Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Т.А.Береговая

Функции многих переменных

Методические указания и контрольные задания по высшей математике для студентов заочного отделения

Нижний Новгород
ННГАСУ
2009

УДК 51(075)

Береговая Т.А. Функции многих переменных. Методические указания и контрольные задания по высшей математике для студентов заочной формы обучения.
Нижегород.гос.архит.-строит.ун-т. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2009.- 30с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения при изучении раздела «Функции многих переменных» курса высшей математики. В работе излагаются основные понятия и факты раздела «Функции многих переменных». Большинство рассматриваемых понятий и результатов иллюстрируются примерами, дается подробный разбор типовых задач и контрольные задания для студентов.

Составитель: Береговая Т.А.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет, 2009

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Основные понятия

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторого множества *X* соответствует одно вполне определенное значение переменной величины *z*. Тогда говорят, что задана ***функция нескольких переменных*** $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 1. Формула $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ задает объем V цилиндра как функцию двух переменных: R - радиуса основания и h - высоты цилиндра.

Пример 2 . Сила тока I участка электрической цепи, имеющей напряжение U и сопротивление R, выражается формулой $I = \frac{U}{R}$. Здесь I есть функция двух переменных U и R.

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z - *зависимой переменной*, а символ f означает *закон соответствия*. Множество *X*, являющееся подмножеством *n*-мерного пространства, называют *областью определения функции*.

В данном пособии будем вести изложение в основном для функций двух переменных (*n*=2), при этом практически все понятия и теоремы, сформулированные для *n*=2, легко переносятся и на случай *n*>2. Однако рассмотрение случая двух переменных позволяет использовать наглядную геометрическую иллюстрацию основных понятий данной темы.

Функцию двух переменных будем обозначать в дальнейшем $z = f(x, y)$. Тогда ее область определения *X* есть подмножество координатной плоскости *Oxy*.

Пример 3. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Функция z существует для тех пар значений x_1 и x_2, которые удовлетворяют неравенству $9 - x^2 - y^2 > 0$, откуда $x^2 + y^2 < 9$, то есть представляет собой круг, не включая границу, с центром в начале координат и радиусом $R=3$.

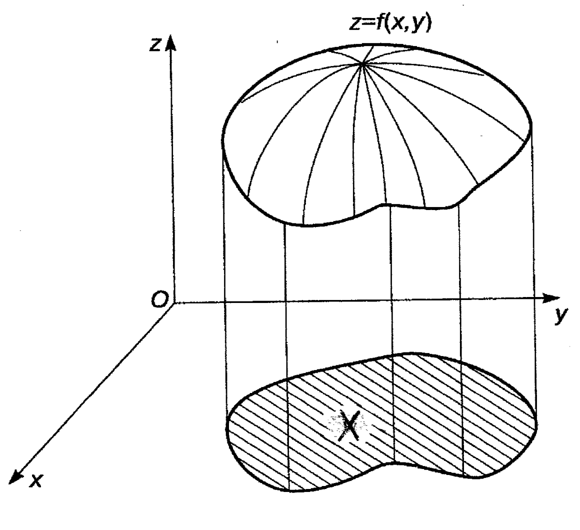

Рис. 1

Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x,y,z), координаты которых связаны соотношением $z=f(x,y)$.

График функции двух переменных представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве (см. рис. 1).

Формально график можно определить и для функции, содержащей более двух переменных. В этом случае он называется гиперповерхностью в (n+1)-мерном пространстве. О таком графике можно говорить только абстрактно, изобразить его на рисунке не представляется возможным.

Как правило, построение поверхности оказывается довольно трудной задачей, да и сама поверхность обладает гораздо меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. Поэтому в случае двух переменных для изучения поведения функции используют и другие, более наглядные инструменты. Одним из таковых являются линии уровня. Понятие линии уровня широко используется прежде всего в геодезии, картографии, при составлении синоптических карт, а также при описании различных физических полей (температура, давление и пр.).

Линией уровня *функции двух переменных* $z=f(x,y)$ *называется плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью* $z=C$, *где C - постоянная величина, параллельной координатной плоскости Oxy.*

Обычно линии уровня, соответствующие различным значениям постоянной величины *C*, проецируются на одну плоскость, например на координатную плоскость *Oxy*, тогда их удобно анализировать и с их помощью исследовать сложный характер поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$.

Итак, линии уровня функции $z = f(x, y)$ - это семейство кривых на координатной плоскости *Oxy*, описываемое уравнениями вида $f(x, y) = C$.

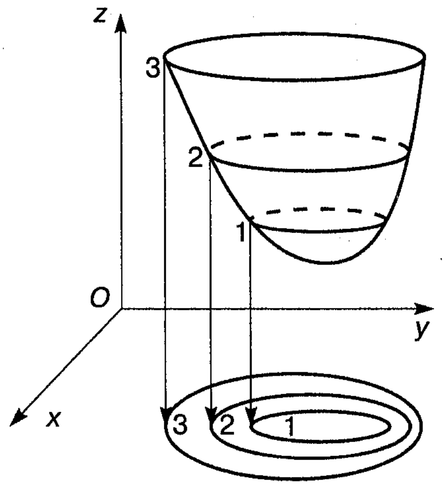

Рис. 2

Обычно берут арифметическую прогрессию чисел C_i с постоянной разностью h, тогда по взаимному расположению линий уровня можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$. Там, где функция изменяется быстрее, линии уровня сгущаются, а там, где поверхность пологая, линии уровня располагаются реже (рис. 2).

