ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладной математической статистики

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

**Методические указания и контрольные задания
для студентов всех форм обучения**

Нижний Новгород
2009

УДК 530.1

Прикладные задачи математики в строительстве. Методические указания и контрольные задания для студентов всех форм обучения.

Нижний Новгород, издание ННГАСУ, 2009г.

Методические указания по курсу «Прикладные задачи математики в строительстве» предназначены для студентов всех форм обучения по направлению: СТРОИТЕЛЬСТВО. В указаниях приводятся основные понятия и формулы, а также примеры решения задач. Даны теоретические вопросы и практические контрольные задания для самостоятельного решения.

Составитель Л.В. Филатов, к.ф.- м.н.

ВВЕДЕНИЕ

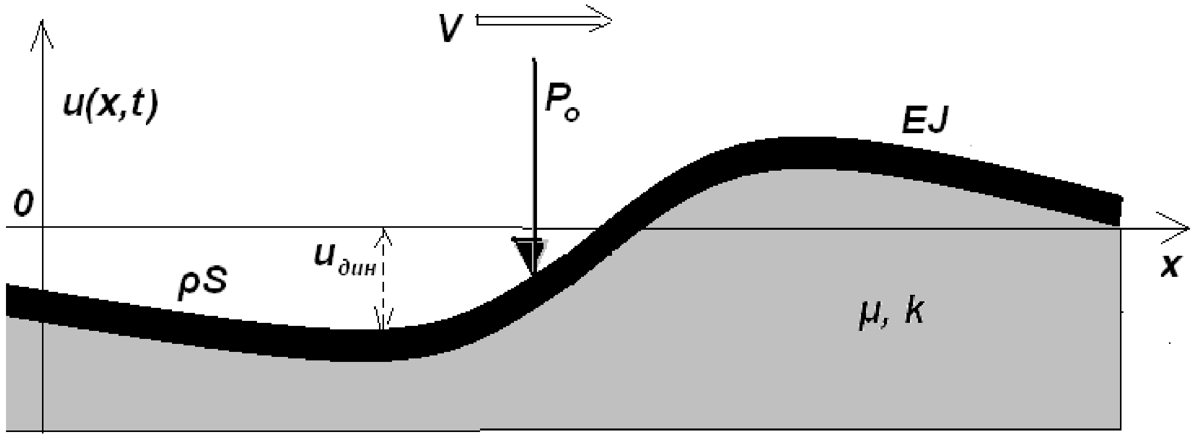
При решении ряда задач проектирования и анализа зданий, сооружений и иных строительных конструкций иногда приходится широко применять аппарат современных математических методов. Такие задачи принято назвать прикладными математическими задачами, к ним можно отнести задачи прочности конструкций, оптимизации конструкций, устойчивости и управления режимами их функционирования, а так же ряд других важных и интересных задач.

В частности огромное значение для практики представляют задачи об учете и анализе динамического поведения конструкций, вызванного наличием переменных во времени силовых нагрузок. Такие нагрузки с «достаточно быстрым» изменением их параметров могут быть подвижными, переменными по величине или направлению или носить случайный характер. Учет динамического фактора в поведении конструкции часто бывает решающим в анализе ее надежности и функциональности, так известно множество фактов [1, 4] потери устойчивости, а то и разрушения равновесных конструкций типа мостовых или трубопроводных пролетов, из-за недостаточного динамического анализа на этапе их проектирования. Влияния динамического фактора наглядно показывает коэффициент динамичности конструкции, выражающий отношение максимальных перемещений или напряжений в конструкции при ее динамическом нагружении к соответствующим статическим перемещениям или напряжениям.

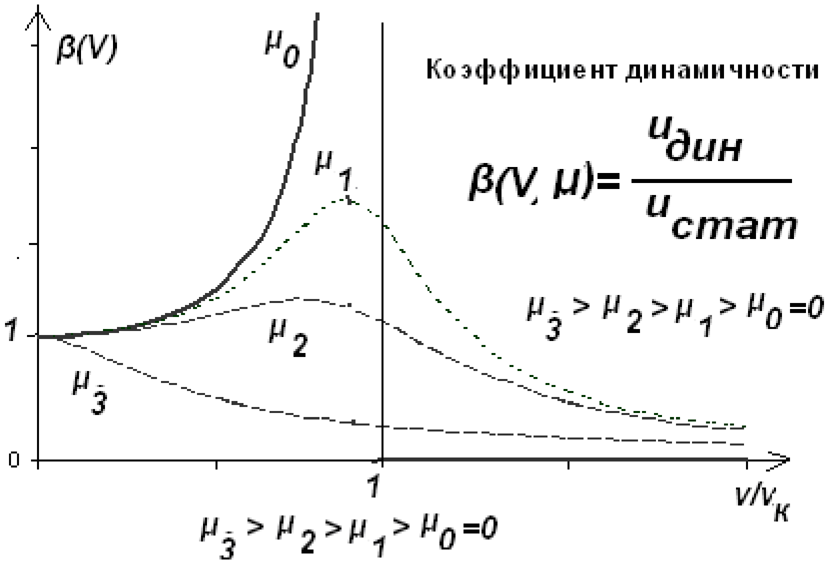
Так известно решение задачи о установившемся движении постоянной поперечной силы P_0 вдоль бесконечной балки Бернулли с параметрами ρS - погонной плотности, EJ - изгибной жесткости и опирающуюся на линейное вязко-упругое основание с жесткостью k и вязкостью μ. Поперечные смещения $u(x,t)$ срединной линии балки находятся из следующей краевой задачи

$$\rho S \cdot u_{tt} + EJ \cdot u_{xxxx} + \mu \cdot u_t + k \cdot u = 0, \quad [EJ \cdot u_{xxx}]_{x=Vt} = P_0,$$

$$[EJ \cdot u_{xx}]_{x=Vt} = [u_x]_{x=Vt} = [u]_{x=Vt} = 0, \; u\big|_{x=\pm\infty} = 0$$



При установившемся режиме движения смещения зависят только от $\xi = x - Vt$. Тогда $u(x,t) = u(\xi)$ и как показывают расчеты при достаточно больших скоростях движения силы, близких к критической $V_k = \sqrt{(2/\rho S)\sqrt{k \cdot EJ}}$, динамические смещения $u_{дин}(V) = \max[u(\xi)]$ в балке будут существенно отличаться от соответствующего статического смещения $u_{стат} = u_{дин}(V = 0)$.



$\mu_3 > \mu_2 > \mu_1 > \mu_0 = 0$

Коэффициент динамичности $\beta(V, \mu)$ приводится на рисунке для различных значений вязкости основания.

В курсе «Прикладные задачи математики в строительстве» читаемом в ННГАСУ уже достаточно давно, на примере простейших математических моделей динамики дискретных линейных механических систем студентам излагаются основы динамического расчета конструкций при воздействии на них переменных нагрузок с заданной частотой изменения. Даются основные понятия теории, такие как собственные частоты и формы колебаний, сложение колебаний, вынужденные колебания и их резонансное усиление, амплитудно-частотная характеристика, вибрация – ее воздействие и методы защиты. Студентам предлагается выполнить расчетную работу с применением вычислительных средств по динамическому анализу простейших упругих механических систем с двумя степенями свободы.

Полученные навыки позволят студентам понять и использовать в дальнейшем обучении и практической работе основы динамического расчета для более сложных дискретных или распределенных математических моделей конструкций.

1. ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим дискретную механическую систему со стационарными голономными связями положение которой в пространстве однозначно задается конечным числом обобщенных координат x_k как функций только времени t. Число n таких позиционных координат $x_к = x_к(t)$ определяет число степеней свободы системы, т.е. к=1,2, ..n. Пусть на элементы системы действуют активные внешние силы $F_к^a(t)$ в направлении изменения координат, работа которых на возможных перемещениях $\delta x_к$ равна $\delta A = \sum_{к=1}^{n} F_к^a \delta x_к$. Если внешние силы мы будем считать заданными с известными законами изменения во времени, обычно это гармонический закон $F_к^a(t) = B_к Sin(\Omega t + b_к)$ с соответствующими амплитудами $B_к$, начальными фазами $b_к$ и частотой изменения Ω , то внутренние силы будем считать линейной функцией от координат x_k и скоростей $\dot{x}_k$ элементов системы, что оправдано при малых изменениях координат и скоростей элементов системы, а имена такими будем считать изменения координат. Разделим внутренние силы $F_к^в$, действующие на элементы системы на потенциальные $F_к^{вп}$ и диссипативные $F_к^{вd}$ составляющие, которые в случае линейного взаимодействия выражаются через потенциальную $\Pi(x_i)$ и диссипативную $D(\dot{x}_i)$ функции состояния системы

$$F_к^{вп} = \sum_{i=1}^{n} c_{кi} x_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_к}; \qquad F_к^{вd} = \sum_{i=1}^{n} d_{кi} \dot{x}_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_к}$$

где c_{ki} и d_{ki} постоянные коэффициенты жесткости и диссипации соответственно. Потенциальная функция представляет собой потенциальную энергию системы равную работе против потенциальных внутренних сил при переводе системы из «нулевого» состояния в текущее

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{2}\sum c_{ij} x_i x_j \geq 0 .$$

Функция диссипация выражает рассеяние энергии системы в следствии наличия в ней линейного трения и представляется выражением

$$D(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{x}_n) = \frac{1}{2}\sum d_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \geq 0 .$$

Заметим, что не потенциальные внутренние силы формально можно включить в состав внешних сил, ровно как и наоборот, потенциальные внешние силы можно включить в состав потенциальной энергии системы.

Кинетическая энергия $T(\dot{x}_i)$ механической системы зависит только от обобщенных скоростей и представляется квадратичной формой

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{x}_n) = \frac{1}{2}\sum m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \geq 0 .$$

где m_{ij} постоянные коэффициенты инерции системы.

Составим уравнения Лагранжа 2-го рода для описания движения механической системы, введем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, тогда динамические уравнения системы выглядят следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_к}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_к} = F_к^{a} + F_к^{вd} .$$

Поскольку эти уравнения являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка , то построенная динамическую модель механической системы с n степенями свободы согласно общепринятой классификации [2] называется моделью порядка 2n.

1.2. СОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

После выбора обобщенных координат системы и составления функций кинетической и потенциальной энергии в соответствии с инерционными, упругими диссипативными свойствами системы уравнения Лагранжа примут следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{\kappa i}\ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} d_{\kappa i}\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} c_{\kappa i}x_i = F_\kappa^a(t).$$

Введем обозначении векторов и матриц:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .. \\ x_n(t) \end{pmatrix} = (x_\kappa(t)), \qquad \overline{F} = \begin{pmatrix} F_1^a(t) \\ F_2^a(t) \\ .. \\ F_n^a(t) \end{pmatrix} = (F_\kappa^a(t)),$$

-вектора обобщенны координат и заданных внешних сил соответственно,

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & .. & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & .. & m_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ m_{n1} & m_{n2} & .. & m_{nn} \end{pmatrix} = (m_{\kappa i})$$ - матрица инерции системы,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & .. & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & .. & d_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ d_{n1} & d_{n2} & .. & d_{nn} \end{pmatrix} = (d_{\kappa i})$$ - матрица диссипации в системе,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & .. & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{\kappa i})$$ - матрица жесткости системы.

Тогда динамические уравнения запишутся в матричном виде:

$$M\ddot{\overline{X}} + D\dot{\overline{X}} + C\overline{X} = \overline{F} \qquad (1)$$

Эти уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n, неоднородную, с постоянными коэффициентами. Как известно из теории дифференциальных уравнений для однозначного решения необходимо дополнить их некоторыми условиями, в частности начальными условиями Коши:

$$\overline{X}(0) = \overline{X}_0 \ , \ \dot{\overline{X}}(0) = \overline{V}_0 \, , \qquad (2)$$

Где $\overline{X}_0, \overline{V}_0$ заданные начальные положения и скорости элементов системы.

Для определения элементов матриц в уравнении (1) как было сказано необходимо составление функций кинетической и потенциальной энергии, а так же диссипативной функции, однако для нахождения элементов матрицы жесткости C можно воспользоваться результатами статических расчетов. Действительно, пусть система находится в состоянии статического равновесия с координатами $\overline{X}^c$, для чего к ней должны быть приложены постоянные удерживающие внешние силы $\overline{F}^c$, тогда (1) превращается в уравнение равновесии $C\overline{X}^c = \overline{F}^c$, из которого видно что коэффициенты жесткости равны внешним статическим силам, поддерживающим равновесие системы на единичных перемещениях, т.е $c_{\kappa i} = F^c_{\kappa}(X^c_{i1})$ и равен внешней силе, обеспечивающей единичное перемещение только по координате $x_i = 1$, где $X^c_{i1} = (0,0,.. \quad ,1 = x_i \, ,0,.. \quad 0)$.

Умножив уравнение (1) на M^{-1}, оно может быть записано в каноническом виде

$$\ddot{\overline{X}} + D'\dot{\overline{X}} + C'\overline{X} = \overline{F}' \, , \qquad (1a)$$

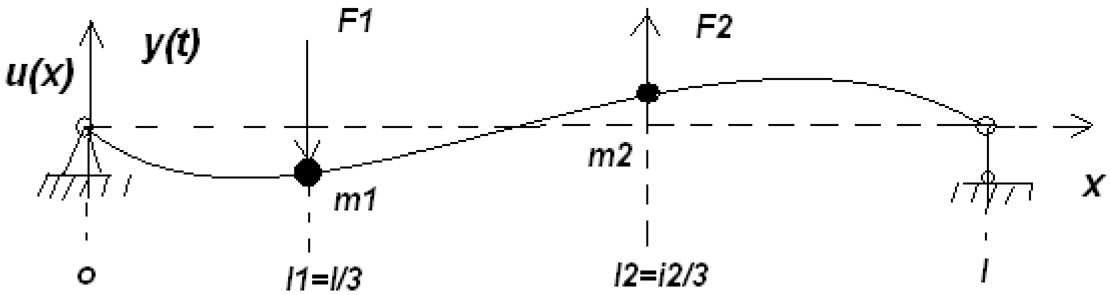
где $D' = M^{-1}D$, $C' = M^{-1}C$, приведенные матрицы диссипации и жесткости и приведенный вектор внешних сил. $\overline{F}' = M^{-1}\overline{F}$.

Умножая уравнение (1) на матрицу C^{-1}, запишем его в обратной форме

$$\hat{M}\ddot{\overline{X}} + \hat{D}\dot{\overline{X}} + \overline{X} = \hat{\overline{F}} \ , \qquad (1в)$$

где $\hat{D} = C^{-1}D$, $\hat{M} = C^{-1}M$ приведенные матрицы диссипации и инерции и приведенный вектор внешних сил $\hat{\overline{F}} = C^{-1}\overline{F}$. Матрица $\alpha = C^{-1}$, обратная к матрице жесткости, называется матрицей податливости или влияния. Она так же может быть найдена из уравнения статического равновесия $\overline{X}^c = \alpha \overline{F}^c$. Коэффициент влияния $\alpha_{\kappa i} = X^c_\kappa(F^c_{i1})$ будет равен статическому перемещению по x_κ от единичной внешней силы, действующей только по координате x_i $F^c_{i1} = (0,0,.. \ ,1 = F_i \ ,0,.. \ \ 0)$.

Пример [2]. Рассмотрим малые поперечные колебания двух точечных масс $m_{1.,}$ m_2 прикрепленных к шарнирно опертой балке длины l на расстояниях $l/3$ от опертых концов. Пусть балка невесома, совершает изгибные колебания и описывается моделью Бернулли с жесткостью EJ.



