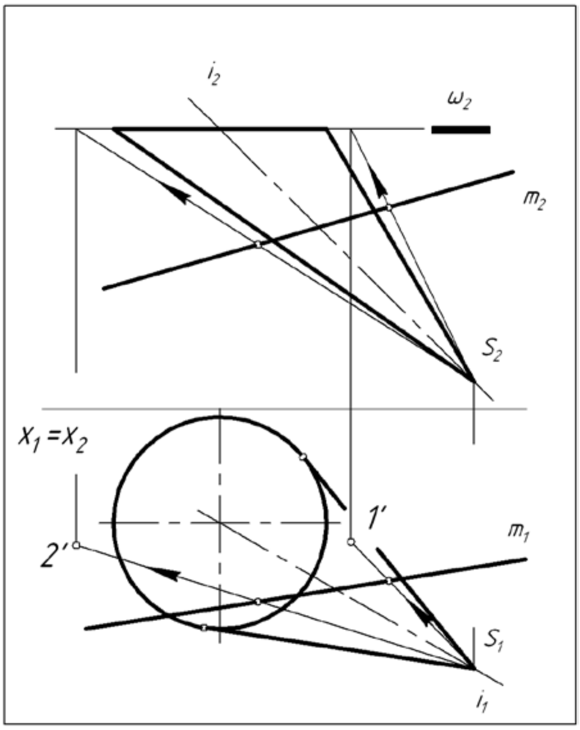


Рис.241

На рис.242 показаны центральные проекции конуса - ***Ф′*** и прямой - ***m′***.

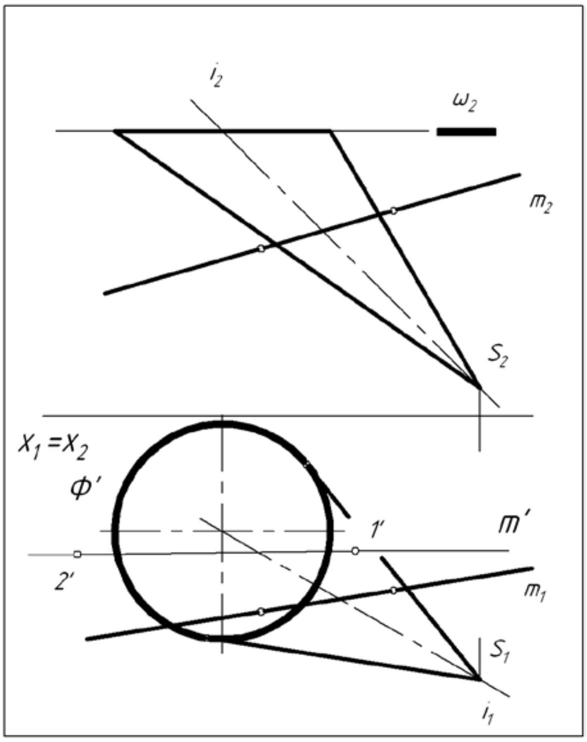


Рис.242

Анализируя чертёж, можно сделать вывод, что прямая пересекает конус в двух точках. На рис.243 определены центральные проекции точек пересечения и показано нахождение их горизонтальных проекций способом «обратного луча».

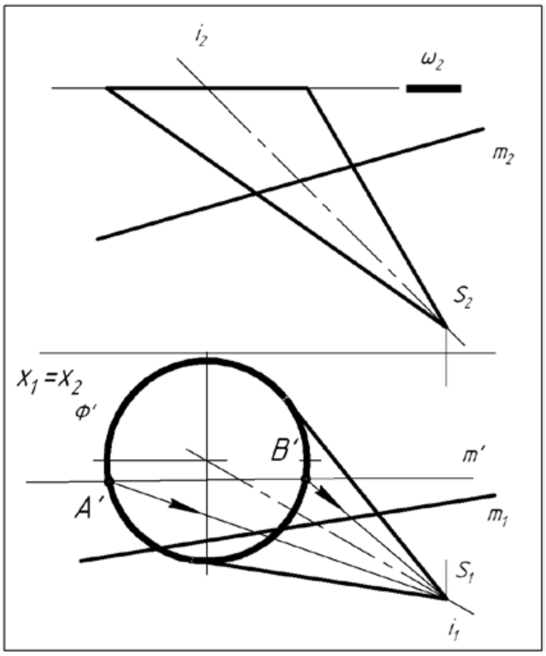


Рис.243

Фронтальные проекции точек пересечения – ***A*** и ***B*** – находят с помощью линий связи (рис.244).

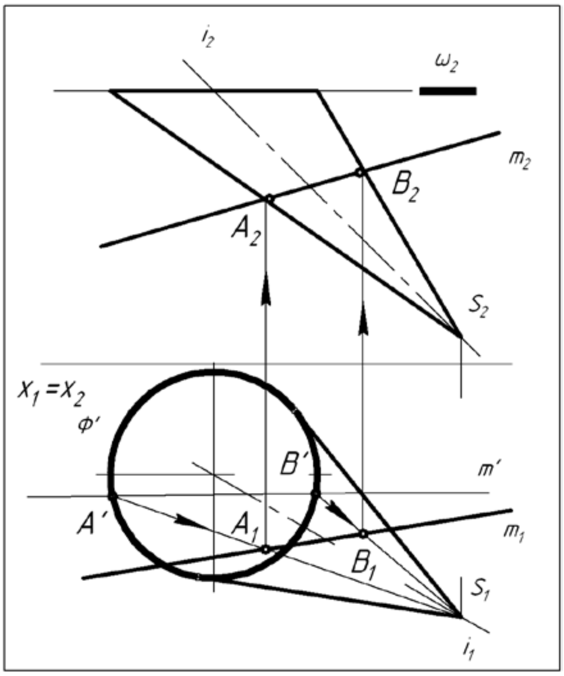


Рис.244

На заключительном этапе решения задачи следует определить видимость прямой ***m*** по отношению к непрозрачному конусу. На рис.245 и 246 показано определение видимости прямой способом конкурирующих точек на горизонтальной проекции.

