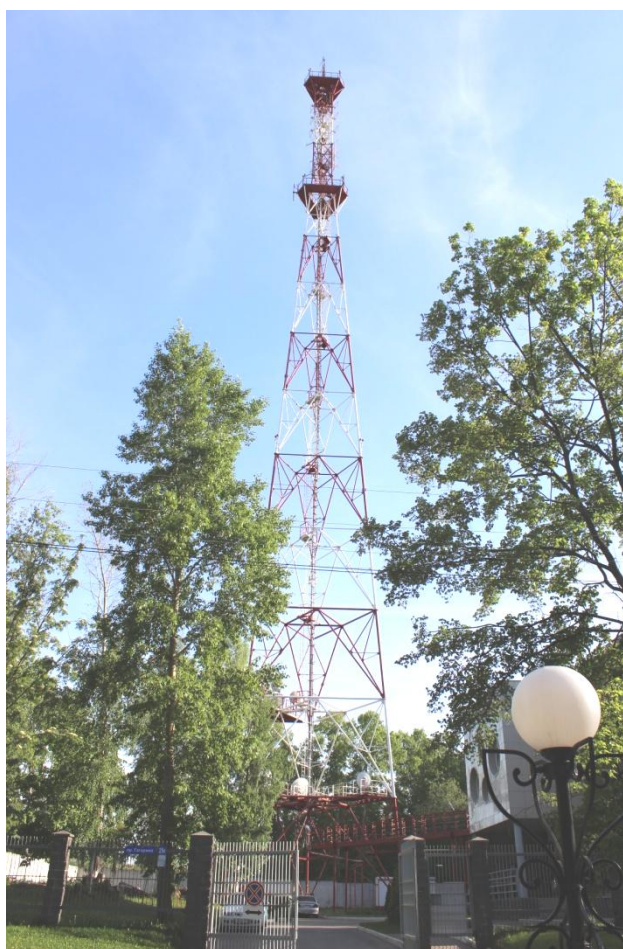


Г. А. Шеховцов

**КОНТРОЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ И ФОРМЫ  
ВЫСОКИХ СООРУЖЕНИЙ БАШЕННОГО ТИПА**

*Монография*



Нижний Новгород  
2018

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Г. А. Шеховцов

КОНТРОЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ  
И ФОРМЫ ВЫСОКИХ СООРУЖЕНИЙ БАШЕННОГО ТИПА

*Монография*

Нижегород  
ННГАСУ  
2018

ББК 26.1  
Ш 54  
УДК 528.482

*Печатается в авторской редакции*

**Рецензенты:**

*Мазуркин П. М.* – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой природообустройства  
Поволжского государственного технологического университета  
*Кулагин Е. П.* – д-р техн. наук, профессор кафедры геодезии и землеустройства  
Нижегородской государственной сельскохозяйственной академии

Шеховцов, Г.А. Контроль пространственного положения и формы высоких сооружений башенного типа [Текст]: монография / Г. А. Шеховцов; Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т – Нижний Новгород: ННГАСУ, 2018. – 214 с. ISBN 978-5-528-00265-1

Выполнены теоретические обобщения и систематизация сведений о способах контроля пространственного положения и формы высоких сооружений башенного типа. Приведена классификация способов определения крена таких сооружений, включающая три группы: многосторонние, односторонние и перспективные. В группу многосторонних включены способы: высокоточного нивелирования, вертикального проектирования с помощью теодолита, линейные, угловые, координатные (способ засечек), фотографические (непосредственный, двухэтапный, ступенчатый), в связи с чем приведены различные способы определения радиуса сооружений круглой формы. Изложена сущность этих способов, отмечены их достоинства, недостатки и новейшие авторские разработки в этой области. Детально рассмотрены односторонние одноэтапные и двухэтапные способы: линейно-угловой и координатный, выполняемые с помощью электронного тахеометра безотражательного типа и способ вертикального проектирования. Показана методика определения составляющих вектора крена по любому направлению. К перспективным отнесены способы, которые в настоящее время могут быть основаны или в дальнейшем будут основаны на новейших достижениях науки и техники, таких как: GPS-приемники, наземные лазерные сканеры, программа Plumb-bob, использование беспилотников. Подобный подход к решению поставленной задачи призван ориентировать исследователей в многообразии способов определения крена с целью выбора оптимальных или разработки новых способов.

Монография рассчитана на инженерно-технических работников, занимающихся монтажом, строительством и контролем за эксплуатацией высоких сооружений башенного типа и может быть полезна студентам технических вузов.

Табл. 63, ил. 141, библиограф. назв. 178.

ББК 26.1

ISBN 978-5-528-00265-1

© Шеховцов Г.А., 2018  
© ННГАСУ, 2018

## ВВЕДЕНИЕ

К сооружениям башенного типа относятся: дымовые и вентиляционные трубы, градирни, ректификационные колонны, грануляционные башни, копры над стволами шахт, водонапорные башни, радиотелевизионные антенные опоры, силосные башни и др. По высоте эти сооружения подразделяются на высокие (250-400 м), средней высоты (150-250 м) и невысокие (до 150 м) [94]. По данным [67] в нашей стране на 2008 год насчитывалось более 270 тыс. дымовых и вентиляционных труб. Из них около 3,5 тыс. железобетонных труб высотой до 370 м, 15 тыс. кирпичных и до 250 тыс. металлических.

Эти сооружения на стадии строительства и эксплуатации, вследствие их конструктивных особенностей и постоянного влияния техногенных и природных факторов, могут претерпевать различного вида деформации, то есть различные изменения в их пространственном положении. Под контролем пространственного положения сооружений башенного типа подразумевается определение абсолютной величины их крена и его направления, приращение крена и изменение его направления, скручивание сооружения и др. Подобные деформации вызывают дополнительный момент, который может привести к потере устойчивости сооружения. Поэтому, в процессе строительства, приёмки заказчиком возведённого сооружения и особенно последующей его эксплуатации должен производиться геодезический контроль пространственного положения этого сооружения.

Цель геодезических наблюдений – получить численные данные, характеризующие абсолютные величины деформаций для осуществления мероприятий по предотвращению возможных разрушений. Поэтому, проблема выбора и обоснования рациональных способов получения максимума информации о пространственном положении сооружений башенного типа всегда являлась вполне своевременной и актуальной задачей, неразрывно связанной с новейшими достижениями науки и техники.

Крен – наиболее характерный показатель общей деформации сооружения башенного типа. Он возникает из-за неравномерных осадок фундамента, изменения гидрогеологии несущих грунтов, тектонических и техногенных процессов, искривлений верхней части конструкции и других факторов. Существенное влияние на величину и направление крена оказывают ветровые нагрузки и односторонний солнечный нагрев [24,43, 76, 77, 119, 172], в результате чего верх сооружения совершает амплитудно-частотные колебания [40]. Например, амплитуда колебаний башни трубчатой конструкции на высоте 316 м достигала 460 мм [50], а максимальные термические деформации 160-метровой дымовой трубы в летний период составили: на высоте 80 м – 30 мм, на высоте 108 м – 40 мм, на высоте 134 м – 55 мм и на высоте 158,3 м



– 75 мм [174]. В работах [24, 94] предусмотрены некоторые меры, позволяющие исключать влияния ветровой нагрузки и солнечной радиации.

В общем виде задача определения крена сводится к определению разности положений геометрических центров верха или верхнего сечения сооружения и его нижнего наблюдаемого сечения с последующей экстраполяцией получаемых результатов на всю высоту сооружения.

Различают систематические, срочные и специальные наблюдения. Систематические наблюдения проводятся по заранее установленному календарному плану (один раз в месяц, квартал, год и т. п.). Например, наблюдения за креном трубы и осадками её фундамента в первые два года эксплуатации должны проводиться 2 раза в год и в дальнейшем один раз в год. При стабилизации осадок (не более 1 мм в год) измерения производят один раз в 5 лет. Предельные отклонения промышленных труб не должны превышать значений, приведенных в табл. 1 [67].

Т а б л и ц а 1

### Предельные отклонения промышленных труб

Вид конструкции ствола трубы	Высота трубы, м	Предельно допустимое отклонение верха трубы	
		Абсолютное, мм	Относительное
Металлические трубы	20	60	1/333
	40	120	
	60	180	
	80	240	
	100	300	
	120	360	
Кирпичные, железобетонные и неметаллические трубы	20	140	1/143
	40	280	1/143
	60	420	1/143
	80	550	1/146
	100	650	1/154
	120	680	1/176
	150	700	1/214
	200	700	1/286
	250	700	1/357
	300	700	1/429

Если имеет место резкое изменение обычного хода деформации, то выполняют срочные наблюдения. Специальные наблюдения применяются для выявления причин возникновения деформаций. В соответствии с этим наличие простых, надёжных и эффективных методов определения параметров пространственного положения и формы сооружений башенного типа, осно-

ванных на новейших достижениях науки и техники, приобретает главенствующее значение.

Геодезическая съёмка сооружений башенного типа выполняется в соответствии с требованиями соответствующих нормативных и руководящих документов [33, 72, 94, 97, 98, 99, 102]. Результаты съёмки используются для заключения экспертизы промышленной безопасности об устойчивости объекта или при разработке мероприятий по обеспечению этой устойчивости. Из всех известных обобщений способов определения крена сооружений башенного типа [7, 12, 20, 25, 28, 51, 55, 94, 127] их наиболее полный перечень существующих и описание новых способов приведены в работе [143] с соответствующими ссылками на первоисточники.

Анализ научно-технической литературы позволил установить, что существует большое количество способов определения крена высоких сооружений башенного типа: нивелирование осадочных марок; вертикальное проектирование; способы горизонтальных углов, произвольных направлений или магнитных азимутов, прямоугольных координат (засечек).

Из других, менее известных способов определения крена, можно отметить способ малых углов, способ горизонтальных и вертикальных углов, способ фоторегистрации, различные способы использования приборов вертикального проектирования. Известны предложения по использованию наклонномеров, микронивелиров, маятниковых кренометров, систем видеоизмерения, телевидения, GPS-приемников и электронных тахеометров. Причём номенклатура способов имеет постоянную тенденцию к своему пополнению.

Однако в настоящий момент наблюдается определённый дефицит надёжных и эффективных средств и методов определения параметров пространственного положения и формы труднодоступных сооружений башенного типа, особенно в условиях застроенности территорий промышленных площадок или частичного расположения металлических труб внутри производственных корпусов. В связи с этим является крайне актуальным создание методов определения геометрических параметров сооружений башенного типа, основанных на использовании бесконтактного оборудования доступной стоимости, что позволит в значительной степени реализовать так называемые «косвенные» и «дистанционные» подходы [128].

Кроме того, экспертиза промышленной безопасности башенных сооружений предусматривает применение различных геометрических способов определения параметров их пространственного положения и формы. Практически всем известным способам определения крена высоких сооружений присущи недостатки, связанные с их зависимостью от застроенности территории, что затрудняет выбор точек стояния применяемого прибора для производства наблюдений в двух или более направлениях. Некоторые из предлагаемых способов нуждаются в дополнительных теоретических и экспериментальных исследованиях, в разработке рациональной методики оценки их точности, в решении ряда вопросов их оптимизации.

С учётом сказанного автор стремился: выполнить анализ современного состояния геодезического контроля пространственного положения и формы башенных сооружений; изложить на современном уровне теоретические и практические вопросы такого контроля; привести результаты теоретических и экспериментальных исследований, выполненных с целью совершенствования известных и разработки новых простых, наглядных, доступных и информативных способов такого контроля. Монография представляет собой попытку охватить практически весь комплекс приёмов и способов контроля промышленной безопасности сооружений башенного типа. В ней учтён современный уровень развития, как способов геодезического контроля, так и технических средств линейно-угловых измерений (электронные тахеометры, цифровые фотокамеры, ручные безотражательные дальномеры, цифровые нивелиры, наземные лазерные сканеры, беспилотные летательные аппараты, GPS-приёмники), а также использован многолетний опыт многих научно-исследовательских, проектных и производственных организаций и личный опыт самого автора.

Практически все исследования отечественных и зарубежных учёных, связанные с нормированием точности любых геодезических работ, направлены на обоснование корректного перехода от допусков СНиП к средним квадратическим ошибкам (СКО)  $m$  геодезических измерений, например, крена башенного сооружения. Наиболее часто точность геодезических измерений устанавливается путем введения так называемых понижающих коэффициентов  $k$  на такие допуски. У разных исследователей эти коэффициенты находятся в пределах 0,2-0,7.

Нами была разработана концепция перехода от нормативных допусков СНиП  $d$  к СКО  $m$  геодезических измерений в зависимости от величины нормируемого множителя  $t$ , которому соответствует определённая величина вероятности  $p$  [123, 124, 125]:

$$m = \frac{kd}{t}. \quad (1)$$

Формула (1) является универсальной, поскольку позволяет осуществлять корректный переход от допусков СНиП к СКО геодезических измерений с учётом степени доверительной оценкой точности. В дальнейшем подобный подход нашел своё подтверждение в работе [11, стр. 394-397]. Кроме того, в ряде источников отмечается, что параметр  $t$  следует выбирать не только в зависимости от имеющихся приборов, точности выполнения работы и её методики, но и из экономических соображений и важности выполняемой работы.

В качестве примера в табл. 2 приведены значения СКО  $m$  определения крена металлической дымовой трубы высотой  $H = 50$  м для различных значений  $t$  при  $d = 400$  мм.

Соотношение между  $m$  и  $t$  при  $d = 400$  мм и  $k = 0,2; 0,3; 0,4$ 

$t$	Вероятность, $p$	СКО $m$ , мм		
		0,2	0,3	0,4
1,6	0,890	50	75	100
2,0	0,955	40	60	80
2,5	0,988	32	48	64
3,0	0,997	27	40	53

Следует сказать, что при большом количестве способов определения крена высоких сооружений башенного типа, их номенклатура имеет постоянную тенденцию к своему пополнению. С учётом этого и с целью систематизации способов определения крена сооружений башенного типа предлагается их классификация (рис. 1), которая не ограничивается только известными способами, а предполагает существование других, пока неизвестных в научном мире [87]. Она призвана ориентировать исследователей в многообразии этих способов с целью выбора оптимальных или разработки новых способов.

Все способы определения крена сооружений башенного типа дифференцированы в три основные группы: многосторонние, односторонние и перспективные.



Рис. 1. Классификация способов определения крена сооружений башенного типа

Под многосторонними будем понимать способы измерения крена с двух и более различных точек стояния прибора. Эти способы основаны на нивелировании, вертикальном проектировании, линейных, угловых или ко-

ординатных измерениях, фотографировании. Односторонние способы предусматривают определение полного крена с одной точки стояния прибора путём выполнения линейно-угловых, координатных измерений или вертикального проектирования. Перспективные способы основываются или будут основаны на новейших достижениях науки и техники, таких как спутниковые методы, лазерное сканирование, использование программа Plumb-bob, беспилотников, видеоизмерений. Причём каждая из перечисленных групп включает не только способы и средства измерений, но и методику обработки результатов полевых измерений с целью выявления деформационных характеристик и оценки их точности.

Следует сказать, что в геодезии традиционно все измерения делят на две группы. Первая группа включает «прямые» (ещё их называют «непосредственные») измерения, при которых результат получается непосредственно из измерения самой величины. Измерения второй группы называют «косвенными», основанными на известных зависимостях между искомой величиной и непосредственно измеряемыми величинами. В результате косвенных измерений получают вычисленное значение искомой величины. Что касается термина «дистанционные» измерения, то под ним следует понимать «измерение физических величин на расстоянии». Эти измерения применяют в случаях, когда трудно или невозможно измерять с помощью приборов, установленных в непосредственной близости от точки замера.

Таким образом, при исследовании пространственного положения и формы башенных сооружений могут применяться прямые и косвенные виды геодезических измерений, в которых измеряемые величины могут быть получены непосредственно или дистанционно.

## **Глава 1. МНОГОСТОРОННИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРЕНА**

### **1.1. Способ нивелирования**

Осадки башенных сооружений можно определять различными способами: геометрическим или тригонометрическим нивелированием, гидронивелированием, микронивелированием, а также фото- и стереофотограмметрическими способами. Наибольшее распространение на практике получил способ геометрического нивелирования путём периодического высокоточного нивелирования осадочных марок, закреплённых на инженерном сооружении [6, 94, 7, 9, 17, 37, 114, 120].

Высокоточное геометрическое нивелирование практически полностью решает вопрос определения осадок башенных сооружений. Основные технические характеристики и допуски для геометрического нивелирования приведены в табл. 3. Нивелирование производится высокоточными нивелирами типа Н-05 и подобными им по точности  $PL1$ , а также  $B1$ ,  $B1C$  с микрометренной насадкой  $OM1$ , для работы с которыми используется штриховая рей-

ка с инварной полосой. Обработка результатов измерений может осуществляться графическим способом с использованием линий равных осадок или аналитическим способом.