Координаты системы $y_1(t), y_2(t)$ задают малые поперечные смещение точечных масс, Смещения срединной линии балки $u(x)$ для невесомой балки определяются по координатам масс из следующей краевой задачи

$$EJu_{xxxx} = 0,$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad EJu_{xx}\big|_{x=0} = 0, \ u\big|_{x=l} = 0, \ EJu_{xx}\big|_{x=l} = 0,$$

$$u\big|_{x=l_1} = y_1, \quad [u_x]\big|_{x=l_1} = 0, \ [EJu_{xx}]\big|_{x=l_1} = 0,$$

$$u\Big|_{x=l_2} = y_2,\ [u_x]\Big|_{x=l_2} = 0,\ [EJ\cdot u_{xx}]\Big|_{x=l_2} = 0,$$

Решение для изогнутой оси балки зависит от 12-ти констант, определяемых из краевых условий, и позволяет вычислить потенциальную энергию упругой балки

$$\Pi(y_1, y_2) = \int_0^l \frac{1}{2} EJu_{xx}^2 dx .$$

Однако проще определить коэффициенты влияния, используя известное статическое решение [4] для изогнутой оси балки от действия постоянной поперечной силы P_0 в точке приложения ξ

$$u(x,\xi) = \frac{P_0 x(l-\xi)}{6lEJ}(l^2 - x^2 - (l-\xi)^2),$$

Из которого, при $P_0 = 1$ и $l_1 = l/3$, $l_2 = 2l/3$ получим при различных значениях x и ξ:

$$\alpha_{11} = u(x = l_1, \xi = l_1) = \frac{4}{243}\frac{l^3}{EJ},\ \alpha_{12} = u(x = l_1, \xi = l_2) = \frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\alpha_{21} = u(x = l_{21}, \xi = l_1) = \frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ},\ \alpha_{22} = u(x = l_2, \xi = l_2) = \frac{4}{243}\frac{l^3}{EJ}.$$

Таким образом матрицы влияния и жесткости будут следующими

$$\alpha = \frac{1}{486}\frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad C = \alpha^{-1} = \frac{486}{15}\frac{EJ}{l^3}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия системы и матрица инерции легко определяется

$$T(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \qquad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Если трением в системе можно пренебречь, то матрица диссипации D=0, а динамические уравнения системы будут следующими:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + c_{12}y_2 &= F_1 \\ m_2\ddot{y}_2 + c_{21}y_1 + c_{22}y_2 &= F_2 \end{aligned}.$$

РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Решение уравнений динамики системы (1) с начальными условиями (2) в математике решается различными методами, например операционным методом интегральных преобразований Лапласа [3] оно сводится к линейной неоднородной системе алгебраических уравнений

$$(Mp^2 + Dp + C)\breve{\bar{X}} = \breve{\bar{F}} + pX_0 + V_0, \qquad (3)$$

где $\breve{\bar{X}}(p) = \int_0^\infty \bar{X}(t) \cdot e^{-pt} dt$ изображение искомой функции $\bar{X}(t)$,

$\breve{\bar{F}}(p)$ изображение заданных сил $\bar{F}(t)$, а $p = s + i\sigma$ комплексная переменная. Решение уравнения (3) легко находится по правилу Крамера[5], в виде правильной дроби $\breve{\bar{X}}(p) = \dfrac{\bar{\Delta}_{2n-1}(p)}{\Delta_{2n}(p)}$, где $\Delta_{2n}(p) = \det(Mp^2 + Dp + C)$ главный определитель, представляющий собой многочлен степени 2n, а $\bar{\Delta}_{2n-1}(p)$ вектор вспомогательных определителей многочленов степени 2n-1. Обращение такой дроби в соответствии с теоремами разложения может быть проведено путем разложения его на сумму простейших дробей, имеющие табличное обращение.

Однако, для целей физического анализа решения, более подходящим является метод собственных чисел и собственных функций системы. В соответствии с ним, согласно общей теории дифференциальных уравнений общее решение уравнения (1) имеет следующую структуру:

$$\bar{X}(t) = \bar{X}_{собств}(t) + \bar{X}_{вынужд}(t), \text{ а } \bar{X}_{собств}(t) = \sum_{к=1}^{m} C_к \bar{X}_к^б(t), \qquad (4)$$

где $\bar{X}_{собств}(t)$ общее решение соответствующей однородной системы уравнений (1) с нулевой правой частью, т.е. $\overline{F}(t) = 0$, $\overline{X}_{к}^{б}(t)$ линейно-независимая система базисных решений однородных уравнений (1), а $C_к$ произвольные константы, определяемые в дальнейшем из начальных условий (2). Поскольку однородные уравнения соответствуют отсутствию внешних сил, приложенных к механической системе, то эта часть решения называется собственным (свободным) движением механической системы.

Другая часть общего решения $\overline{X}_{вынужд}(t)$ представляет собой частное решение неоднородных уравнений (1) и называется вынужденным решением, так как обусловлена исключительно действием заданных внешних сил $\overline{F}(t) \neq 0$.

Будем искать систему собственных базисных решений однородных уравнений (1) в виде

$$\overline{X}_{к}^{б}(t) = \overline{L} \cdot e^{\lambda t},$$

где λ произвольная константа и произвольный вектор констант $\overline{L} = (l_j)$, которые будем подбирать так, чтобы это решение удовлетворяло однородным уравнениям (1), подставляя его в уравнение, получаем:

$$(M\lambda^2 + D\lambda + C) \cdot \overline{L} = \overline{0}. \qquad (5)$$

Ненулевое решение этого однородного уравнения возможно лишь при условии того что λ является корнями следующего характеристического уравнения:

$$\Delta_{2n}(\lambda) = \det(M\lambda^2 + D\lambda + C) = 0. \qquad (6)$$

Это алгебраическое уравнение порядка 2n по основной теореме алгебры оно имеет 2n корней с учетом их кратности. причем в силу симметричности характеристической матрицы $A = M\lambda^2 + D\lambda + C$ и вещественности коэффициентов уравнения (6) его корни будут попарно комплексно-сопряженными $\lambda_к = -\delta_к \pm i\omega_к$ к =1,2, …., n и называются собственными числами механической системы. Константы $\delta_к \geq 0$ называются коэффициентами затухания, так как $\delta_к = 0$ при отсутствии диссипации $D = 0$ и $\delta_к > 0$ при наличии диссипации, а константы $\omega_к \geq 0$ называются собственными частотами системы, причем собственные частоты пронумерованы по возрастанию $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq .... \leq \omega_n$, ω_1 - первая (низшая, основная) частота.

Каждой паре собственных чисел $\lambda_к$ соответствует решение уравнения (5) $\overline{L}_к = (l_{кj})$, называемое собственными векторами системы, причем, поскольку решение уравнения (5) представляется однопараметрическим множеством, то одну из компонент вектора $\overline{L}_к = (l_{кj})$ можно задать произвольной константой, например $(l_{к1} = 1)$. Если собственное число кратно, то имеется многопараметрическое множество решений и произвольными константами можно задавать количество компонент равное кратности.

Определив все собственные числа и вектора системы, можем найти систему линейно-независимых базисных решений $\overline{X}_к^б(t) = \overline{L}_к \cdot e^{\lambda t}$ однородного уравнения (1) и построить общее решение для собственных движений механической системы .

$$\overline{X}_{собств}(t) = \sum_{к=1}^{m} \overline{L}_к \cdot (C_{2к-1} e^{-\delta_к + i\omega_к} + C_{2к} e^{-\delta_к - i\omega_к}) =$$

$$= \sum_{к=1}^{m} \overline{L}_к \cdot e^{-\delta_к} \cdot (C_{2к-1} Sin\omega_к t + C_{2к} Cos\omega_к t) = \qquad (7)$$

$$= \sum_{к=1}^{m} \overline{L}_к \cdot A_к e^{-\delta_к t} \cdot Sin(\omega_к t + a_к),$$

Где $C_{2\kappa-1}, C_{2\kappa}$ или A_κ, a_κ пары произвольных констант, причем связанные известными соотношениями для гармонических функций:

$$C_{2\kappa-1}^2 + C_{2\kappa}^2 = A_\kappa^2\ , \qquad \frac{C_{2\kappa}}{C_{2\kappa-1}} = tg(a_\kappa)\ .$$

Базисные функции в виде $\overline{X}_\kappa^{\,б}(t) = \overline{L}_\kappa \cdot A_\kappa e^{-\delta t} Sin(\omega_\kappa t + a_\kappa)$ называются собственными формами колебаний механической системы. Как видно из приведенного решения, собственные движения механической системы носят колебательный характер и представляются по каждой координате суммой собственных форм колебаний с амплитудой A_κ на собственных частотах ω_κ и с начальными фазами a_κ.

