Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет"

Кафедра высшей математики

Справочник по математике
(второе издание)

Методические указания
для студентов ННГАСУ всех специальностей

НИЖНИЙ НОВГОРОД – 2010

УДК 516

Справочник по математике (второе издание). Методические указания для студентов ННГАСУ всех специальностей. Н. Новгород, издание ННГАСУ, 2010, 53 с.

В методических указаниях приведены основные определения и формулы математических дисциплин, изучаемых в ННГАСУ.

Составитель: *Л.Н.Кривдина*, *Г.Л. Шульц*
Рецензент: *В.В.Петров*

1. Определители и матрицы

1.1. Вычисление определителей

Определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Метод треугольников для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель M_{ij}, полученный из данного определителя путем вычеркивания элементов i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется минор M_{ij} со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Разложение определителя по строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Разложение определителя по столбцу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

1.2. Действия с матрицами

Сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}, \qquad \lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}.$$

Умножение матриц (*правило "строчка на столбец"*): $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю. Для квадратной невырожденной матрицы A существует обратная матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = E$ (единичная матрица).

Вычисление обратной матрицы

1) Матрица 2×2

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{matrix} A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}=a_{22}, & A_{12}=(-1)^{1+2}a_{21}=-a_{21}, \\ A_{21}=(-1)^{2+1}a_{12}=-a_{12}, & A_{22}=(-1)^{2+2}a_{11}=a_{11}. \end{matrix}$$

Матрица, составленная из алгебраических дополнений $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

Союзная или *присоединенная* матрица получается из матрицы A^* транспонированием $\widetilde{A}=\left(A^*\right)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$,

Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\widetilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta \end{bmatrix}$.

2) Матрица 3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Матрица, составленная из алгебраических дополнений

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Союзная или *присоединенная* матрица получается из матрицы A^* транспонированием $\widetilde{A}=\left(A^*\right)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

Обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & A_{31}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & A_{32}/\Delta \\ A_{13}/\Delta & A_{23}/\Delta & A_{33}/\Delta \end{bmatrix}.$

1.3. Системы линейных уравнений

Система n линейных уравнений с n неизвестными

Правило Крамера

Для системы уравнений $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ вычисляем определитель из коэффициентов при неизвестных: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, где $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, система не имеет решения.

Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, система имеет бесконечно много решений.

Матричный способ

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, решение $X = A^{-1} \cdot B$.

Система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases},$$

A – матрица коэффициентов,

$\overline{A}$ – расширенная матрица (включает столбец свободных членов B).

Число r называется *рангом матрицы*, если среди миноров порядка r этой матрицы есть хотя бы один, отличный от 0, а все миноры большего порядка равны 0.

r_A – ранг матрицы коэффициентов,

$r_{\overline{A}}$ – ранг расширенной матрицы.

Теорема Кронекера-Капелли: система *совместна* (имеет решение) тогда и только тогда, когда $r_A = r_{\overline{A}}$.

В случае $r_A = r_{\overline{A}} = n$ решение системы единственно.

В случае $r_A = r_{\overline{A}} < n$ система имеет бесконечно много решений.

В случае $r_A < r_{\overline{A}}$ система несовместна (не имеет решения).

2. Векторная алгебра

2.1. Деление отрезка в заданном отношении

Точка $C(x,y,z)$ делит отрезок AB ($A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$) в отношении λ, если $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$. Тогда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

При делении отрезка пополам $\lambda=1$, $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

2.2. Базис векторов

Линейной комбинацией векторов $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n$ называется сумма этих векторов, взятых с некоторыми коэффициентами $a_1,a_2,\ldots,a_n$, т.е. вектор

$$\overline{a} = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \ldots + a_n\overline{v}_n.$$

Векторы $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n$ называются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация равна нулю только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Если векторы линейно зависимы, то хотя бы один из векторов выражается через остальные векторы в виде их линейной комбинации.

Коллинеарные векторы линейно зависимы, компланарные векторы также линейно зависимы.

Базис векторов: взятые в определенном порядке линейно независимые векторы, через которые можно выразить любой вектор. Коэффициенты линейной комбинации, выражающей данный вектор через базисные, называются *координатами вектора* в этом базисе.

Базис на плоскости: любые два неколлинеарных вектора $\overline{e}_1,\overline{e}_2$, взятых в определенном порядке. Любой вектор выражается через базисные векторы: $\overline{a} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2$, где a_1,a_2 – координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2$.

Базис в пространстве: любые три некомпланарных вектора $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$, взятых в определенном порядке. Любой вектор выражается через базисные векторы: $\overline{a} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2 + a_3 \cdot \overline{e}_3$, где a_1,a_2,a_3 – координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$.

2.3. Скалярное произведение векторов

$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$, $\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$, $|\overline{a}|^2 = \left(\overline{a} \cdot \overline{a}\right)$, $\overline{a} = \sqrt{\left(\overline{a} \cdot \overline{a}\right)}$.

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar a \cdot \bar b\right)}{|\bar a| \cdot |\bar b|}, \quad пр_{\bar a}\bar b = \frac{\left(\bar a \cdot \bar b\right)}{|\bar a|}, \quad пр_{\bar b}\bar a = \frac{\left(\bar a \cdot \bar b\right)}{|\bar b|}.$$

Если $\bar a = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar b = \{x_2, y_2, z_2\}$, то $\left(\bar a \cdot \bar b\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, $|\bar a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $|\bar b| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$пр_{\bar a}\bar b = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad пр_{\bar b}\bar a = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Условие коллинеарности векторов $\bar a \,||\, \bar b \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Условие ортогональности векторов $\bar a \perp \bar b \Leftrightarrow \left(\bar a \cdot \bar b\right) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Модуль и направление вектора $\bar a = \{x, y, z\}$, $|\bar a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2.4. Векторное произведение векторов

$[\bar a \times \bar b] = \bar c \Leftrightarrow \bar c \perp \bar a$, $\bar c \perp \bar b$, $|[\bar a \times \bar b]| = |\bar c| = |\bar a| \cdot |\bar b| \cdot \sin\varphi$,

тройка векторов $\bar a, \bar b, \bar c$ – правоориентированная (рис.2.1).

$[\bar b \times \bar b] = -[\bar a \times \bar b]$.

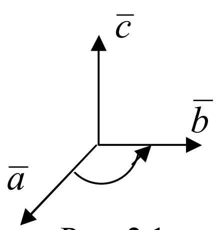

Рис. 2.1

Вычисление векторного произведения:

$$[\bar a \times \bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar i \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar j \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar k \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

$$[\bar i \times \bar i] = [\bar j \times \bar j] = [\bar k \times \bar k] = \bar 0,$$

$$[\bar i \times \bar j] = \bar k, \ [\bar j \times \bar k] = \bar i, \ [\bar k \times \bar i] = \bar j, \ [\bar j \times \bar i] = -\bar k, \ [\bar i \times \bar k] = -\bar j, \ [\bar k \times \bar j] = -\bar i.$$

Схематически: $\begin{pmatrix} \to\to + \\ \bar i \ \bar j \ \bar k \ \bar i \ \bar j \\ - \leftarrow\leftarrow \end{pmatrix}$

Площадь треугольника $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|[\bar a \times \bar b]|$,

где $\bar a$, $\bar b$ – векторы сторон треугольника, выходящие из одной вершины.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\right|$$ (половина модуля вектора-определителя).

2.5. Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение $\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right)=\left(\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)$.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, равен модулю их смешанного произведения: $V_{\text{пар}}=\left|\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right)\right|$.

Вычисление смешанного произведения:

$$\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix},$$ где $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\bar{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$.

Объем пирамиды $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right)\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\right|$.

Условие компланарности векторов $\left(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right)=0$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Прямая на плоскости

l: $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой,

$\overline{N}=\{A,B\}$ – нормальный вектор, $\overline{N}\perp l$.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой,

$\overline{S}=\{m,n\}$ – направляющий вектор, $\overline{S}\parallel l$.

$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt\end{cases}$ – параметрические уравнения прямой (t – параметр).

$y-y_0=k(x-x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k.

$y=kx+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки.

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad \dfrac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ – нормальное уравнение прямой.

Угол между прямыми:

1) $\begin{array}{l} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \overline{N_1} = \{A_1, B_1\}, \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \overline{N_2} = \{A_2, B_2\}, \end{array} \qquad \cos(l_1, l_2) = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \,||\, \overline{N}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}, \qquad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$

2) $\begin{array}{l} l_1: \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1}, \quad \overline{S}_1 = \{m_1, n_1\}, \\ l_2: \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2}, \quad \overline{S}_2 = \{m_2, n_2\}, \end{array} \qquad \cos(l_1, l_2) = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \,||\, \overline{S}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}, \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \perp \overline{S}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2=0.$

3) $\begin{array}{l} l_1: y = k_1x + b_1, \\ l_2: y = k_2x + b_2, \end{array} \qquad \mathrm{tg}(l_1, l_2) = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}.$

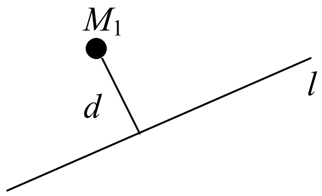

Рис. 3.1

Расстояние от точки до прямой (рис. 3.1)

l: $Ax + By + C = 0$, $M_1(x_1, y_1) \Rightarrow d = \left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$

3.2. Плоскость

P: $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости,

$\overline{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор, $\overline{N} \perp P$.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках.

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad \dfrac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – нормальное уравнение плоскости.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ – уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Угол между плоскостями

$P_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \overline{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$

$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \overline{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$

$$\cos(P_1, P_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

$P_1 \,||\, P_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \,||\, \overline{N}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2},$

$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Расстояние от точки до плоскости (рис. 3.2)

P: $Ax+By+Cz+D=0$, $M_1(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow d = \left| \dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$

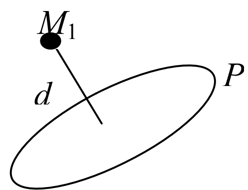

Рис. 3.2

3.3. Прямая в пространстве

$l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – канонические уравнения прямой,

$\overline{S} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор, $\overline{S} \,||\, l$.

$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой (t – параметр).

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – общие уравнения прямой,

$\overline{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \overline{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}, \quad \overline{S} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 \,\,||\, l.$

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Угол между прямыми

$l_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}, \quad \overline{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\},$

$l_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2} \quad \overline{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\},$

$$\cos(l_1, l_2) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

$$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \,||\, \overline{S}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \perp \overline{S}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$ – условие расположения двух прямых в одной плоскости.