Пример 4. Найти и изобразить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Решение. Линии уровня данной функции – это семейство кривых на плоскости *Oxy*, описываемое уравнением $x^2 + y^2 - 2y = C$ или $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$. Это уравнение описывает семейство окружностей с центром в точке (0,1) и радиусом $\sqrt{C+1}$; точка (0,1) – это вырожденная линия уровня, соответствующая минимальному значению функции z=-1 (рис. 3).

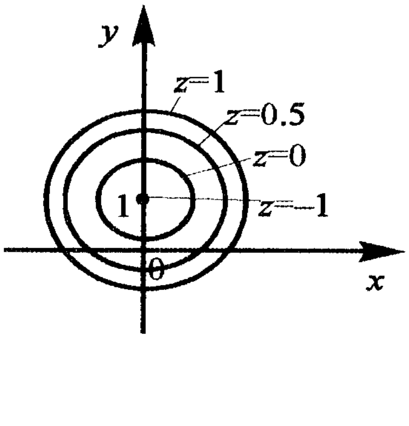

Рис. 3

2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Большая часть понятий математического анализа, определенных ранее для функций одной переменной, может быть перенесена на случай двух переменных.

ε-окрестностью точки $M_0(x_0, y_0) \in X$ называется круг, с центром в точке M_0 и радиусом ε.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), за исключением, может быть, самой этой точки. Число A называется ***пределом функции*** *$z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или в точке (x_0, y_0))****,*** *если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε), такое, что для всех точек из δ-окрестности точки (x_0, y_0), выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.*

Обозначается предел так: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ- окрестность точки (x_0, y_0), что во всех ее точках (x, y), отличных от (x_0, y_0), аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x, y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha$. Условие $x \to 0$, $y \to 0$ равносильно тому, что $\alpha \to 0$. Тогда данный предел запишется в виде

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1 - \alpha^2)}{\alpha} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1 - \alpha^2)'}{\alpha'} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot (-2\alpha)}{1} = 0$$

.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) *называется выражение* $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, *где* (x, y) *- любая точка из области определения функции.*

Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, тогда $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ *называется* ***непрерывной*** *в точке* $M_0(x_0, y_0) \in X$, *если ее полное приращение в этой точке стремится к нулю при* $\Delta x \to 0$ *и* $\Delta y \to 0$, *то есть* $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

3. Частные производные и дифференцируемость функции двух переменных

Частным приращением функции $z = f(x, y)$ ***в точке*** (x_0, y_0) ***по переменной x*** *называется выражение* $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Частным приращением функции $z = f(x, y)$ ***в точке*** (x_0, y_0) ***по переменной y*** *называется выражение* $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ ***по переменной x*** *называется предел отношения частного приращения* $\Delta_x z$ *к приращению* Δx *аргумента x при стремлении* Δx *к нулю.*

Обозначают частные производные одним из символов

$$z'_x, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y).$$

Итак, по определению $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Аналогично определяется частная производная по переменной *y*:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что их нахождение сводится к обычному дифференцированию данной функции одной выделенной переменной при условии, что все остальные переменные считаются константами.

Пример. Найти частные производные функций: а) $z = x^3 \sin y + y^4$, б) $z = x^y$.

Решение. а) $z = x^3 \sin y + y^4$. Чтобы найти частную производную по *x*, считаем *y* постоянной величиной. Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cdot \sin y$. Аналогично, дифференцируем по *y*, считая *x* постоянной, то есть $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot \cos y + 4y^3$.

б) $z = x^y$. При фиксированном *y* имеем степенную функцию от *x*. Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$. При фиксированном *x* функция является показательной относительно *y* и $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$.

Функция $z = f(x, y)$ *называется* ***дифференцируемой*** *в точке* (x_0, y_0), *если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (1)$$

где α *и* β *- бесконечно малые при* $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ *функции.*

Теорема 1. *(Критерий дифференцируемости функции) Функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0) *тогда и только тогда, когда она имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *причем* $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

В силу теоремы 1, равенство (1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (2)$$

4. Дифференцирование сложных функций

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, где переменные x и y, в свою очередь, являются функциями независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f[x(t),\ y(t)]$ будет сложной функцией независимой переменной t, а переменные x и y будут для нее промежуточными переменными.

Теорема 1. *Если функции* $x = x(t)$ *и* $y = y(t)$ *дифференцируемы в точке* t, *а функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M(x(t); y(t))$, *то сложная функция* $z = f[x(t),\ y(t)]$ *также дифференцируема в точке* t, *причем*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\ . \qquad (1)$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, где $z = \cos\dfrac{x}{y},\ x = 2t + t^2,\ y = \sqrt{t}$.

Решение. Найдем сначала $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (-\sin\frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (-\sin\frac{x}{y}) \cdot (-\frac{x}{y^2}), \qquad \frac{dx}{dt} = 2 + 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Тогда, согласно формуле (1), имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \cdot (2 + 2t) + \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \left(-\sin\frac{2t + t^2}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot (2 + 2t) + \left(-\sin\frac{2t + t^2}{\sqrt{t}}\right) \cdot \left(-\frac{2t + t^2}{t}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \left(-\sin\frac{2t + t^2}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot (1 + 1{,}5t).$$

Рассмотрим более общий случай. Пусть $z = f(x, y)$ - функция двух переменных x и y, которые, в свою очередь, зависят от двух или большего числа переменных. Например, пусть $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$. Тогда функция $z = f[x(u, v),\ y(u, v)]$ будет сложной функцией независимых переменных u и v.