Суммарное собственное движение представляется в зависимости от соотношения частот, амплитуд и фаз собственных форм колебаний хаотическим, почти «случайным» движением, однако в частности, подобрав соответствующие начальные условия можно возбудить только одну из собственных форм и наглядно увидеть ее. С другой стороны оказывается, что линейным преобразованием с матрицей перехода $L = (\overline{L}_\kappa) = (l_{\kappa j})$ можно подобрать новые координаты системы $\overline{Z}(t) = L \cdot \overline{X}(t)$ такие что, матрицы жесткости, инерции и диссипации будут иметь диагональный вид. Тогда уравнения (1) расщепляются и становятся независимыми по каждой из новых координат

$$m_\kappa \ddot{z}_\kappa + d_\kappa \dot{z}_\kappa + c_\kappa z_\kappa = F_\kappa^*(t)\,,$$

Такие координаты называются главными, и их изменение происходит в соответствии с законами движения линейного гармонического осциллятора.

Вынужденные движения $\overline{X}_{вынужд}(t)$ совершаются при наличии внешних сил, приложенных к системе и могут быть найдены различными математическими методами такими как метод вариации произвольных постоянных, операционный метод, методы Дюамеля и Грина [3], Но наше решение будет проще, - зададимся гармоническим видом переменных внешних сил

$$\overline{F}(t) = \bar{f} \cdot Sin(\Omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[\bar{f} \cdot e^{i(\Omega t + \varphi)}],$$

где $\bar{f} = (f_к)$ вектор амплитуд внешних сил изменяющихся с одной частотой Ω и с одной начальной фазой φ. Будем искать вынужденное движение так же в гармоническом виде:

$$\overline{X}_{вынужд}(t) = \overline{B} \cdot Sin(\Omega t + b) = \operatorname{Im}[\overline{B} \cdot e^{i(\Omega t + b)}], \quad (8)$$

где $B = (B_к)$ неизвестный вектор амплитуд вынужденных колебаний, возбуждаемых на частоте внешней силы и с неизвестной начальной фазой b. Выражения в квадратных скобках представляют собой комплексную внешнюю силу и комплексное решение соответственно

$$\tilde{\tilde{\overline{F}}}(t) = \bar{f} \cdot e^{i(\Omega t + \varphi)} \qquad \tilde{\tilde{\overline{X}}}_{вынужд}(t) = \overline{B} \cdot e^{i(\Omega t + b)}.$$

Подставляя в (1) мнимую часть комплексного решения получим, что амплитуда и фаза вынужденных колебаний удовлетворяют уравнению $(M(i\Omega)^2 + D(i\Omega) + C)\overline{B} = \bar{f}e^{i(\varphi - b)}$ разделяя действительную и мнимые части получим два уравнения

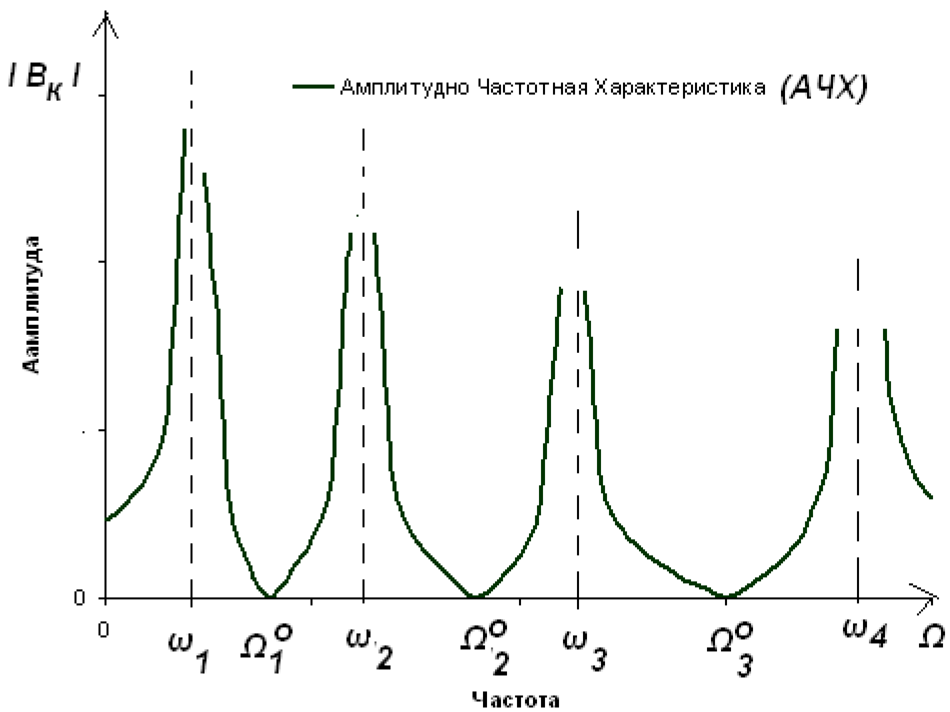
$$(-M\Omega^2 + C)\overline{B} = \bar{f} \cdot Cos(\varphi - b), \quad D\Omega\overline{B} = \bar{f} \cdot Sin(\varphi - b) \quad (9)$$

из которых могут быть найдены амплитуды $B_к = B_к(\Omega)$ и фаза $b = b(\Omega)$ вынужденных колебаний как функции частоты внешней гармонической силы. Эти функции называются амплитудно-частотными (АЧХ) и фазо-частотными (ФЧХ) характеристиками динамического поведения механической системы. Физический смысл АЧХ и ФЧХ состоит в том, что они показывают как система откликается на переменное внешнее воздействие в форме вынужденных колебаний. АЧХ является одновременно и коэффициентом динамичности механической системы.

В частности при отсутствии диссипации $D=0$ смещение фаз вынужденных колебаний и вынуждающей силы отсутствует $\varphi = b$, тогда из (9) по правилу Крамера находим АЧХ

$$B_{\kappa}(\Omega) = (-M\Omega^2 + C)^{-1} \cdot \bar{f} = \frac{\Delta^{\kappa}_{2n-2}(\Omega)}{\Delta_{2n}(\Omega)}$$

При близости частоты внешней силы хотя бы к одной из собственных частот главный определитель $\Delta_{2n}(\Omega \approx \omega_{\kappa}) \approx 0$ близок нулю и в системе имеет место резонансное усилении колебаний. Частоты внешней силы $\Omega^{*}_{r} \approx \omega_{\kappa}$ называются резонансными. Типичный вид АЧХ приводится.



Видим, что существуют частоты внешней силы Ω^{0}_{κ}, называемые антирезонансными , при которых вынужденные колебания не возбуждаются, т.е. система не реагирует на переменное внешнее воздействие. Если антирезонансные частоты существуют, то они находятся из находятся нулю вспомогательных определителей Крамера $\Delta^{\kappa}_{2m-2}(\Omega^{0}_{\kappa}) = 0$.

При наличии диссипации в системе решения уравнений (9) неограниченных амплитуд уже не дают, но частоты внешних сил при которых наблюдаются максимальные и минимальные амплитуды остаются присутствовать в линейке собственных частот системы а потому так же называются квазирезонансными и квазиантирезонасными частотами соответственно.

Зная амплитудно-частотную характеристику механической системы, моделирующей некоторую, например, строительную конструкцию, можно при проектировании конструкции размещать ее собственные частоты вдали от частот внешних воздействий, а антирезонансные наоборот ближе к ним.

В заключении напомним, что общее решение уравнений (1) согласно (4) выглядит следующим:

$$\overline{X}(t) = = \sum_{\kappa=1}^{m} \overline{L}_{\kappa} \cdot A_{\kappa} e^{-\delta_{\kappa} t} \cdot Sin(\omega_{\kappa} t + a_{\kappa}) + \overline{B} \cdot Sin(\Omega t + b)$$

В котором константы A_{κ}, a_{κ} определяются из начальных условий (2).

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИ РАСЧЕТНО - ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Для упругих механических систем с двумя степенями свободы, изображенных ниже на рисунках и с параметрами, приведенными в таблице, где **n** – последняя цифра номера учебной группы, выполнить следующие задания:

1) Ввести координаты состояния $x_1(t), x_2(t)$ и составить уравнения динамической модели 4-го порядка для описания движений системы.

2) Найти собственные частоты ω_1, ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ и собственные вектора $\overline{L}_1, \overline{L}_2$. Определить собственные формы $X_1^{б}, X_2^{б}$ колебаний упругой системы.