Угол между прямой и плоскостью

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},\ \overline{S} = \{m, n, p\},\ P\colon Ax + By + Cz + D = 0,\ \overline{N} = \{A, B, C\},$$

$$\sin(l, P) = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

$$l \,||\, P \Leftrightarrow \overline{S} \perp \overline{N} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0,$$

$$l \perp P \Leftrightarrow \overline{S} \,||\, \overline{N} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

3.4. Кривые II порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ – эллипс (рис. 3.3)

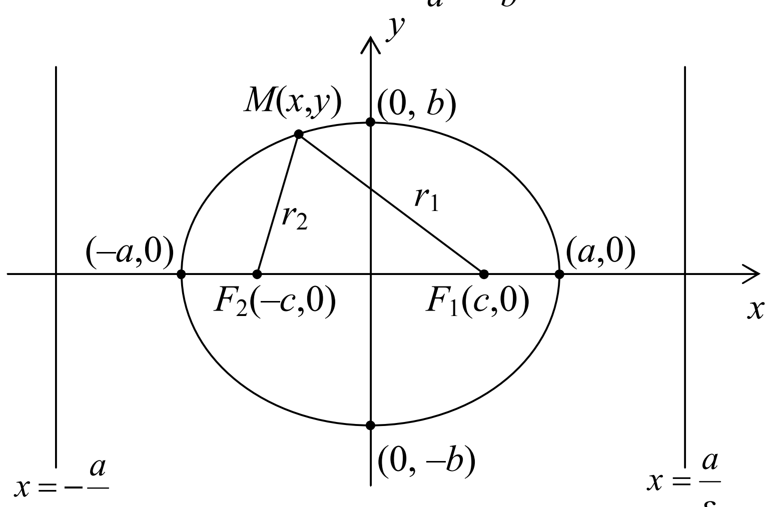

Рис. 3.3.

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы,

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет,

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис,

$r = a \pm \varepsilon x$ – фокальные радиусы-векторы F_1M и F_2M.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – окружность, $C(x_0, y_0)$ – центр, R – радиус.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ – гипербола (рис. 3.4)

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы,

$c=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ – эксцентриситет,

$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис,

$y=\pm\frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот,

$r=\varepsilon x\pm a$ – фокальные радиусы-векторы правой ветви гиперболы (F_1M и F_2M),

$r=-\varepsilon x\pm a$ – фокальные радиусы-векторы левой ветви гиперболы.

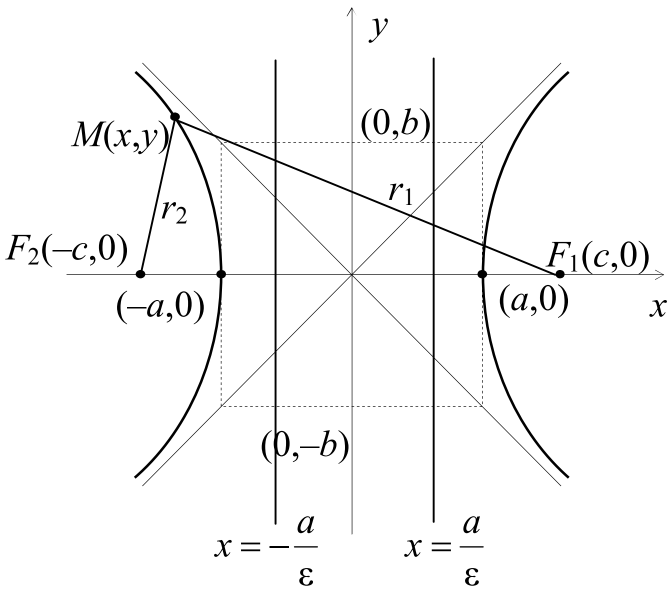

Рис. 3.4

$$y^2=2px$$ – парабола (рис. 3.5)

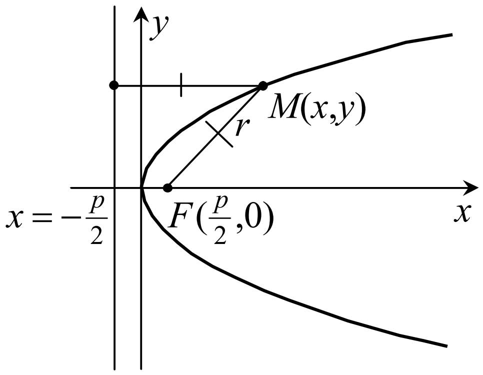

Рис. 3.5

$F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус, $\varepsilon=1$ – эксцентриситет,

$x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы,

$r=x+\frac{p}{2}$ – фокальный радиус-вектор.

3.5. Преобразования координат

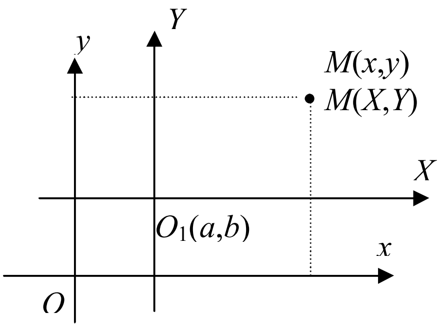

Рис. 3.6

$$\begin{cases} x=X+a, \\ y=Y+b \end{cases}$$ – параллельный перенос осей

$$\begin{cases} x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi \end{cases}$$ – поворот осей

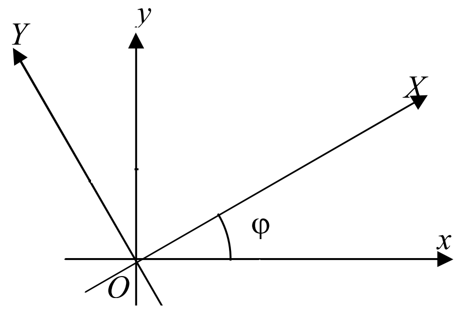

Рис. 3.7

3.6. Общее уравнение линии II порядка

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2D$x$+2E$y$+F=0$

$AC–B^2>0$ – линия эллиптического типа,

$AC–B^2<0$ – линия гиперболического типа,

$AC–B^2=0$ – линия параболического типа.

3.7. Поверхности II порядка

$x^2+y^2+z^2=R^2$ – сфера (рис. 3.8)

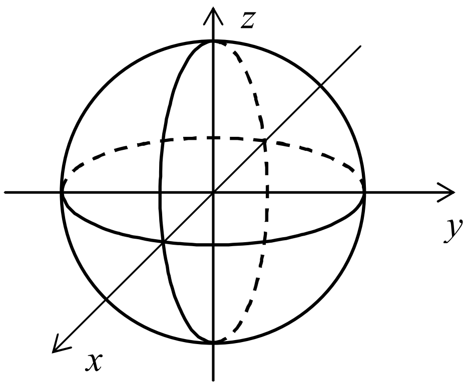

Рис. 3.8

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид (рис. 3.9)

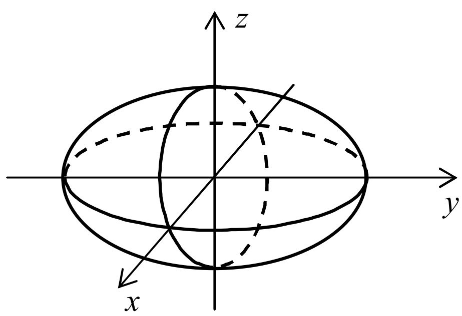

Рис. 3.9

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 -$$
однополостный гиперболоид (рис. 3.10)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 -$$
двуполостный гиперболоид (рис. 3.11)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ —}$$
конус (рис. 3.12)

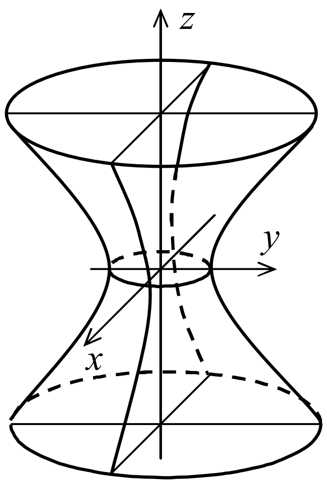

Рис. 3.10

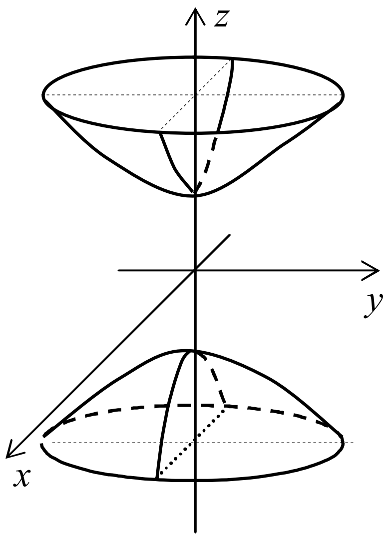

Рис. 3.11

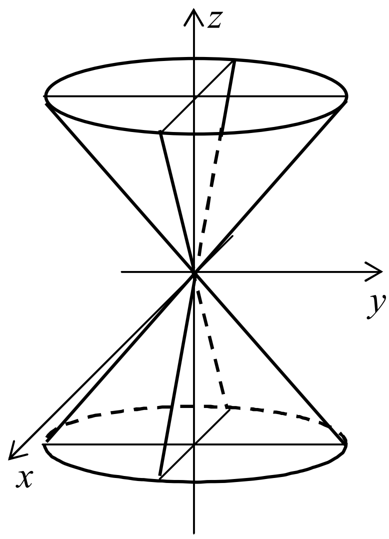

Рис.3.12

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p\cdot q>0) -$$
эллиптический параболоид (рис. 3.13 – $p>0$, $q>0$)

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p\cdot q>0) -$$
гиперболический параболоид (рис. 3.14 – $p>0$, $q>0$)

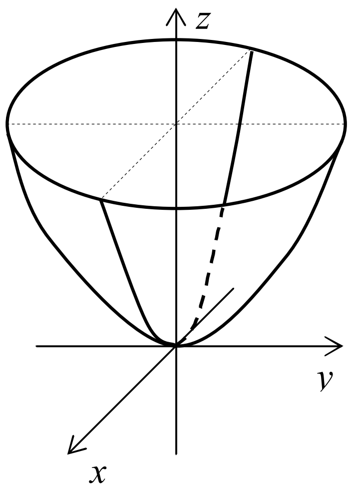

Рис. 3.13

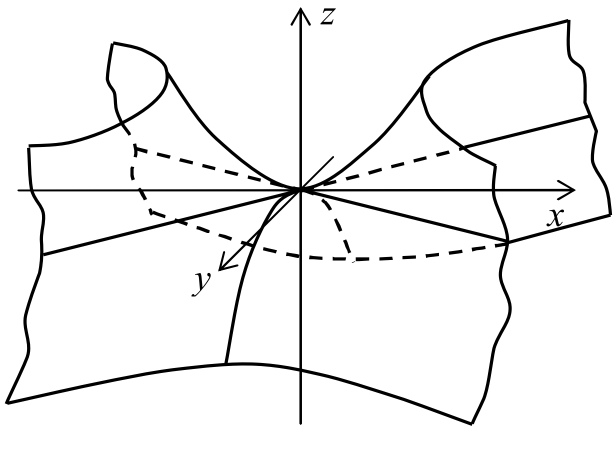

Рис. 3.14

Цилиндрические поверхности

$F(x,y)=0$ – образующие параллельны оси Oz, направляющая $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