Теорема 2. *Если функции* $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ *дифференцируемы в точке* $M'(u, v)$, *а функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M(x; y)$, *где* $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$, *то сложная функция* $z = f[x(u, v),\ y(u, v)]$ *дифференцируема в точке* $M'(u, v)$, *причем ее частные производные находятся по формулам*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\ . \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Пример 2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, где $z = x^2 \cdot y^3$, $x = u + 2v$, $y = \dfrac{u}{v}$.

Решение. Найдем сначала $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 2, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}.$$

Тогда, согласно формулам (2), имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xy^3 \cdot 1 + 3x^2y^2 \cdot \frac{1}{v} = 2(u+2v)\left(\frac{u}{v}\right)^3 + 3(u+2v)^2\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{1}{v}$$

.

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2xy^3 \cdot 2 + 3x^2y^2 \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = 4(u+2v)\left(\frac{u}{v}\right)^3 - 3(u+2v)^2\left(\frac{u}{v}\right)^2\left(\frac{u}{v^2}\right)$$

5. *Дифференцирование неявных функций*

Функция $z = f(x,y)$ называется ***неявной***, если она задается уравнением

$$F(x,y,z) = 0, \qquad (1)$$

неразрешенным относительно z. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением (1). Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f(x,y)$, получим тождество $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$. Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,f(x,y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,f(x,y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad (F'_z \neq 0). \qquad (2)$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, где $e^z + z - x^2 y + 1 = 0$.

Решение. Здесь $F(x,y,z) = e^z + z - x^2 y + 1$, $F_x^/ = -2xy$, $F_y^/ = -x^2$, $F_z^/ = e^z + 1$. Тогда по формуле (2) имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z + 1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}$.

6. *Касательная плоскость и нормаль к поверхности*

Пусть функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в точке (x_0, y_0), задает в пространстве поверхность S. Пересечем эту поверхность плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (см. рис.4). Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x,y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$. В силу дифференцируемости функции $z = f(x,y)$ в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1. Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется ***касательной плоскостью*** к поверхности S в точке M_0.

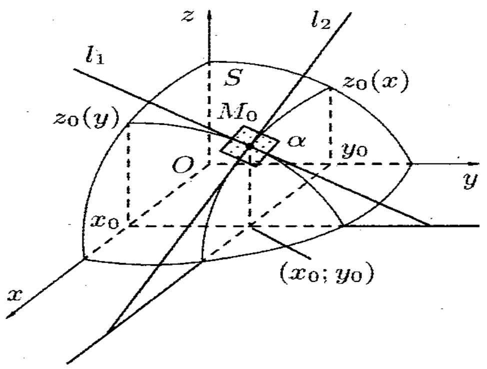

Рис. 4

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ***нормалью*** *к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.*

Теорема. *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0), *то касательная плоскость к поверхности, заданной уравнением* $z = f(x, y)$, *в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *определяется уравнением*

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \qquad (1)$$

а нормаль к этой поверхности в заданной точке имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (2)$$

Если поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ и функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то касательная плоскость к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнением

$$F_x'(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \qquad (3)$$

а нормаль к этой поверхности в заданной точке имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (4)$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, то есть не особых точек поверхности. Точка M_0 поверхности называется ***особой***, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Пример. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности: а) $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, -1, 2)$, б) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точке $M_0(2, 2, 3)$.

Решение. а) Поверхность задана явно, поэтому воспользуемся формулами (1), (2). Здесь $f_x' = 2x$, $f_x'(1, -1, 2) = 2 \cdot 1 = 2$, $f_y' = 2y$, $f_y'(1, -1, 2) = 2 \cdot (-1) = -2$. Тогда искомое уравнение касательной плоскости имеет вид: $z - 2 = 2 \cdot (x - 1) + (-2) \cdot (y - (-1))$ или $2x - 2y - z - 2 = 0$ и уравнение нормали: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1}$.

б) Поверхность задана неявно, поэтому воспользуемся формулами (3), (4). Здесь $F(x,y,z)=x^2-4y^2+2z^2-6$, $F_x'=2x$, $F_x'(2,2,3)=2\cdot 2=4$, $F_y'=-8y$, $F_y'(2,2,3)=-8\cdot 2=-16$, $F_z'=4z$, $F_z'(2,2,3)=4\cdot 3=12$. Тогда искомое уравнение касательной плоскости имеет вид: $4\cdot(x-2)+(-16)\cdot(y-2)+12\cdot(z-3)=0$ или $x-4y+3z-3=0$ и уравнение нормали: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-2}{-16}=\dfrac{z-3}{12}$.

7. Полный дифференциал функции двух переменных и его геометрический смысл

***Дифференциалом** dz **дифференцируемой в точке** (x_0,y_0) **функции** $z=f(x,y)$ называется главная линейная часть полного приращения этой функции в точке (x_0,y_0), то есть*

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y. \qquad (1)$$

Если положить $z=x$, то $dz=dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x$, то есть $dx=\Delta x$. Аналогично, полагая $z=y$, получим, что $dy=\Delta y$. Таким образом, дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих переменных, то есть

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy. \qquad (2)$$

Геометрический смысл дифференциала: если полное приращение функции Δz представляет геометрически приращение AC аппликаты поверхности $z=f(x,y)$, то дифференциал функции dz есть приращение AB аппликаты касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в данной точке,

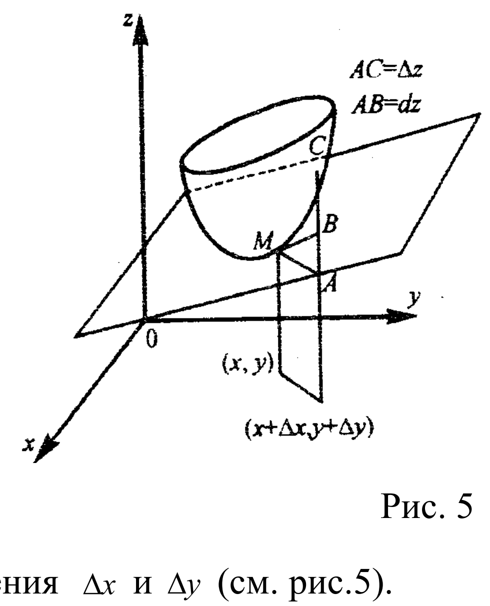

Рис. 5

когда переменные x и y получают приращения Δx и Δy (см. рис.5).