3) Построить Амплитудно-частотные характеристики для вынужденных колебаний по каждой из координат системы при действие на нее внешних гармонических сил $F_1 = f_1 Cos\Omega t$ и $F_2 = f_2 Cos\Omega t$ в диапазоне изменения частоты внешних сил $0 < \Omega < 1.2\omega_2$. Определить резонансные Ω_1^*, Ω_2^* и антирезонансные Ω_1^0, Ω_2^0 частоты системы.

4) Для частоты внешней силы $\Omega_0 = \dfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ найти амплитуды B_1, B_2 вынужденных колебаний, найти амплитуды A_1, A_2 и начальные фазы φ_1, φ_2 собственных форм колебаний.

построить полное решение при заданных начальных условиях для координат $x_1(t), x_2(t)$ и построить их графики в диапазоне времени

$$0 \le t \le 2\frac{2\pi}{\omega_1}$$

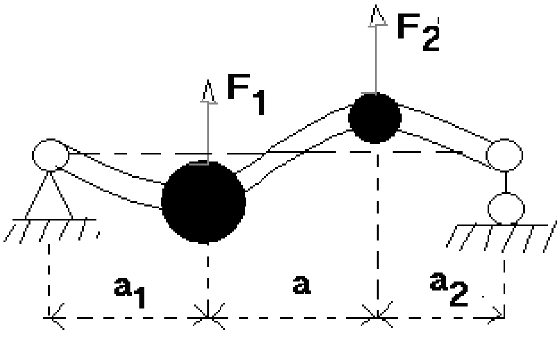


Рис.1 P= *EJ*

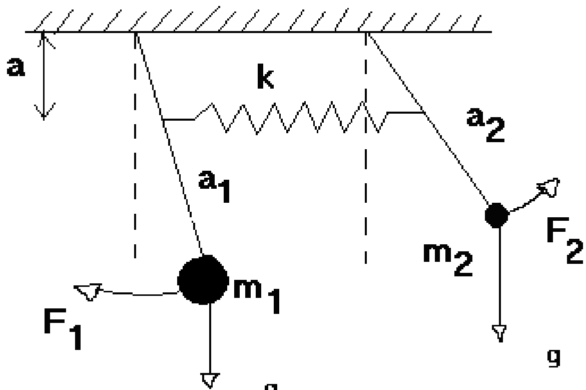


Рис. 2 P=g

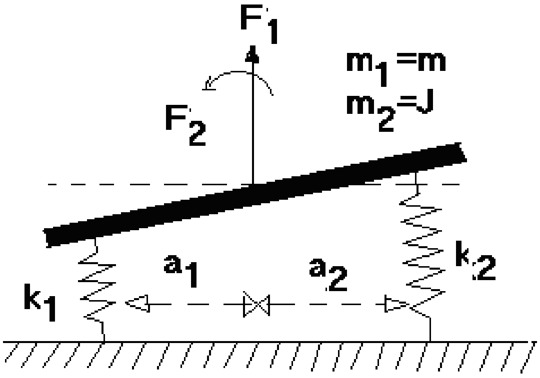


Рис.3

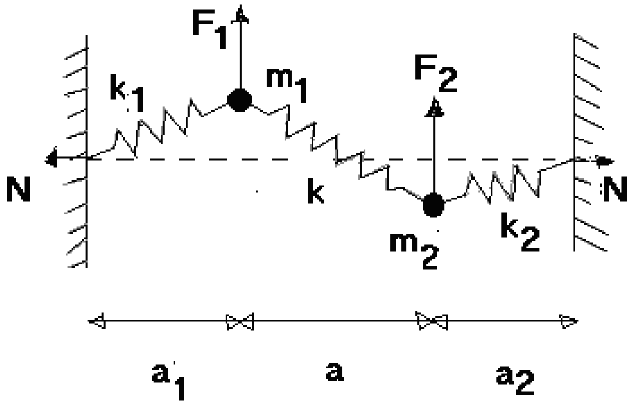


Рис. 4 P=N

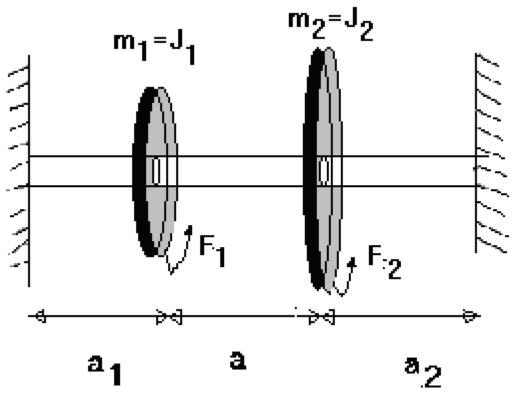


Рис. 5 P=JG

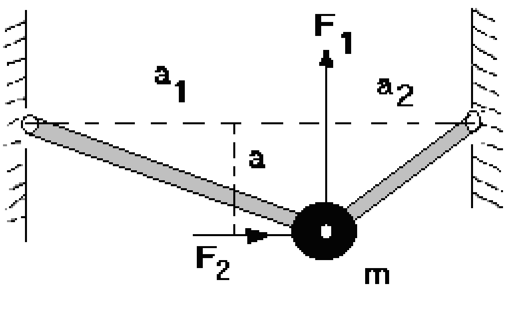


Рис. 6 P=ES

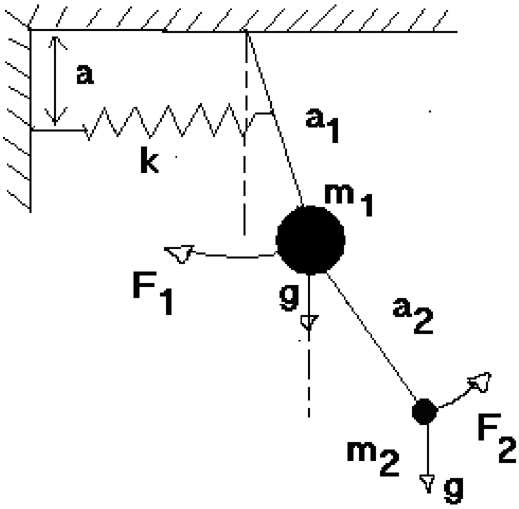


Рис. 7 P=g

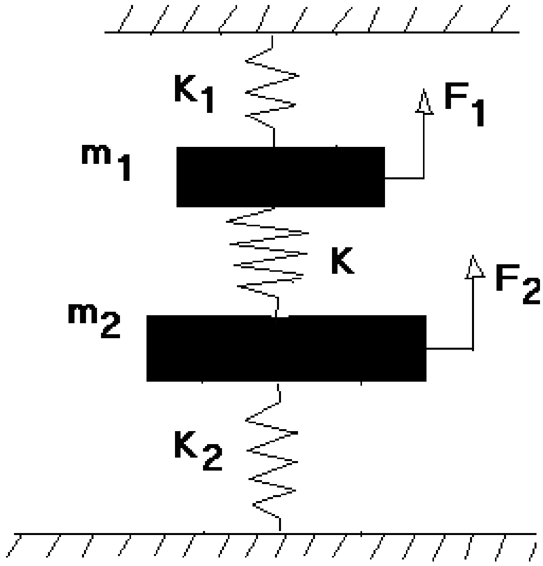


Рис. 8

N вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Схема №	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
M1	1	1	n+2	n+2	1	n+1	n+1	2	2	n+1
a1	4	2	4	2	4	2	2	8	8	8
f1	1	0	1	0	1	1	2	1	2	0
M2	n+2	n+2	1	1	n+2	2	2	n+1	n+1	2
a2	2	4	2	4	2	10	10	10	2	2
f2	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
K	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	3	2	1	2	3	1	1	1	1	1
P	50	50	50	50	50	10	10	10	10	10
X1(0)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
V1(0)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
X2(0)	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
V2(0)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

N вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Схема №	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
M1	n+2	n+2	1	1	n+2	1	n+2	n+2	1	1
K1	1	1	1	2	2	2	2	1	3	3
a1	2	2	2	4	4	4	4	2	2	2
f1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
M2	4	4	n+2	n+2	1	n+2	4	4	n+2	n+2
K2	2	2	1	1	1	3	3	2	1	1
a2	4	4	2	2	2	2	2	2	4	4
f2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
K						1	1	1	1	1

a						1	1	1	1	1
P						2	2	1	3	1
X1(0)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
V1(0)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
X2(0)	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
V2(0)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

N вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Схема №	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
M1	4	4	n+2	n+2	1	1	4	4	1	1
a1	2	2	2	4	4	4	4	2	2	2
f1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
M2	n+2	n+2	1	1	n+2	n+2	n+2	n+2	n+2	n+2
a2	4	4	2	2	2	2	2	2	4	4
f2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
a	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1
P	20	20	20	20	20	16	16	16	16	16
X1(0)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
V1(0)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
X2(0)	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
V2(0)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

N вар.	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**29**	**40**
Схема №	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
M1	1	1	n+2	n+2	1	1	1	n+2	n+2	1
K1						0	0	1	1	1
a1	4	4	4	6	6					
f1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
M2	n+2	n+2	1	1	n+2	n+2	n+2	1	1	n+2
K2						1	1	0	0	0
a2	2	2	1	1	1					
f2	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
K	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	2	1	2	1	2					
P	10	10	10	10	10					
X1(0)	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
V1(0)	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
X2(0)	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
V2(0)	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0

Указания к разработке динамических уравнений упругих систем.