$F(x,z)=0$ – образующие параллельны оси Oy, направляющая $\begin{cases} F(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$

$F(y,z)=0$ – образующие параллельны оси Ox, направляющая $\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$

Цилиндры II порядка:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический (рис. 3.15)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический (рис. 3.16)

$y^2=2px$ – параболический (рис. 3.17)

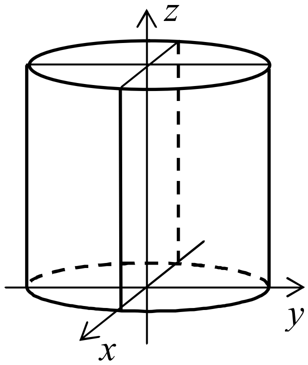

Рис. 3.15

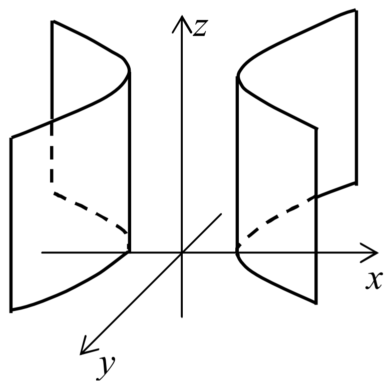

Рис. 3.16

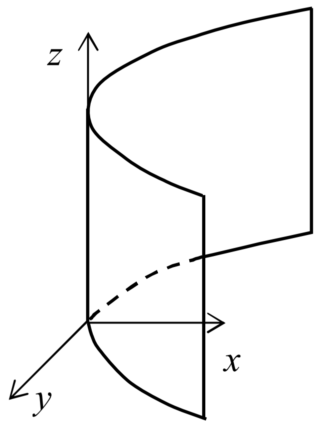

Рис. 3.17

4. Дифференциальное исчисление

4.1. Пределы

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – второй замечательный предел (e≈2,718).

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$ – правило Лопиталя.

4.2. Производная и дифференциал

4.2.1. Правила дифференцирования

$(u\pm v)'=u'\pm v'$ – производная суммы (разности),

$(u\cdot v)'=u'v+v'u$ – производная произведения,

$(c\cdot y)'=cy'$ – постоянный множитель выносится за знак производной,

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ – производная дроби.

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad y''_x = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$ –

первая и вторая производные функции, заданной параметрически.

$y = f(x), \quad dy = f'(x)dx$ – дифференциал функции.

$y = f(u(x)) \quad y'_u = f'_u \cdot u'_x$ – производная сложной функции.

4.2.2. Таблица производных

$(c)' = 0$

$\left(u^{\alpha}\right)'_x = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$

$\left(e^u\right)'_x = e^u \cdot u'_x$

$\left(a^u\right)'_x = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$

$\left(u^v\right)'_x = u^v \cdot \ln u \cdot v'_x + v \cdot u^{v-1} \cdot u'_x$

$(\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x$

$(\log_a u)'_x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \cdot u'_x$

$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$

$(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$

$(\mathrm{tg}\, u)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$

$(\mathrm{ctg}\, u)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$

$(\sec u)'_x = \mathrm{tg}\, u \cdot \sec u \cdot u'_x$

$(\mathrm{cosec}\, u)'_x = -\mathrm{ctg}\, u \cdot \mathrm{cosec}\, u \cdot u'_x$

$(\arcsin u)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$

$(\arccos u)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$

$(\mathrm{arctg}\, u)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$

$(\mathrm{arcctg}\, u)'_x = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$

Гиперболические функции и их производные

$\mathrm{sh}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$

$\mathrm{ch}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

$\mathrm{th}\, u = \frac{\mathrm{sh}\, u}{\mathrm{ch}\, u}$

$\mathrm{cth}\, u = \frac{\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}\, u}$

$(\mathrm{sh}\, u)'_x = \mathrm{ch}\, u \cdot u'_x$

$(\mathrm{ch}\, u)'_x = \mathrm{sh}\, u \cdot u'_x$

$(\mathrm{th}\, u)'_x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'_x$

$(\mathrm{cth}\, u)'_x = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'_x$

4.2.3. Приложения производной

$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ – касательная к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0,y_0).

$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$ – нормаль к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0,y_0).

$y\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ – приближенное вычисление с помощью дифференциала при малом $\Delta x=x-x_0$.

4.2.4. Исследование функции с помощью производной

Возрастание, убывание, экстремум функции

$f'(x)>0$ – функция возрастает,

$f'(x)<0$ – функция убывает,

$f'(x_0)=0\ (\infty)$ – $M_0(x_0,f(x_0))$ критическая точка 1-го рода.

Если в окрестности критической точки при переходе слева направо

$f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", то M_0 – точка максимума,

$f'(x)$ меняет знак с "–" на "+", то M_0 – точка минимума,

$f'(x)$ не меняет знака, то экстремума в точке M_0 нет.

Если

$f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)<0$, то M_0 – точка максимума,

$f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)>0$, то M_0 – точка минимума,

$f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, то необходимо исследовать с помощью первой производной.

Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$f''(x)>0$ – кривая $y=f(x)$ вогнутая (выпуклая вниз),

$f''(x)<0$ – кривая $y=f(x)$ выпуклая (выпуклая вверх),

$f''(x_0)=0\ (\infty)$ – $M_0(x_0,f(x_0))$ критическая точка 2-го рода.

Если $f''(x)$ в окрестности точки $M_0(x_0,f(x_0))$ меняет знак, то M_0 – точка перегиба кривой $y=f(x)$.

Асимптоты кривой $y=f(x)$

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$, то $x=a$ – вертикальная асимптота.

Уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

4.2.5. Кривизна плоской линии

Углом смежности дуги AB плоской линии называется угол $\Delta\alpha$ между положительными направлениями касательных, проведенных в точках A и B этой линии.

$k_{ср} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ – *средняя кривизна* дуги AB, где Δs – длина дуги AB.

$k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ – *кривизна* линии в точке A.

$k_{окр} = \dfrac{1}{r}$ – кривизна окружности, где r – радиус окружности.

Кривизна прямой равна нулю.

$k = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ – кривизна линии, заданной явно $y = f(x)$.

$k = \dfrac{|x'_t y''_t - x''_t y'_t|}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}$ – кривизна линии, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t)$.

$k = \dfrac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$ – кривизна линии, заданной в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$.

$R = \dfrac{1}{|k|}$ – *радиус кривизны.*

Окружностью кривизны линии в ее точке A называется предельное положение окружности, проходящей через три точки A, B, C кривой, когда $B \to A$ и $C \to A$. Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны.

Центром кривизны называется центр окружности кривизны (лежит на нормали к линии, проведенной в точке A в сторону вогнутости этой линии).

$\xi = x - \dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}$ – координаты центра кривизны линии, заданной явно $y = f(x)$.

$\xi = x - \dfrac{y'_t(x'^2_t + y'^2_t)}{x'_t y''_t - x''_t y'}, \quad \eta = y + \dfrac{x'_t(x'^2_t + y'^2_t)}{x'_t y''_t - x''_t y'}$ – координаты центра кривизны линии, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t)$.

Эволютой линии называется линия, состоящая из всех центров кривизны данной линии. Исходная линия называется *эвольвентой* своей эволюты.

4.3. Функции нескольких переменных

4.3.1. Дифференцирование

Дифференциалы и приращения

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad \Delta z \approx dz, \quad f(x+dx, y+dy) \approx f(x,y) + dz,$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Производные сложных функций

Если $z = f(x,y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$, то $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

Если $z = f(x,y), \quad x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$,

то $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$

Производная функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\bar{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \sin\alpha \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta,$$

где вектор $\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$).

Производная функции $w = f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$):

$$\left.\frac{\partial w}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma .$$

Градиент функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\left.\overline{\operatorname{grad}}\, z\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \bar{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \bar{j}, \quad \left|\overline{\operatorname{grad}}\, z\right|_{M_0} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\right)^2} .$$

Градиент функции $w = f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\left.\overline{\operatorname{grad}}\, w\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \bar{i} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \bar{j} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \bar{k},$$

$$\left|\overline{\operatorname{grad}}\, w\right|_{M_0} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{M_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{M_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{M_0}\right)^2} .$$

Производная неявной функции

$$F(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad F(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} .$$

4.3.2. Геометрические приложения

$z = f(x,y)$ – поверхность, $f(x,y) = h = const$ – линия уровня

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если $F(x,y,z) = 0$ – уравнение поверхности, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0,$$

уравнения нормали в этой точке: $\dfrac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \dfrac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \dfrac{z - z_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}$.

Если $z = f(x,y)$ – уравнение поверхности, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$: $(z - z_0) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot (y - y_0)$,

уравнения нормали в этой точке: $\dfrac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}} = \dfrac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

Касательная и нормальная плоскость к пространственной кривой

Если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ – уравнения кривой l, то уравнения касательной в точке

$M_0(x_0,y_0,z_0)$: $\dfrac{x - x_0}{x'|_{M_0}} = \dfrac{y - y_0}{y'|_{M_0}} = \dfrac{z - z_0}{z'|_{M_0}}$,

уравнение нормальной плоскости в этой точке:

$x'|_{M_0} \cdot (x - x_0) + y'|_{M_0} \cdot (y - y_0) + z'|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0$.

Экстремум функции $z = f(x,y)$

Из системы уравнений $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ находим *стационарные точки.*

Для каждой стационарной точки $M_0(x_0,y_0)$ находим

$$A = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{M_0},\ B = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right|_{M_0},\ C = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{M_0} \text{ и } \Delta = AC - B^2.$$

Если $\Delta > 0$ – в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеется экстремум:

при $A < 0$ – максимум, при $A > 0$ – минимум.

Если $\Delta < 0$ – в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет экстремума.

Если $\Delta = 0$ – в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место сомнительный случай.