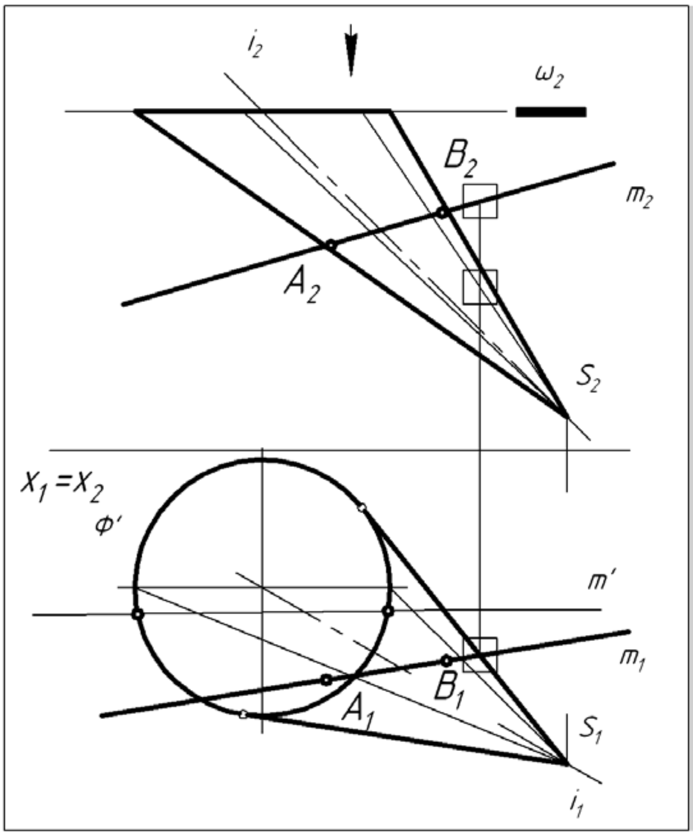


Рис.245

Окончательный вид решённой задачи, с определённой видимостью прямой на фронтальной проекции показан на рис.247.

Ответ: $\boldsymbol{m \cap \Phi = \{A, B\}}$.

Использование вспомогательных проекций в ряде задач позволяет получать графические решения, удовлетворительные с точки зрения инженерной целесообразности, так как не требует построения лекальных кривых.

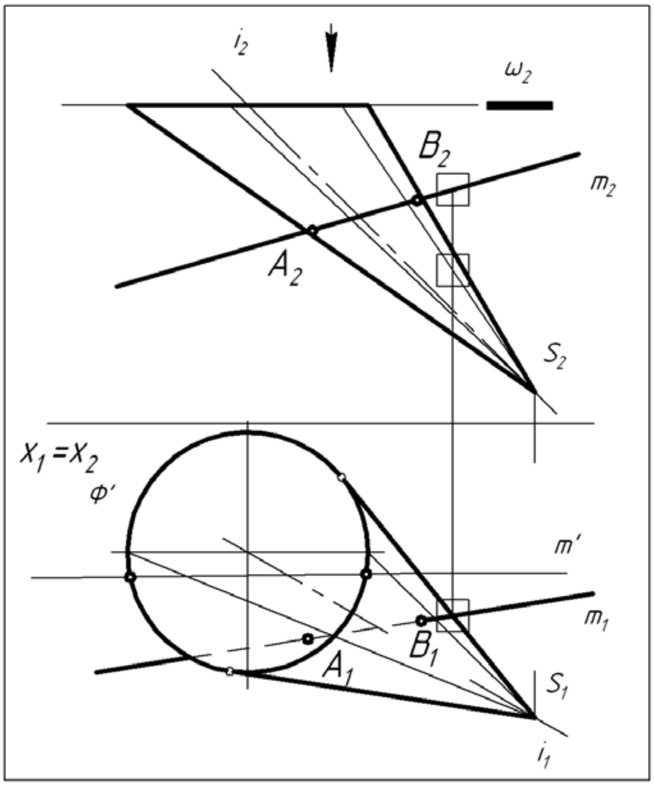


Рис.246

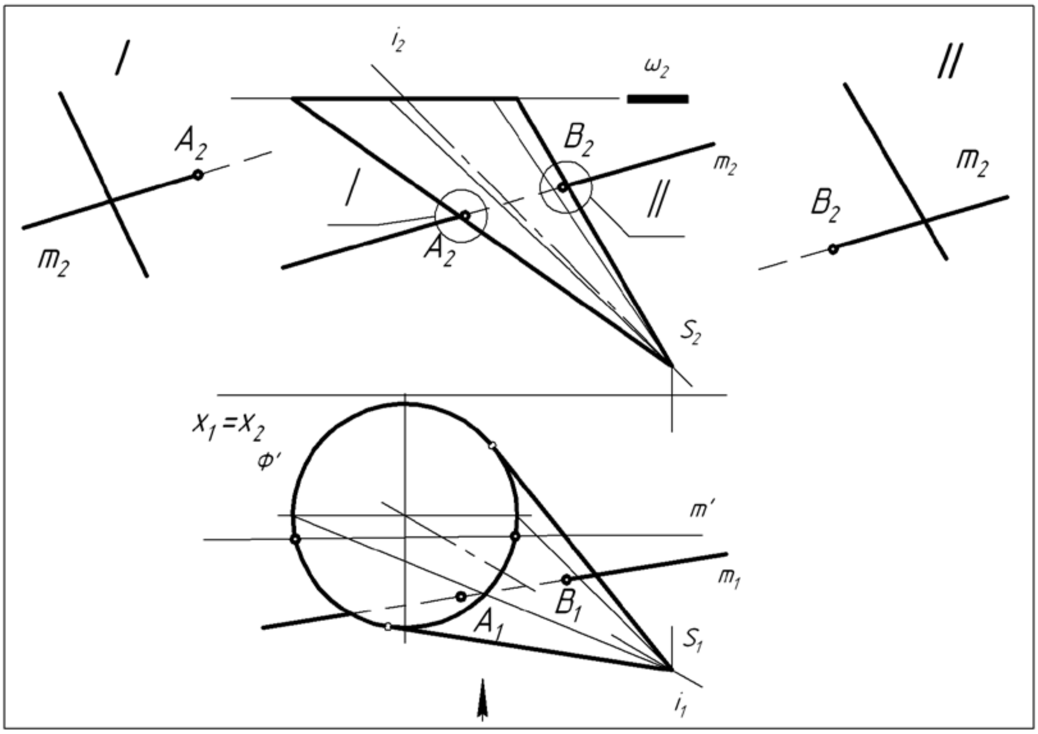


Рис.247

Задача 126. Определить взаимное положение оригиналов (рис.248).

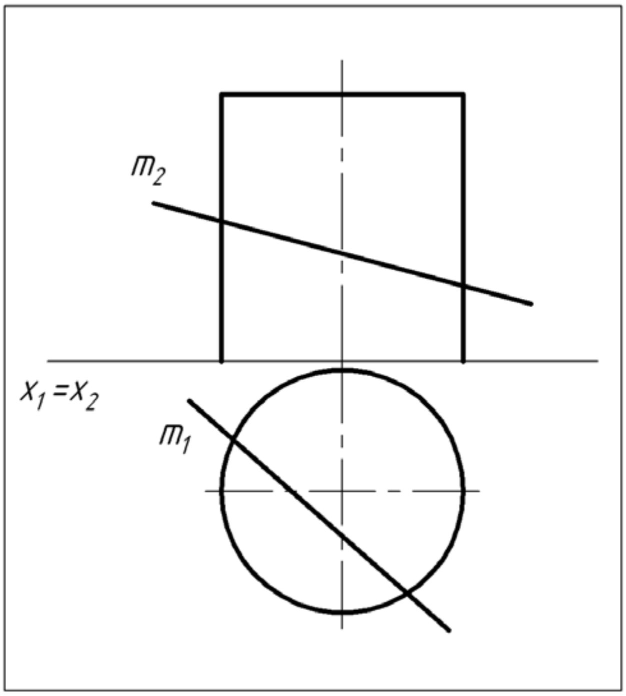


Рис.248

Задача 127. Определить взаимное положение оригиналов (рис.249).