1.) Кинетическая энергия массивного элемента системы вычисляется по формулам $T_1 = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, $T_2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$ для поступательного движения со скоростью v и для вращательного движения с угловой скоростью ω.

2.) Потенциальная энергия упругого элемента системы при малых перемещениях x вычисляется по формуле, $\Pi_1 = \frac{1}{2} \kappa \cdot x^2$, где κ эффективная жесткость упругого элемента. В случае если упругий элемент нагружен силой N_0, то его потенциальная энергия $\Pi_2 = N_0 \cdot x$. Потенциальная энергия в поле силы тяжести на h уровне $\Pi_3 = m \cdot g \cdot h$

3.) Эффективная жесткость упругого элемента равна силе или моменту, приводящих к единичному смещению элемента (эквивалент пружины $F_y = -\kappa \cdot x$). Для упругого защемленного стержня, нагруженного на свободном конце силой или моментом, эффективные жесткости будут: при сжатии-растяжении $\kappa = \frac{ES}{l}$, при кручении $\kappa = \frac{JG}{l}$, при изгибе поперечной силой $\kappa = \frac{3EJ}{l^3}$, при изгибе моментом $\kappa = \frac{2EJ}{l^2}$.

4.) При вычислении геометрических размеров смещений, в силу их малости можно воспользоваться приближенными формулами:

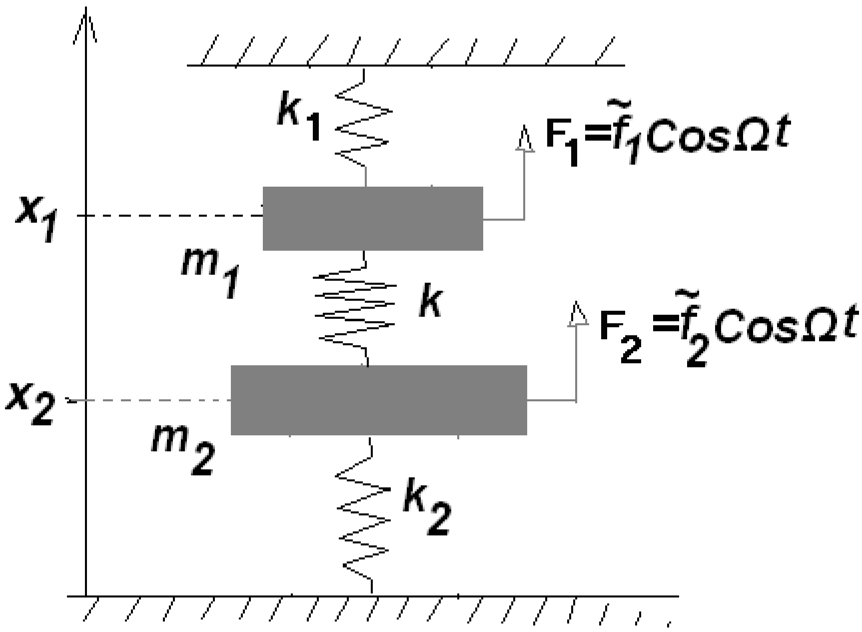
$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha, \quad Sin\alpha \approx \alpha, \quad 1 - Cos\alpha \approx \frac{1}{2}\alpha^2,$$

$$\sqrt{l^2 + \alpha^2} - l = l(\sqrt{1 + (\alpha / l)^2} - 1) \approx \frac{l}{2}(\alpha / l)^2$$

5.) Функция влияния при изгибе шарнирно опертого стержня поперечной силой P в точке ξ будет $u(x,\xi) = \frac{Px(l-x)}{6lEJ}(l^2 - x^2 - (l-\xi)^2)$.

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЙ»

В предлагаемой для выполнения расчетно-графической работе рассматривается двух массовая механическая система, в которой точечные массы совершают малые движения вдоль невесомых упругих пружин. Трением, а значит диссипацией энергии, пренебрегаем. На систему действует внешнее возбуждение в виде гармонических сил, приложенных к массам. На рисунке ниже приведена схема упругой системы.



Безразмерные значения параметров системы следующие:

$$m_1 = 4, m_2 = 1, k_1 = 1, k_2 = 0, k = 1,$$

$$\tilde{f}_1 = 1, \tilde{f}_2 = 0,$$

$$X_{01} = 1 \quad X_{02} = 0$$

$$V_{01} = 0 \quad V_{02} = 1$$

1. Составим уравнения динамической модели рассматриваемой механической системы.

Система имеет две степени свободы движения, поэтому в качестве координат выберем продольные смещения точечных масс от равновесного состояния $x_1(t), x\ (t)$.

Кинетическая энергия системы состоит из энергии двух движущихся точечных масс

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2,$$

а потенциальная энергия системы состоит из упругой энергии 3-х пружин и которая, в случае малых смещений, может быть записана в следующем виде:

$$\Pi(x_1, x_2) = \frac{\kappa_1}{2}x_1^2 + \frac{\kappa_2}{2}x_2^2 + \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

Используя уравнения Лагранжа 2-го рода $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}) + F_i = 0$, *где* $L = T - \Pi$ функция Лагранжа*, а* F_i обобщенные силы, работа которых не включена в потенциальную энергию и в нашем примере состоит из заданных внешних сил, имеющих гармонический характер $F_i = \tilde{f}_i \cdot Cos\Omega t$. Уравнения движения для малых продольных колебаний масс будут следующие*:*

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 + k(x_2 - x_1) + F_1 = 0 \\ -m_2\ddot{x}_2 - k_2x_2 - k(x_2 - x_1) + F_2 = 0 \end{cases}$$

или разрешив уравнения относительно старших производных
с учетом вида внешних сил , получим

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k_1 + k}{m_1} x_1 - \dfrac{k}{m_1} x_2 = \dfrac{\tilde{f}_1}{m_1} \cos \Omega t \\ \ddot{x}_2 - \dfrac{k}{m_2} x_1 + \dfrac{k}{m_2} x_2 = \dfrac{\tilde{f}_2}{m_2} \cos \Omega t \end{cases}.$$

Запишем уравнения модели 4-го порядка в индексной стандартной форме:

$$\ddot{x}_1 + c_{11} x_1 + c_{12} x_2 = f_1 \cos \Omega t$$
$$\ddot{x}_2 + c_{21} x_1 + c_{22} x_{2\,2} = f_2 \cos \Omega t$$

где введены следующие обозначения для приведенных коэффициентов жесткости и амплитуд внышних сил:

$$c_{11} = \frac{k_1 + k}{m_1};\ \mathrm{c}_{12} = -\frac{k}{m_1} \qquad f_1 = \frac{\tilde{f}_1}{m_1}$$
$$c_{21} = -\frac{k}{m_2};\quad \mathrm{c}_{22} = \frac{k_2 + k}{m_2} \qquad f_2 = \frac{\tilde{f}_2}{m_2}$$

Начальные условия на положения и скорости движения точечных масс следующие:

$$x_1(0) = X_{01} = 1 \quad x_2(0) = X_{02} = 0$$
$$\dot{x}_1(0) = V_{01} = 0 \quad \dot{x}_2(0) = V_{02} = 1$$

Запишем уравнения модели так же а векторной форме

$$\ddot{\overline{X}} + C\overline{X} = \overline{f} Cos\Omega t\,; \qquad (1)$$

$$\overline{X}(0) = \overline{X_0}\,;\ \dot{\overline{X}}(0) = \overline{V_0}\,, \quad (2)$$

Где введены следующие обозначения:

$$\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}; \qquad \overline{X_0} = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{pmatrix}; \qquad \overline{V_0} = \begin{pmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - приведенная матрица жёсткости системы;

$\overline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$- приведенные амплитуды внешних сил..