Таблица 3

**Технические характеристики и допуски для геометрического нивелирования (ГОСТ 24846-81)**

Условия геометрического нивелирования		Класс точности нивелирования			
		I	II	III	IV
Применяемые нивелиры		Н-05 и равноточные ему		Н-3 и равноточные ему	
Применяемые рейки		РН-05 с инварной полосой		РН-3 шашечная	
Число станций незамкнутого хода, не более		2	3	5	8
Визирный луч	Длина, м, не более	25	40	50	100
	Высота над препятствием, м, не менее	1,0	0,8	0,5	0,3
Неравенство плеч, м, на станции, не более		0,2	0,4	1,0	3,0
Накопление неравенств плеч, м, в замкнутом ходе, не более		1,0	2,0	5,0	10,0
Допустимая невязка в замкнутом ходе, мм, $n$ -число станций		$0,15\sqrt{n}$	$0,5\sqrt{n}$	$0,5\sqrt{n}$	$0,5\sqrt{n}$

Следует сказать, что заложенные в период строительства сооружения некоторые осадочные марки в дальнейшем могут быть закрыты или недоступны для установки на них нивелирной рейки.

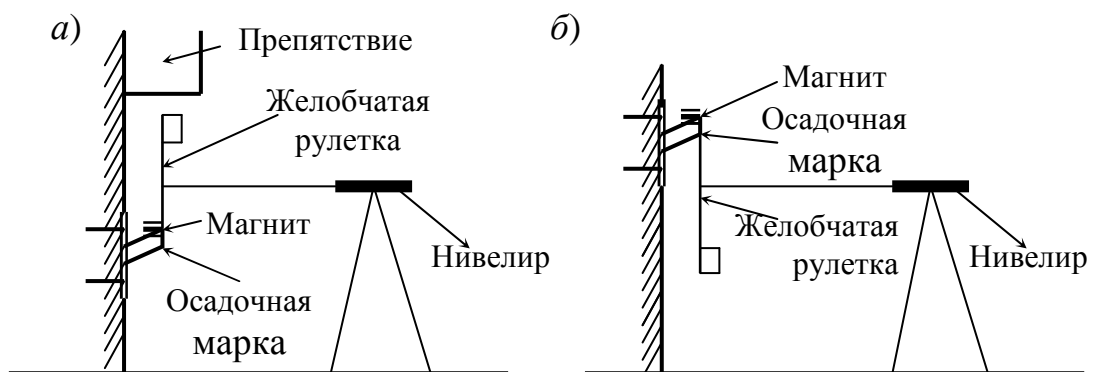


Рис. 2. Схема нивелирования с помощью желобчатой рулетки

В этом случае удобно использовать стальную желобчатую рулетку с миллиметровыми делениями. У такой рулетки нулевое деление совпадает с Г-образным окончанием, играющим роль упора или зацепа.

Устанавливают Г-образный упор с закрепленным на нём магнитом на осадочную марку (рис. 2, а). Сцепление упора с маркой позволяет осуществ-

лять натяжение рулетки, приведение её в отвесное положение и, при необходимости, подсветку её шкалы, по которой берут отсчёты с точностью 0,1мм. Если осадочные марки расположены достаточно высоко (рис. 2, б), используют рулетку в подвешенном состоянии.

В работе [123] нами был проведен анализ производственных результатов наблюдений за осадками сооружений ТЭЦ Нижегородской области. Были сопоставлены рекомендации различных авторов о необходимой точности геометрического нивелирования при выполнении таких наблюдений. В результате была выработана концепция, которая заключалась в том, что в каждом конкретном случае необходимо указывать наименьшие величины тех или иных видов деформаций, которые в процессе наблюдений необходимо фиксировать с заданной степенью достоверности  $t$ . Исходя из этого следует обосновывать требования к необходимой точности определения отметок осадочных марок. Эта концепция нашла своё решение в наших работах [124, 125].

Что касается крена башенных сооружений, то он может возникнуть от неравномерности осадок их фундамента, в результате чего сооружение наклоняется в одну сторону. Он характеризуется величиной относительного крена  $K = \Delta/L$ , где  $\Delta$  – разность осадок марок сооружения,  $L$  – расстояние между этими марками. СКО определения величины относительного крена при условии, что  $L$  измерено безошибочно, равна  $m_K = m_\Delta/L$ . Приравняв  $K_{min} = tm_K$ , получим  $m_\Delta = LK_{min}/t$ , но поскольку  $m_\Delta = 2m_H$ , следовательно:

$$m_H \leq \frac{L}{2t} K_{min}. \quad (2)$$

Таким образом, для получения с заданной вероятностью данных о крене сооружения необходимо, чтобы средняя квадратическая ошибка определения осадочных марок не превышала  $L/2t$  минимальной величины крена.

Считается, что если величина крена не превышает 0,001, то прочность и устойчивость несущих конструкций абсолютно жестких и относительно жестких типов сооружений не нарушается и они эксплуатируются нормально. Примем  $K_{min} = 0,001$ , тогда при  $L = 5$  м и  $t = 2$  (чему соответствует вероятность 0,95) получим необходимую точность определения отметок осадочных марок  $m_H = 1,25$  мм.

На рис. 3 приведены типовые схемы нивелирных ходов для сооружений башенного типа четырёхугольной формы (а) и мачты (б).

Причём, предельно допустимая величина изменения отметок фундаментов для башен четырёхугольной формы не должна превышать 0,001 расстояния между смежными фундаментами поясов, а для мачт – 30 мм для фундаментов ствола и анкеров оттяжек [33].

Для контроля осадок фундамента дымовой трубы в её цоколе должно быть установлено не менее четырех осадочных марок **М-1**, **М-2**, **М-3**, **М-4** (рис. 4). После измерения в очередном цикле осадок проводят на схеме расположения осадочных марок линии равных осадок и по максимальной разности осадок вычисляют значение прироста крена  $\Delta K$  по формуле:

$$\Delta K = \frac{\Delta SH}{D}, \quad (3)$$

где  $\Delta S$  – максимальная разность осадок по диаметру сооружения;  $H$  – высота сооружения;  $D$  – диаметр сооружения.

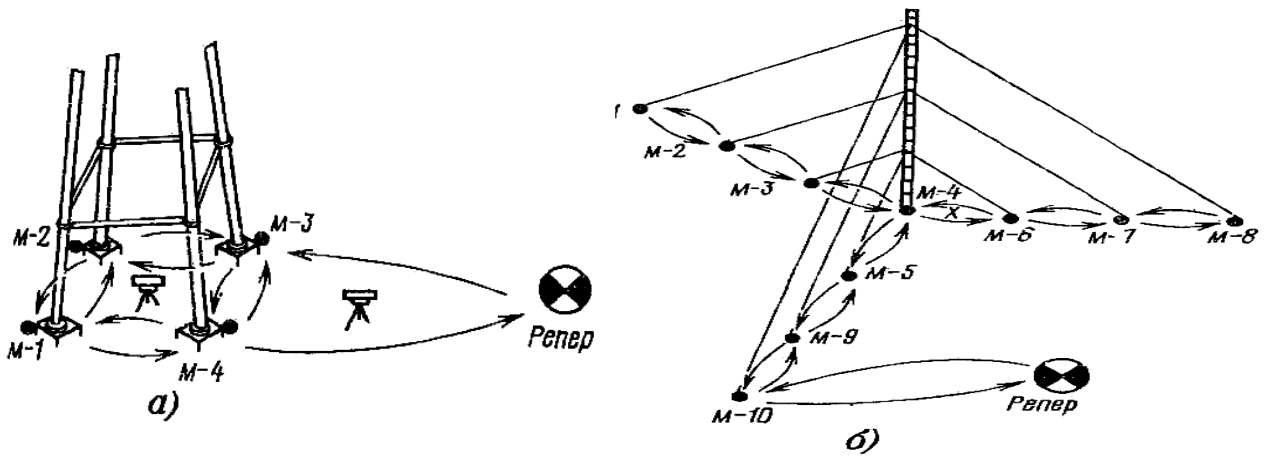


Рис. 3. Схемы нивелирных ходов при контроле осадок фундаментов башни (а), ствола и анкерных фундаментов мачты (б)

Направление прироста крена перпендикулярно к линиям равных осадок фундамента. Произведя векторное сложение крена трубы до прироста с величиной прироста  $\Delta K$ , получают направление и величину общего крена трубы за время, прошедшее между первым и выполненным циклом наблюдений.

Если на схеме расположения осадочных марок провести линии равных осадок между начальным и последним циклами наблюдений, то по приведенной выше методике можно сразу получить величину и направление крена между первым и последним циклом наблюдений. Ошибка определения прироста крена данным способом составляет в среднем 1 см при определении разности осадок с точностью 1 мм.

Этим способом можно выявлять только прирост или крен между двумя циклами наблюдений, а не фактическую его величину, складывающуюся из величины крена до начального цикла наблюдений и последующих результатов наблюдений, поэтому он рекомендуется как контрольный, дополняющий основные способы.

Для башенного сооружения треугольной формы будет заложено в фундаменте опор всего три осадочных марки **А**, **В** и **С** (рис. 5), измеренное рас-



стояние между которыми составляет соответственно  $d_{AB}$ ,  $d_{BC}$  и  $d_{AC}$ . В этом случае для определения прироста крена можно использовать описанный выше способ линий равных осадок.

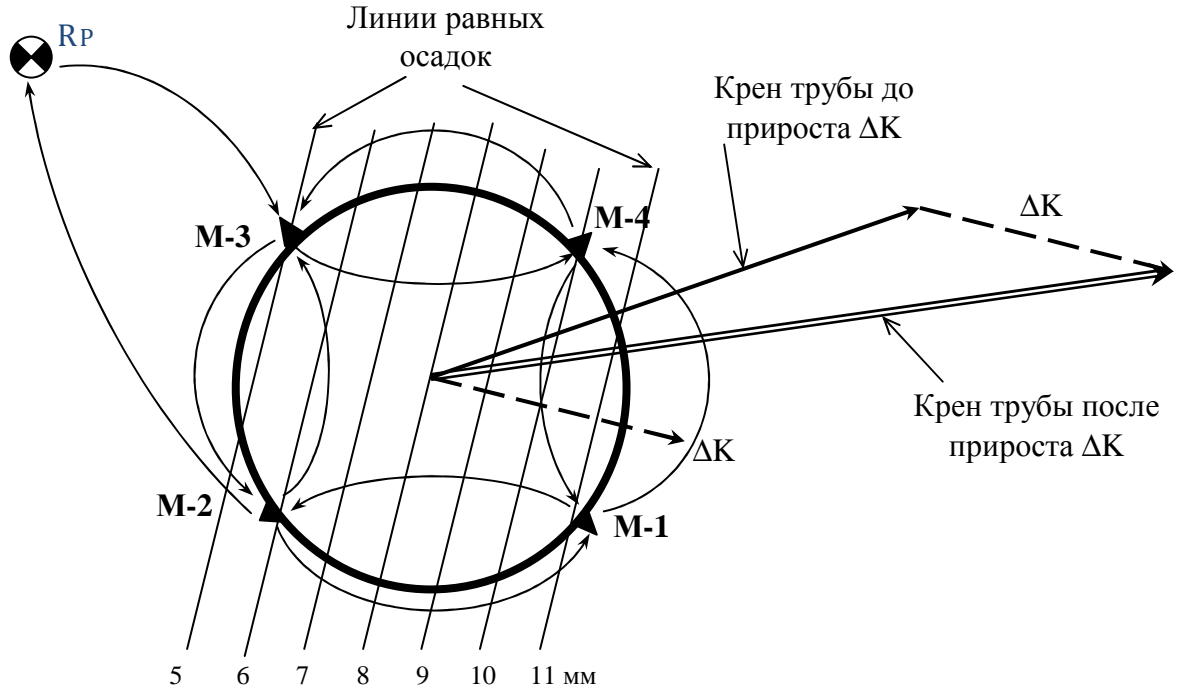


Рис. 4. Определение направления и прироста крена трубы по осадкам её фундамента

После измерения осадок в очередном цикле, на схеме расположения осадочных марок башни проводят линии равных осадок (рис. б) и по максимальной разности осадок вычисляют значение прироста крена  $\Delta K$  по формуле (3), где  $\Delta S$  – максимальная разность осадок по направлению, перпендикулярному к линиям равных осадок;  $H$  – высота сооружения;  $D$  – длина прямой, проходящей через ортоцентр сооружения перпендикулярно к линиям равных осадок.

Следует обратить внимание на достоверность предлагаемого аналитического решения задачи определения прироста крена, приведенное в работе [37]. В ней говорится, что если за период между первым и последующим циклом наблюдений осадочные марки  $A$ ,  $B$  и  $C$  претерпели осадку соответственно  $h_A$ ,  $h_B$  и  $h_C$ , то угол  $\gamma$  крена сооружения за рассматриваемый период автор цитируемой работы предлагает вычислять по формуле:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{\left(\frac{h_A}{d_{AC}}\right)^2 + \left(\frac{h_B}{d_{BC}}\right)^2} - 2 \left(\frac{h_A}{d_{AC}}\right) \left(\frac{h_B}{d_{BC}}\right) \cos \alpha_C}{\sin \alpha_C}, \quad (4)$$

где угол  $\alpha_c$  определяется по теореме косинусов по величине расстояний между марками.

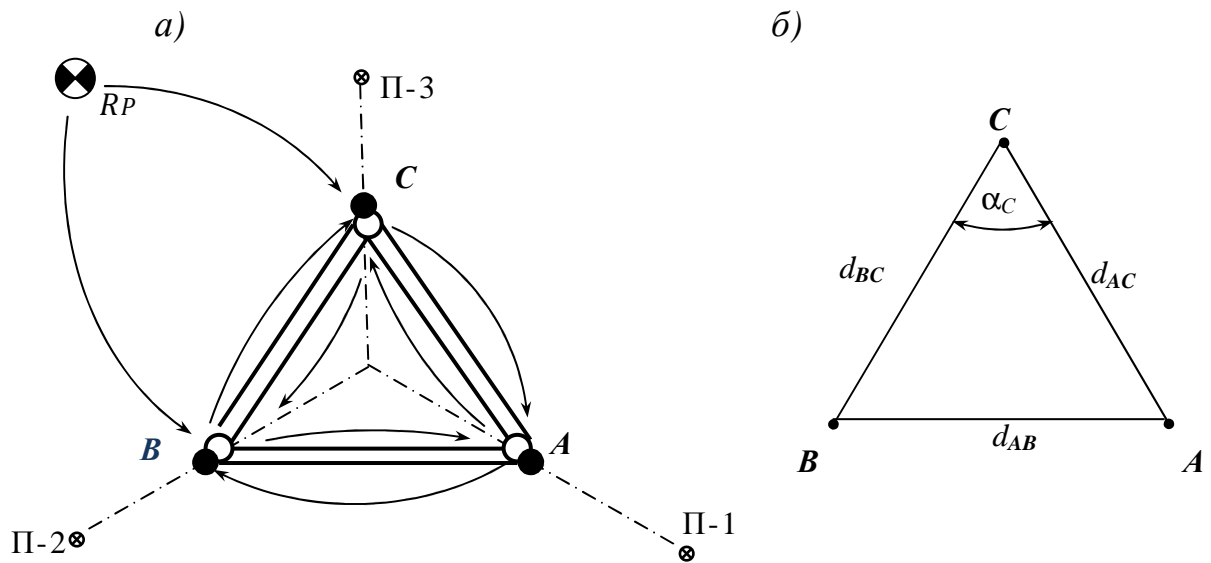


Рис. 5. Схемы к определению крена башни по трем осадочным маркам

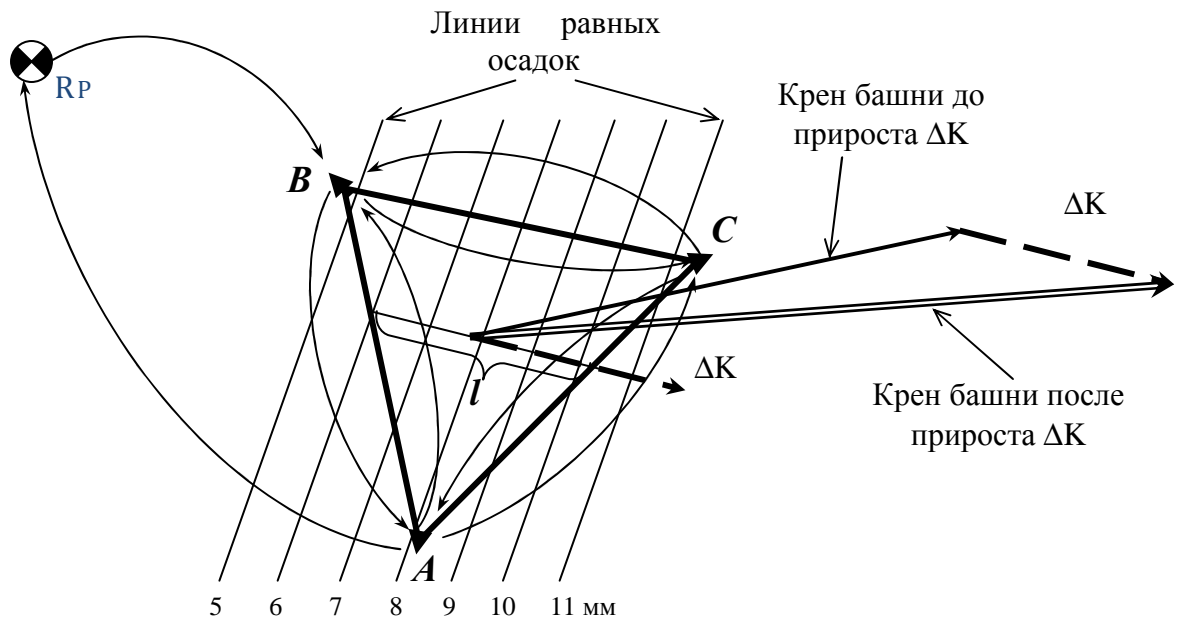


Рис. 6. Определение направления и прироста крена башни треугольной формы по осадкам её фундамента

При расположении осадочных марок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в вершинах равностороннего треугольника имеем  $d_{AB} = d_{BC} = d_{AC} = d$  и угол  $\alpha_c = 60^\circ$ . Тогда формула (4) примет вид:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\sqrt{h_A^2 + h_B^2 - h_A h_B}}{d\sqrt{3}}, \quad (5)$$

где  $\operatorname{tg}\gamma = \Delta S/l = \Delta K/H$  – относительная величина крена;  $d$  – длина стороны треугольника  $ABC$ . Однако в этой формуле отсутствует  $h_C$ , поэтому при различных значениях  $h_C = 0$  и  $h_C = \infty$  будем получать одно и то же значение  $\operatorname{tg}\gamma$ , что подвергает сомнению правомерность формулы (4).