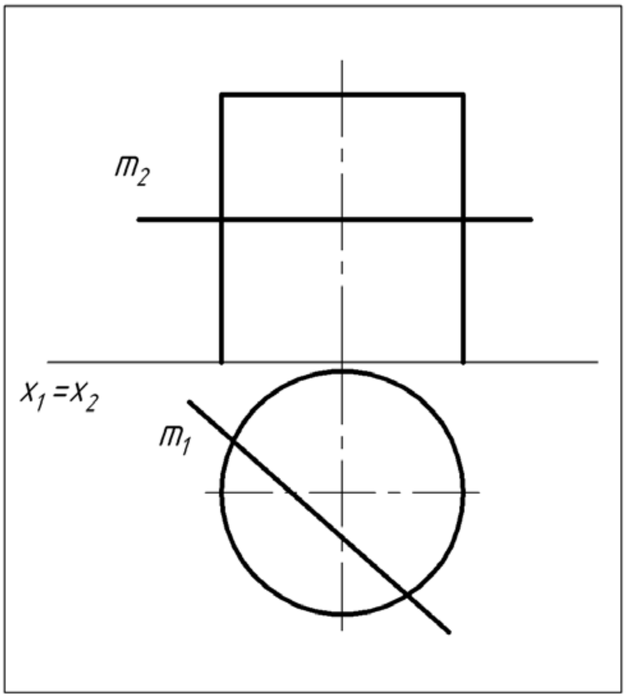


Рис.249

Задача 128. Определить взаимное положение оригиналов (рис.250).

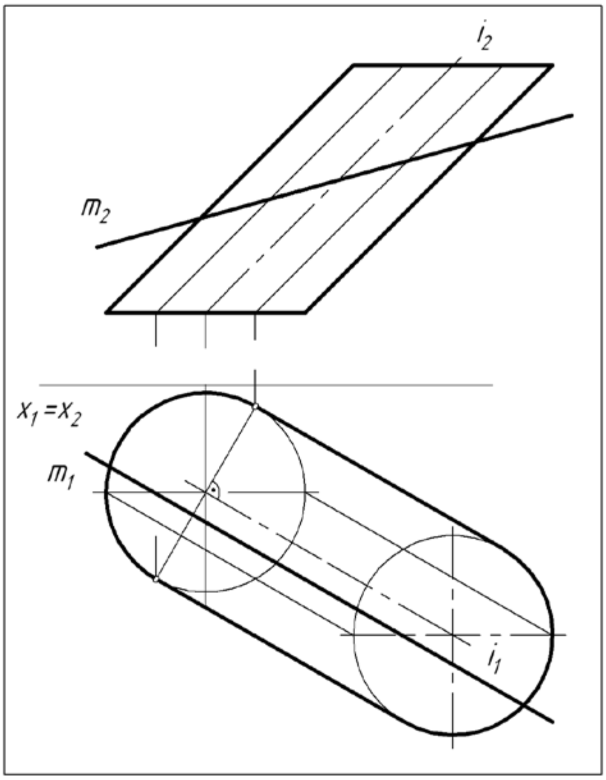


Рис.250

Задача 129. Определить взаимное положение оригиналов (рис.251).

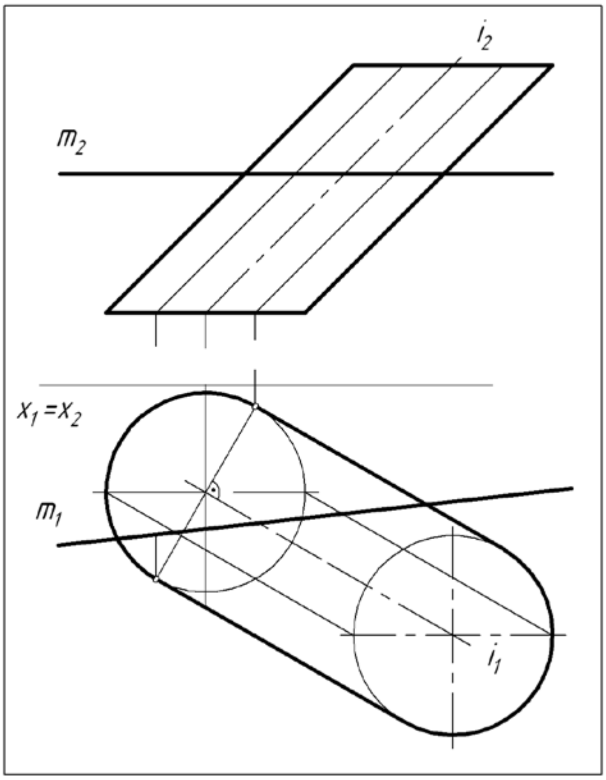


Рис.251

Задача 130. Определить взаимное положение оригиналов (рис.252).

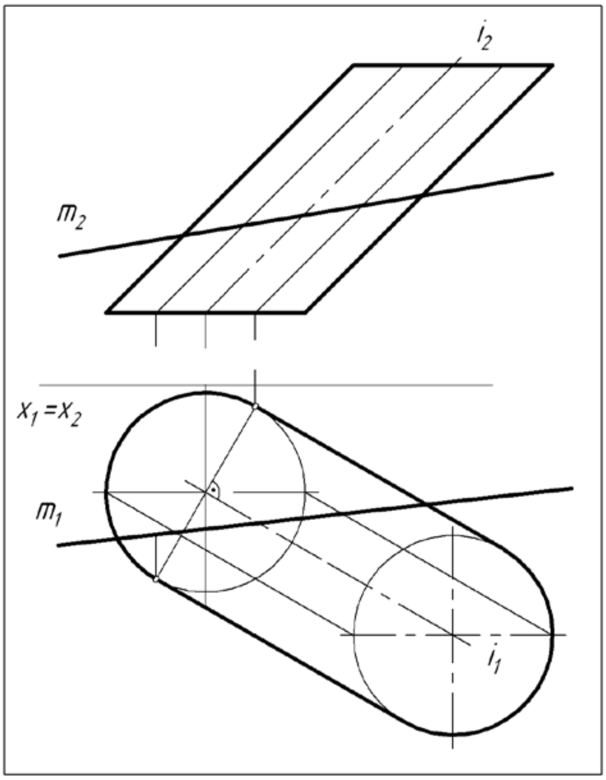


Рис.252

Задача 131. Определить взаимное положение оригиналов (рис.253).