5. Интегральное исчисление

5.1. Неопределенный интеграл

5.1.1. Правила интегрирования

$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ \left(F'(x) = f(x)\right),\ F(x)$ – первообразная функция от $f(x)$.

$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \left(x = \varphi(t)\right)$ – замена переменной.

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ – формула интегрирования по частям.

$\int \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}dx \quad (k < l)$.

Если $Q(x) = (x-a)^m \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^n \cdot \ldots$,

то $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{(x-a)^m} + \dfrac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \dfrac{A_m}{x-a} + \ldots +$

$+ \dfrac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^n} + \dfrac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{B_n x + C_n}{x^2+px+q} + \ldots$

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx: \quad \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx: \quad \operatorname{tg} x = t,\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2},\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

5.1.2. Таблица интегралов

$\int dx = x + C$

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$

$\int \dfrac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C$

$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x + C$

$\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + C$

$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$

$\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$

5.2. Определенный интеграл

5.2.1. Правила интегрирования

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – *формула Ньютона-Лейбница.*

$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$ – формула интегрирования по частям.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad (\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b)$ – замена переменной.

Несобственные интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если на $a \le c \le b$ и $f(c) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim\limits_{\beta\to+0}\int\limits_{c+\beta}^b f(x)\,dx$.

Несобственный интеграл *сходится*, если соответствующий предел существует и конечен. Несобственный интеграл *расходится*, если соответствующий предел не существует или бесконечен.

5.2.2. Приложения определенного интеграла

Площадь фигуры

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad S = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx, \quad S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi.$$

Площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ равна $S = \pi ab$.

Длина дуги

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \quad L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

Объем тела

$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, где $S(x)$ – площадь поперечного сечения.

Объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ равен $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$.

Объем тела вращения

$V_x=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ (вокруг оси Ox), $V_y=\pi\int\limits_c^d x^2\,dy$ (вокруг оси Oy).

Площадь поверхности вращения

$S_x=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, (вокруг оси Ox), $S_y=2\pi\int\limits_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy$ (вокруг оси Oy).

Пусть $\gamma=\gamma(x)$ – функция плотности распределения вещества по плоской дуге $y=f(x)$. Для однородной дуги $\gamma=const$.

Масса дуги $M=\int\limits_a^b \gamma\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Статические моменты и моменты инерции плоской дуги

$M_x=\int\limits_a^b \gamma\cdot y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $M_y=\int\limits_a^b \gamma\cdot x\sqrt{1+y'^2}\,dx$,

$I_x=\int\limits_a^b \gamma\cdot y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $I_y=\int\limits_a^b \gamma\cdot x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $I_0=I_x+I_y$.

Центр тяжести плоской дуги

$$x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{\int\limits_a^b \gamma\cdot x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b \gamma\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx},\quad y_c=\frac{M_x}{M}=\frac{\int\limits_a^b \gamma\cdot y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b \gamma\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Пусть $\gamma=\gamma(x)$ – функция плотности распределения вещества по плоской фигуре, ограниченной линиями $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$. Для однородной фигуры $\gamma=const$.

Масса фигуры $M=\int\limits_a^b \gamma\cdot y\,dx$.

Статические моменты и моменты инерции плоской фигуры

$M_x=\dfrac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma\cdot y^2\,dx$, $M_y=\int\limits_a^b \gamma\cdot xy\,dx$,

$I_x=\dfrac{1}{3}\int\limits_a^b \gamma\cdot y^3\,dx$, $I_y=\int\limits_a^b \gamma\cdot x^2y\,dx$, $I_0=I_x+I_y$.

Центр тяжести плоской фигуры

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b \gamma \cdot xy\, dx}{\int_a^b \gamma \cdot y\, dx}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \gamma \cdot y^2\, dx}{\int_a^b \gamma \cdot y\, dx}.$$

5.3. Двойной и тройной интегралы

5.3.1. Двойной интеграл

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx -$$

объем (*мера*) цилиндрического тела, в основании которого лежит область D, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$.

$S = \iint_D dxdy$ – *площадь* (*мера*) области D.

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi -$$

объем цилиндрического тела в полярной системе координат.

$S = \iint_D dxdy = \iint_D \rho\, d\rho\, d\varphi$ – площадь в полярной системе координат.

$$S_{\text{пов}} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy -$$

площадь поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$; D – проекция поверхности на плоскость xOy.

Масса плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$

$$M = \iint_D \gamma(x,y)dxdy.$$

Статические моменты пластинки D относительно осей координат

$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x,y)dxdy$ – относительно оси Ox,

$M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x,y)dxdy$ – относительно оси Oy.

$x_c = \frac{M_y}{M}$, $y_c = \frac{M_x}{M}$ – координаты центра тяжести пластинки D.

В случае однородной пластинки ($\gamma(x,y)$ – константа):

$$x_c = \frac{\iint_D x\, dxdy}{\iint_D dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y\, dxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Моменты инерции пластинки D

$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy$ – относительно оси Ox,

$I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy$ – относительно оси Oy,

$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \gamma(x,y)dxdy$ – относительно начала координат.

5.3.2. Тройной интеграл

$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ – тройной интеграл по области $T = \{(x;y;z) \mid a \le x \le b,\, y_1(x) \le y \le y_2(x),\, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$.

$V = \iiint\limits_T dxdydz$ – *объем* (*мера*) области T.

$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ –

тройной интеграл в *цилиндрических координатах*.

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$ – связь декартовых координат $(x;y;z)$ с цилиндрическими координатами $(\rho;\varphi;z)$ (рис. 5.1).

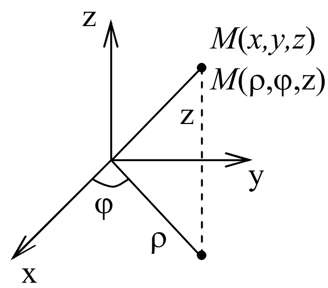

Рис. 5.1

$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_T f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ –

тройной интеграл в *сферических координатах*.

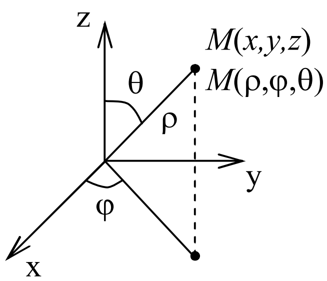

Рис. 5.2

$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ – связь декартовых координат $(x;y;z)$ со сферическими ко-- ординатами $(\rho;\varphi;\theta)$ (рис. 5.2).

$M = \iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – *масса тела* T с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Статические моменты тела относительно плоскостей:

$M_{xy} = \iiint\limits_T z \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно координатной плоскости Oxy,

$M_{yz} = \iiint\limits_T x \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно координатной плоскости Oyz,

$M_{xz} = \iiint\limits_T y \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно координатной плоскости Oxz.

$x_c = \dfrac{M_{yz}}{M}, \quad y_c = \dfrac{M_{xz}}{M}, \quad z_c = \dfrac{M_{xy}}{M}$ – координаты центра тяжести тела T.

В случае однородного тела ($\gamma(x,y,z)$ – константа):

$$x_c = \frac{\iiint\limits_T x\,dxdydz}{\iiint\limits_T dxdydz}, \quad y_c = \frac{\iiint\limits_T y\,dxdydz}{\iiint\limits_T dxdydz}, \quad z_c = \frac{\iiint\limits_T z\,dxdydz}{\iiint\limits_T dxdydz}.$$

Моменты инерции тела T:

$I_{xy} = \iiint\limits_T z^2 \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно координатной плоскости Oxy,

$I_{yz} = \iiint\limits_T x^2 \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно координатной плоскости Oyz,

$I_{xz} = \iiint\limits_T y^2 \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно координатной плоскости Oxz,

$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \iiint\limits_T (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно оси Ox,

$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \iiint\limits_T (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно оси Oy,

$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \iiint\limits_T (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно оси Oz.

$I_l = \iiint\limits_T r^2 \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно некоторой оси l

(r – расстояние точки (x,y,z) тела до оси l),

$I_O = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ – относительно начала координат.

5.4. Криволинейный и поверхностный интегралы

5.4.1. Криволинейный интеграл

Криволинейный интеграл по длине дуги (интеграл I рода)

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx \;–$$

криволинейный интеграл от функции $z = f(x,y)$ по длине дуги $y = \varphi(x)$.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt \text{ –}$$

криволинейный интеграл от функции $z = f(x,y)$ по длине дуги, заданной параметрически $x = x(t),\ y = y(t)$.

$L = \int\limits_{AB} ds$ – *длина* (*мера*) дуги AB.

$\int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\varphi'(x)\right)^2}\,dx$ – длина (мера) дуги $y = \varphi(x)$.

Масса дуги с линейной плотностью $\gamma(x,y)$

($\gamma(x,y,z)$ – в случае пространственной кривой).

$M = \int\limits_{AB} \gamma \cdot ds$.

Координаты центра тяжести дуги AB

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\gamma ds}{\int\limits_{AB} \gamma ds},\ y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\gamma ds}{\int\limits_{AB} \gamma ds},\ z_c = \frac{\int\limits_{AB} z\gamma ds}{\int\limits_{AB} \gamma ds}.$$

В случае однородной дуги (γ – константа):

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x ds}{\int\limits_{AB} ds},\ y_c = \frac{\int\limits_{AB} y ds}{\int\limits_{AB} ds},\ z_c = \frac{\int\limits_{AB} z ds}{\int\limits_{AB} ds}.$$

Криволинейный интеграл по координатам (интеграл II рода)

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left(P(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x,\varphi(x))\right)dx \text{ –}$$

кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\right)dt \text{ –}$$

кривая AB задана параметрически $x = x(t),\ y = y(t)$.

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\right)dt \text{ –}$$

пространственная кривая задана параметрически $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

Физический смысл криволинейного интеграла II рода:
$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \ -$$

работа силы $\overline{F} = P\cdot\bar{i} + Q\cdot\bar{j} + R\cdot\bar{k}$ вдоль дуги AB.

При условии $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ криволинейный интеграл по любому замкнутому плоскому контуру C равен нулю: $\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$.

В этом случае интеграл $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ не зависит от пути интегрирования, подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dU(x,y)$, где
$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy \text{ или } U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy.$$

Формула Грина
$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \ -$$

область D ограничена контуром C.

Площадь области, ограниченной контуром C: $S = \dfrac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx$.

Связь криволинейных интегралов I и II рода

На плоскости: $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_L \big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\big)ds$,

где α,β – углы между касательной к плоской кривой L и осями координат.

Если параметрические уравнения кривой $x = x(t), y = y(t)$, то
$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},\ \cos\beta = \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

В пространстве: $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$
$$= \int\limits_L \big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta + R(x,y)\cos\gamma\big)ds,$$

где α,β,γ – углы между касательной к пространственной кривой L и осями координат.