Добавим, что другой аналитический путь решения этой задачи можно найти, например, в работе [28], где показано что в случае нивелирования трех марок  $A$ ,  $B$  и  $C$ , по их условным координатам и величинам полученных осадок можно найти значения параметров, по которым вычисляют угол крена, полный крен и его направление.

В общем виде решение поставленной задачи может выглядеть следующим образом. Пусть на плоскости даны три точки с пространственными координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то есть  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ . Введём два вектора  $M_3M_1$  и  $M_3M_2$ :

$$M_3M_1 = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\},$$

$$M_3M_2 = \{x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2\},$$

тогда нормальный вектор  $\mathbf{n}$  к этой плоскости будет равен:

$$\mathbf{n} = [M_3M_1, M_3M_2] = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$$

или в пространственных координатах  $x, y, z$  имеем:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = - \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Предположим, что пространственные координаты точек изменились относительно своих первоначальных значений и стали  $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ ,  $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$  и  $M'_3(x'_3, y'_3, z'_3)$ . По аналогии с предыдущим получим новый нормальный вектор:

$$\mathbf{n}' = [M'_3M'_1, M'_3M'_2] = \{\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3\}$$

или в пространственных координатах  $x, y, z$  будем иметь:

$$\mathbf{n}'_1 = \begin{vmatrix} y'_3 - y'_1 & z'_3 - z'_1 \\ y'_3 - y'_2 & z'_3 - z'_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{n}'_2 = - \begin{vmatrix} x'_3 - x'_1 & z'_3 - z'_1 \\ x'_3 - x'_2 & z'_3 - z'_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{n}'_3 = \begin{vmatrix} x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 \\ x'_3 - x'_2 & y'_3 - y'_2 \end{vmatrix}.$$

Теперь можно определить косинус угла  $\gamma$  между нормальными векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  как частное от деления скалярного произведения этих векторов на произведение их модулей:

$$\cos\gamma = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{n}')}{|\mathbf{n}||\mathbf{n}'|} = \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}'_1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{n}'_2 + \mathbf{n}_3 \mathbf{n}'_3}{\sqrt{\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2} \sqrt{\mathbf{n}'_1^2 + \mathbf{n}'_2^2 + \mathbf{n}'_3^2}}. \quad (7)$$

Таким образом, если количество точек равно 3, задача имеет очевидное решение. Однако, если число точек больше, например, 4 (рис. 3, *a*) то хорошее приближение к идеалу дает метод "средних по тройкам". В этом случае перебираются все сочетания по 3 из имеющихся  $n$  точек. Для каждой тройки вычисляют параметры нормального вектора и затем найденные параметры осредняются.

Для наблюдения за осадками могут быть применены цифровые нивелиры со специальными штрих-кодowymi рейками. Из современных цифровых нивелиров назовём приборы серии *SDL* и *DiNi*. Для работы с нивелирами *SDL 30/50* используются фиброглассовые, алюминиевые или инварные рейки со специальным *RAB*-кодом, а для работы с нивелирами *DiNi 0,3/0,7* применяются рейки инварные, складные или телескопические со специальным *BAR*-кодом. При отключенной электронике цифровые нивелиры можно использовать с обычными нивелирными рейками.

Что касается тригонометрического нивелирования, то, в настоящее время, в связи с широким внедрением в практику геодезических работ электронных тахеометров, может в корне измениться как сам вид осадочных марок, так и процесс их закрепления и наблюдения за ними. Так, наличие у тахеометра клавиши *SDh* позволяет сразу определять превышения наблюдаемых точек над точкой стояния прибора. А с помощью клавиши ОНР можно последовательно определять превышения между одной из них и всеми остальными, либо между соседними наблюдаемыми точками. Теперь в качестве осадочной марки может служить точка, черта, крест и др., закреплённые в любом месте несущей конструкции, обеспечивающем их недоступность и сохранность. В данном случае отпадает надобность в использовании нивелирной рейки, а работу может производить один человек.

Так, например, установив прибор в некоторой точке  $T$  (рис. 7) и приведя его в рабочее положение, наводят перекрестие сетки или лазерное пятно на точку 1 и на первой странице режима *P1* нажимают клавишу *УСТ 0*, а затем клавишу *РАССТ*.

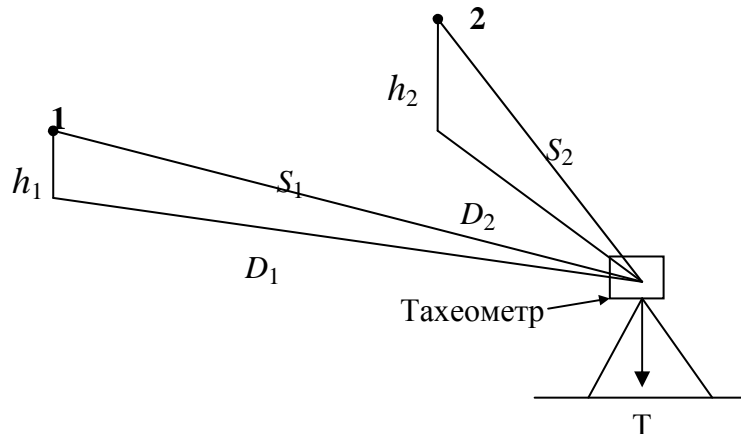


Рис. 7. Данные, получаемые с помощью клавиши  $SDh$  тахеометра

На экране отображаются: измеренное расстояние  $S$  и отсчёты по вертикальному кругу  $Z$  и горизонтальному кругу  $\Gamma Уп$ , который будет равен  $0^{\circ}00'00''$ . Нажимают клавишу **СТОП**, а затем клавишу  $SDh$ , и получаю на экране наклонное расстояние  $S$ , горизонтальное проложение  $D$  и превышение  $h$ . Аналогичным образом определяют превышения, визируя на другие точки. Сравнивая эти превышения между собой, находят превышения между любыми точками.

Для непосредственного определения превышений между нивелируемыми точками предлагается использовать клавишу **ОНР** тахеометра. При этом можно действовать двояко.

В первом случае (рис. 8) визируют на начальную точку **0** и нажимают клавишу **РАССТ** на первой странице режима измерений **P1**. На экран выводятся результаты измерений. Для остановки измерений нажимают клавишу **СТОП**.

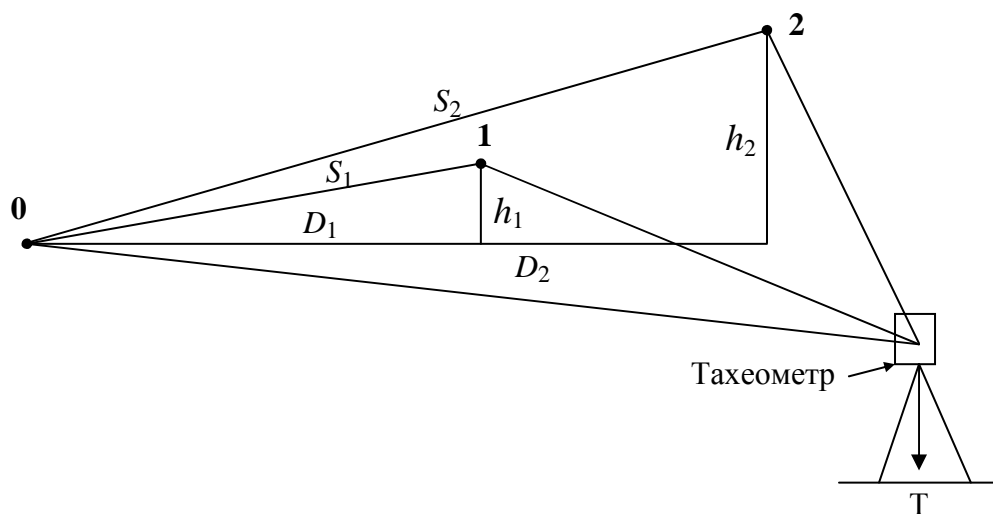


Рис. 8. Определение превышений между начальной и другими точками с помощью клавиши **ОНР**

Затем визируют на точку **1** и нажимают клавишу ОНР на третьей странице режима измерений РЗ. На экран выводятся значения наклонного расстояния  $D_1$ , горизонтального проложения  $S_1$  и превышения  $h_1$ .

Наводят на следующую точку **2**, нажимают клавишу ОНР и получают значения  $D_2$ ,  $S_2$  и  $h_2$ . Таким образом можно определить взаимное положение между начальной и любыми другими точками. После нажатия клавиши СМЕНА последняя измеренная точка становится новой начальной точкой для следующих других точек.

Во втором случае (рис. 9), выполнив описанные выше действия по определению  $D_1$ ,  $S_1$  и  $h_1$ , нажимают клавишу СМЕНА, а затем клавишу ДА. Теперь точка **1** становится начальной. Визируют на точку **2**, нажимают клавишу ОНР на третьей странице и получают значения  $D_2$ ,  $S_2$  и  $h_2$  и т. д.

Для подтверждения возможности использования клавиш  $SDh$  и ОНР электронного тахеометра *SET530R/R3* для указанных целей было выполнено соответствующее моделирование, результаты которого сравнивались с результатами геометрического нивелирования прибором 2Н-3Л. Расхождения между превышениями, измеренными с помощью нивелира и тахеометра, оказались в пределах 0 – 3 мм.

Однако необходимо напомнить, что цифровые нивелиры (как и все нивелиры с компенсаторами) подвержены влиянию вибрации, а также воздействию сильных электромагнитных полей при работе вблизи ЛЭП, открытых распределительных устройств (ОРУ), трансформаторов, токопроводящих шин и т. п., что может привести к повреждению их электроники.

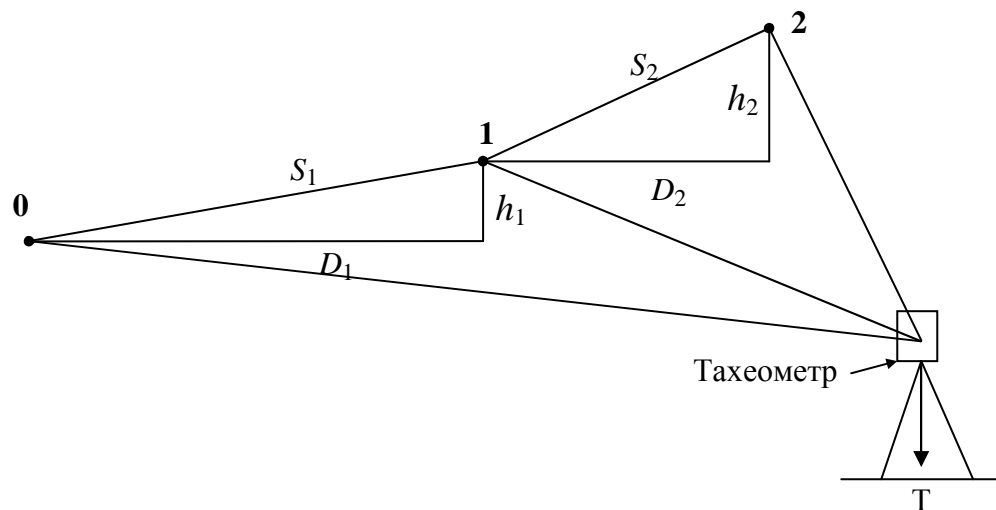


Рис. 9. Определение превышений между соседними точками с помощью клавиши ОНР

Способом тригонометрического нивелирования (как и рассмотренного выше геометрического) можно определять только прирост крена или крен между двумя циклами наблюдений, а не фактическую его величину, складывающуюся из величины крена до начального цикла наблюдений и последующих результатов наблюдений, поэтому, как было сказано ранее, он рекомендуется как контрольный, дополняющий другие способы.

В стеснённых условиях возможность геометрического и тригонометрического нивелирования может быть ограничена. Здесь для определения превышений между осадочными марками могут применяться переносные гидростатические приборы типа шланговых нивелиров. Однако применение гидросистем связано со значительными организационными и технологическими трудностями, поэтому случаи их использования единичны.

Другие краткие сведения о классических методах определения осадок с применением геометрического, гидростатического и тригонометрического нивелирования можно прочесть, например, в работе [164].

## 1.2. Способ вертикального проектирования

Этот способ заключается в периодическом проектировании визирным лучом теодолита хорошо заметной верхней точки  $A$  сооружения (рис. 10), например, на горизонтальную рейку, закреплённую внизу сооружения [18, 23, 25, 94, 100, 110].

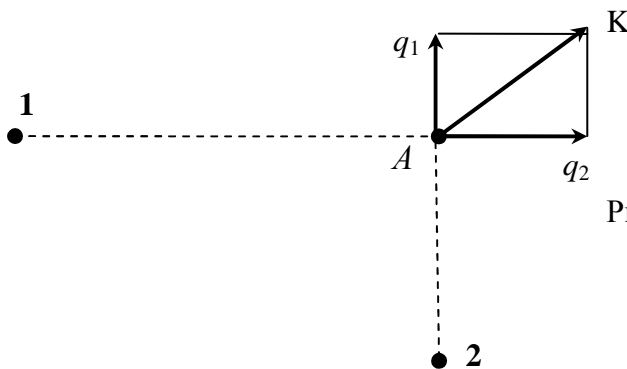


Рис. 10. Схема определения крена способом вертикального проектирования визирным лучом теодолита

Проектирование в каждом цикле осуществляется теодолитом с двух опорных пунктов  $1$  и  $2$  по двум взаимно перпендикулярным направлениям и при двух положениях вертикального круга теодолита.

Периодически снося эту точку вниз и отмечая её проекции, определяют увеличение крена от цикла к циклу. Величину  $K$  полного крена можно найти по формуле:

$$K = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} , \quad (8)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — векторы крена, определённые соответственно с пунктов  $1$  и  $2$ .

Этот способ может применяться для наблюдения за башенными сооружениями при условии обеспечения видимости и доступа к нижней их части. На точность получаемых результатов главное влияние оказывает отклонение основной оси теодолита от вертикали. Устранить это влияние можно по методике, изложенной, например, в работе [51], в которой рекомендуется поступать следующим образом. Если теодолит имеет компенсатор углов на-

клона, то вначале приводят прибор в рабочее положение по уровню. Затем, закрепив зрительную трубу, направляют её параллельно двум подъёмным винтам подставки и берут отсчёт по вертикальному кругу.

Поворачивают трубу на  $180^\circ$  и вновь берут отсчёт по вертикальному кругу. Если отсчёты не равны между собой, то с помощью этих двух подъёмных винтов устанавливают на вертикальном круге средний отсчёт, поворачивают трубу на  $180^\circ$  и проверяют, сохранился ли этот средний отсчёт. Если нет, то действия повторяют, добиваясь равенства показаний вертикального круга. Повернув трубу на  $90^\circ$ , выполняют те же операции с помощью третьего подъёмного винта. Теперь при любой ориентировке зрительной трубы отсчёт по вертикальному кругу должен оставаться неизменным.

Если теодолит не имеет компенсатора углов наклона, но снабжен уровнем на зрительной трубе, то вначале приводят прибор в рабочее положение по установочному уровню. Ориентируют трубу по некоторому направлению, приводят пузырёк уровня при трубе в нуль-пункт и отмечают (на стене, рейке, вешке и т. п.) положение перекрестия сетки нитей трубы. Поворачивают трубу на  $90^\circ$ , приводят пузырёк уровня при трубе в нуль-пункт и вновь отмечают положение перекрестия сетки нитей. Затем, оставив трубу закрепленной, визируют попеременно на эти метки и добиваются с помощью подъёмных винтов совпадения перекрестия сетки с обеими метками.