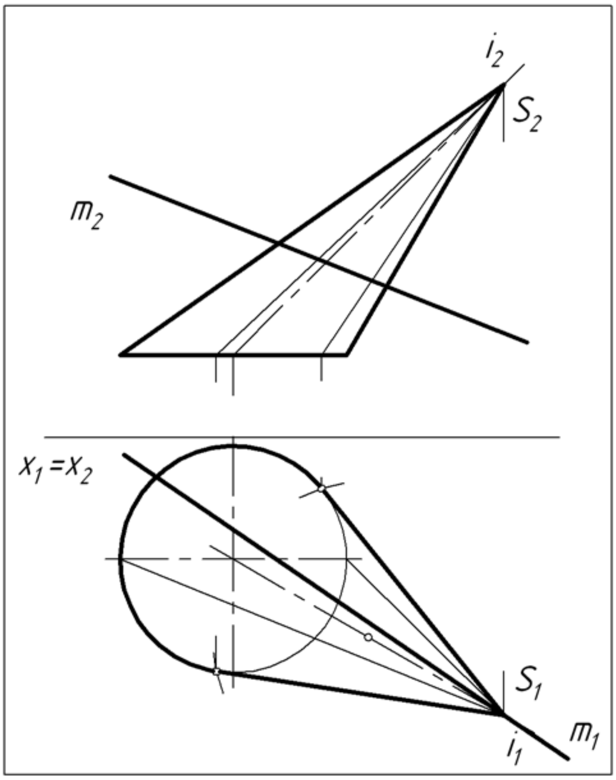


Рис.253

Задача 132. Определить взаимное положение оригиналов (рис.254).

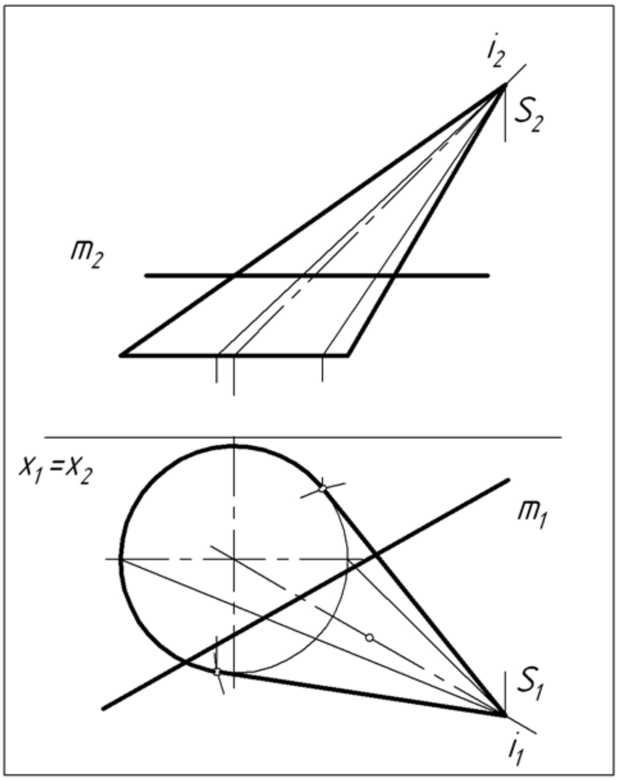


Рис.254

Задача 133. Определить взаимное положение оригиналов (рис.255).

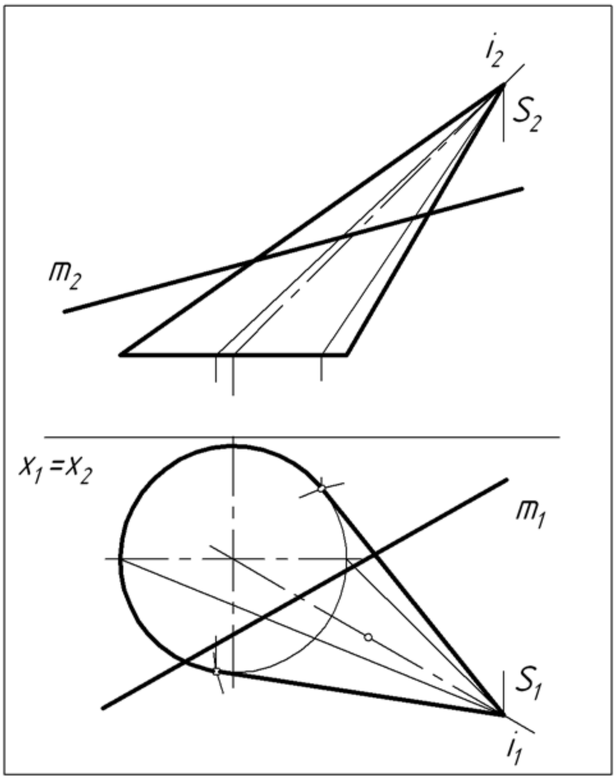


Рис.255

Задача 134. Определить взаимное положение оригиналов (рис.256).

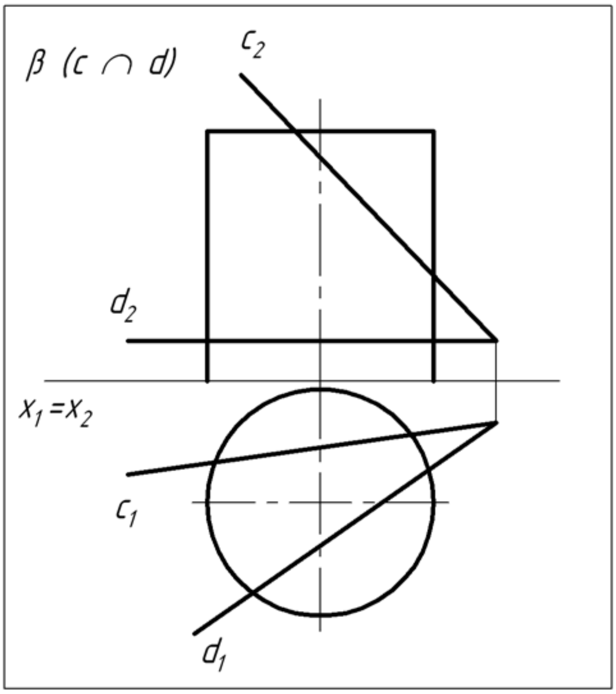


Рис.256

Задача 135. Определить взаимное положение оригиналов (рис.257).

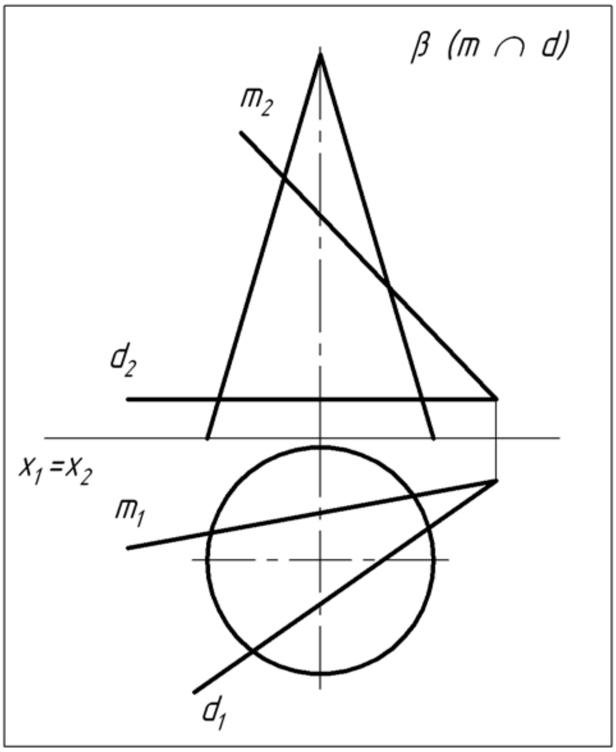


Рис.257

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Виды метрических задач

Метрическими называют задачи, связанные с нахождением истинных величин оригиналов. Например, расстояний и углов. При решении метрических задач важно определить искомые элементы. Если в ходе решения задачи необходимо преобразование проекций, то следует выбрать наиболее рациональный способ преобразования с точки зрения простоты построений и наглядности чертежа.