Напомним, что если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$. Отсюда получаем формулу приближенных вычислений:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y \qquad (4)$$

Пример. Вычислить приближенно $\ln\left(1{,}98 - \sqrt{1{,}01}\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \ln\left(x - \sqrt{y}\right)$. Тогда $\ln\left(1{,}98 - \sqrt{1{,}01}\right) = \ln\left((x_0 + \Delta x) - \sqrt{y_0 + \Delta y}\right)$, где $x_0 = 2,\ \Delta x = -0{,}02,\ y_0 = 1,\ \Delta y = 0{,}01$. Воспользуемся формулой (4), предварительно найдя f_x' и f_y':

$$f_x' = \frac{1}{x - \sqrt{y}}, \quad f_x'(x_0, y_0) = f_x'(2{,}1) = \frac{1}{2 - \sqrt{1}} = 1,$$

$$f_y' = \frac{1}{x - \sqrt{y}} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right), \quad f_y'(x_0, y_0) = f_y'(2{,}1) = \frac{1}{2 - \sqrt{1}} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}}\right) = -0{,}5.$$

Следовательно, $\ln\left(1{,}98 - \sqrt{1{,}01}\right) \approx \ln\left(2 - \sqrt{1}\right) + 1 \cdot (-0{,}02) + (-0{,}5) \cdot 0{,}01 = -0{,}025$.

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим: $\ln\left(1{,}98 - \sqrt{1{,}01}\right) \approx -0{,}025305051$.

8. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Рассмотрим некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$. На прямой, проходящей по этому

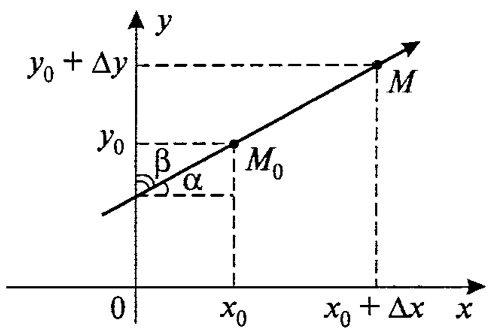

Рис. 6

направлению через точку $M_0(x_0, y_0)$, возьмем точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Обозначим длину отрезка M_0M через $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, если векторы $\vec{l}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ одинаково направлены, и $\Delta l=-\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, если векторы $\vec{l}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ противоположно направлены. Функция z получит приращение $\Delta_l z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$, где Δx и Δy связаны соотношениями $\Delta x=\Delta l\cos\alpha$, $\Delta y=\Delta l\sin\alpha$. Приращение $\Delta_l z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$ называется ***приращением функции*** Z ***в данном направлении*** $\vec{l}$ (см. рис.6).

Производной $\frac{\partial z}{\partial l}$ ***по направлению*** $\vec{l}$ функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции в направлении $\vec{l}$.

Теорема. *Если функция* $z=f(x,y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0), *то производная* $\frac{\partial z}{\partial l}$ *по направлению* $\vec{l}=\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$ *в точке* (x_0, y_0) *определяется формулой*

$$\frac{\partial z}{\partial l}(x_0, y_0)=f_x^{/}(x_0, y_0)\cdot\cos\alpha+f_y^{/}(x_0, y_0)\cdot\sin\alpha\,. \qquad (1)$$

Замечание. Если направление $\vec{l}$ задано вектором $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$, то производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ функции $z = f(x,y)$ по направлению $\vec{l}$ может быть подсчитана по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l}(x_0, y_0) = f_x^/(x_0, y_0) \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + f_y^/(x_0, y_0) \cdot \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти производную от функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $M(1,2)$ в направлении, составляющим с осью Ox угол в 60^0.

Решение. Направление задано углом наклона к оси Ox, поэтому воспользуемся формулой (1).

$$f_x^/ = 12x^3 - y, \quad f_x^/(x_0, y_0) = f_x^/(1,2) = 12 \cdot 1^3 - 2 = 10,$$

$$f_y^/ = -x + 3y^2, \quad f_y^/(x_0, y_0) = f_y^/(1,2) = -1 + 3 \cdot 2^2 = 11,$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}(1,2) = 10 \cdot \cos 60^\circ + 11 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 0{,}5 + 11 \cdot 0{,}5\sqrt{3} = 5 + 5{,}5\sqrt{3}.$$

Пример 2. Найти производную от функции $z = \ln(x^2 + 2y)$ в точке $M(1;2)$ найти производную по направлению $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Решение. Направление задано координатами вектора $\vec{a}$, поэтому воспользуемся формулой (2).

$$f_x^/ = \frac{2x}{x^2 + 2y}, \quad f_x^/(x_0, y_0) = f_x^/(1,2) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 2 \cdot 2} = 0{,}4,$$

$$f_y^/ = \frac{2}{x^2 + 2y}, \quad f_y^/(x_0, y_0) = f_y^/(1,2) = \frac{2}{1^2 + 2 \cdot 2} = 0{,}4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}(1,2) = 0{,}4 \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} + 0{,}4 \cdot \frac{-4}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -0{,}08.$$

Рассмотрим понятие градиента функции $z = f(x,y)$.