В работах [131, 143] детально изложен способ проектирования применительно для башен треугольной формы. Показано, как по результатам измерений можно определить крен, его направление и угол скручивания башни графическим, аналитическим или графо-аналитическим способами.

Покажем методику вертикального проектирования применительно для башен треугольной формы путём определения линейных смещений  $q_{1,2,3}$  вершин верхнего треугольника  $abc$  с соответствующих осей сооружения (рис. 11).

Так, линейные смещения  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  могут быть определены непосредственно способом вертикального проектирования теодолитом точек  $a$ ,  $b$  и  $c$  верхнего треугольника на горизонтальные рейки, закрепленные в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  нижнего треугольника. Причем, если смещения точек  $a$ ,  $b$  и  $c$  происходят по часовой стрелке, то  $q_i$  будут считаться положительными, если против часовой стрелки – отрицательными. Так на рис. 11 смещения  $q_1$  и  $q_2$  положительные, а  $q_3$  – отрицательное.

В результате линейных смещений нижний  $O_H$  и верхний  $O_B$  ортоцентры треугольников не будут находиться на одной вертикали. Смещение  $O_B$  относительно  $O_H$  характеризует величину крена  $K$  башни и его направление, а угол  $\varphi$  между соответствующими медианами верхнего  $abc$  и нижнего  $ABC$  треугольников является углом скручивания башни. Строго говоря, вычислять линейные смещения  $q_{1,2,3}$  (рис. 12) следует по формуле:



$$q = q' \left( 1 + \frac{l}{L} \right), \quad (9)$$

подставляя в неё соответствующие значения отсчётов по рейкам  $q'_{1,2,3}$ , расстояний  $L_{1,2,3}$  от теодолита до реек и расстояний  $l_{1,2,3}$  от реек до визируемых точек  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

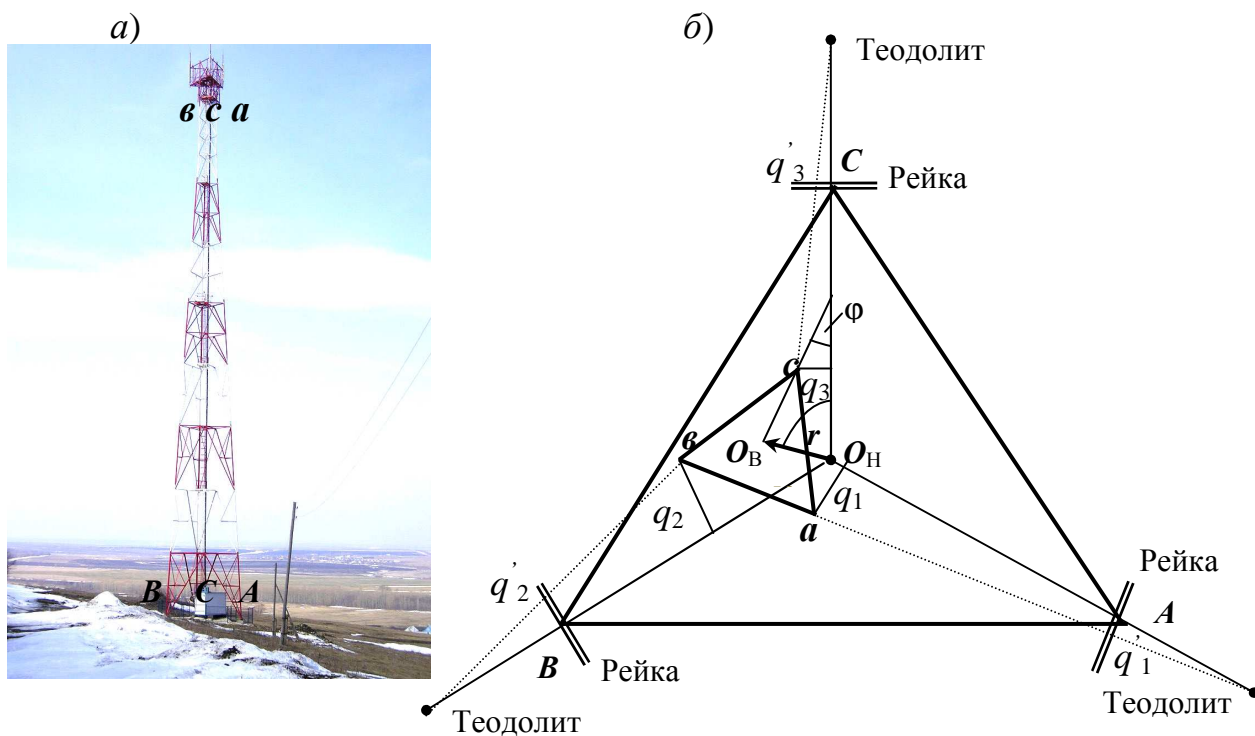


Рис. 11. Башня треугольной формы (а) и схема вертикального проектирования наклонным визирным лучом (б)

На основании формулы (9) получим в общем виде СКО  $m_q$  определения линейного смещения:

$$m_q = \left( 1 + \frac{l}{L} \right) m_{q'}, \quad (10)$$

где  $m_{q'}$  – точность отсчёта по рейке, которая зависит, в основном, от точности приведения оси вращения алидады теодолита в отвесное положение.

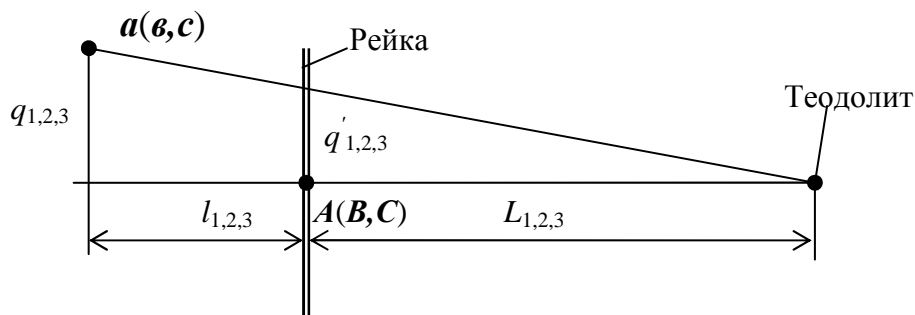


Рис. 12. Схема к определению смещения  $q$  способом вертикального проектирования

Исследуем степень влияния отношения  $l/L$  на ошибку  $m_q$  при различных расстояниях  $L_i$  от теодолита до рейки от  $1,0H$  до  $3,0H$  для башни высотой  $H = 72,5$  м. Результаты расчётов по формуле (10) приведены в табл. 4 для расстояний  $l_i$  между точками **Aa**, **Bb**, **Cc** от 2,6 м до 6,6 м при проектном расстоянии 4,6 м и СКО отсчёта по рейке  $m_{q'} = 5$  мм.

Т а б л и ц а 4

**Ошибки  $m_q$  в зависимости от  $L_i$  и  $l_i$**

$L_i$ , м	$m_q$ , мм				
	2,6 м	3,6 м	4,6 м	5,6 м	6,6 м
1,0H(72,5)	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5
1,5H(108,8)	5,1	5,2	5,2	5,3	5,3
2,0H(145,0)	5,1	5,1	5,2	5,2	5,2
2,5H(181,2)	5,1	5,1	5,1	5,2	5,2
3,0H(217,5)	5,1	5,1	5,1	5,1	5,2

Данные табл. 4 свидетельствуют, что изменение расстояний  $l_i$  между точками **Aa**, **Bb**, **Cc** даже на 2 м от проектного 4,6 м практически не оказывает влияния на величину  $m_q$ . Поэтому в формуле (10) отношением  $l/L$  можно пренебречь.

По значениям линейных смещений  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  можно определить крен, его направление и угол скручивания башни различными способами: графическим, аналитическим и графо-аналитическим.

• **Графический способ** (рис. 13) определения величины и направления крена башни треугольной формы заключается в следующем [131].

Отложив от осей башни в крупном масштабе соответствующие отрезки  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , проводят линии, параллельные осям башни. Точки пересечения этих линий сформируют равносторонний треугольник  $a'b'c'$ , ортоцентр которого  $O_B$  совпадает с ортоцентром верхнего треугольника башни  $abc$ . Отрезок  $O_H O_B$  будет соответствовать величине крена  $K$  башни, а угол  $r$  (румб) – направлению крена относительно оси  $X$  условной системы прямоугольных координат  $XO_H Y$ .

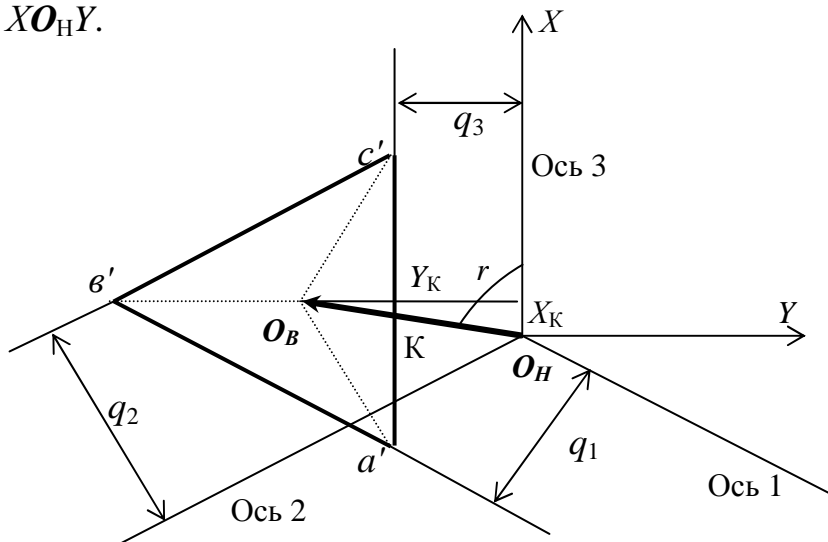


Рис. 13. Графический способ определения величины и направления крена башни треугольной формы

• **Аналитический способ** основан на использовании упомянутой выше (рис. 13) условной системы координат  $XO_H Y$ , в которой ось абсцисс совпадает с одной из осей башни. Тогда  $K = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}$ , а по значениям координат  $X_K$  и  $Y_K$  можно вычислить румб  $r$  или дирекционный угол направления крена в этой условной системе координат. В результате теоретических исследований [129] установлено:

$$X_K = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{3}}, \quad Y_K = \frac{-q_1 - q_2 + 2q_3}{3}, \quad (11)$$

$$K = \frac{2}{3} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_1 q_2 - q_1 q_3 - q_2 q_3}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tgr} = \frac{Y}{X} = \frac{-q_1 - q_2 + 2q_3}{\sqrt{3}(q_2 - q_1)}, \quad (13)$$

причем, в эти формулы необходимо подставлять  $q_{1,2,3}$  со своим знаком «плюс» или «минус», о чем было сказано выше.

Если  $q_1 = q_2 = q_3$ , то  $K = 0$ ,  $X_K = 0$ ,  $Y_K = 0$ , то есть крен башни отсутствует, а имеет место только её скручивание. При  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$  нет ни крена, ни скручивания.

В качестве румба  $r$ , определяемого по формуле (13), фигурирует острый угол, отсчитываемый от оси  $OC$  (рис. 14) в зависимости от знаков числителя и знаменателя этой формулы. Здесь могут встретиться четыре случая.

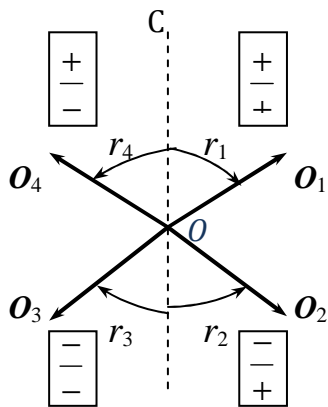


Рис. 14. Направление крена башни

Так, если числитель и знаменатель имеют оба знака «плюс», то направление крена составляет угол  $r_1$  с осью башни  $OC$ . Если числитель со знаком «минус», а знаменатель со знаком «плюс», то направление крена под углом  $r_2$ . При числителе и знаменателе отрицательных угол крена  $r_3$ . При числителе положительном и отрицательном знаменателе угол крена  $r_4$ .

Для отличия одного румба от другого, примем  $OC$  за условное направление на север. Тогда (по аналогии с обратной геодезической задачей)  $r_1$  будет иметь название «северо-восток» (СВ),  $r_2$  – «юго-восток» (ЮВ),  $r_3$  – «юго-запад» (ЮЗ),  $r_4$  – «северо-запад» (СЗ).

Оценка точности определения румба может осуществляться по формуле:  $m_{Tgr} = m_q \sqrt{3} \frac{K}{(q_B - q_A)}$ .

$$(14)$$

• **Графо-аналитический способ** предусматривает построение в крупном масштабе полигона  $O_H-1-2-3$ , стороны которого равны величинам  $q_{1,2,3}$  смещений, а направления этих сторон перпендикулярны соответствующим осям сооружения (рис. 15).

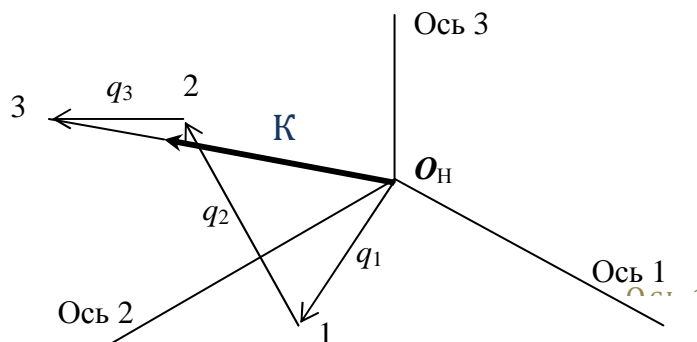


Рис. 15. Определение направления крена путем построения полигона

• **Угол скручивания башни  $\varphi$**  представляет собой угол между соответствующими медианами (рис. 11) или соответствующими сторонами нижнего  $ABC$  и верхнего  $abc$  треугольников.

Угол скручивания башни (рис. 16) можно определить из выражения  $\sin\varphi = (Y_K - q_3) : \frac{2}{3}m$ , где  $m = \frac{d\sqrt{3}}{2}$  – медиана верхнего треугольника  $abc$ , сторона которого равна  $d$ . Подставив вместо  $Y_K$  его значение из формулы (11), получим в общем виде следующую формулу:

$$\sin\varphi = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{d\sqrt{3}}, \quad (15)$$

где  $d$  – длина стороны верхнего треугольника  $abc$ . В эту формулу необходимо подставлять  $q_{1,2,3}$  со своими знаками «плюс» или «минус».

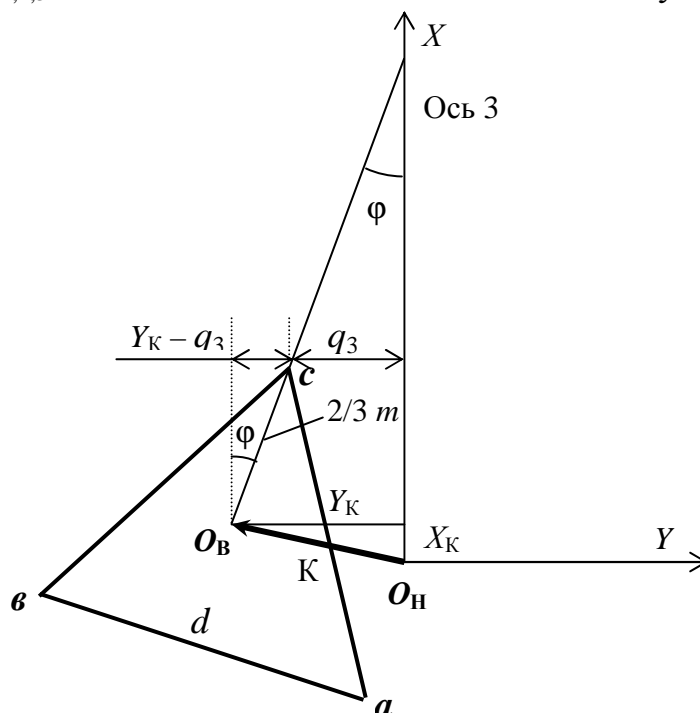


Рис. 16. Схема к определению угла скручивания башни

Полученное по формуле (15) положительное значение угла  $\varphi$  означает скручивание башни по часовой стрелке, отрицательное – против часовой стрелки.

Оценка точности определения угла скручивания башни может осуществляться по формуле:

$$m_{\sin\varphi} = \frac{m_q}{d} . \quad (16)$$

Например, при  $m_q = 5$  мм СКО крена  $m_K = 4,4$  мм,  $m_{\sin\varphi} = 5:25000 = 0,0002$  или ошибка угла скручивания  $\varphi$  будет всего  $0,01^\circ$ .

Теоретические основы определения крена и скручивания сооружений башенного типа треугольной формы подтверждены результатами знакового моделирования, включающего геометрическую интерпретацию крена и скручивания башни с последующим математическим моделированием [47]. Сравнение результатов, получаемых графическим и аналитическим способами, показало, что точность графического способа составляет 0,2 мм и 20' при линейных и угловых измерениях соответственно.