ЗАДАЧИ

Нахождение расстояний

Пример «Нахождение истинной величины отрезка способом прямоугольного треугольника»

Условие задачи: Определить истинную величину отрезка **AB**, занимающего общее положение по отношению к плоскостям проекций.

Дано: [AB] **– о.п.**

Найти: **|** AB **|,** [AB] **|| П′**

Чертёж к задаче: рис.258.

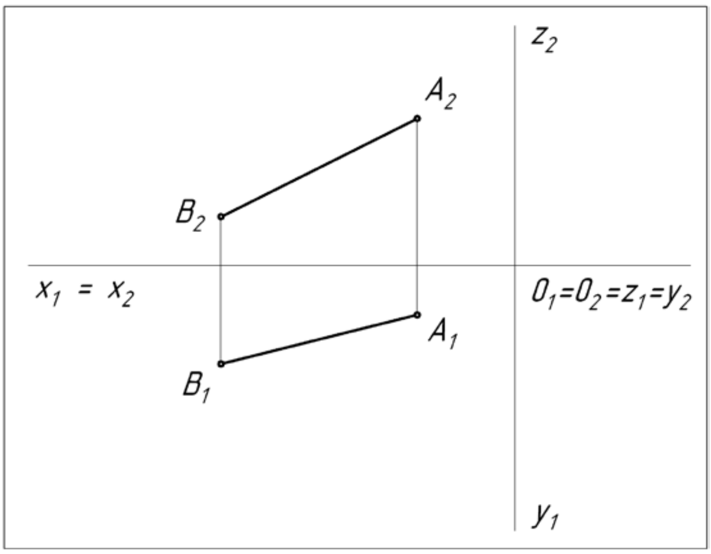


Рис.258

Задача на нахождение расстояний

Варианты решения:

1. Преобразование проекций

   Цель: [***AB***] – о.п. $\rightarrow$ [***AB***] || **П′**

   Способы:

   замена плоскостей проекций (ЗПП) – 1 преобразование;

   плоскопараллельный перенос (ППП) – 1 преобразование;

   вращение вокруг проецирующей прямой (ВрПр) –
   1 преобразование.

2. Способ прямоугольного треугольника.

Использование этого способа позволяет найти на чертеже истинную величину отрезка, не прибегая к преобразованию проекций. Спроецируем ортогонально отрезок ***CD*** на плоскость **П′** (рис.259).

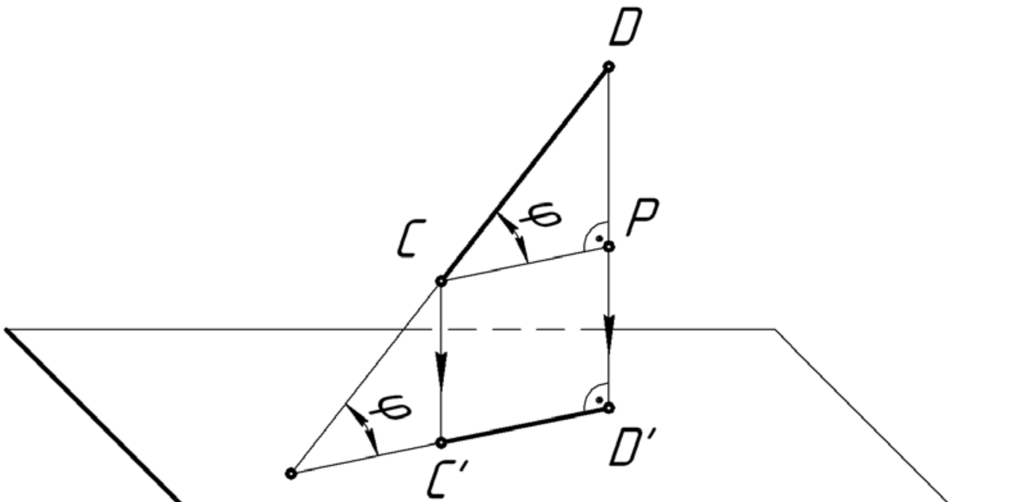


Рис. 259

Образовался прямоугольный треугольник ***CDP***, в котором сам отрезок ***CD*** является гипотенузой. Один из катетов – ***CP*** – равен по величине проекции отрезка $\boldsymbol{C'D'}$. Другой катет – $\boldsymbol{DP}$ – равен по величине разности расстояний до плоскости $\boldsymbol{\Pi'}$ точек $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$.

Таким образом, сущность способа прямоугольного треугольника состоит в следующем: *для нахождения истинной величины отрезка на чертеже необходимо построить прямоугольный треугольник, в котором один из катетов - любая из проекций отрезка, длина другого катета равна разности расстояний точек - концов отрезка - от плоскости проекций, а истинная величина равна длине гипотенузы.*

Одновременно можно определить $\boldsymbol{\varphi}$ - угол наклона отрезка прямой $\boldsymbol{CD}$ к плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi'}$.

На рис.260 в качестве одного из катетов взята фронтальная проекция отрезка $\boldsymbol{MN}$.

Следовательно, необходимо найти разность расстояний точек $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ от фронтальной плоскости проекций, то есть сравнить их координаты по оси $\boldsymbol{0y}$.