Если параметрические уравнения кривой $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, то
$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}, \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}, \cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}.$$

5.4.2. Поверхностный интеграл

Поверхностный интеграл по площади поверхности (интеграл I рода)

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\cdot\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,dxdy \text{ –}$$

поверхностный интеграл от функции $F(x,y,z)$ по площади поверхности $z=f(x,y)$. Здесь D – проекция поверхности S на плоскость Oxy.

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\sqrt{EG-M^2}\,dudv \text{ –}$$

поверхностный интеграл от функции $F(x,y,z)$ по площади поверхности, заданной параметрически $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$. Здесь D – область плоскости параметров u,v, функции

$$E=(x'_u(u,v))^2+(y'_u(u,v))^2+(z'_u(u,v))^2,$$

$$G=(x'_v(u,v))^2+(y'_v(u,v))^2+(z'_v(u,v))^2,$$

$$M=x'_u(u,v)\cdot x'_v(u,v)+y'_u(u,v)\cdot y'_v(u,v)+z'_u(u,v)\cdot z'_v(u,v).$$

$S=\iint\limits_S dS$ – *площадь* (*мера*) поверхности S.

$M=\iint\limits_S \gamma(x,y,z)\,dS$ – *масса материальной поверхности* S с поверхностной плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Статические моменты поверхности S:

$M_{xy}=\iint\limits_S z\cdot\gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно плоскости Oxy.

$M_{yz}=\iint\limits_S x\cdot\gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно плоскости Oyz.

$M_{xz}=\iint\limits_S y\cdot\gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно плоскости Oxz.

Координаты центра тяжести поверхности S

$$x_c=\frac{M_{yz}}{M},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{M},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{M}.$$

В случае однородной поверхности ($\gamma(x,y,z)$ – константа):

$$x_c=\frac{\iint\limits_S x\,dS}{\iint\limits_S dS},\quad y_c=\frac{\iint\limits_S y\,dS}{\iint\limits_S dS},\quad z_c=\frac{\iint\limits_S z\,dS}{\iint\limits_S dS}.$$

Моменты инерции поверхности S:

$I_{xy}=\iint\limits_S z^2\cdot\gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно плоскости Oxy,

$I_{yz}=\iint\limits_S x^2\cdot\gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно плоскости Oyz,

$I_{xz} = \iint\limits_S y^2 \cdot \gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно плоскости Oxz,

$I_x = \iint\limits_S (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно оси Ox,

$I_y = \iint\limits_S (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно оси Oy,

$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно оси Oz,

$I_l = \iint\limits_S r^2 \cdot \gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно некоторой оси l

(r – расстояние точки (x,y,z) поверхности до оси l),

$I_O = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dS$ – относительно начала координат.

Поверхностный интеграл по координатам (интеграл II рода)

$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_D F\big(x,y,f(x,y)\big)dxdy$ – поверхностный интеграл II рода от функции $F(x,y,z)$, если поверхность S задана явным уравнением $z = f(x,y)$. Здесь D – проекция поверхности S на плоскость Oxy.

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_S (P(x,y,z)\cdot\cos\alpha + Q(x,y,z)\cdot\cos\beta + R(x,y,z)\cdot\cos\gamma)\,dS \text{ –}$$

выражение поверхностного интеграла II рода через интеграл I рода. Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали поверхности S.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x,y,z) = 0$, то

$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{\pm\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{F'_y}{\pm\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{\pm\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

знак выбирается в зависимости от стороны поверхности S.

Если поверхность задана параметрическими уравнениями $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$, то

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где функции $A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$; знак выбирается в зависимости от стороны поверхности S.

Формула Стокса

$$\oint_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \cos\gamma \right] dS.$$

Здесь

C – простой замкнутый контур, ограничивающий поверхность S;

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S; нормаль ориентирована так, что относительно нее обход контура C совершается против часовой стрелки.

Формула Остроградского-Гаусса

$$\oiint_S (P(x,y,z)\cdot\cos\alpha + Q(x,y,z)\cdot\cos\beta + R(x,y,z)\cdot\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Поверхность S ограничивает замкнутую область пространства T; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

5.5. Элементы теории поля

В области V задано *скалярное поле*, если каждой точке M области поставлена в соответствие скалярная величина $u=u(M)$, т.е. если задана функция трех переменных $u(M)=u(x,y,z)$.

В области V задано *векторное поле*, если каждой точке M области поставлена в соответствие векторная величина $\overline{F}=\overline{F}(M)$, т.е.

$$\overline{F}(M) = P(x,y,z)\cdot\overline{i} + Q(x,y,z)\cdot\overline{j} + R(x,y,z)\cdot\overline{k},$$

где $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – три функции трех переменных.

Градиентом скалярного поля $u=u(x,y,z)$ называется вектор

$$\overline{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\overline{k}.$$

Градиент скалярного поля представляет собой векторное поле.

Дивергенцией векторного поля называется скаляр

$$div\,\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Дивергенция векторного поля представляет собой скалярное поле.

Вихрем (*ротором*) векторного поля называется вектор

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot \overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot \overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot \overline{k}.$$

Вихрь векторного поля также представляет собой векторное поле.

Потоком векторного поля через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\overline{n} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k}$, называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint\limits_S \overline{F}\cdot \overline{n}\,dS = \iint\limits_S F_n\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\ .$$

Здесь $\overline{F}\cdot\overline{n}$ – скалярное произведение вектора поля и единичного вектора выбранного направления нормали.

Поток векторного поля представляет собой число.

Криволинейный интеграл от вектора $\overline{F}$ по кривой AB

$$\int\limits_{AB} \overline{F}\,d\overline{r} = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,,$$

представляющий собой *работу* векторного поля при перемещении вдоль кривой AB.

Циркуляцией вектора по замкнутому контуру C называется интеграл

$$\Gamma = \oint\limits_C \overline{F}\,d\overline{r} = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

$\oint\limits_C \overline{F}\,d\overline{r} = \iint\limits_S \overline{n}\cdot rot\,\overline{F}\,dS$ – *формула Стокса* в векторной форме.

$\iiint\limits_T div\,\overline{F}\,dV = \oiint\limits_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,dS$ – *формула Остроградского-Гаусса* в векторной форме (нормаль $\overline{n}$ ориентирована так, что относительно нее обход контура C совершается против часовой стрелки).

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\overline{k}$ – *оператор Гамильтона*,

$\overline{grad\,u} = \nabla u, \quad div\,\overline{F} = \nabla\cdot\overline{F}, \quad rot\,\overline{F} = \nabla\times\overline{F}.$

Векторное поле называется

безвихревым, если $rot\,\overline{F} = \overline{0}$,

потенциальным, если $\overline{F} = \overline{grad\,u}$,

соленоидальным (или *трубчатым*), если $div\,\overline{F} = 0$.

6. Ряды

6.1. Числовые ряды

Необходимое условие сходимости ряда:

если числовой ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достаточное условие расходимости ряда:

если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

1-я теорема *сравнения* рядов.

Если ряд (2) $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{v}_n + \cdots$ сходится и для ряда

(1) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

$u_n \le \mathrm{v}_n$, то ряд (1) сходится.

Если ряд (2) $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{v}_n + \cdots$ расходится и для ряда

(1) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

$u_n \ge \mathrm{v}_n$, то ряд (1) расходится.

2-я теорема *сравнения* рядов.

Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\mathrm{v}_n} = a \neq 0$, то оба ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}_n$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Признак *Даламбера*.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, то $\begin{cases} \text{при } a < 1 \text{ ряд сходится,} \\ \text{при } a > 1 \text{ ряд расходится} \end{cases}$

(при a=1 признак не работает).

4. Признак *Коши*.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, то $\begin{cases} \text{при } a < 1 \text{ ряд сходится,} \\ \text{при } a > 1 \text{ ряд расходится} \end{cases}$

(при a=1 признак не работает).

5. *Интегральный* признак Коши.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, где $u_n = f(n)$.

Знакочередующийся ряд

$$u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n \ge 0).$$

Признак *Лейбница*.

Если для знакочередующегося ряда $u_1 \ge u_2 \ge \cdots \ge u_n \ge \cdots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ сходится.

Знакопеременные ряды

Знакопеременный ряд (1) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ сходится *абсолютно*, если сходится ряд из абсолютных величин (2) $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$.

Знакопеременный ряд (1) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ сходится *условно*, если ряд (1) сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин (2) расходится.

6.2. Функциональные ряды

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Область сходимости ряда – это множество значений переменной x, при которых ряд сходится. Чтобы найти область сходимости, надо решить неравенства

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1 \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1.$$

На границах найденной области необходимо дополнительное исследование сходимости.

6.2.1. Степенные ряды

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Область сходимости степенного ряда представляет собой интервал числовой оси $|x - x_0| < R$, где радиус сходимости R можно найти по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Любую функцию, имеющую в точке x_0 производные любого порядка, можно разложить в *ряд Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

или $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

При $x_0=0$ получается *ряд Маклорена*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена (для каждого ряда указан интервал сходимости)

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)..$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

$$\operatorname{sh}x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}x^n+\cdots,$$

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}x^n\qquad\begin{array}{ll}\text{при } m\ge 0 & (-1\le x\le +1),\\ \text{при } -1<m<0 & (-1<x\le +1),\\ \text{при } m\le -1 & (-1<x<+1).\end{array}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\le +1).$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\quad(-1\le x\le +1).$$

6.2.2. Тригонометрические ряды (ряды Фурье)

Разложение функции $y=f(x)$ *на отрезке* $[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos mx+b_m\sin mx\right),\ \text{где}\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx\ \ (m=0,1,2,\ldots),\ \ b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx\ \ (m=1,2,\ldots).$$

Разложение функции $y=f(x)$ *на отрезке* $[-l,l]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right),\text{ где } a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx,\ b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx\ (m=1,2,\ldots).$$

Разложение четной функции $y=f(x)$ *на отрезке* $[-l,l]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l},\text{ где } a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,$$

$$a_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx\ (m=1,2,\ldots),\ b_m=0.$$

Разложение нечетной функции $y=f(x)$ *на отрезке* $[-l,l]$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin\frac{m\pi x}{l},\text{ где}$$

$$b_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx\ (m=1,2,\ldots),\ a_m=0.$$

7. Функции комплексного переменного

7.1. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа

$z=x+iy$, где x,y – действительные числа, $i=\sqrt{-1}$ – *мнимая единица* ($i^2=-1$). Число x называется *действительной частью*, iy – *мнимой частью* комплексного числа z.