Градиентом $\overrightarrow{grad\ z}$ ***функции*** $z = f(x,y)$ *называется вектор с координатами* $\{f_x^{/},\ f_y^{/}\}$.

Свойства градиента

1. Производная функции $z = f(x,y)$ по направлению $\vec{l}$ есть скалярное произведение градиента $\overrightarrow{grad\ z}$ и единичного вектора $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$, задающего направление $\vec{l}$.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \overrightarrow{grad\ z} \cdot \vec{e}$$

2. Градиент $\overrightarrow{grad\ z}$ функции $z = f(x,y)$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке, причем $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{gradz}} = |\overrightarrow{gradz}| = \sqrt{\left(f_x^{/}\right)^2 + \left(f_y^{/}\right)^2}$.

3. Если градиент $\overrightarrow{grad\ z}$ дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ отличен от нуля, то вектор $\overrightarrow{grad\ z}$ перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.

Пример 3. Найти градиент функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $M(1,2)$.

Решение. Находим

$$f_x^{/} = 12x^3 - y, \quad f_x^{/}(x_0, y_0) = f_x^{/}(1,2) = 12 \cdot 1^3 - 2 = 10,$$

$$f_y^{/} = -x + 3y^2, \quad f_y^{/}(x_0, y_0) = f_y^{/}(1,2) = -1 + 3 \cdot 2^2 = 11.$$

Следовательно, $\overrightarrow{grad\ z}(1,2) = \{10,\ 11\}$.

Замечание. Из курса физики известно, что силовой характеристикой электрического поля является напряженность. Она численно равна силе, действующей на единичный положительный заряд:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{Q}.$$

Энергетической характеристикой электрического поля является потенциал φ. Он характеризует потенциальную энергию, которой обладал бы положительный единичный заряд, помещенный в данную точку поля.

Силовая и энергетическая характеристики поля связаны между собой:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad\varphi}.$$

Пример 4. Найти напряженность $\vec{E}$ поля, потенциал которого равен $\varphi = \ln\sqrt{\cos^2 \pi x + sh^2 \pi y}$.

Решение. Вычислим частные производные функции φ:

$$\varphi'_x = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(2\pi x)}{\cos^2(\pi x) + sh^2(\pi y)}, \qquad \varphi'_y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{sh(2\pi y)}{\cos^2(\pi x) + sh^2(\pi y)}.$$

Таким образом,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad\varphi} = -\left(\varphi'_x \cdot \vec{i} + \varphi'_y \cdot \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2\left(\cos^2(\pi x) + sh^2(\pi y)\right)} \cdot \left(\sin(2\pi x) \cdot \vec{i} - sh(2\pi y) \cdot \vec{j}\right).$$

9. Частные производные высших порядков. Экстремумы функции двух переменных

Если частные производные f'_x и f'_y функции $z = f(x, y)$ сами являются дифференцируемыми функциями, то можно найти также и их частные производные, которые называются ***частными производными второго порядка,*** то есть

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x, \qquad f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y, \qquad f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x, \qquad f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y.$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков. Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной. Имеет место следующая теорема.

Теорема Шварца. *Если частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке смешанные частные производные равны, то есть* $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = 3x^4 - xy + y^3$.

Решение. Так как $f_x' = 12x^3 - y$, $f_y' = -x + 3y^2$, то

$$f_{xx}'' = \left(12x^3 - y\right)_x' = 36x^2, \qquad f_{xy}'' = \left(12x^3 - y\right)_y' = -1,$$

$$f_{yx}'' = \left(-x + 3y^2\right)_x' = -1, \qquad f_{yy}'' = \left(-x + 3y^2\right)_y' = 6y.$$

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной переменной.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Точка (x_0, y_0) называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $z = f(x, y)$, если существует такая δ - окрестность точки (x_0, y_0), что во всех ее точках (x, y), отличных от (x_0, y_0), выполнятся неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $\quad$ ($f(x, y) > f(x_0, y_0)$).

На рисунке 7: N_1 - точка максимума, а N_2 - точка минимума функции $z = f(x, y)$. Максимум и минимум функции называются ее ***экстремумами.***

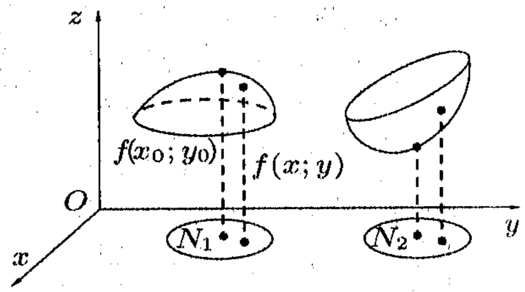

Рис. 7

Теорема (необходимые условия экстремума). *Если в точке (x_0, y_0) дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:* $f_x'(x_0, y_0) = 0$, $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

Геометрически равенства $f_x'(x_0, y_0) = 0$ и $f_y'(x_0, y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $z = f(x, y)$, параллельна плоскости Oxy, так как уравнение касательной плоскости есть $z = z_0$.

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $x=0$, $y=0$ (см. рис. 8), но не имеет в этой точке частных производных.