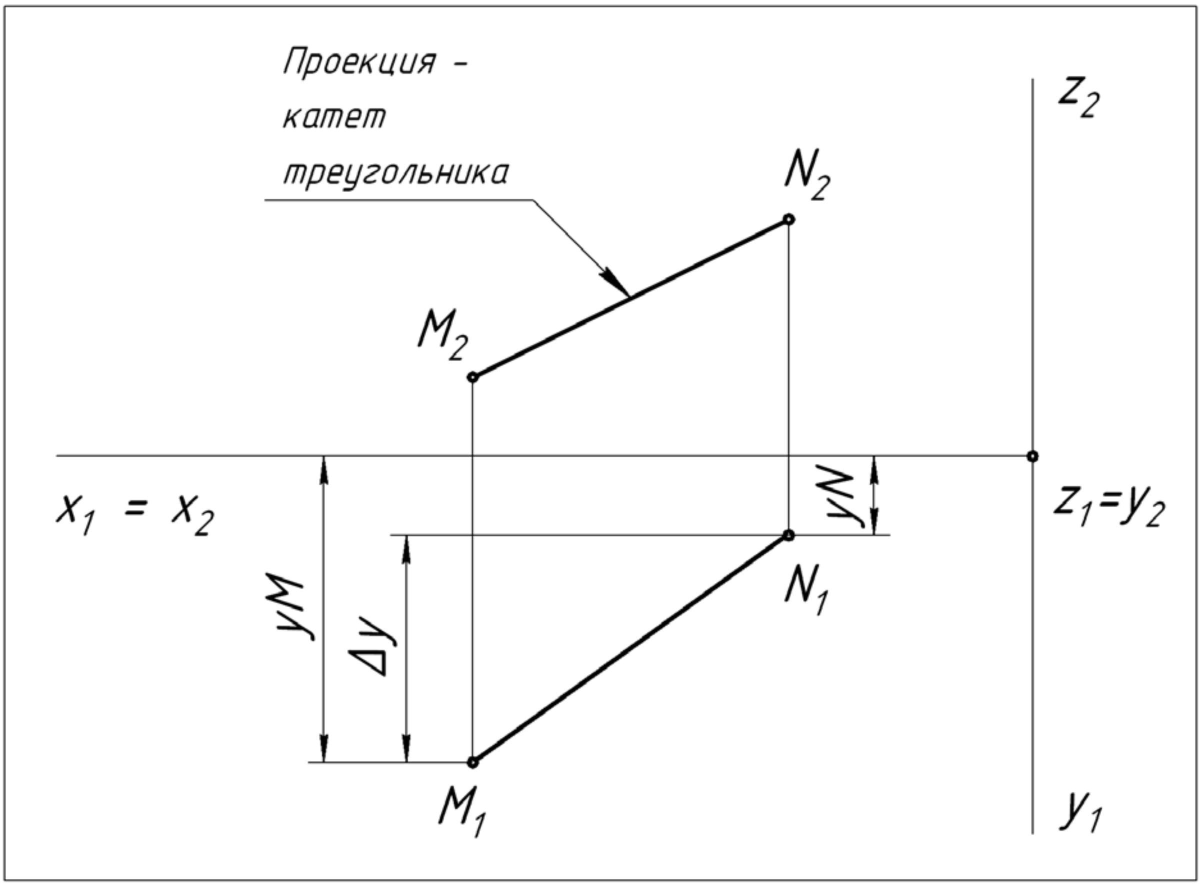


Рис.260

Достроив на фронтальной проекции прямоугольный треугольник, определим истинную величину отрезка ***MN*** (рис.261).

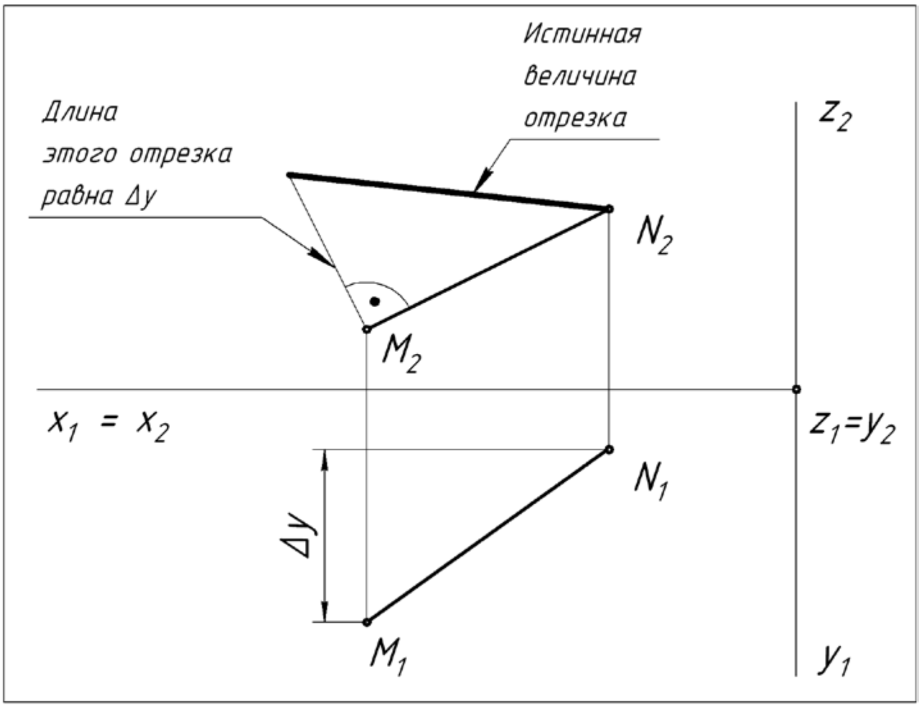


Рис.261

На рис.262 показано построение прямоугольного треугольника на горизонтальной проекции.

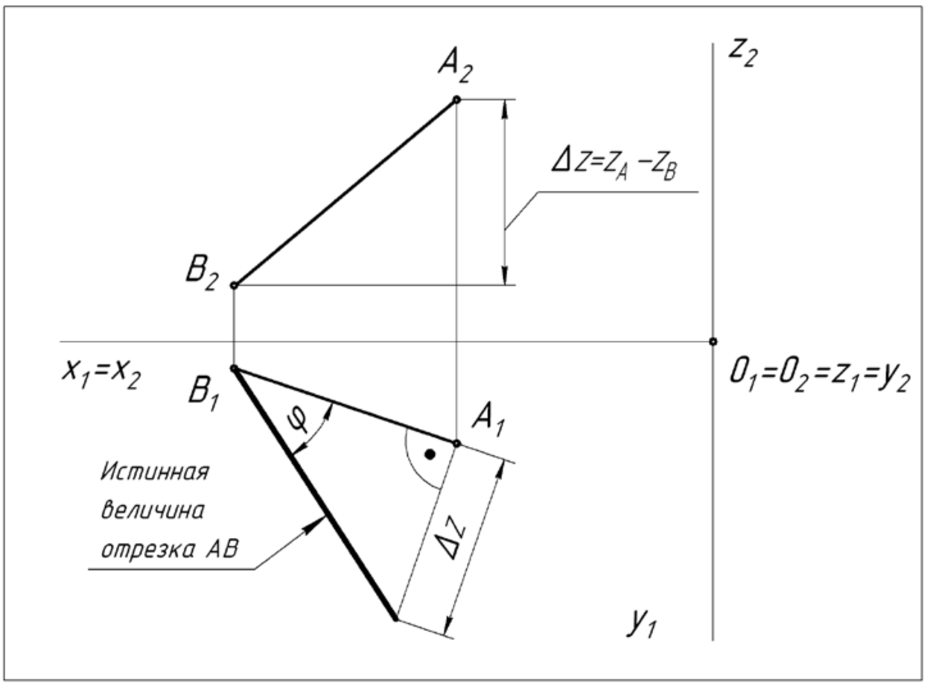


Рис.262

Расстояние между двумя точками

Задача 136. Определить истинную величину расстояния между двумя точками, заданными координатами ***A*** (30, 10, 30) и ***B*** (70, 20, 10).