Следует отметить, что способ вертикального проектирования с помощью теодолита является одним из вариантов формирования вертикальных референтных прямых [133] для фотографического способа контроля вертикальности высоких сооружений.

### 1.3. Линейный способ определения крена

Эти способы основаны на определении горизонтальных проложений  $D$  от точки стояния прибора до середины, например, дымовой трубы в её нижнем, промежуточных и верхнем сечениях. Сравнивая между собой суммы  $D$  и соответствующих им радиусов наблюдаемых сечений, находят величину частных и общего крена трубы [7,116, 133].

Так (рис. 17), установив тахеометр в точке **1**, с которой можно наблюдать, например, весь ствол дымовой трубы, измеряют, используя клавишу  $SDh$ , горизонтальные проложения  $D_H, \dots, D_i, \dots, D_B$  и превышения  $h$ , визируя на низ трубы (Н), промежуточные точки  $i$  и верх трубы (В).

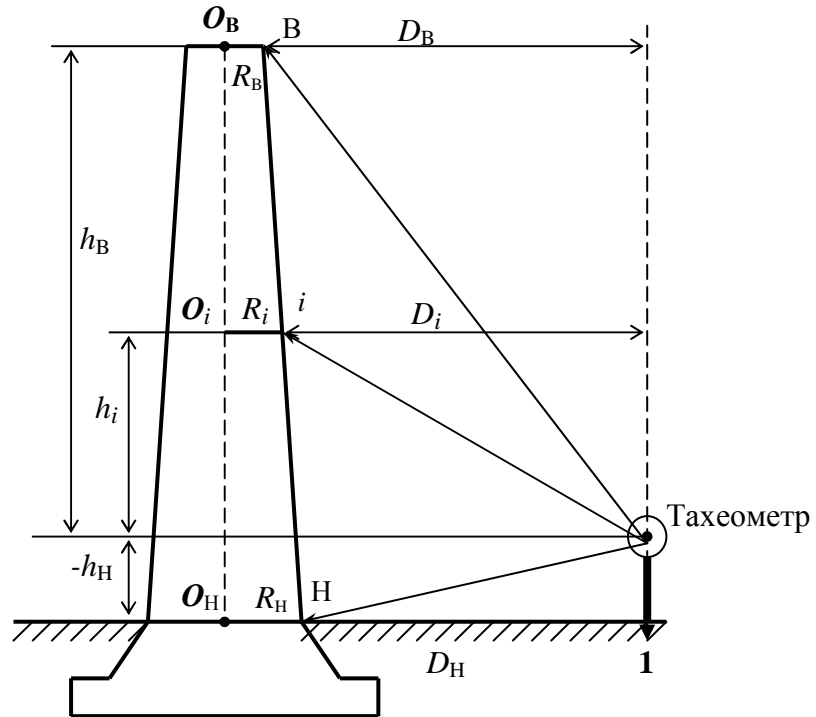


Рис. 17. Схема определения крена дымовой трубы путём линейных измерений

Прибавив к каждому  $D_H$ ,  $D_i$ ,  $D_B$  соответствующий радиус трубы  $R_H$ ,  $R_i$ ,  $R_B$ , можно вычислить крен трубы по направлению «тахеометр-труба»:

$$K_B = (D_B + R_B) - (D_H + R_H),$$

$$K_i = (D_i + R_i) - (D_H + R_H),$$
(17)

причем знак плюс означает крен влево, то есть по направлению «тахеометр-труба», а знак минус – вправо, то есть по направлению «труба-тахеометр».

Аналогичные измерения можно провести с другой точки по направлению, перпендикулярному первоначальному.

Современные электронные тахеометры позволяют измерять расстояния без отражателя до 200-500 и более метров с точностью 1-3 мм, плюс приборная поправка  $2 \times 10^{-6} \times D$ .

Линейный способ может с успехом применяться для обычных и ферменных металлических труб одного диаметра, в то время как для кирпичных и железобетонных труб необходимо знать радиусы наблюдаемых сечений. Вообще говоря, фактические радиусы могут быть определены путём непосредственных измерений периметра  $2\pi R$  доступных наблюдаемых сечений, однако это не всегда возможно.

Известны косвенные способы определения радиуса: линейные, линейно-угловые, фотографические, координатные [39, 78, 95, 103, 107], описанные в работах [80, 145]. В большинстве своём они позволяют определять ра-

диус только нижнего сечения сооружения. Использование электронного тахеометра безотражательного типа даёт возможность, во-первых, определять радиус не только нижнего, но и любого, в том числе верхнего сечения [136, 141] и, во-вторых, совместить линейный способ определения крена с одновременным определением радиусов наблюдаемых сечений [143].

### 1.3.1. Линейный способ определения радиуса

В работе [95] предлагается пять способов определения радиусов сооружений башенного типа. Один из них (рис. 18), названный линейным, заключается в том, что от точки Т натягивают рулетку и в месте её касания с сооружением отмечают точки П и Л. В середине дуги ПЛ отмечают точку а.

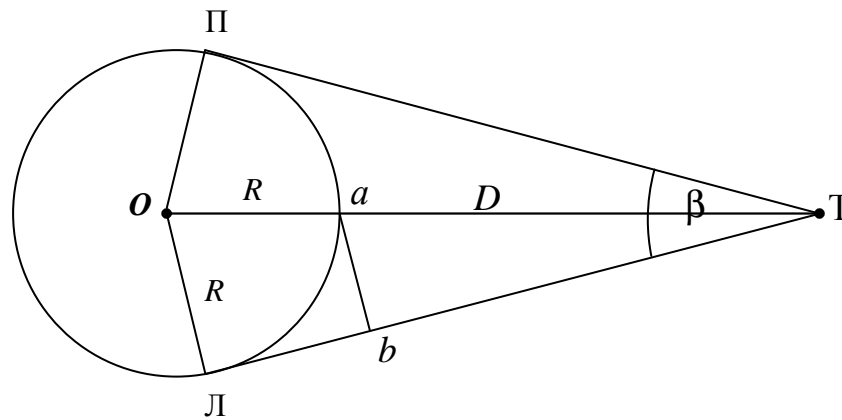


Рис. 18. Схема линейного и линейно-углового способа определения радиуса сооружения круглой формы

Измеряют расстояния ТЛ,  $D$  и ТП и вычисляют радиус по формуле:

$$R = \frac{(ТЛ)^2 - D^2}{2D} = \frac{(ТП)^2 - D^2}{2D}. \quad (18)$$

Следует подчеркнуть, что в большинстве известных способов определения радиуса предусматривается определение точек касания Л и П линий проведённых из точки стояния прибора Т к образующей сооружения. Известно единственное предложение [95] определять эти точки с помощью натянутой по этим линиям рулетки и отmarkания места её касания с сооружением. Однако опыт показывает, что подобным образом положение точек Л и П будут определено с большой погрешностью, что автоматически скажется на точности определения радиуса.

В нашей работе [146] было выполнено соответствующее моделирование линейного способа определения радиуса сооружения, а также приведено описание нашего устройства для определения положения точек касания Л и П и результаты его экспериментального исследования.

В качестве модели фигурировало изображение сечения радиусом 50 условных единиц. Последовательно измерялись с точностью 0,1 мм отрезки ТЛ при различных «отстояниях» точки Т при  $D$  от 50 до 350 условных единиц. Результаты вычислений по формуле (18) сведены в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

**Результаты моделирования линейного способа**

$D$	ТЛ	$R$	$m_R$ , мм		
			$m = 5$ мм	$m = 3$ мм	$m = 2$ мм
1	2	3	4	5	6
50	86,6	50,00	13,2	7,9	5,3
100	141,4	49,97	10,3	6,2	4,1
150	193,6	49,94	9,3	5,6	3,7
200	244,9	49,94	8,7	5,2	3,5
250	295,9	50,00	8,4	5,1	3,4
300	346,4	49,99	8,2	4,9	3,3
350	396,9	50,04	8,1	4,9	3,2

Вычисленные значения радиуса оказались равными 49,94 – 50,04 и в среднем 49,98, что отличается от истинного значения на 0,02 условных единицы и составляет 1:2500 от величины радиуса.

В результате исследований формулы (18) с позиций теории ошибок получено выражение (19) для определения СКО  $m_R$  в зависимости от ошибок  $m$  измерения расстояний ТЛ и  $D$ :

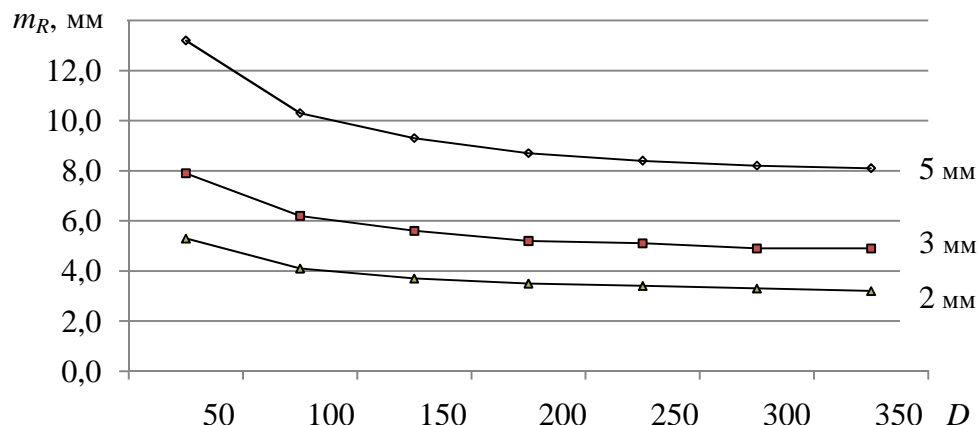
$$m_R^2 = \frac{(\text{ТЛ})^2}{D^2} m^2 + \left\{ \frac{(\text{ТЛ})^2 + D^2}{2D^2} \right\}^2 m^2. \quad (19)$$

Подсчитанные по формуле (19) ошибки радиуса  $m_R$  для  $m$  равных 5, 3 и 2 мм представлены в табл. 5 и иллюстрируются графиками на рис. 19.

На основании этих графиков можно констатировать, что начиная с расстояния  $D$ , превышающего радиус в 3-4 и более раз, ошибка радиуса  $m_R$  для определённого значения  $m$  остаётся практически неизменной. Для контроля можно дополнительно измерить расстояние ТЛ или выполнить измерения из другого положения точки Т.

Отметим, что для измерения расстояния  $D$  с помощью лазерной рулетки, например, HD150 достаточно воспользоваться её клавишей «min-max», проведя лазерным пучком по образующей сооружения слева направо от точки  $a$ . Минимальное расстояние на дисплее покажет величину  $D$  с точностью 2-3 мм, заявленной в паспорте этой рулетки.



Рис. 19. Графики зависимости ошибки  $m_R$  от  $m=5, 3, 2$  мм

Что касается расстояний ТЛ и ГП, то ошибка их измерения в основном будет зависеть от точности определения положения точки касания Л и П на поперечном сечении сооружения. Для определения точек касания предлагается наше устройство, сущность которого поясняется рис. 20 и заключается в следующем [155].

Два телескопических базиса 1 и 2 одинаковой длины шарнирно связаны между собой в точке  $O_1$  и дополнительно связаны посредством ползуна 4 и двух тяг 5 и 6 с третьим телескопическим базисом 3, закреплённым одним своим концом в точке  $O_1$  в одной плоскости с базисами 1 и 2. Ползун 4 установлен на базисе 3 с возможностью перемещения вдоль этого базиса. Тяги 5 и 6 шарнирно закреплены на ползуне 4 и базисах 1 и 2. На другом конце базиса 3 закреплён механический или оптический визир 7, ось которого перпендикулярна базису 3.

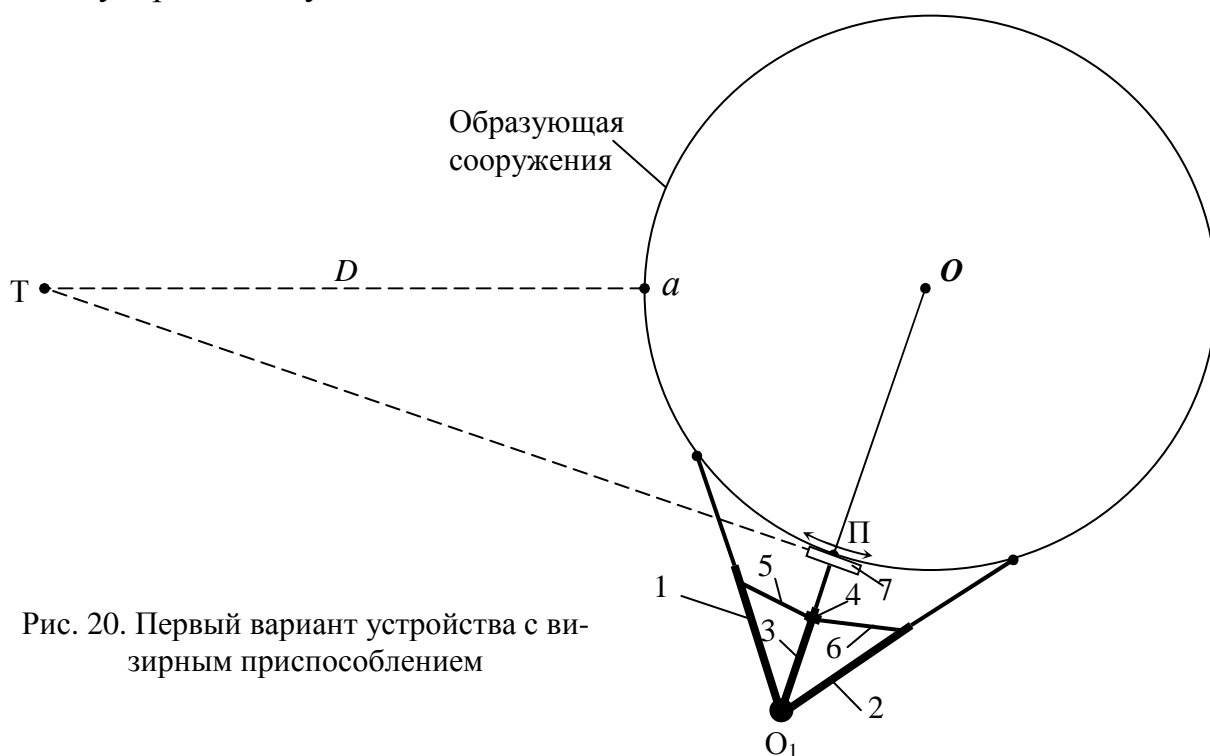


Рис. 20. Первый вариант устройства с визирным приспособлением

Устройство работает следующим образом. Устанавливают длину базисов 1 и 2 в зависимости от размеров исследуемого сооружения. Раздвигают базисы на максимальный угол между ними и закрепляют ползун 4. Под действием тяг 5 и 6 базис 3 расположится строго по биссектрисе угла между базисами 1 и 2. Прикладывают ножки базисов 1 и 2 к образующей сооружения, выдвигают ножку базиса 3 с закреплённым на ней визиром 7 до его соприкосновения с сооружением и наблюдают в визир положение точки  $T$ , с которой будут производиться измерения расстояний  $D$  и  $ТП$ .

Перемещают устройство влево-вправо по образующей сооружения, добиваясь совпадения оси визира 7 с линией  $ТП$ . Отмечают на сооружении положение конца базиса 3 в точке  $П$ , которая и будет точкой касания линии  $ТП$  к образующей сооружения.

С целью подтверждения возможности и уточнения методики использования линейного способа были проведены его натурные испытания. В качестве объекта наблюдений выступала дымовая труба с радиусом поперечного сечения в её нижней части около двух метров.

На местности на расстояниях 5, 10, 15 и 20 м от точки  $a$  (рис. 20) были отмечены точки  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_4$ . В этих точках последовательно устанавливался штатив примерно на одном уровне с исследуемым сечением трубы, служащий в дальнейшем ориентиром для определения на этом сечении трубы точек  $П_{1,2,3,4}$ . Эти точки определялись с помощью действующего макета устройства, в качестве которого был использован штатив для фотоаппарата (рис. 21,  $a$ ).



Рис. 21. Определение направления визирного приспособления на точку  $T$  ( $a$ ) и отмечание на трубе вспомогательной точки ( $b$ )

С помощью этого устройства на трубе отмечалась вспомогательная точка (рис. 21, б), которая затем проектировалась шнуровым отвесом на исследуемое сечение трубы, в результате чего получали точки касания  $\Pi_{1,2,3,4}$ . Необходимость использования вспомогательной точки была обусловлена тем, что все три ножки штатива не находились в одной плоскости.

Затем с помощью лазерной рулетки *HD150* последовательно измерялись расстояния  $D_{1,2,3,4}$  по изложенной выше методике (рис. 22, а) и расстояния  $T\Pi_{1,2,3,4}$  путём наведения лазерного пучка на экран-отражатель (рис. 22, б), удерживаемый на точках касания  $\Pi_{1,2,3,4}$ .