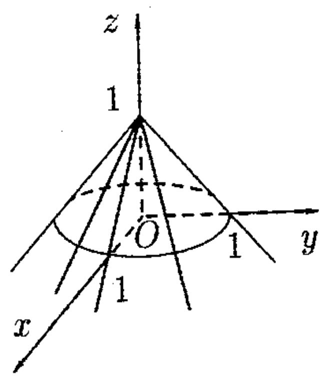

Рис. 8

Точки, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x,y)$ равны нулю, то есть $f_x^/ = 0$ и $f_y^/ = 0$, и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками.***

В критических точках функция $z = f(x,y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь. Условия $f_x^/ = 0$ и $f_y^/ = 0$ являются необходимыми, но не достаточными условиями существования экстремума. Так, например, для функции $z = x^2 - y^2$ точка (0,0) является критической (в ней $z_x^/ = 2x$ и $z_y^/ = -2y$ обращаются в ноль), однако, очевидно, никакого экстремума в этой точке нет (см. рис. 9).

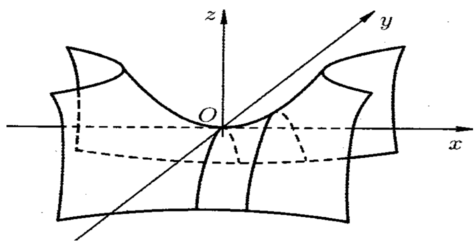

Рис. 9

Теорема (достаточные условия экстремума). *Пусть в некоторой окрестности стационарной точки* (x_0, y_0) *функция* $z = f(x,y)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно причем* $f_{xx}^{//}(x_0,y_0) = A$, $f_{xy}^{//}(x_0,y_0) = B$, $f_{yy}^{//}(x_0,y_0) = C$. *Обозначим*

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 .$$

Тогда:

1) если $\Delta(x_0,y_0) > 0$, *то функция* $z = f(x,y)$ *в точке* (x_0,y_0) *имеет экстремум: максимум, если* $A < 0$, *и минимум, если* $A > 0$;

2) если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет;

3) если $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 2. Найти точки экстремума функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

Решение. 1) Найдем частные производные первого порядка: $f_x^{/} = 6xy - 3x^2$, $f_y^{/} = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не определены отсутствуют.

2) Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две точки: $M_1(6,3)$ и $M_2(0,0)$.

3) Находим частные производные второго порядка данной функции: $f_{xx}^{//} = 6y - 6x$, $f_{xy}^{//} = 6x$, $f_{yy}^{//} = -12y^2$.

4) В точке $M_1(6,3)$ имеем: $A = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6 = -18$, $B = 6 \cdot 6 = 36$, $C = -12 \cdot 3^2 = -108$, отсюда $\Delta(6,3) = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648 > 0$, то есть $M_1(6,3)$ - точка экстремума. Так как $A = -18 < 0$, то $M_1(6,3)$ - точка максимума.

В точке $M_2(0,0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, отсюда $\Delta(0,0) = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$ в точке $M_2(0,0)$ равно нулю. Рассмотрим точки из окрестности точки $M_2(0,0)$ такие, что $x = 0$, тогда $z(x = 0, y) = -y^4 < 0$, а теперь рассмотрим точки из той же окрестности, но с условием $y = 0$, $x < 0$: $z(x < 0, y = 0) = -x^3 > 0$. Таким образом, в любой окрестности точки $M_2(0,0)$ функция $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$ принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке $M_2(0,0)$ функция экстремума не имеет.

10. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в некоторых точках D своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области D функции $z = f(x, y)$:

1) Найти все критические точки функции, принадлежащие D, и вычислить значения функции в них;

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границах области;

3) Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 1$, $x = 2$, $y = -1{,}5$, $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Здесь $z'_x = 2xy + y^2 + y$, $z'_y = 2xy + x^2 + x$.

1) Находим все критические точки:

$$\begin{cases} 2xy + y^2 + y = 0, \\ 2xy + x^2 + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$. Ни одна из найденных точек не принадлежит области D.

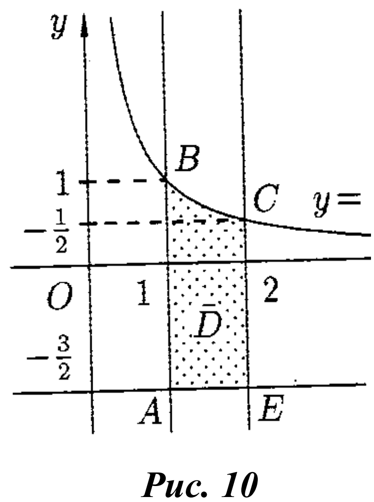

Рис. 10

2) Исследуем функцию $z = x^2 y + xy^2 + xy$ на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA (см. рис. 10).

а) На участке AB: $x = 1 \Rightarrow z = y^2 + 2y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2};1\right]$, $z'_y = 2y + 2$, $2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$. Значения функции $z(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) = -1$, $z(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^2 + 2\cdot(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $z(1) = 1^2 + 2\cdot 1 = 3$.

б) На участке BC: $y = \frac{1}{x} \Rightarrow z = x + \frac{1}{x} + 1$, где $x \in [1;2]$, $z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$, $1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1 \notin [1;2]$. Значения функции $z(1) = 1 + \frac{1}{1} + 1 = 3$, $z(2) = 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3{,}5$.

в) На участке CE: $x = 2 \Rightarrow z = 2y^2 + 6y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$, $z'_y = 4y + 6$, $4y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$. Значения функции $z(-\frac{3}{2}) = 2\cdot(-\frac{3}{2})^2 + 6\cdot(-\frac{3}{2}) = -4{,}5$, $z(\frac{1}{2}) = 2\cdot(\frac{1}{2})^2 + 6\cdot(\frac{1}{2}) = 3{,}5$.