Задача 137. Определить истинную величину отрезка общего положения.

Расстояние от точки до прямой

Задача 138. Дана проецирующая прямая и точка, не инцидентная данной прямой. Найти расстояние от точки до прямой.

Задача 139. Дана прямая, являющаяся линией уровня и точка, не инцидентная данной прямой. Найти расстояние от точки до прямой.

Задача 140. Дана прямая общего положения и точка, не инцидентная данной прямой. Найти расстояние от точки до прямой.

Задача 141. На чертеже заданы проекции трёх точек ***A***, ***B***, ***C*** и прямых ***m***, ***d*** и ***p*** (рис.263). В каком случае истинную величину расстояния от точки до прямой можно определить, не прибегая к преобразованию проекций?

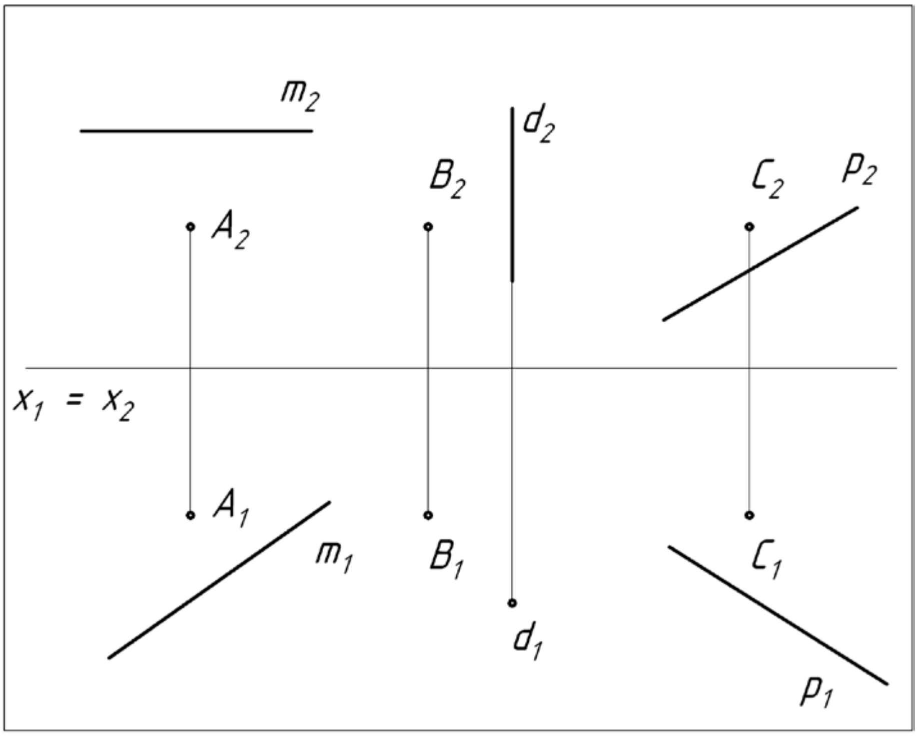


Рис.263

Расстояние между прямыми

Задача 142. Даны две проецирующие прямые, параллельные друг другу. Найти расстояние между заданными прямыми.

Задача 143. Даны две прямые, являющиеся линиями уровня, параллельные друг другу. Найти расстояние между заданными прямыми. Рассмотреть различные варианты исходных данных.

Задача 144. Даны две прямые общего положения, параллельные друг другу. Найти расстояние между заданными прямыми. Рассмотреть различные варианты исходных данных.

Задача 145. Даны две скрещивающиеся прямые, одна из которых является проецирующей. Найти расстояние между прямыми.

Задача 146. Даны две скрещивающиеся прямые, одна из которых является линией уровня. Найти расстояние между прямыми.

Задача 147. Даны две скрещивающиеся прямые общего положения. Найти расстояние между прямыми.

Задача 148. На чертеже заданы проекции трёх пар параллельных прямых ***m*** и ***n***, ***d*** и ***f***, ***k*** и ***p*** (рис.264). В каком случае истинную величину расстояния между параллельными прямыми можно определить, не прибегая к преобразованию проекций?

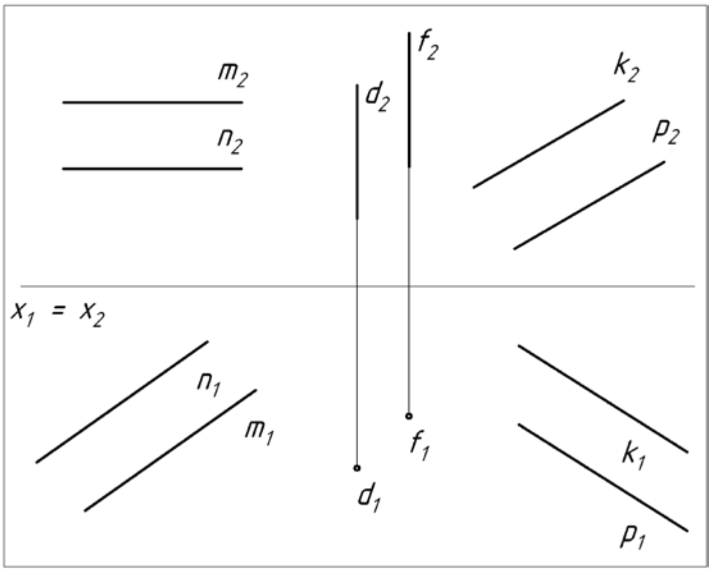


Рис.264

Расстояние от точки до плоскости

Задача 149. Дана плоскость общего положения, определителем которой является треугольник, в котором все стороны являются прямыми общего положения, и точка, не инцидентная этой плоскости. Найти расстояние от точки до плоскости.

Задача 150. Дана плоскость общего положения, определителем которой является треугольник, одна из сторон которого является линией уровня, а другие стороны - прямыми общего положения, и точка, не инцидентная этой плоскости. Найти расстояние от точки до плоскости.

Задача 151. Даны две параллельные плоскости общего положения, определителем каждой из которых являются пересекающиеся прямые. Найти расстояние между данными плоскостями.

Примечание. Положение прямых, задающих плоскость, в условии задачи не оговорено. Рассмотреть наиболее рациональное задание плоскости с точки зрения графического решения задачи.

Задачи на нахождение истинных величин углов

Угол между прямыми

Задача 152. Даны две пересекающиеся прямые общего положения. Найти угол между данными прямыми.

Задача 153. Даны две скрещивающиеся прямые общего положения. Найти угол между заданными прямыми.

Задача 154. Даны две скрещивающиеся прямые, инцидентные параллельным проецирующим плоскостям. Найти угол между данными прямыми.

Задача 155. На чертеже заданы проекции трёх пар пересекающихся прямых ***m*** и ***n***, ***d*** и ***f***, ***k*** и ***p*** (рис.265). В каком случае истинную величину угла между пересекающимися прямыми можно определить, не прибегая к преобразованию проекций?