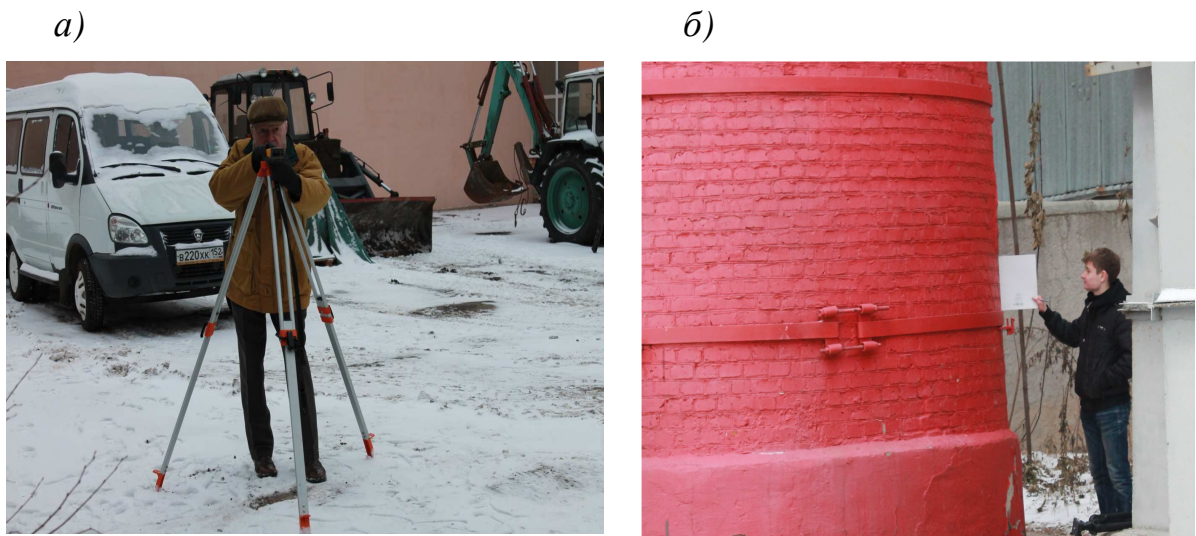


Рис. 22. Определение расстояний  $D$  до трубы (а) и до точки касания (б) с помощью лазерной рулетки

Одновременно все действия выполнялись с другой стороны трубы, вследствие чего были найдены точки касания  $\Lambda_{1,2,3,4}$  и измерены расстояния  $T\Lambda_{1,2,3,4}$ . Результаты измерений представлены в табл. 6.

Т а б л и ц а 6

**Результаты измерений расстояний ТЛ,  $D$  и ТΠ и вычислений  $R$**

Точки	ТЛ, м	$D$ , м	ТΠ, м	$R_{\Lambda}$ , м	$R_{\Pi}$ , м	$R'_{\text{ср}}$ , м	$R'-1,983$ , м
1	2	3	4	5	6	7	8
$T_1$	6,784	5,102	6,795	1,959	1,974	1,967	-0,016
$T_2$	11,961	10,155	11,971	1,967	1,978	1,972	-0,011
$T_3$	17,094	15,206	17,065	2,005	1,973	1,989	0,006
$T_4$	22,185	20,288	22,170	1,986	1,969	1,977	-0,006
						$R_{\text{ср}}=1,976$	

Данные табл. 6 позволяют констатировать, что среднее значение радиуса  $R_{\text{ср}} = 1,976$  м отличается от его истинного значения 1,983 м (найденно-

го из измеренного рулеткой значения  $2\pi R$ ) на 7 мм. Вычисления величины радиуса по средним значениям  $(l+l_p)$ , представленные в табл. 7, дали те же результаты, что и в табл. 6.

Т а б л и ц а 7

**Результаты вычислений  $R$   
по средним расстояниям и оценка точности**

Точки	$(ТЛ+ТП)/2, м$	$R', м$	$v = R' - R_{ср}$	$v^2$
1	2	3	4	5
П <sub>1</sub>	6,790	1,967	-0,010	0,000096
П <sub>2</sub>	11,966	1,972	-0,004	0,000015
П <sub>3</sub>	17,080	1,989	0,013	0,000158
П <sub>4</sub>	22,178	1,977	0,001	0,000001
		$R_{ср}=1,976$	$\Sigma=0,000$	$\Sigma=0,00027$

Была произведена обработка представленного в табл. 7 ряда равнозначных измерений, которая заключалась в определении вероятнейшего значения измеряемой величины  $R_{ср}$ , СКО  $m$  отдельного измерения по формуле Бесселя  $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$ , и СКО вероятнейшего значения  $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ , которые оказались равными соответственно 0,009 м и 0,005 м.

Полученные в результате измерений данные подтверждают возможность использования рассматриваемой методики для наиболее простого (среди известных методик) способа определения радиуса сооружения круглой формы. Другим достоинством линейного способа является возможность производства лишь односторонних (левых или правых) измерений, что в условиях застроенности территории может иметь решающее значение.

Что касается расхождения в значениях ТЛ и ТП (см. табл. 6), то оно объясняется наличием так называемой коллимационной ошибки. Она обусловлена неперпендикулярностью визирного приспособления (у нас это была обычная линейка) и средней ножки штатива. Избежать влияния коллимационной ошибки можно, если определять положение точки касания дважды, когда средняя ножка штатива вначале занимает верхнее положение (рис. 21, а), а затем – нижнее, после разворота приспособления на  $180^\circ$ .

Повысить точность измерений можно, располагая устройство так, чтобы визирное приспособление касалось именно исследуемого, а не произвольного сечения, для чего необходимо, чтобы средняя ножка приспособления располагалась в одной плоскости с двумя другими ножками и была снабжена более точным визирным приспособлением.

Другой вариант устройства (рис. 23) предусматривает использование в качестве оптического визира зрительной трубы теодолита или нивелира. Он заключается в закреплении трубы 7 на базисе 3 так, чтобы её визирная ось располагалась вдоль этого базиса.

На конце базиса закрепляется под углом  $45^\circ$  к нему плоское зеркало 8. В этом случае отражённый от зеркала визирный луч зрительной трубы будет отклоняться зеркалом под прямым углом к базису 3.

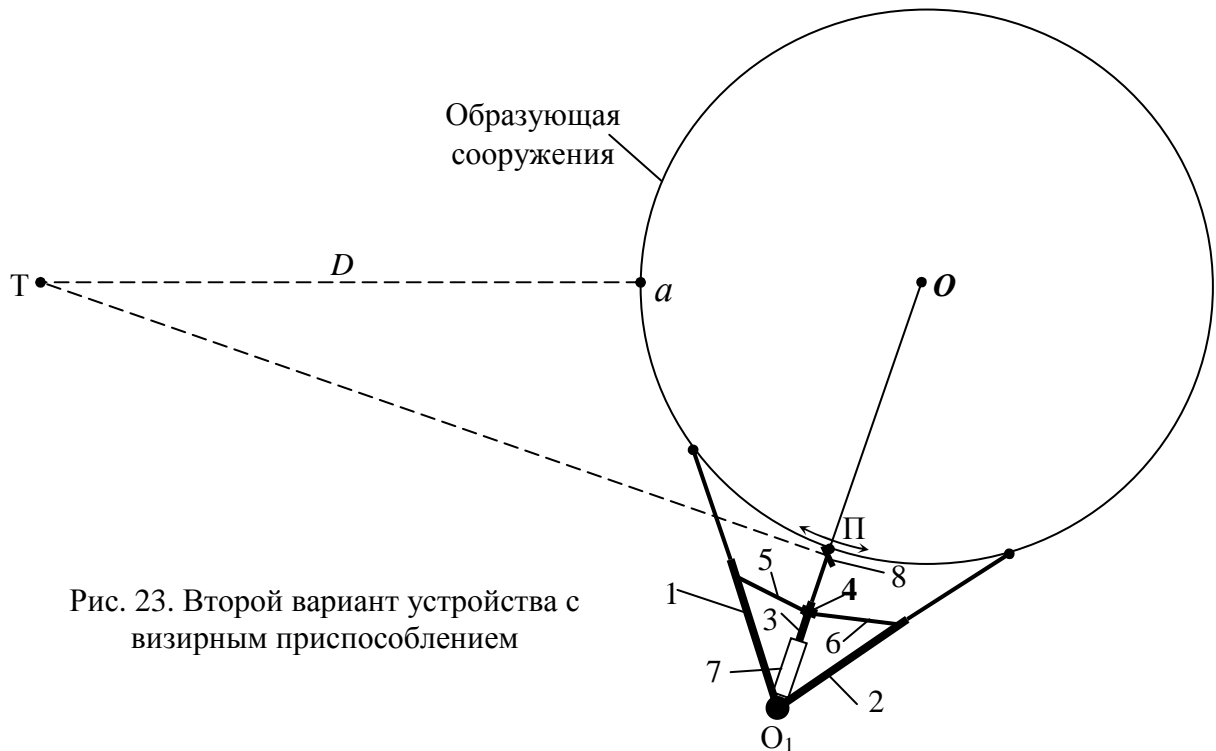


Рис. 23. Второй вариант устройства с визирным приспособлением

Перемещают устройство влево-вправо, добиваясь совпадения перекрестия сетки зрительной трубы с точкой  $T$ , и отмечают на сооружении положение конца базиса 3 в точке  $\Pi$ .

Другие варианты предусматривают использование лазерной рулетки вместо визирного приспособления. В первом случае лазерная рулетка 7 закрепляется на конце базиса 3 так, чтобы её лазерный пучок был перпендикулярен этому базису (рис. 24).

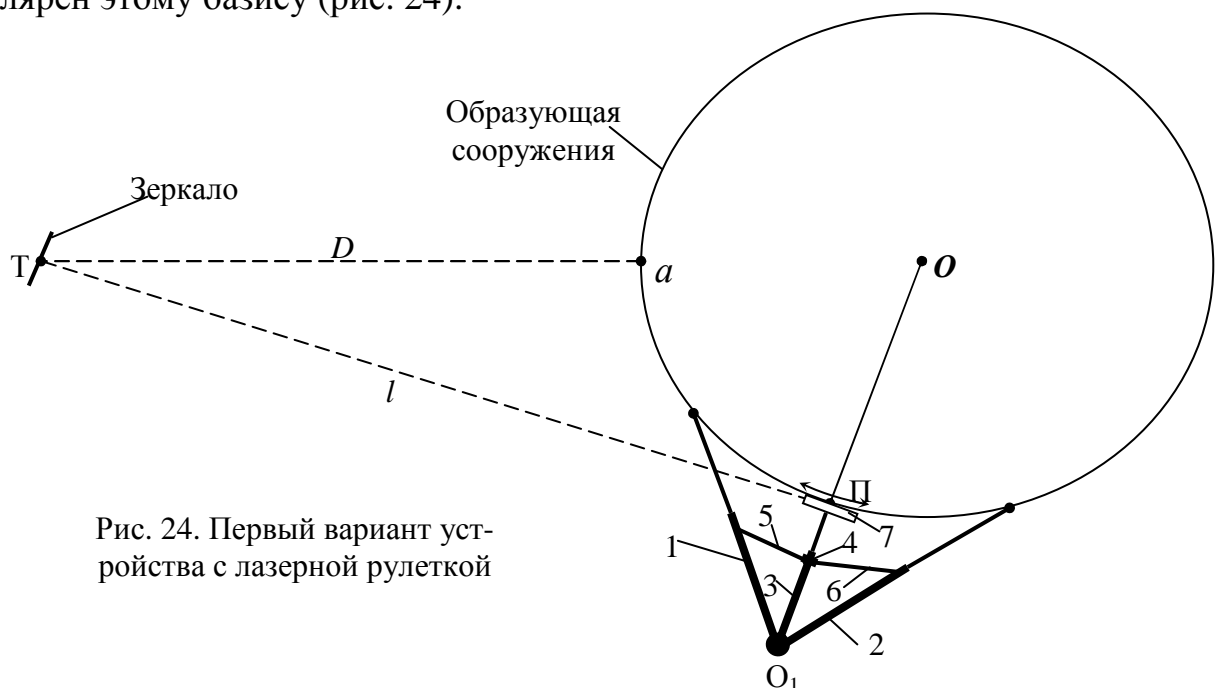


Рис. 24. Первый вариант устройства с лазерной рулеткой

В точке  $T$  устанавливают экран-отражатель в виде плоского зеркала. При включённом непрерывном режиме работы рулетки перемещают устройство влево-вправо, добиваясь направления лазерного пучка на точку  $T$ .

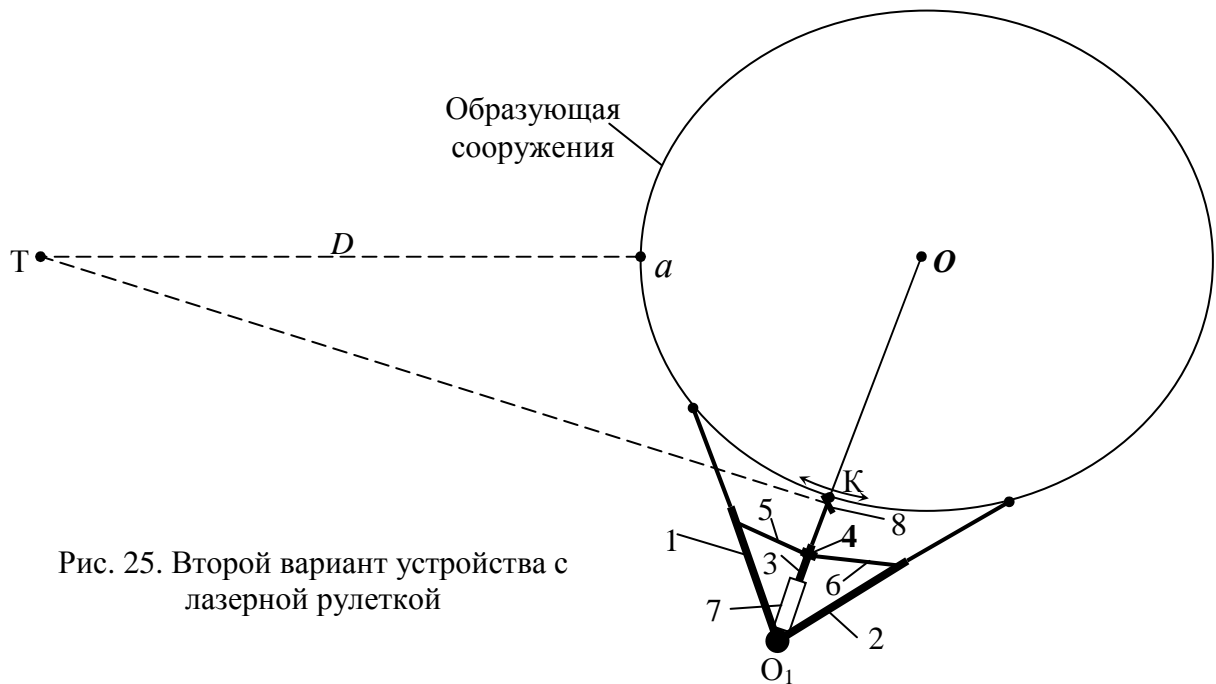


Рис. 25. Второй вариант устройства с лазерной рулеткой

Измеряют расстояние  $PT$  при расположении зеркала перпендикулярно линии  $TP$ . Поворачивают зеркало так, чтобы отражённый от него лазерный пучок расположился по линии  $Ta$  и вновь измеряют расстояние, которое будет равно сумме расстояний  $PT + D$ . В этом варианте расстояния  $PT$  и  $D$  могут быть измерены для контроля ещё раз из точки  $T$ .

Второй вариант использования лазерной рулетки 7 заключается в закреплении её на базисе 3 так, чтобы лазерный пучок располагался вдоль этого базиса (рис. 25). На конце базиса 3 закрепляется под углом  $45^\circ$  к нему плоское зеркало 8. В этом случае отражённый от зеркала лазерный пучок будет отклоняться зеркалом под прямым углом к базису 3. В дальнейшем все действия повторяют как в первом варианте использования лазерной рулетки, вычитая из показаний дисплея постоянную величину, равную расстоянию от рулетки до зеркала.

На рис. 26 показана схема устройства, состоящего всего из двух базисов 1 и 2 шарнирно соединённых в точке  $O_1$  и связанных между собой стороной  $ab$  шарнирного параллелограмма  $abvg$ . Шарниры  $a$  и  $b$  расположены на одинаковых расстояниях от точки  $O_1$ .

Устройство работает следующим образом. Прикладывают ножки базисов 1 и 2 к образующей трубы и приводят сторону  $vg$  шарнирного параллелограмма в соприкосновение с сооружением. Перемещают устройство влево-вправо до тех пор, пока сторона параллелограмма  $vg$  соприкасаясь с сооружением не будет направлена на точку  $T$ . Отмечают на сооружении положение точек  $a'b'$ . Поделив дугу  $a'b'$  пополам, находят положение точки  $P$ .