Общее решение уравнений системы состоит из двух частей

$$\overline{X}(t) = \overline{X}_{\text{собст.}}(t) + \overline{X}_{\text{вынужд.}}(t)$$

собственных колебаний, соответствующих движению системы без воздействия внешних сил и вынужденных колебаний , обусловленных именно действием внешних сил.

2. Будем искать собственные (свободные) колебания системы в форме:

$$\overline{X}_{\text{собств}} = \overline{L}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} x_1 = l_1 e^{\lambda t} \\ x_2 = l_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix};$$

подставляя его в соответствующие однородные уравнения модели, получим:

$$\begin{pmatrix} c_{11} + \lambda^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + \lambda^2 \end{pmatrix} \cdot \overline{L} = 0 \qquad (3)$$

для наличия ненулевых решений необходимо выполнение условия

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} + \lambda^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (c_{11} + c_{22})\lambda^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = 0,$$

называемого характеристически уравнением системы. При отсутствии трения оно будет биквадратным. Решив это биквадратное уравнение получим чисто мнимые корни: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$; $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, где $\omega_1 < \omega_2$ собственные частоты системы.

Собственные вектора, соответствующие собственным частотам ω_1, ω_2.находим из решения уравнений (3)

$$\omega_1 \sim \overline{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}; \ \omega_2 \sim \overline{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \text{где}$$

$$\chi_1 = \frac{c_{21}}{\omega_1^2 - c_{22}}; \ \chi_2 = \frac{c_{21}}{\omega_2^2 - c_{22}}$$

В рассматриваемом примере коэффициенты жесткости будут соответственно равны:

$$c_{11}=\frac{k_1+k}{m_1}=\frac{1+1}{4}=\tfrac{1}{2};\ c_{12}=-\frac{k}{m_1}=-\frac{1}{4}\qquad f_1=\frac{f_1}{m_1}=0{,}25$$

$$c_{21}=-\frac{k}{m_2}=-1;\qquad c_{22}=\frac{k}{m_2}=1\quad f_2=0$$

Характеристическое уравнение имее следующий вид:

$$\lambda^4+\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}=0,$$

а собственные частоты будут

$$\omega_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\approx 0{,}437\ \text{и}\ \omega_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}\approx 1{,}144\,.$$

Собственные вектора получаем:

$$\omega_1\sim\overline{L}_1=\begin{pmatrix}1\\ \chi_1\end{pmatrix};\ \omega_2\sim\overline{L}_2=\begin{pmatrix}1\\ \chi_2\end{pmatrix},\ \text{где}$$

$$\chi_1=\frac{-1}{0{,}437^2-1}\approx 1{,}24;\ \chi_2=\frac{-1}{1{,}44^2-1}\approx -3{,}25$$

Тогда решение для собственных колебаний имеет следующий вид:

$$\overline{X}_{\text{собст}}=\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_2 t\right)\cdot\overline{L}_1+\left(C_3\cos\omega_1 t+C_4\sin\omega_2 t\right)\cdot\overline{L}_2$$

или

$$\overline{X}_{\text{собст}}(t)=A_1\overline{L_1}\cos(\omega_1 t-\varphi_1)+A_2\overline{L_2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2)$$

Где C_1,C_2,C_3,C_4 произвольные константы, а $A_1,\varphi_1,A_2,\varphi_2$ выражаемые через них амплитуды и фазы

$$\mathrm{A}_1=\sqrt{\mathrm{C}_1^2+\mathrm{C}_2^2}\quad \mathrm{tg}\varphi_1=\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}\qquad \mathrm{A}_2=\sqrt{\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_4^2}\quad \mathrm{tg}\varphi_2=\frac{\mathrm{C}_4}{\mathrm{C}_3},$$

Из приведенного выше решения видим, что собственные движения носят колебательный характер и состоят из суммы двух колебаний. Векторные функции

$$\overline{X}_1(t)=A_1\overline{L_1}\cos(\omega_1 t-\varphi_1),\qquad \overline{X}_2(t)=A_2\overline{L_2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2)$$

называются собственными формами колебаний на соответствующих частотах

Запишем общее решение (однородной) системы уравнений модели для собственных колебаний по координатно:

$$x_{1собст} = \left(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_2 t\right) + \left(C_3 \cos\omega_1 t + C_4 \sin\omega_2 t\right)\cdot$$
$$x_{2собст} = \left(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_2 t\right)\chi_1 + \left(C_3 \cos\omega_1 t + C_4 \sin\omega_2 t\right)\chi_2 \cdot$$

или через амплитуды и начальные фазы:

$$x_{1_{собст}} = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$
$$x_{2_{собст}} = A_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Неизвестные константы C_1, C_2 , C_3 , C_4 или выражаемые через них неизвестные амплитуды A_1 A_2 и начальные фазы φ_1, φ_2 собственных колебаний определяются из начальных условий (2)

3. Решение для вынужденных колебаний системы находим в виде правой части так как $\overline{F} = \overline{f} Cos\Omega t$, то и $\overline{X}(t) = \overline{B} Cos\Omega t$, где $\overline{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$;

Здесь B_1, B_2 амплитуды вынужденных колебаний, *а* Ω их частота.

Подставляя это решение в неоднородные уравнения (1) получим:

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \Omega^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{11} - \Omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Ненулевое решение этих уравнений для неизвестных констант B_1, B_2 таково:

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & c_{12} \\ f_2 & c_{22} - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega)} \qquad B_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} - \Omega^2 & f_1 \\ c_{21} & f_2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega)}$$

$$B_1 = \frac{f_1\left(c_{22} - \Omega^2\right) - f_2 c_{12}}{\Delta(\Omega)} \qquad B_2 = \frac{f_2\left(c_{11} - \Omega^2\right) - f_1 c_{21}}{\Delta(\Omega)}$$

где главный определитель совпадает по виду с характеристическим уравнением

$$\Delta(\Omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \Omega^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \Omega^2 \end{vmatrix} = \Omega^4 - (c_{11} + c_{22})\Omega^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})$$

Частоты внешних сил, при которых наблюдаются неограниченное нарастание амплитуд вынужденных колебаний называются резонансными частотами. Условием резонанса является $\Delta(\Omega) = 0$, из чего следует, что собственные частоты в системах без трения одновременно будут и резонансными. Частота внешней силы называется антирезонансной, если амплитуды вынужденных колебаний равны нулю т.е. $B_1=0$ или $B_2=0$

$$(\Omega_1^0)^2 = \frac{f_1\, c_{22} - f_2 c_{12}}{f_1} \;; \qquad (\Omega_2^0)^2 = \frac{f_2\, c_{11} - f_1 c_{21}}{f_2}$$

В рассматриваемом числовом примере находим амплитуды*:*

$$\Delta(\Omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \Omega^2 & \mathrm{c}_{12} \\ \mathrm{c}_{21} & \mathrm{c}_{11} - \Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \Omega^2 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 - \Omega^2 \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{2} - \Omega^2\right)\left(1 - \Omega^2\right) - \tfrac{1}{4}$$

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & \mathrm{c}_{12} \\ f_2 & \mathrm{c}_{22} - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega)} \qquad B_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} - \Omega^2 & f_1 \\ c_{21} & f_2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \Omega^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega)}$$