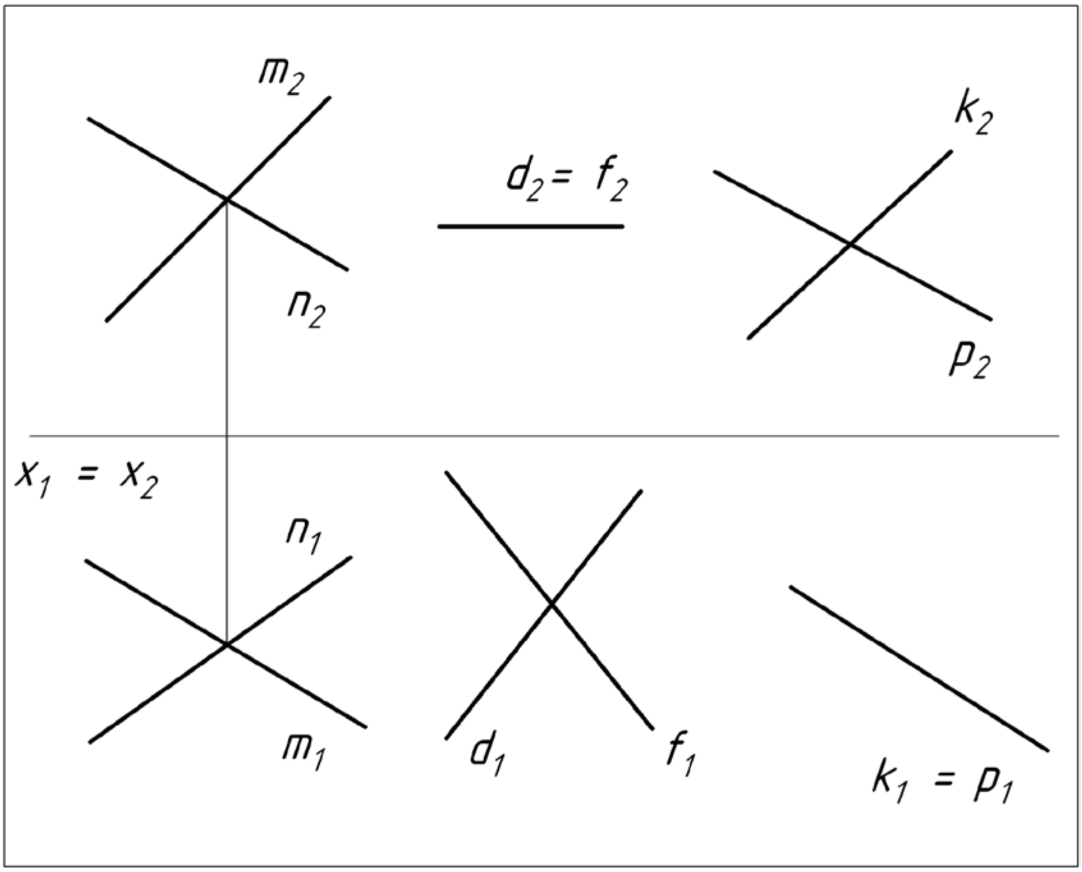


Рис.265

Угол между прямой и плоскостью

Задача 156. Определить истинную величину угла между отрезком общего положения и горизонтальной плоскостью проекций.

Задача 157. Определить истинную величину угла между отрезком, заданным координатами точек концов отрезка ***A*** (30, 10, 30) и ***B*** (70, 20, 10), и фронтальной плоскостью проекций.

Задача 158. Дана прямая общего положения и плоскость общего положения. Найти истинную величину угла между прямой и плоскостью.

<u>Примечание</u>. Определитель плоскости не задан в условии задачи. Рассмотреть наиболее рациональное задание плоскости с точки зрения графического решения задачи.

Угол между плоскостями

Задача 159. Дан двугранный угол, образованный фронтально-проецирующей плоскостью и плоскостью общего положения. Ребро двугранного угла является прямой общего положения. Найти истинную величину двугранного угла.

Задача 160. Дан двугранный угол, образованный фронтальной плоскостью уровня и плоскостью общего положения. Найти истинную величину двугранного угла.

Задача 161. Дан двугранный угол, образованный плоскостями общего положения. Ребро двугранного угла является прямой общего положения. Найти истинную величину двугранного угла.

Примечание. Положение прямых, задающих плоскость общего положения, в условии задач не оговорено. Рассмотреть наиболее рациональное задание плоскости с точки зрения графического решения задачи.

Задача 162. Даны фронтально-проецирующая плоскость и горизонтально-проецирующая плоскость. Найти истинную величину угла между плоскостями.

Задача 163. Даны две плоскости общего положения, определителем каждой из которых являются пересекающиеся прямые. Найти истинную величину угла между данными плоскостями.

Примечание. Положение прямых, входящих в определители плоскостей, в условии задачи не оговорено. Рассмотреть наиболее рациональное задание плоскостей с точки зрения графического решения задачи.

Литература

1. Полозов, В. С. Базисный курс начертательной геометрии [Текст] : учеб. пособие / В. С. Полозов, С. И. Ротков, В. И. Дергунов ; под общ. ред. С. И. Роткова ; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – М. : АСВ, 2006. – 180 с.
2. Крылов, Н. Н. Начертательная геометрия [Текст] / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, В. Е. Васильев. – М. : Высш. шк., 2009. – 224 с.
3. Нартова, Л. Г. Курс начертательной геометрии с алгоритмами для ЭВМ [Текст] / Л. Г. Нартова, А. М. Тевлин, В. С. Полозов, В. И. Якунин. – М. : Изд. МАИ, 1994. – 256 с.
4. Павлова, А. А. Начертательная геометрия [Текст] / А. А. Павлова. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005. – 301 с.
5. Кузнецов, Н. С. Начертательная геометрия [Текст] / Н. С. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1969. – 496 с.
6. Короев, Ю. И. Сборник задач и заданий по начертательной геометрии [Текст] : учеб. пособие для вузов по спец. «Архитектура» / Ю. И. Короев, Ю. Н. Орса. – М. : Архитектура – С, 2003. – 168 с.
7. Монж, Г. Начертательная геометрия [Текст] / Г. Монж; перевод под ред. Д. И. Каргина. – М. : Изд. АН СССР, 1947. – 273 с.
8. Пеклич, В. А. Упражнения и задачи по начертательной геометрии [Текст] / В. А. Пеклич. – М. : АСВ, 2002. – 328 с.
9. Посвянский, А. Д. Сборник задач по начертательной геометрии [Текст] / А. Д. Посвянский, Н. Н. Рыжов. – М. : Высш. шк., 1966. – 280 с.

Мошкова Татьяна Владимировна
Тюрина Валерия Александровна

СБОРНИК ЗАДАЧ
по начертательной геометрии

Учебное пособие

Редактор
С. А. Елизарова

Подписано в печать_______________Формат 60х90 1/8. Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 23,1 Усл. печ. л. 23,5 Тираж 300 экз. Заказ № 133
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Н.Новгород, Ильинская, 65.
Полиграфцентр ННГАСУ , 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65