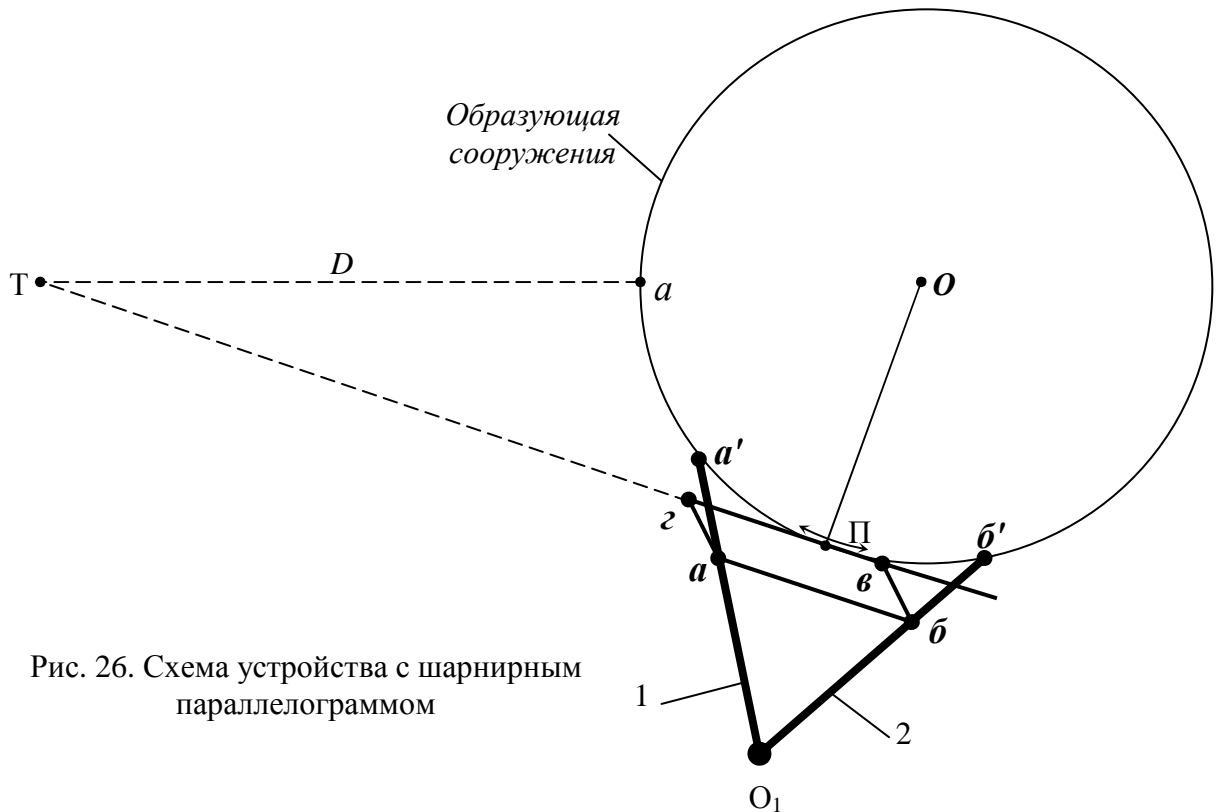


Рис. 26. Схема устройства с шарнирным параллелограммом

В заключение следует отметить, что во всех случаях необходимо строго фиксировать на штативе положение точки Т, на которую производится визирирование и от которой (или до которой) в дальнейшем выполняются измерения расстояний ТП и  $D$ .

### 1.3.2. Линейно-угловой способ определения радиуса

При наличии видимости на левую Л и правую П образующие трубы можно её радиус определить дистанционно линейно-угловым способом. Для этого (рис. 18) достаточно установить тахеометр Т на некотором расстоянии от трубы, измерить горизонтальный угол  $\beta$  между её левой и правой образующими Л и П и измерить горизонтальное проложение  $Ta = D$ . Тогда из подобия прямоугольных треугольников  $OTL$  и  $aTb$  можно найти радиус  $R$  по формуле:

$$R = \frac{D \times \sin \beta / 2}{1 - \sin \beta / 2}. \quad (20)$$

В общем виде точность линейно-углового способа определения радиусов сечений будет зависеть от точности измерений горизонтального угла  $\beta$  и горизонтального проложения  $D$  [147].

Используя формулу (20), найдём СКО радиуса  $m_R$  на основе известного из теории ошибок выражения для ошибки функции общего вида. После



взятия частных производных  $\partial R/\partial D$ ,  $\partial R/\partial \beta$  и соответствующих преобразований получим:

$$m_R^2 = \frac{1}{(1-\sin\beta/2)^2} \left[ \sin^2\beta/2 \times m_D^2 + \frac{D^2(1-\sin^2\beta/2)}{\rho^2(1-\sin\beta/2)^2} m_\beta^2 \right], \quad (21)$$

где  $m_D$  и  $m_\beta$  – средние квадратические ошибки измерения  $D$  и  $\beta$ .

Как следует из формулы (21), СКО  $m_R$  зависит от величин  $D$  и  $\beta$  и СКО их измерения. Исследование влияния значений  $D$ ,  $\beta$ ,  $m_D$  и  $m_\beta$  на  $m_R$  рассмотрим на примере дымовой трубы. Примем высоту трубы  $H = 120$  м, радиус трубы поверху 3 м, понизу 5 м, расстояния от тахеометра до центра трубы  $(D + R)$  от  $1,0H$  до  $3,0H$  м,  $m_\beta = 5''$ ,  $m_D = 5$  мм. Теоретические значения входящих в формулу (21) углов  $\beta/2$  были подсчитаны по формуле (20):

$$\sin\beta/2 = \frac{R}{D+R}. \quad (22)$$

Полученные результаты представлены на графике (рис. 27), на котором цифрами показаны значения  $m_R$  для  $R = 3$  и 5 м соответственно.

Если в формуле (21) заменить  $\sin\beta/2$  на его значение из формулы (22), то после соответствующих преобразований формула (21) примет вид:

$$m_R^2 = \frac{R^2}{D^2} m_D^2 + \left(1 + \frac{2R}{D}\right) \frac{(D+R)^2}{\rho^2} m_\beta^2. \quad (23)$$

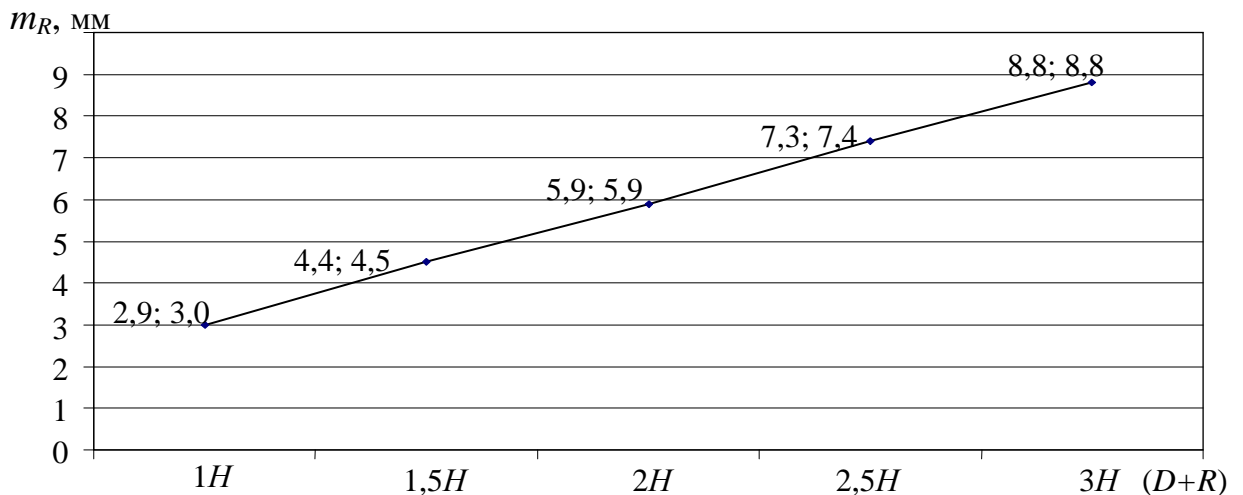


Рис. 27. График зависимости ошибки  $m_R$  от ошибок  $m_D$  и  $m_\beta$

Анализ графика на рис. 27 позволяет констатировать, что для конкретной дымовой трубы СКО  $m_R$  практически остаётся одинаковой для радиусов поверху и понизу. Она растёт с увеличением расстояния  $(D+R)$  от тахеометра



до трубы. Другая отличительная особенность линейно-углового способа определения радиуса заключается в том, что входящее в формулу (23) первое слагаемое в нашем примере практически не оказывает влияния на величину  $m_R$ . И, наконец, множитель  $(1+2R/D)$  практически не оказывает влияние на величину второго слагаемого формулы (23).

С учётом сказанного можно констатировать, что на погрешность определения радиуса основное влияние оказывают расстояние  $(D+R)$  от тахеометра до трубы и точность измерения угла  $\beta$ . Поэтому формулу (23) можно представить в сокращенном виде:

$$m_R = \frac{D+R}{\rho} m_\beta . \quad (24)$$

Результаты вычислений по формуле (24) сведены в табл. 8.

Т а б л и ц а 8

**Ошибки  $m_R$  подсчитанные по сокращенной формуле (24) при  $m_\beta = 5''$**

$(D + R), \text{ м}$		1,0H(120)	1,5H(180)	2,0H(240)	2,5H(300)	3,0H(360)
$m_R, \text{ мм}$	Верх ( $R=3 \text{ м}$ )	2,9	4,4	5,8	7,3	8,7
	Низ ( $R=5 \text{ м}$ )	2,9	4,4	5,8	7,3	8,7

Сравнивая данные табл. 8 и графика на рис. 27, видим, что строгая формула (23) и сокращённая формула (24) дают практически одинаковые результаты. Увеличение соотношения  $R/D$  ведёт, во-первых, к увеличению влияния ошибки  $m_D$  на  $m_R$ , а во-вторых, к увеличению множителя  $(1+2R/D)$  в формуле (23). В частном случае при  $R = D$  формула (23) примет вид:

$$m_R = \sqrt{m_D^2 + \frac{12D^2}{\rho^2} m_\beta^2} . \quad (25)$$

При определении радиуса какого-либо сооружения  $R = D$  размером 3 м с ошибками измерений  $m_D = 5 \text{ мм}$  и  $m_\beta = 5''$ , подсчитанная по формуле (25) СКО  $m_R$  составит 5,0 мм. При  $R = D = 5 \text{ м}$  она будет равна тем же 5,0 мм, то есть наблюдается обратная по сравнению с предыдущими выводами тенденция. В данном случае основное влияние на ошибку определения радиуса будет оказывать точность измерения  $D$ .

Если в формуле (20) дробное выражение при  $D$  разложить в ряд, то получим для радиуса  $R$  другую формулу [143]:

$$R = D(\sin\beta/2 + \sin^2\beta/2 + \sin^3\beta/2 + \dots), \quad (26)$$

по которой точность вычисления значения радиуса будет зависеть от количества слагаемых в скобках. Для непосредственного определения количества слагаемых  $n$  в формуле (26) в зависимости от фактического соотношения  $k = D/R$  и заданной точности  $\delta$ , рассмотрим выражение:

$$\sin^n\beta/2 > \delta. \quad (27)$$

Прологарифмируем выражение (27) и выразим значение  $n$  следующим образом:

$$n > \frac{\lg\delta}{\lg\sin\beta/2}, \quad (28)$$

где согласно рис. 18  $\sin\beta/2$  можно выразить как:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{R}{R+D} = \frac{1}{1+\frac{D}{R}} = \frac{1}{1+k}. \quad (29)$$

Обратим внимание на то, что при геодезических наблюдениях высоких сооружений башенного типа (например, дымовых труб) наблюдатель вынужден располагать точку  $T$  на расстоянии не менее  $1,5 - 3,0H$ , где  $H$  – высота сооружения. В этом случае будет иметь место соотношение  $k > 1$ , поэтому  $\sin\beta/2$  можно представить как  $\sin\beta/2 \approx 1/k$ . Тогда формула (28) в упрощённом виде будет выглядеть следующим образом:

$$n > -\lg\delta/\lg k. \quad (30)$$

По формуле (30) построены графики зависимости для различных  $\delta$  от  $10^{-1}$  до  $10^{-5}$  (рис. 28), пользуясь которыми можно для любого конкретного случая определить количества слагаемых  $n$  в скобках формулы (26).

Так, при расстоянии  $D = 40R$  и более необходимо в скобках формулы (26) использовать не менее трёх слагаемых. Уменьшение расстояния ведёт к увеличению необходимого числа слагаемых, которое, например, при  $20R$  равно четырём, при  $8R$  равно шести, при  $4R$  равно восьми.

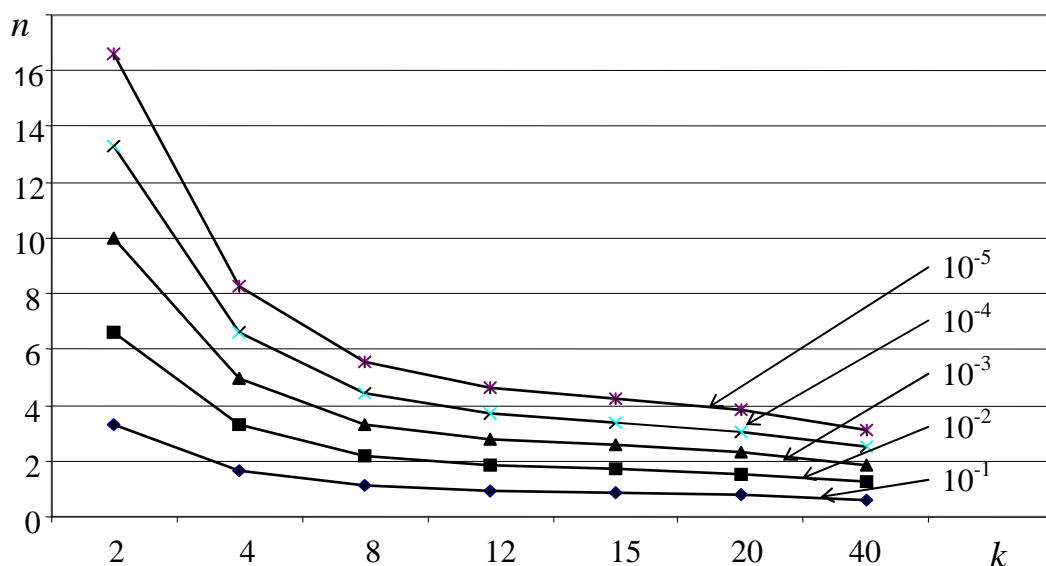


Рис. 28. Графики зависимости количества слагаемых  $n$  от соотношения  $k$

С целью разработки программ, обеспечивающих надёжный, высокопроизводительный и точный способ получения результатов выполнения одностороннего линейно-углового способа и их графической интерпретации, было произведено знаковое моделирование. В качестве модели фигурировало круглое сечение дымовой трубы произвольного радиуса.

Методика моделирования заключалась в измерении в ArchiCAD-11 с точки Т, расположенной на разных расстояниях Т-а (рис. 18), горизонтальных проложений  $D$  и горизонтальных углов  $OTЛ$  и  $OTП$ , которые в сумме составляли угол  $\beta$ . Выбор расстояний Т-а был до некоторой степени обусловлен величиной углов  $\beta$  при определении нами вертикальности дымовых труб производственных объектов Нижегородской области способом направлений (табл. 9).

Т а б л и ц а 9

### Значения углов $\beta$

Объект	№ трубы	Высота трубы, м	Диаметр устья, м	Расстояния до центра тубы, м		Углы $\beta$ , °	
				От ст.1	От ст.2	<i>min</i>	<i>max</i>
НГ ТЭЦ	№1	120	6	103	251	1,7	5,9
	№2	120	6	98	174	2,3	6,1
	№3	250	7	335	502	1,0	3,6
"Сокол"	№1	30	3	42	30	2,8	6,7
НиГРЭС	№2	120	7	100	161	2,5	6,1
Сормовская ТЭЦ	№1	150	6	119	119	4,2	6,3
	№2	150	6	276	226	1,7	4,4

Результаты моделирования (в некоторых условных единицах) представлены в табл. 10.

Т а б л и ц а 10

**Результаты моделирования с использованием ArchiCAD-11**

№ ( <i>nR</i> )	<i>D</i>	УГЛЫ, °		<i>R</i> <sub>лев</sub>	<i>R</i> <sub>прав</sub>	<i>R</i> <sub>ср</sub>
		<b>ОТЛ</b>	<b>ОТП</b>			
1	2	3	4	5	6	7
1(92R)	188029	0,660	0,570	2191,1	1889,3	2040,2
2(57R)	115965	0,990	0,990	2038,9	2038,9	2038,9
3(46R)	94009	1,220	1,220	2045,1	2045,1	2045,1
4(36R)	73950	1,540	1,540	2042,3	2042,3	2042,3
5(26R)	53982	2,090	2,090	2043,2	2043,2	2043,2
6(17R)	34103	3,230	3,230	2036,2	2036,2	2036,2
7(9R)	17930	6,060	5,670	2116,3	1965,7	2041,0
8(3R)	5939	14,190	15,450	1928,7	2156,7	2042,7
Результаты вычислений по среднему значению угла ( <b>ОТЛ+ОТП</b> ):2						
1	188029	0,615		2040,1	2040,1	2040,1
7	17930	5,865		2040,7	2040,7	2040,7
8	5939	14,82		2041,2	2041,2	2041,2

По значениям *D*, равным от 3 до 92R (графа 2, табл. 10), углам **ОТЛ** и **ОТП** (графы 3, 4) были вычислены «левые» и «правые» радиусы окружности (графы 5, 6) и выведены их средние значения (графа 7). Для этого была разработана программа (Microsoft Excel), реализующая процесс вычислений по формуле (20). Величина радиуса *R*<sub>изм</sub>, измеренная непосредственно, составила 2038,5.