$\bar{z}=x-iy$ – *сопряженное* к z комплексное число.

Пусть $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$. Тогда $z_1=z_2$, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$;

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$;

$z_1\cdot z_2=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)$;

$z\cdot\bar{z}=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2+y^2$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{x_2\cdot y_1-y_2\cdot x_1}{x_2^2+y_2^2}.$$

Геометрически комплексное число $z=x+iy$ изображается точкой $M(x,y)$ координатной плоскости OXY, которая в этом случае называется *комплексной плоскостью* (рис. 7.1).

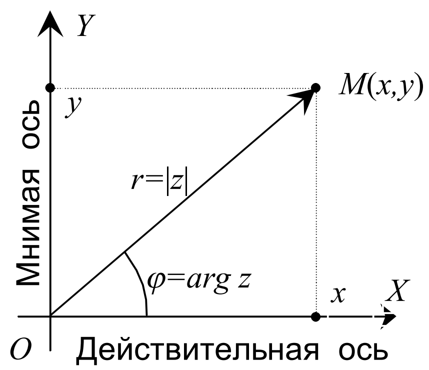

Рис. 7.1. Комплексная плоскость

Ось OX называется *действительной осью*, ось OY – *мнимой осью*.

Тригонометрическая форма комплексного числа

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, где

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *модуль* комплексного числа,

$\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ – *аргумент* комплексного числа,

$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi$ – связь декартовых и полярных координат.

Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1), \ z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$. Тогда

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$;

$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ – формула Муавра;

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ – всего n значений.

7.2. Определение функций комплексного переменного

Функции комплексного переменного $e^z, \sin z, \cos z, \mathrm{sh}\, z, \mathrm{ch}\, z$ определяются как суммы степенных рядов, формально совпадающих с соответствующими рядами для функций действительного переменного. Разница заключается в том, что для функций действительного переменного эти разложения *выводятся* (доказываются), а для функций комплексного переменного *принимаются за определение*.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots;$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots; \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots;$$

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots; \qquad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

Эти ряды сходятся во всей плоскости комплексного переменного.

Если функция комплексного переменного представлена в виде степенного ряда, то область сходимости ряда является *кругом* некоторого радиуса: $|z - z_0| < R$, число R называется *радиусом сходимости* ряда. Такая функция называется *аналитической* в данном круге. Для перечисленных выше рядов радиус сходимости $R = +\infty$.

Для этих функций комплексного переменного сохраняются привычные свойства:

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$, $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$,

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ и т.п.

Формула Эйлера: $e^{zi} = \cos z + i \sin z$. Из нее видно, что функция e^z является периодической с мнимым периодом $2\pi i$.

Из формулы Эйлера следует, что $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$, $\sin(iz) = i \cdot \operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$, $\operatorname{sh}(iz) = i \cdot \sin z$.

Функции $z^{1/n}$ $(n \in N)$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ определяются как обратные к функциям e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Эти функции являются многозначными: если $|z| = r$, $\arg z = \varphi$, то $\ln z = \ln r + i \cdot (\varphi + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7.3. Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного

Определение производной функции комплексного переменного не отличается от определения производной функции действительного переменного. Глубокое отличие заключается в том, что для функций комплексного переменного из существования производной первого порядка следует существование производных всех порядков, а для функции действительного переменного это не так.

Основная теорема теории функций комплексного переменного: любая аналитическая функция имеет производные всех порядков.

Если представить функцию комплексного переменного в виде действительной и мнимой части $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то для существования производной $\dfrac{dw}{dz}$ *недостаточно* дифференцируемости функций двух переменных $u(x, y)$ и $v(x, y)$: для их частных производных должны выполняться следующие *условия Коши-Римана:* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Если условия Коши-Римана выполняются, то производную $\dfrac{dw}{dz}$ можно выразить через частные производные от действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по действительным переменным x и y: $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Заменив частные производные из условий Коши-Римана, можно получить и другие выражения для производной $\dfrac{dw}{dz}$:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dz}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dz}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Правила дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного не отличаются от соответствующих правил для функций действительного переменного.

8. Дифференциальные уравнения

8.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

$$f_1(x)\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\varphi_2(y)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy \cdot$$

Однородные уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Подстановка $\frac{y}{x}=t \;\Leftrightarrow\; y=tx \;\Rightarrow\; y'=t'x+t$ сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные $y'+P(x)y=Q(x)$.

Подстановка $y=u(x)v(x) \;\Rightarrow\; y'=u'v+uv'$.

Уравнение Бернулли $y'+P(x)y=y^nQ(x)$.

Обе части умножаем на y^{-n}, получаем $y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$. Из этого уравнения путем замены $y^{1-n}=z \;\Rightarrow\; (1-n)y^{-n}y'=z'$ – получаем линейное уравнение $\frac{z'}{1-n}+P(x)z=Q(x)$. Уравнение Бернулли можно также решить как линейное с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$.

8.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнения, допускающие понижение порядка

$y^{(n)}=f(x)$ – проинтегрировать n раз по x.

$F(x,y',y'')=0$ – применить подстановку $y'=p \;\Rightarrow\; y''=p'$.

$F(y,y',y'')=0$ – применить подстановку $y'=p \;\Rightarrow\; y''=p\frac{dp}{dy}$.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

$a_0y''+a_1y'+a_2y=0 \quad (a_0\neq 0)$.

Составляем характеристическое уравнение $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$,

находим его корни $\lambda_{1,2}=\frac{a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$.

Если $a_1^2-4a_0a_2>0$, то $\lambda_1\neq\lambda_2$, общее решение $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

Если $a_1^2-4a_0a_2=0$, то $\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{a_1}{2a_0}$, общее решение $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$.

Если $a_1^2-4a_0a_2<0$, то $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, общее решение $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами $a_0y''+a_1y'+a_2y=q(x)\quad(a_0\neq 0)$.

Общее решение $y=Y+\bar{y}$, где

Y – общее решение однородного уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$,

$\bar{y}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные линейно независимые решения однородного уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ $\left(\dfrac{y_1}{y_2}\neq const\right)$, то $y=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x)$ – общее решение неоднородного уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=q(x)$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются путем решения системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0,\\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=q(x)\end{cases}$$

с последующим интегрированием.

Метод неопределенных коэффициентов (применяется для правой части $q(x)$ специального вида).

Если $a_0y''+a_1y'+a_2y=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – заданный многочлен степени *n*, α – *характеристика* правой части, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $\bar{y}=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^m$, где $Q_n(x)$ – полный многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, m – число корней характеристического уравнения $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$, совпадающих с характеристикой правой части α.

Если $a_0y''+a_1y'+a_2y=e^{\alpha x}\cdot\left(P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_k(x)\cdot\sin\beta x\right)$, где $P_n(x)$ и $Q_k(x)$ – заданные многочлены степеней *n* и *k*, $\alpha\pm\beta i$ – характеристика правой части, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $\bar{y}=e^{\alpha x}\cdot\left(M(x)\cdot\cos\beta x+N(x)\cdot\sin\beta x\right)\cdot x^m$, где $M(x)$ и $N(x)$ – полные многочлены с разными неопределенными коэффициентами одинаковой степени, равной наибольшему из чисел *n* и *k*, *m* – число корней характеристического уравнения, совпадающих с характеристикой правой части $\alpha\pm\beta i$.

Для уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=q_1(x)+q_2(x)$ частное решение равно сумме частных решений уравнений $a_0y''+a_1y'+a_2y=q_1(x)$ и $a_0y''+a_1y'+a_2y=q_2(x)$.

9. Дискретная математика

9.1. Элементы комбинаторики

Правило равенства: если X и Y – конечные множества и между ними существует взаимно однозначное соответствие, то X и Y содержат одинаковое число элементов.

Правило суммы: если объект A может быть выбран m способами, а объект B другими n способами, то выбор «либо A, либо B» может быть сделан $m+n$ способами.

Правило произведения: если объект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то выбор пары (A, B) может быть осуществлен $m{\cdot}n$ способами.

Кортежем (альтернативные названия – *вектор* и *слово*) называется конечная последовательность (допускающая повторения) элементов некоторого множества: $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Число членов последовательности k называется *длиной* кортежа, члены последовательности – *компонентами* кортежа. Если число элементов множества n, то число кортежей длины k равно n^k. При $k = 0$ по определению $n^0 = 1$ – имеется единственный *пустой кортеж* длины 0.

Подмножества. Их число в n-элементном множестве равно 2^n.

Перестановки – комбинации, отличающиеся порядком элементов. Число перестановок из n элементов $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n = n!$

Размещения – комбинации, отличающиеся составом и порядком элементов. Число размещений из n элементов по k элементов

$$A_n^k = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-(k-1))}_{k\text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетания – комбинации, отличающиеся только составом элементов. Число сочетаний из n элементов по k элементов

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Мультимножества (*сочетания с повторениями*). Это множества с повторяющимися элементами, например: $\{1,1,2,5\}$ – мультимножество из 4-х элементов. Число k-элементных мультимножеств в n-элементном множестве обозначатся $\overline{\mathrm{C}}_n^k$ или CP_n^k, оно выражается через обычное число сочетаний: $\overline{\mathrm{C}}_n^k = \mathrm{C}_{n+k-1}^k$.

Перестановки заданного мультимножества

Пусть мультимножество в множестве $\{1,2, \ldots, n\}$ содержит элемент 1 k_1 раз, элемент 2 k_2 раз, … , элемент n k_n раз, мощность этого мультимножества $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$. Число перестановок такого мультимножества равно $\dfrac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$.

9.2. Алгебра множеств

Множества обозначают заглавными латинскими буквами $A, B,\ldots, X, Y, \ldots$. Элементы множеств обозначаются строчными буквами $a, b,\ldots, x, y, \ldots$

Запись $x \in X$ означает, что элемент x *принадлежит* множеству X, а запись $x \notin X$ –элемент x *не принадлежит* множеству X.

Множества X и Y называются *равными* ($X = Y$), если эти множества состоят из одних и тех же элементов.

Множество X *включено* в множество Y ($X \subseteq Y$), если все элементы множества X являются элементами множества Y. В этом случае множество X называется *подмножеством* множества Y.

Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, множество X *строго включено* в множество Y ($X \subset Y$).

Операции с множествами

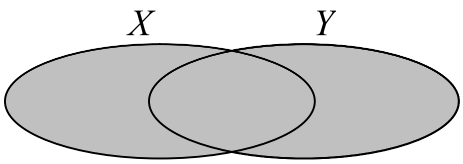

Рис. 9.1. Объединение множеств

Объединением (суммой) множеств X и Y ($X \cup Y$ или $X+Y$) называется множество, элементами которого являются все элементы множества X и все элементы множества Y (рис. 9.1).