г) На участке AE: $y = -\frac{3}{2} \Rightarrow z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{4}$, где $x \in [1;2]$, $z'_x = -3x + \frac{3}{4}$, $-3x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \notin [1;2]$. Значения функции $z(-1) = -\frac{3\cdot 1^2}{2} + \frac{3\cdot 1}{4} = -\frac{3}{4}$, $z(2) = -\frac{3\cdot 2^2}{2} + \frac{3\cdot 2}{4} = -4{,}5$.

3) Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$z_{наиб} = z(2;\frac{1}{2}) = 3{,}5$$

$$z_{наим} = z(2;-\frac{3}{2}) = -4{,}5.$$

Замечание. Площадь поперечного сечения канала называют его живым сечением, а длину P границы такого сечения называют смоченным периметром канала. С помощью теоретических расчетов и эксперимента установлено [7], что из всех каналов с заданным живым сечением наибольшей пропускной способностью и одновременно наименьшей фильтрацией отличаются каналы с наименьшим смоченным периметром. Про такие каналы говорят, что они имеют *гидравлически наивыгоднейший профиль.*

Наиболее часто сооружают каналы, а также оросительные и водосточные канавы трапециидальной формы ($AB=CD$, см. рис. 11).

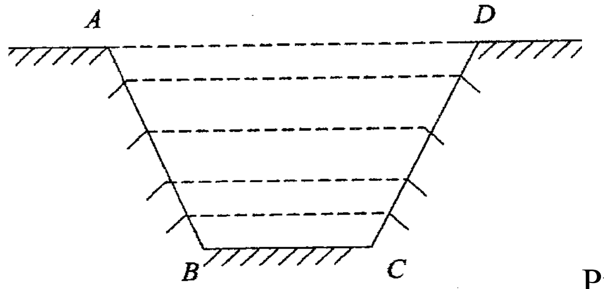

Рис. 11

Пример 2. Найти наивыгоднейший с точки зрения гидравлики профиль канала трапецеидальной формы.

Решение. Найдем размеры поперечного сечения канала заданной площади S с наименьшим периметром. Пусть $AB=CD=y$, $\pi-\angle ABC=x$, $BC=z$.

Тогда $P=2y+z$, $S=(z+y\cos x)y\sin x$. Выразив z из второй формулы и подставив в первую, получим: $P=(2-\cos x)y+\dfrac{S}{y\sin x}$.

Таким образом, требуется найти такую точку (x_0, y_0) из области $D=\{(x,y)/\ 0<x<\dfrac{\pi}{2},\ y>0\}$, в которой функция $P(x,y)$ принимает наименьшее значение.

Найдя частные производные функции $P(x,y)$ и приравняв их к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2\sin^3 x = S\cos x \\ 2y^2\sin x - y^2\sin x\cos x = S. \end{cases}$$

Подставив вместо S в первое уравнение этой системы левую часть второго уравнения, получим $\cos x = 0{,}5$ или $x_0 = \frac{\pi}{3}$, тогда $y_0 = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$.

В рассматриваемой области D функция *P(x,y)* имеет единственную критическую точку $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}\right)$, значение функции в ней равно $P = \sqrt[4]{48S^2}$.

Исследуем функцию *P(x,y)* на границе области D:

1) $x = \frac{\pi}{2}$, $y > 0$. Имеем $P(\frac{\pi}{2}, y) = 2y + \frac{S}{y} \Rightarrow P_y' = 2 - \frac{S}{y^2}$. $2 - \frac{S}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{S}{2}}$.

Тогда $P\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{\frac{S}{2}}\right) = \sqrt{S}(2 + \sqrt{2}) > \sqrt[4]{48S^2} = P(x_0; y_0)$.

2) При приближении точки *(x,y)* к прямым *x=0* и *y=0,* а также при удалении в бесконечность по *y* функция *P(x,y)* неограниченно возрастает. Поэтому точку (x_0, y_0) можно окружить таким прямоугольником $D_1 = \{(x, y) /\ a \le x \le \frac{\pi}{2},\ c \le y \le d\}$, что вне его и на его границе $P(x; y) > P(x_0, y_0)$.

Отсюда следует, что $P(x_0, y_0)$ - наименьшее значение функции $P(x; y)$ в области D_1, и оно же будет наименьшим значением этой функции в области D.

Итак, функция $P(x; y)$ имеет наименьшее значение при $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$.

Из равенства $S = (z + y\cos x) y \sin x$ находим $z = y = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$. Таким образом в трапеции $ABCD$ $AB=BC=CD$ и $\angle ABC = 120^\circ$.

Контрольные задания

Задание № 1

Найти уравнения и построить линии уровня функции $z = f(x, y)$:

1.1 $z = \sqrt{y - x^2}$

1.2 $z = \dfrac{x}{y}$

1.3 $z = \dfrac{y - x^2}{x^2}$

1.4 $z = x^2 y + y$

1.5 $z = \dfrac{y}{x}$

1.6 $z = x \cdot \sqrt{y - 1}$

1.7 $z = xy + y$

1.8 $z = \sqrt{x} - y$

1.9 $z = y^2 - x$

1.10 $z = \dfrac{y}{x^3}$

Задание № 2

Для функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ найти: а) градиент, б) производную по направлению вектора $\vec{a}$.