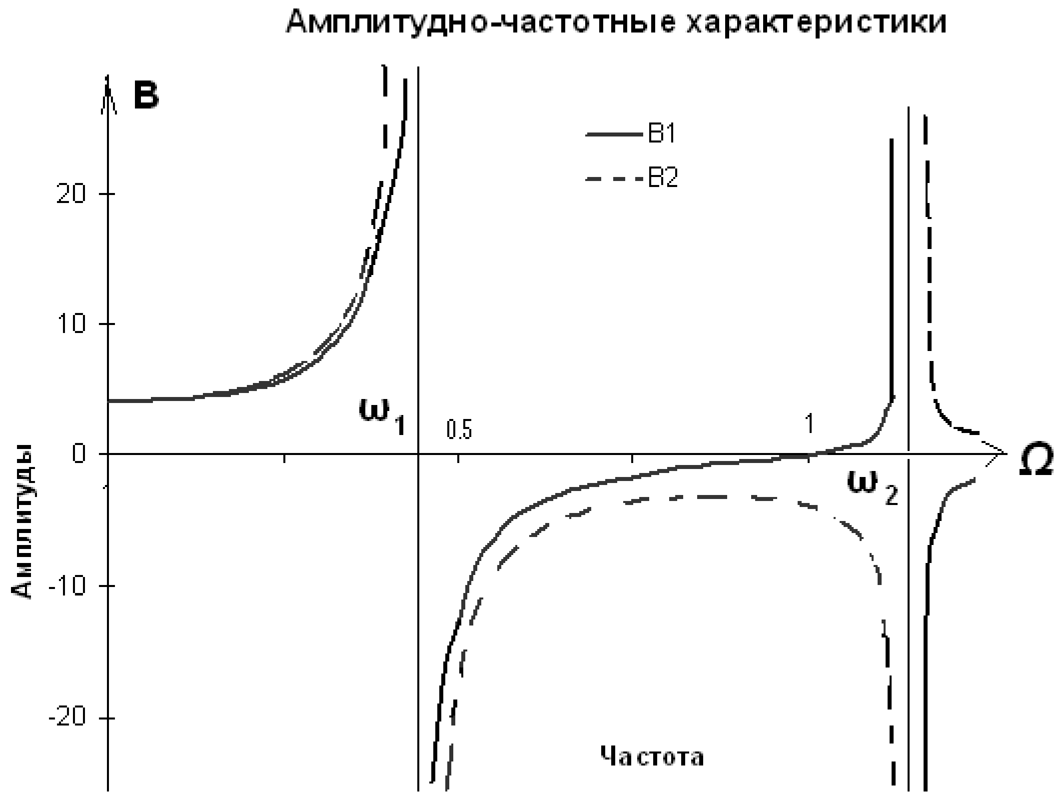
$$B_1 = \frac{f_1\left(c_{22} - \Omega^2\right) - f_2 c_{12}}{\Delta(\Omega)} = \frac{1 - \Omega^2}{\Delta(\Omega)} \qquad B_2 = \frac{f_2\left(c_{11} - \Omega^2\right) - f_1 c_{21}}{\Delta(\Omega)} = \frac{-1}{\Delta(\Omega)}$$

и одну из антирезонансных частот $\Omega_1^0 = 1, \Omega_2^0 = \infty$

Построим Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний системы, для чего составим таблицу амплитуд вынужденных колебании для различных значений частоты внешней силы.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Ω	*0,00*	*0,11*	*0,23*	*0,34*	*0,43*	*0,46*	*0,57*	*0,69*	*0,80*	*0,92*	*1,03*	*1,14*	*1,26*	*1,37*
.$\Delta(\Omega)$	*0,25*	*0,23*	*0,17*	*0,09*	*0,00*	*-0,02*	*-0,13*	*-0,23*	*-0,30*	*-0,30*	*-0,22*	*0,00*	*0,38*	*0,98*
B_1	*4,00*	*4,28*	*5,44*	*10,12*	∞	*-38,95*	*-5,03*	*-2,25*	*-1,19*	*-0,53*	*0,28*	∞	*-1,52*	*-0,91*
B_2	*4,00*	*4,34*	*5,74*	*11,47*	∞	*-49,27*	*-7,47*	*-4,26*	*-3,33*	*-3,28*	*-4,63*	∞	*2,61*	*1,02*

На основании таблицы построим по тачкам графики АЧХ



4. <u>Определим полные колебания в системе</u> как сумму собственных и вынужденных колебаний $\overline{X} = \overline{X}_{\text{собст.}} + \overline{X}_{\text{вынужд.}}$ в случае частоты внешней вынуждающей силы $\Omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$

Из начальных условий определим неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4

$$x_1(0) = (C_1) + (C_3) + B_1(\Omega) = X_{10} \qquad x_2(0) = (C_1\chi_1) + (C_3\chi_2) + B_2(\Omega) = X_{20}$$

$$\frac{d}{dt}x_1(0) = (C_2\omega_1) + (C_4\omega_2) = V_{10} \qquad \frac{d}{dt}x_2(0) = (C_2\chi_1\omega_1) + (C_4\chi_2\omega_2) = X_{20}$$

Решение этой неоднородной системы линейных уравнений по правилу Крамера будет:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} X_{01} - B_1 & 1 \\ X_{02} - B_2 & \chi_2 \end{vmatrix}}{(\chi_2 - \chi_1)} \qquad C_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & X_{01} - B_1 \\ \chi_1 & X_{02} - B_2 \end{vmatrix}}{(\chi_2 - \chi_1)}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} V_{01} & 1 \\ V_{02} & \chi_2 \end{vmatrix}}{(\chi_2 - \chi_1)\omega_1} \qquad C_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & V_{01} \\ \chi_1 & V_{02} \end{vmatrix}}{(\chi_2 - \chi_1)\omega_2}$$

Амплитуды и начальные фазы собственных колебаний вычислим по формулам

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{C_2}{C_1} \qquad A_2 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \quad \mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{C_4}{C_3},$$

В нашем примере для Ω=0,79. получим B_1=-2.95, B_2=-2.105, C_1=-0,128; C_2=-0.195 , C_3=2,39 , C_4=0,51 (или A_1=0,28; A_2=2,45, φ_1=0,99, φ_2=0,51.

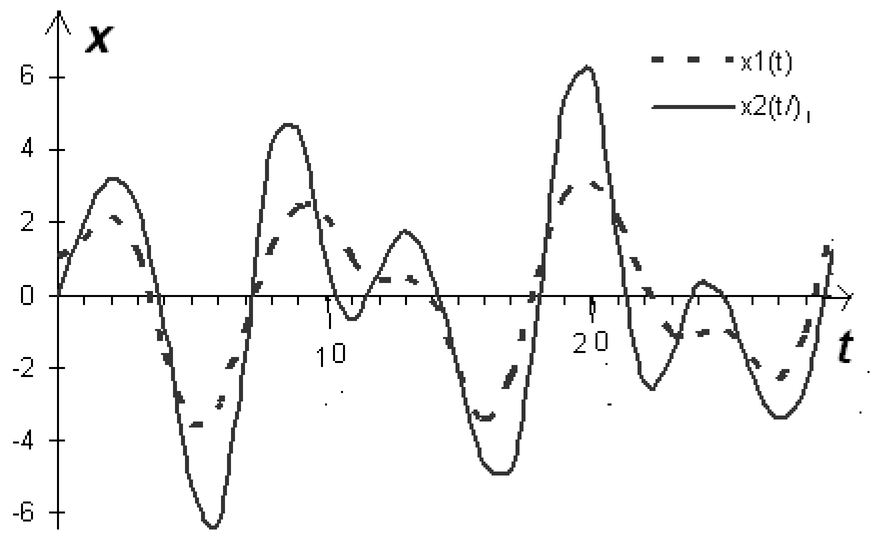
И тогда полные колебания в рассматриваемой системе будут следующими:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + B_1(\Omega)\cos(\Omega t)$$
$$x_2(t) = A_1\chi_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2\chi_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + B_2(\Omega)\cos(\Omega t)$$

Построим эти колебания в упругой системе на плоскости $x - t$ во временном интервале, соответствующем двум максимальным периодам колебаний в системе:

$$0 < t < 2\frac{2\pi}{\omega_1}$$

Суммарные колебания элементов.



ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – Москва, 1967г., 440с.

2. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – Санкт-Петербург, 2003 г., 248с.

3. Бабаков И.М. Теория колебаний. – Москва, 1968г,560с.

4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.. – Москва, 1967г., 444с.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Москва,. 1977 г., 687с.

СОДЕРЖАНИЕ

Филатов Леонид Владимирович

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ.

Методические указания и контрольные задания для студентов всех форм обучения.

Подписано в печать _____________ Формат 60х90 $^{1/16}$ Бумага газетная.
Печать офсетная. Уч.изд.л _____. Усл.печ.л ______. Тираж ______ экз.
Заказ №______

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. 603600, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65
Полиграфический центр ННГАСУ. 603600, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65