Свойства объединения:

коммутативность $X \cup Y = Y \cup X$,

ассоциативность $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$.

Пересечением (произведением) множеств X и Y ($X \cap Y$ или $X \cdot Y$) называется множество, элементами которого являются все элементы, принадлежащие как множеству X, так и множеству Y (рис. 9.2).

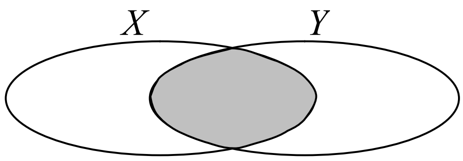

Рис. 9.2. Пересечение множеств

Свойства пересечения:

коммутативность $X \cap Y = Y \cap X$,

ассоциативность $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$.

Законы *дистрибутивности*:

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \quad \text{и} \quad (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z).$$

В алгебре множеств используется *пустое множество* $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента (аналог нуля). Для любого множества X выполняются равенства

$$X \cup \varnothing = X, \ X \cap \varnothing = \varnothing.$$

Универсальное множество (универс) обозначается Ω (или I) (аналог единицы). Универсу принадлежат все элементы, рассматриваемые в данном рассуждении.

Для любого множества X выполняются равенства: $I \cup X = I$, $I \cap X = X$.

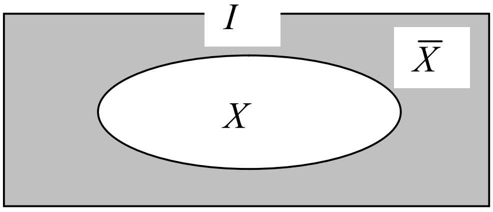

Рис. 9.3. Дополнение множества

Дополнением множества X (обозначается $\overline{X}$) называется множество всех элементов универсального множества I, не принадлежащих X (рис. 9.3).

Свойства дополнения: $\overline{\overline{X}} = X$, $X \cup \overline{X} = I$, $X \cap \overline{X} = \varnothing$.

Законы Де Моргана: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Разностью множеств X и Y (обозначается $X \setminus Y$) называют множество всех элементов X, не входящих в Y (рис. 9.4). Разность множеств X и Y равна пересечению множества X и дополнения к Y: $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

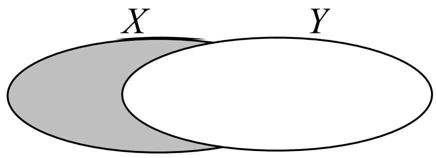

Рис. 9.4. Разность множеств

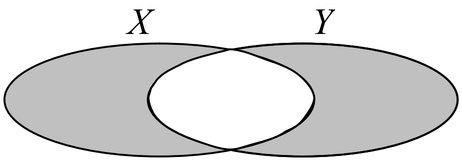

Рис. 9.5. Симметрическая разность множеств

Симметрической разностью или *дизъюнктивной суммой* ($X \, \Delta \, Y$) называется множество элементов, принадлежащих или X, или Y, но не обоим вместе (рис. 9.5):

$X \, \Delta \, Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ или

$X \, \Delta \, Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

9.3. Алгебра логики

Высказывание – повествовательное предложение, которое либо *истинно* (верно), либо *ложно* (неверно).

С помощью логических операций (связок) из простых высказываний строятся сложные. Высказывания обозначаются латинскими буквами, ложное высказывание обозначается 0, истинное 1.

Логические операции

Отрицанием высказывания a (обозначается $\overline{a}$) называется высказывание, противоположное a.

Свойство отрицания: $\overline{\overline{a}} = a$ (*двойное отрицание*).

Таблица истинности отрицания

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Дизъюнкцией (от латинского слова disjunctio – разобщение, различие) двух высказываний a и b (обозначения: $a \vee b$, $a + b$) называется высказывание, читаемое “a или b“, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда ложны оба высказывания.

Свойства дизъюнкции:

коммутативность $a \vee b = b \vee a$,

ассоциативность $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$.

Конъюнкцией (от латинского слова conjunctio – союз, связь) двух высказываний a и b (обозначения: $a \wedge b$, $a \cdot b$) называется высказывание, читаемое “a и b”, которое истинно, когда истинны оба высказывания, и ложно, когда ложно хотя бы одно из высказываний.

Свойства конъюнкции:

коммутативность $a \wedge b = b \wedge a$,

ассоциативность $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c$.

Законы *дистрибутивности*:

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \quad \text{и} \quad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

Законы *Де Моргана*: $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$, $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$.

Импликацией (от латинского слова implicatio – сплетение) двух высказываний a и b называется высказывание, читаемое “если a, то b” либо ”a влечет b”, которое ложно только в том случае, когда a – истинно, а b – ложно, в остальных же случаях – истинно (обозначается $a \Rightarrow b$). Импликация выражается через дизъюнкцию и отрицание: $(a \Rightarrow b) = (a \vee \overline{b})$.

Импликация некоммутативна и неассоциативна.

Два высказывания a и b *эквивалентны* (обозначается $a \Leftrightarrow b$), если $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$.

Операция *эквиваленция* является коммутативной и ассоциативной.

Таблицы истинности логических операций:

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

9.4. Графы

Граф состоит из двух множеств – множества *вершин* и множества *ребер*, причем для каждого ребра указана пара вершин, которые это ребро *соединяет*.

Если ребро e соединяет вершину a с вершиной b и пара (a,b) считается упорядоченной (вершина a – *начало* ребра, вершина b – его *конец*), то это ребро называется *ориентированным*. Если пара (a,b) считается неупорядоченной, то ребро называется *неориентированным*, а обе вершины – его *концами* (a соединяется с b и b соединяется с a).

Если все ребра графа ориентированные, граф называют *ориентированным*. Если все ребра графа неориентированные, граф называют *неориентированным*.

Если в графе два (или больше) разных ребра соединяют одну и ту же пару вершин в одном и том же направлении, эти ребра называются *кратными*. Граф с кратными ребрами называют *мультиграфом*.

Ребро вида (a,a), соединяющее вершину a с нею же самой, называется *петлей*.

Более точное определение: *граф* есть тройка $G=(V,E,I)$, где V и E – множества, I – отображение множества E в множество пар элементов множества V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E – *ребрами*, I – *функцией инцидентности*.

Пример: $V=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{a,b,c,d,e,f\}$, функция I задана таблицей:

Ребро	a	b	c	d	e	f
Пара вершин	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(2,1)	(2,3)	(3,2)

Ориентированный мультиграф, представленный этой таблицей, показан на рис. 9.6. Вершина 5 является изолированной.

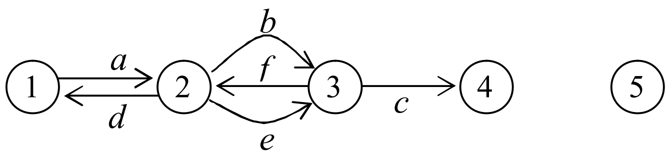

Рис. 9.6

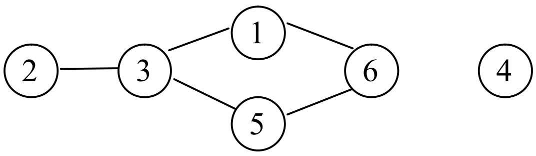

Рис. 9.7

Неориентированный граф без петель и кратных ребер называется *обыкновенным*. Для его задания достаточно перечислить вершины и ребра, каждое ребро есть неупорядоченная пара вершин. Для графа с 6 вершинами и 5 ребрами (рис. 9.7) вершины $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, ребра $E=\{(1,3),(1,6),(2,3),(3,5),(5,6)\}$, вершина 4 является изолированной.

Маршрут – такая последовательность вершин графа, что любые две соседние вершины последовательности соединены ребром. Если ребро ориентированное, то первая из этих двух вершин должна быть его началом, а вторая – концом. При наличии в графе кратных ребер в описании маршрута кроме вершин должны указываться также ребра.

Эти ребра называются *ребрами маршрута*; маршрут *проходит* через них, их число называется *длиной* маршрута. Маршрут *соединяет* первую вершину последовательности с последней. Эти вершины называются соответственно *началом* и *концом* маршрута, остальные вершины – *промежуточными*. Маршрут называется *замкнутым*, если его начало совпадает с концом.

Путь – это маршрут, в котором все ребра различны. Путь называется *простым*, если и все вершины в нем различны.

Цикл – это замкнутый путь. Цикл называется *простым*, если все его вершины (кроме первой и последней) попарно различны.

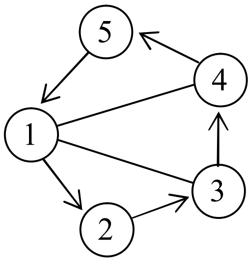

Рис. 9.8

В графе на рисунке 9.8 ребра $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,1)$ – ориентированные, ребра $(1,4)$, $(1,3)$ – неориентированные. В этом графе последовательность вершин представляют собой:

2,3,5,4 – не маршрут;

2,3,4,5,1,3,4– маршрут, но не путь;

3,1,4,5,1,2– путь, но не простой;

1,3,4,1,2,3,1– замкнутый маршрут, но не цикл;

1,2,3,1,4,5,1– цикл, но не простой;

2,3,4,5,1,2 – простой цикл.

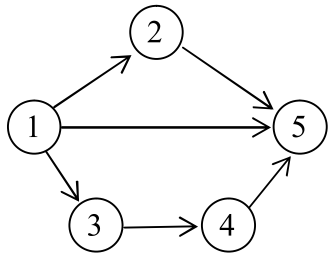

Рис. 9.9

Иногда в графе выделяют некоторые вершины, называемые *полюсами*. Чаще всего рассматриваются двухполюсные графы, полюса которых в зависимости от прикладной области называются *начало* и *конец* либо *источник* и *сток*. Обычно такие графы считаются ориентированными. В таком графе любой путь, ведущий из начала в конец, называется *полным*. Так, в графе, представленном на рис. 9.9, в котором вершина 1 – начало, а вершина 5 – конец, имеется три полных пути: 1,2,5; 1,5; 1,3,4,5.

10. Общая и линейная алгебра

10.1. Алгебраические системы

Алгебраическая система определяется

- одним или несколькими базовыми множествами *элементов* произвольной природы; это могут быть числа, векторы, матрицы, функции (например, многочлены) и т.д.;
- набором алгебраических *операций* с этими элементами; результатом выполнения операции с какими-то элементами-участниками является новый элемент; элементы-участники называются *операндами*.

Каждая операция характеризуется количеством операндов, участвующих в ней. Большинство операций являются *бинарными* или *двухместными*, встречаются *унарные* (*одноместные*) операции, а также *тернарные* (*трехместные*), операции с большим количеством операндов встречается редко.