2.1 $z = -3x^2 + 2y$, $M_0(1;\ -3)$, $\vec{a} = \{6;\ 8\}$

2.2 $z = \ln(3x + 2y)$, $M_0(-1;\ 2)$, $\vec{a} = \{-3;\ -4\}$

2.3 $z = arctg\ \dfrac{y}{x}$, $M_0(1;\ 1)$, $\vec{a} = \{-5;\ 12\}$

2.4 $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$, $M_0(1;\ -2)$, $\vec{a} = \{1;\ 2\}$

2.5 $z = xy^3 + x^3 y$, $M_0(1;\ 3)$, $\vec{a} = \{2;\ -1\}$

2.6 $z = x^2 \cdot \cos\ y$, $M_0(1;\ \dfrac{\pi}{2})$, $\vec{a} = \{5;\ -12\}$

2.7 $z = \sin(\ \pi xy\ )$, $M_0(1;\ 1)$, $\vec{a} = \{1;\ -1\}$

2.8 $z = \ln(\ x + y^2\ )$, $M_0(3;\ 4)$, $\vec{a} = \{6;\ -8\}$

2.9 $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, $M_0(0;\ 1)$, $\vec{a} = \{-1;\ -1\}$

2.10 $z = \sin(\ x - y\ )$, $M_0(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{4})$, $\vec{a} = \{-3;\ -4\}$

Задание № 3

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

3.1 $z = 1 + x^2 + 2y^2$, $M_0(1;\ 1;\ 4)$

3.2 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2;\ 2;\ 3)$

3.3 $z = \ln(\ x^2 + y^2\ )$, $M_0(1;\ 0;\ 0)$

3.4 $z = 1 + x^2 + 2y^2$, $M_0(1;\ 1;\ 4)$

3.5 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$, $M_0(1;\ 2;\ 2)$

3.6 $z = x^4 + 2x^2 y - xy + x$, $M_0(1;\ 0;\ 2)$

3.7 $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$, $M_0(1;\ 2;\ 3)$

3.8 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $M_0(1;\ -1;\ 1)$

3.9 $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$, $M_0(2;\ 2;\ 3)$

3.10 $z = 3x^4 - xy + y^3$, $M_0(1;\ 2;\ 9)$

Задание № 4

С помощью дифференциала найти приближенное значение числового выражения:

4.1 $\sqrt[3]{7,98}\cdot(1,04)^{7,98}$

4.2 $\sqrt[3]{(4,97)^2+(1,06)^2+1}$

4.3 $\ln(\sqrt[3]{0,98}+\sqrt[2]{1,03}-1)$

4.4 $\dfrac{5,03}{(5,03)^3+(1,96)^2}$

4.5 $arctg\,\dfrac{(3,04)^2}{(2,97)^2}$

4.6 $\sqrt[5]{(4,03)^2+(0,96)^5+15}$

4.7 $\ln((2,02)^3+\sqrt[5]{0,96}-8)$

4.8 $\dfrac{6}{(2,97)^4-(2,03)^3}$

4.9 $\ln(\sqrt[3]{8,02}-\sqrt{0,96})$

4.10 $\left(2-\sqrt[3]{0,97}\right)^{4,03}$

Задание № 5

Для функции $z=f(x,y)$ найти точки экстремума.

5.1 $f(x,y)=x^2-6x+y^2-2y+1$

5.2 $f(x,y)=x^2-2x+y^2-4y+2$

5.3 $f(x,y)=x^2-6x+y^2-8y+3$

5.4 $f(x,y)=x^2-2x+y^2-2y+4$

5.5 $f(x,y)=x^2-4x+y^2-6y+5$

5.6 $f(x,y)=x^2-8x+y^2-2y+6$

5.7 $f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 2y + 7$

5.8 $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 8$

5.9 $f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 9$

5.10 $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 10$

Задание № 6

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D.

6.1 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$

6.2 $z = xy + x^2 - 2$, $D:\ y = 0,\ y = 4x^2 - 4$

6.3 $z = 4xy + 4x^2 - y^2 - 8y$, $D:\ x = 0,\ y = 2x,\ y = 2$

6.4 $z = 2xy + x^2 - y^2 + 4x$, $D:\ x = 0,\ y = 0,\ y = -x - 2$

6.5 $z = -3xy + 5x^2 + y^2$, $D:\ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$

6.6 $z = 0{,}5x^2 - xy$, $D:\ y = 2x^2,\ y = 8$

6.7 $z = -xy + 3x + y$, $D:\ y = x,\ y = 4,\ x = 0$

6.8 $z = xy - 3x - 2y$, $D:\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$

6.9 $z = xy + x^2 - 3x - y$, $D:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$

6.10 $z = xy - x - 2y$, $D:\ y = x,\ y = 0,\ x = 3$

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. – М.: «ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС», 2001. – 416 с.
2. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М.: «Проспект», 2005. – 600 с.
3. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов. – М.: «ИНФРА-М», 2006. – 448 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. - М.: «АЙРИС-ПРЕСС», 2002. –608.с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: «Профессия», 2003. – 432 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: «Высшая школа», 1997. – 304 с.
7. Курганов А.М., Федоров Н.Ф. Справочник по гидравлическим расчетам водоснабжения и канализации. – Л., 1978.
8. Тарасова Н.А. Высшая математика для агроинженерных специальностей в примерах и задачах: учебное пособие. – Н.Новгород, 2007.- 197с.

Береговая Татьяна Александровна

Функции   многих   переменных

Методические указания и контрольные задания по высшей математике
для студентов заочной формы обучения

Подписано в печать__________ Формат 60х90 /1/16. Бумага газетная. Печать трафаретная. Уч. изд. л.____. Усл. печ. л___. Тираж 500 экз. Заказ №_______
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ. 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65.