Операция называется *частичной*, если она не определена (не выполнима) при некоторых значениях операндов.

Множество *замкнуто* относительно операции, если она выполнима при любых значениях операндов из этого множества и результат операции также принадлежит этому множеству. В противном случае множество *незамкнуто* относительно операции.

Пусть на непустом базовом множестве M задана бинарная операция $\bullet$. Для любых элементов $x,y \in M$ результат операции $z=x \bullet y$, где $z \in M$, т.е. множество M замкнуто относительно операции $\bullet$.

Операция $\bullet$ называется *коммутативной*, если для любых $x,y \in M$ выполняется равенство $x \bullet y=y \bullet x$.

Элемент $e \in M$ называется *нейтральным* относительно рассматриваемой операции $\bullet$, если для любого $x \in M$ выполняются равенства $x \bullet e=x$ и $e \bullet x=x$.

Относительно сложения чисел нейтральным является число 0.

Относительно умножения чисел нейтральным является число 1.

Для произвольного элемента $x \in M$ *симметричным элементом* называется такой $\bar{x} \in M$, что $x \bullet \bar{x}=e$ и $\bar{x} \bullet x=e$ (существование нейтрального элемента e предполагается).

Относительно сложения чисел, где $e=0$, симметричным к числу x является число $-x$.

Относительно умножения чисел, где $e=1$, симметричным к числу x является число x^{-1} ($x=0$ не должно входить в базовое множество M).

Операция $\bullet$ называется *ассоциативной*, если для любых $x,y,z \in M$ выполняется равенство $(x \bullet y) \bullet z=x \bullet (y \bullet z)$.

Сложение и умножение чисел ассоциативны.

Бинарная операция на конечном множестве может быть задана таблицей, в которой на пересечении строки, соответствующей элементу x, и столбца, соответствующего элементу y, стоит элемент $x \bullet y$. Пример такой таблицы для множества $M=\{a,b\}$.

$\bullet$	a	b
a	a	b
b	a	b

Замкнутость множества относительно операции проявляется в том, что в таблице не должно быть "посторонних" элементов, отсутствующих в заголовках строк и столбцов (в примере множество замкнуто). Для коммутативной операции таблица должна быть симметрична относительно диагонали (в примере это свойство нарушается). Ни a, ни b не является нейтральным элементом, операция ассоциативна.

Непустое множество M с заданной на нем бинарной операцией $\bullet$ называется *группой* G ($G=(M, \bullet)$), если эта операция

- ассоциативна, т.е. выполняется равенство $(x \bullet y) \bullet z=x \bullet (y \bullet z)$ для любых $x,y,z \in M$;

- в множестве M имеется нейтральный элемент e такой, что для любого $x \in M$ выполняются равенства $x \bullet e = x$ и $e \bullet x = x$;
- для всякого $x \in M$ существует симметричный элемент $\bar{x} \in M$ такой, что $x \bullet \bar{x} = e$ и $\bar{x} \bullet x = e$.

Если групповая операция $\bullet$ коммутативна, группа $G=(M, \bullet)$ называется *коммутативной* (или *абелевой*).

Обозначения для основных числовых множеств:

N – натуральные, **Z** – целые, **Q** – рациональные, **R** – действительные, **C** – комплексные.

Примеры аддитивных групп: (**Z**, +), (**Q**, +), (**R**, +), (**C**, +). Эти группы коммутативны, в них нейтральный элемент – число 0, для произвольного числа x симметричным элементом является число $-x$.

Примеры мультипликативных групп: ($\mathbf{Q}_*$, $\cdot$), ($\mathbf{R}_*$, $\cdot$), ($\mathbf{C}_*$, $\cdot$). Здесь $\mathbf{Q}_*$ ($\mathbf{R}_*$, $\mathbf{C}_*$) – множество рациональных (действительных, комплексных) чисел, отличных от нуля.

Группа $G'=(M', \bullet)$, где $M' \subseteq M$, называется *подгруппой* группы $G=(M, \bullet)$.

Для аддитивных групп (**Z**, +) $\subset$ (**Q**, +) $\subset$ (**R**, +) $\subset$ (**C**, +).

Для мультипликативных групп ($\mathbf{Q}_*$, $\cdot$) $\subset$ ($\mathbf{R}_*$, $\cdot$) $\subset$ ($\mathbf{C}_*$, $\cdot$).

Пусть $G_1=(M_1, \bullet)$ и $G_2=(M_2, \Diamond)$ – две группы на разных множествах и с разными операциями. Группы $G_1=(M_1, \bullet)$ и $G_2=(M_2, \Diamond)$ *изоморфны*, если

- существует взаимно однозначное отображение $\varphi: M_1 \to M_2$,
- для любых $x, y \in M_1$ имеем $\varphi(x \bullet y) = \varphi(x) \Diamond \varphi(y)$.

Символически изоморфизм групп записывается так: $G_1 \cong G_2$.

Пример изоморфизма: ($\mathbf{R}_+$, $\cdot$) $\cong$ (**R**, +), отображение φ: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ задается формулой $\varphi(x) = \ln x$. Так как $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, группы изоморфны.

Кольцо – алгебраическая система с двумя бинарными операциями, которые называются и обозначаются сложением (+) и умножением ($\cdot$). Символически $K=(M, +, \cdot)$. Для операций должны выполняться следующие свойства:

- относительно сложения: подсистема $(M, +)$ является коммутативной группой, она называется *аддитивной группой кольца*. Нейтральный элемент этой группы обозначается 0, элемент, симметричный x, обозначается $-x$;
- умножение не обязательно коммутативно и ассоциативно, не обязательно имеется нейтральный элемент и симметричные элементы. Если умножение коммутативно, кольцо также называется коммутативным, если умножение ассоциативно, кольцо называется ассоциативным;

- сложение и умножение связаны законами *дистрибутивности*: $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ и $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$.

Кольцо $K'=(M', +, \cdot)$, где $M'\subseteq M$, называется *подкольцом* в $K=(M, +, \cdot)$.

Числовые кольца $(\mathbf{Z}, +, \cdot) \subset (\mathbf{Q}, +, \cdot) \subset (\mathbf{R}, +, \cdot) \subset (\mathbf{C}, +, \cdot)$, эти кольца коммутативны и ассоциативны.

Полем называется кольцо $F=(M, +, \cdot)$, в котором:

- умножение ассоциативно и коммутативно, нейтральный элемент относительно умножения обозначается 1, элемент, симметричный для x относительно умножения, обозначается x^{-1};
- нейтральные элементы относительно сложения и умножения различны, т.е. $0\neq 1$. Отсюда следует, что поле содержит не менее двух элементов;
- элемент x^{-1} существует для любого $x\neq 0$.

Подсистема $(M_*, \cdot)$ ненулевых элементов поля с операцией умножения является группой, она называется *мультипликативной группой* поля.

Поле $F'=(M', +, \cdot)$, где $M'\subseteq M$, называется *подполем* в $F=(M, +, \cdot)$.

Основные числовые поля и соотношения между ними:

$$(\mathbf{Q}, +, \cdot) \subset (\mathbf{R}, +, \cdot) \subset (\mathbf{C}, +, \cdot).$$

10.2. Линейные пространства и линейные преобразования

Векторы – произвольные объекты, которые можно складывать и умножать на числа. При этом должны выполняться обычные свойства этих операций, известные из алгебры геометрических векторов. Сохраняются понятия линейной зависимости и независимости.

Множество векторов $\boldsymbol{V}$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения вектора на число, называется *векторным пространством*.

Базисом пространства называется линейно независимая система векторов, взятых в определенном порядке, через которую можно выразить любой вектор пространства.

Размерностью пространства называется количество векторов в любом базисе этого пространства.

Если вектор $\boldsymbol{x}$ выражается через базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{x} = x_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + x_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{e}_n,$$

то коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, само это выражение называется *разложением* вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Если каждому вектору $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{V}$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\varphi(\boldsymbol{x})$ этого пространства, то говорят, что в пространстве задано *преобразование* φ. Вектор $\varphi(\boldsymbol{x})$ называется *образом* вектора $\boldsymbol{x}$ в преобразовании φ, вектор $\boldsymbol{x}$ называется *прообразом* вектора $\varphi(\boldsymbol{x})$.

Преобразование φ называется *линейным*, если для любых двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{V}$ и для любого числа k выполняются условия

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}),$$
$$\varphi(k\cdot\boldsymbol{x}) = k\cdot\varphi(\boldsymbol{x}).$$

Линейное преобразование φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой j-й столбец состоит из коэффициентов разложения базисного вектора $\boldsymbol{e}_j$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Если базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ зафиксирован, то вектор $\boldsymbol{x} = x_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\cdot\boldsymbol{e}_n$ можно записать в виде арифметического столбца $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда его образ $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$ выражается в виде арифметического столбца $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, причем $y = A\cdot x$ (произведение квадратной матрицы A на столбец x).

Пример. Линейное преобразование двумерного пространства векторов $\boldsymbol{x} = x_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + x_2\cdot\boldsymbol{e}_2$ задано формулой $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_2)\cdot\boldsymbol{e}_1 + (x_1 - 2x_2)\cdot\boldsymbol{e}_2$. Найти матрицу преобразования A.

Решение. Разложение вектора $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$ по базису: $\boldsymbol{y} = y_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + y_2\cdot\boldsymbol{e}_2$, где $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_1 - 2x_2, \end{cases}$ в матричном виде $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Отсюда матрица преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1980. – 974 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I. – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. – М.: Высшая школа, 1980. – 365 с.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
5. Брусин В.А, Петров В.В., Шульц Г.Л. Элементы дискретной математики. – Н.Новгород, ННГАСУ, 2002. – 55 с.
6. Элементы комбинаторики. Методическая разработка. Составитель М.И. Лиогонький. – Н.Новгород, ННГАСУ, 2003. – 58 с.
7. Справочник по математике. Методические указания. Составители Г.П. Опалева, Г.Л.Шульц. – Н.Новгород, ННГАСУ, 2007. – 35 с.
8. Алгебра. Методические указания и контрольные задания. Составитель Г.Л.Шульц. – Н.Новгород, ННГАСУ, 2009. – 78 с.

Оглавление

Лариса Николаевна Кривдина
Галина Львовна Шульц

Справочник по математике (второе издание)

Методические указания для студентов ННГАСУ всех специальностей

Подписано в печать
Формат 60×90 $1/16$. Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л   Усл. печ. л.
Тираж 500 экз.
Заказ №

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет",
603950, Н.Новгород, Ильинская, 65.

Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65.