Полученный ряд равноточных измерений был обработан с позиций теории ошибок. Для этого было найдено вероятнейшее значение радиуса *R*<sub>вер</sub> как среднее арифметическое результатов измерений (графа 7), равное 2041,2. По разностям *R*<sub>ср</sub> и *R*<sub>вер</sub> находили вероятнейшие ошибки и по формуле Бесселя вычислили СКО отдельного измерения, равную 2,8 условных единицы. Если принять *R*<sub>изм</sub> = 2038,5 за его истинное значение, то истинная ошибка составит *R*<sub>вер</sub> – *R*<sub>изм</sub> = 2041,2 – 2038,5 = 2,7 условных единицы, то есть она практически оказалась равной СКО отдельного измерения 2,8 условных единицы.

При радиусе нижнего сечения трубы 5 м, получим на одну условную единицу 5000 мм : 2038,5 = 2,45 мм. Тогда 2,8 условных единиц СКО составят 2,8x2,45 мм всего 6,86 мм, в то время как допустимая СКО определения крена трубы высотой 120 м составляет 0,0005x120000 = 60 мм.

Обратим внимание, что в 1, 7 и 8 вариантах моделирования (табл. 10) горизонтальные углы **ОТЛ** и **ОТП** не равны между собой. Были подсчитаны средние значения этих углов (**ОТЛ+ОТП**):2, по которым найдены радиусы

окружности 2040,1, 2040,7, 2041,2, которые оказались практически равными таковым, найденным по измеренным углам  $\mathcal{O}ТЛ$  и  $\mathcal{O}ТП$ .

### 1.3.3. Фотографический способ определения радиуса

Сущность фотографического способа определения радиусов [151, 147] сооружений круглой формы поясняется рис. 29 и заключается в следующем.

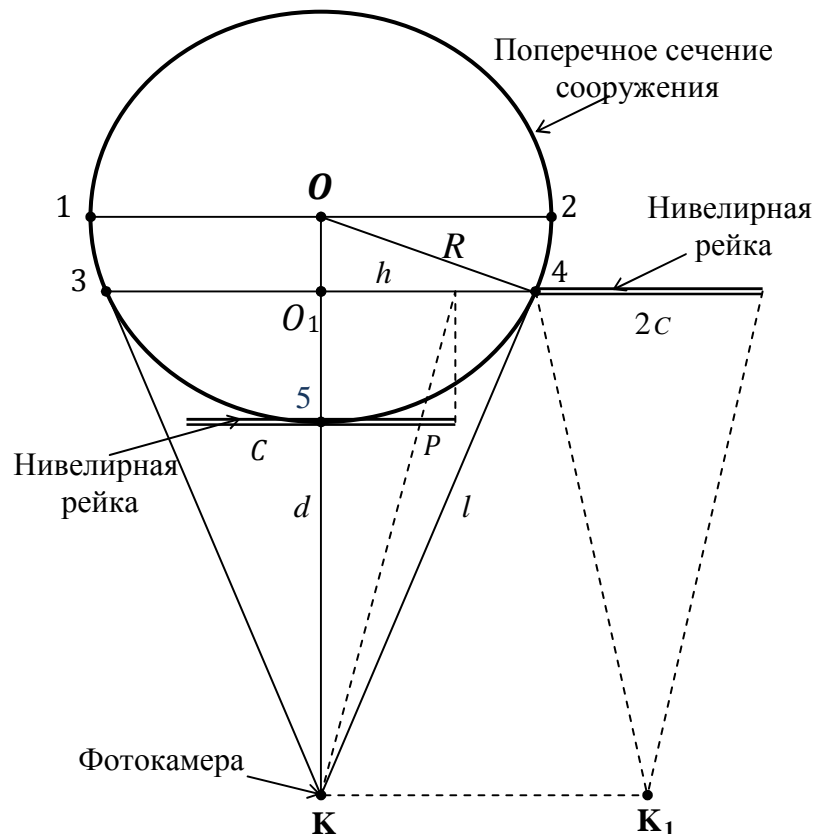


Рис. 29. Схема фотографического способа определения радиуса

Фотографируют сооружение с приложенной к нему горизонтально нивелирной рейкой из точки  $K$ , расположенной на некотором расстоянии  $KO = d$ . Нивелирная рейка в дальнейшем служит для масштабирования снимка с целью получения результатов измерений на нём в метрической системе единиц. Следует сказать, что изображение на снимке воображаемой хорды 3-4 не соответствует диаметру 1-2 поперечного сечения сооружения, а всегда меньше его. Поэтому в результаты измерений на снимке величины этой хорды необходимо вводить соответствующую поправку.

Для определения величины этой поправки введём обозначения:  $K-4 = l$ ,  $O_1-4 = h$ . Из подобия треугольников  $OK4$  и  $O_1K4$  имеем  $R/d = h/l$ , отсюда выразим  $l = dh/R$ . Примем  $d = nR$  (где  $n$  – число укладываний радиуса в расстоянии  $KO = d$ ), тогда  $l = nh$ . Из треугольника  $OK4$  найдём  $R^2 = d^2 - l^2$ . Подставим в это выражение значения  $d$  и  $l$  и после соответствующих преобразований получим формулу:

$$R = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} . \quad (31)$$

В этой формуле единица делённая на корень квадратный представляет поправочный коэффициент к измеренной на снимке величине  $h$ . Для значений  $n$ , равных 1,5; 2; 4; 6; 8; 10; 15 и 20 были подсчитаны эти коэффициенты, которые оказались равными соответственно 1,342; 1,155; 1,033; 1,014; 1,008; 1,005; 1,002; 1,001.

Анализ формулы (31) с позиций теории ошибок позволяет констатировать, что точность определения радиуса сооружения предлагаемым способом в основном зависит от точности измерения на снимке величины хорды 3-4, поскольку поправочный коэффициент даже при  $n = 2$  составляет всего 1,155 и с увеличением  $n$  стремится к единице. В то же время увеличение расстояния фотографирования может отрицательно сказаться на точности измерения хорды 3-4. Поэтому, в каждом конкретном случае следует выбирать оптимальное соотношение между расстоянием фотографирования и погрешностью измерения снимка, обеспечивающее заданную точность определения радиуса сооружения.

Если поправочный коэффициент разложить в степенной ряд Тейлора и ограничиться одним слагаемым этого ряда, то можно получить приближённую формулу:

$$R \approx h \left( 1 + \frac{1}{2n^2} \right) . \quad (32)$$

Что касается масштабирования снимка по нивелирной рейке, расположенной в точке 5 на расстоянии  $O_1-5$  от хорды 3-4, то в данном случае в её длину  $2c$  необходимо вводить поправку  $2p$ .

Из подобия треугольников вытекает соотношение  $p/c = O_1-5/O_1-K$ , следовательно  $p = c O_1-5/O_1-K$ . Найдём  $O_1-5 = R - \sqrt{R^2 - h^2}$ , а после подстановки в подкоренное выражение значения  $h$  из формулы (31), получим  $O_1-5 = R \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$ . В свою очередь  $O_1-K = d - \sqrt{R^2 - h^2}$ , но  $d = nR$ , поэтому  $O_1-K = R \left( n - \frac{1}{n} \right)$ . Подставив полученные значения в выражение для  $p$ , получим в окончательном виде формулу поправки:

$$p = c \frac{n-1}{n^2-1} . \quad (33)$$

Для принятых выше значений  $n$  равных 1,5; 2; 4; 6; 8; 10; 15 и 20 были подсчитаны коэффициенты при  $s$ , которые оказались равными соответственно 0,400; 0,333; 0,200; 0,143; 0,111; ,091; 0,062; 0,048. Как следует из формулы (33), точность определения поправки  $p$  зависит только от точности  $n$ , то есть от точности определения расстояния  $d$  от фотокамеры до оси сооружения.

Недостатком описанного способа является необходимость знания числа  $n$  и довольно сложный переход от метрической величины поправки  $2p$  к пикселям. Избежать этого можно, если определить положение точки касания, например, 4 с помощью специального устройства детально описанного в разделе 1.3.1.

После этого, расположив рейку вдоль хорды 3-4, фотографируют её из точки  $K_1$ . Измерив на первом снимке количество пикселей, приходящихся на хорду 3-4, а на втором снимке количество пикселей, приходящихся на длину рейки, можно непосредственно определить  $O_14 = h$  в метрической системе единиц. В этом случае в отличие от формул, приведенных в работе [147] радиус  $R$  можно вычислить по значениям только  $d$  и  $h$ , где  $d = K-5$  (рис. 29).

Действительно, из подобия прямоугольных треугольников  $KO_4$  и  $KO_14$  следует:  $\frac{R}{d+R} = \frac{\sqrt{R^2-h^2}}{R}$ . Отсюда имеем:  $R^2 = (d+R)\sqrt{R^2-h^2}$ . Возведём полученное выражение в квадрат  $R^4 = (d+R)^2(R^2-h^2)$  и, раскрыв скобки, имеем после соответствующих преобразований:

$$2dR^3 + (d^2 - h^2)R^2 - 2dRh^2 - d^2h^2 = 0.$$

Поделим это выражение на  $2d$  и получим уравнение третьей степени относительно  $R$ :

$$R^3 + \frac{d^2-h^2}{2d}R^2 - h^2R - \frac{dh^2}{2} = 0.$$

Для исключения в этом уравнении слагаемого второй степени введём переменную:  $y = R + \frac{d^2-h^2}{6d}$ , тогда  $R = y - \frac{d^2-h^2}{6d}$ . Ещё обозначим  $t^2 = d^2 - h^2$ , предполагая, что  $d > h$ , тогда:

$$R = y - \frac{t^2}{6d}, \quad (34)$$

и уравнение третьей степени  $R^3 + \frac{t^2}{2d}R^2 - h^2R - \frac{dh^2}{2} = 0$  примет вид

$$y^3 - y \left( \frac{t^4}{12d^2} + h^2 \right) + \left( \frac{t^6}{3 \times 6^2 d^3} + \frac{h^2 t^2}{6d} - \frac{dh^2}{2} \right) = 0, \text{ а в соответствии со}$$

стандартным видом уравнения третьей степени  $y^3 + 3py + 2q$  обозначим:

$$p = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{12} \frac{t^4}{d^2} + h^2 \right), \quad (35)$$

$$q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3 \times 6^2} \frac{t^6}{d^3} + \frac{h^2 t^2}{6d} - \frac{dh^2}{2} \right), \quad (36)$$

и вычислим некоторую вспомогательную величину:

$$Q = q^2 + p^3. \quad (37)$$

При  $Q > 0$  будем иметь один вещественный корень уравнения третьей степени (другие 2 корня – мнимые и не рассматриваются).

Этот корень  $y = u + v$ , где:

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{Q}}, \quad (38)$$

$$v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{Q}}. \quad (39)$$

Таким образом, предлагаемое аналитическое решение поставленной задачи осуществляется в следующей последовательности: по известным значениям  $d$  и  $h$  находят  $t^2 = d^2 - h^2$ ; затем по формулам (35), (36) и (37) вычисляют  $p$ ,  $q$  и  $Q$ ; по формулам (38) и (39) вычисляют  $u$  и  $v$  и их сумму  $y = u + v$ ; по формуле (34) находят значение радиуса  $R$ .

С целью проверки предложенной методики и определения пределов её работоспособности было проведено соответствующее моделирование. В качестве моделей фигурировали окружности радиуса 2, 5 и 10 условных единиц. Для различных расстояний  $d$  были определены соответствующие отрезки  $h$  в тех же условных единицах. Полученные результаты приведены в табл. 11.

Данные табл. 11 свидетельствуют о том, что пользоваться формулами (35), (36) и (37) можно, когда величина  $d$  не превышает трёх  $R$ . В противном случае величина  $Q$  будет отрицательной, в то время как в формулах (38) и (39) из неё необходимо извлекать корень квадратный.

К недостаткам этого способа следует отнести необходимость определения точек касания 3 и (или) 4 и выполнение фотографирования с двух точек  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}_1$  (рис. 29).

Для исключения этих недостатков можно ограничиться измерением расстояния  $d$  и фотографированием сооружения только из одной точки  $\mathbf{K}$



(рис. 30). Теперь, если определить отрезок ЛП в метрической системе, то можно вычислить угол  $\beta$  и найти радиус  $R$  наблюдаемого сечения:

$$\beta = \arctg [(ЛП)/2d], \quad R = \frac{d \sin \beta}{1 - \sin \beta} \quad (40)$$

Т а б л и ц а 11

### Результаты моделирования по значениям $d$ и $h$

$d$	$h$	$p$	$q$	$Q$	$u$	$v$	$y$	$R$
2	1,73	-1,00	-1,37	0,86	1,3199	0,7612	2,08	2,00
4	1,89	-1,46	-2,51	3,19	1,6253	0,8976	2,52	2,01
6	1,94	-2,06	-3,24	1,82	1,6619	1,2373	2,90	2,00
7	1,96	-2,44	-3,41	-2,81	—	—	—	—
5	4,33	-6,29	-21,47	211,90	3,3029	1,9053	5,21	5,00
10	4,71	-9,08	-38,89	764,87	4,0524	2,2398	6,29	5,00
15	4,84	-12,82	-50,38	428,50	4,1423	3,0961	7,24	5,00
16	4,86	-13,73	-51,71	83,91	3,9337	3,4911	7,42	5,00
17	4,87	-14,67	-52,36	-415,18	—	—	—	—
10	8,66	-25,17	-171,79	13561,62	6,6057	3,8107	10,42	10,00
20	9,42	-36,31	-311,15	48951,74	8,1048	4,4797	12,58	9,99
30	9,68	-51,30	-403,02	27423,98	8,2847	6,1921	14,48	10,00
32	9,71	-54,88	-412,46	4873,44	7,8421	6,9976	14,84	10,00
33	9,72	-56,72	-415,45	-9893,57	—	—	—	—

Решение поставленной задачи заключается в определении на фотографии количества пикселей, приходящихся на длину рейки и количества пикселей, приходящихся на отрезок 1-2 (рис. 30). Умножив величину 1-2 в пикселях на отношение длины рейки в метрах на длину рейки в пикселях, получают приблизительное значение ЛП в метрах.

Как следует из схемы на рис. 30, с увеличением расстояния  $d$  угол  $\beta$  уменьшается, хорда 1-2 приближается к диаметру сечения, а отрезок ЛП приближается к величине хорды 1-2. Поэтому, для обеспечения требуемой точности определения  $R$  необходимо определить такое расстояние  $d'$ , при котором ошибка определения радиуса не превысит ошибок определения  $d$  и ЛП.

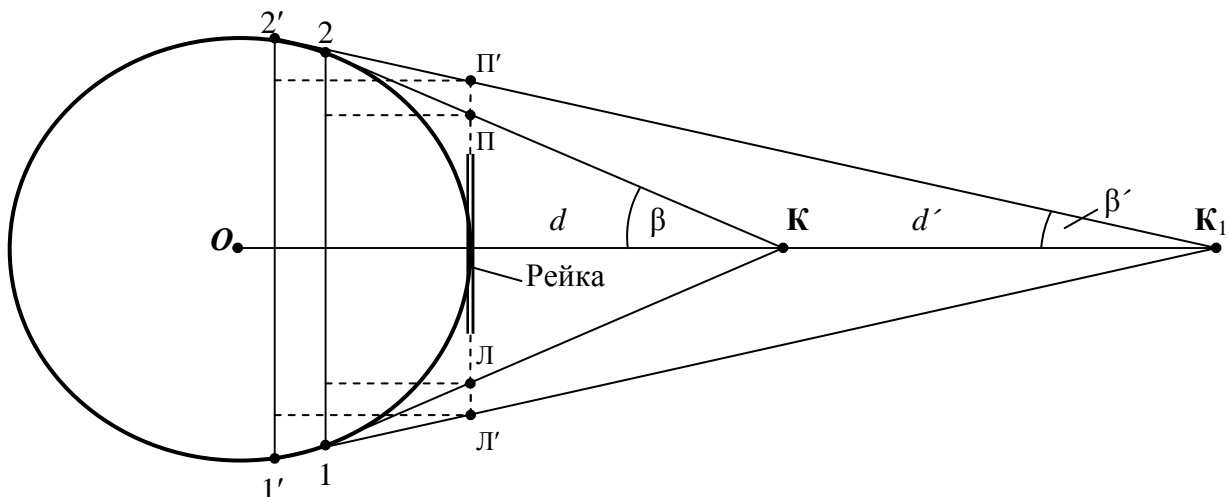


Рис. 30. Схема к определению радиуса путём фотографирования из одной точки

Для этого, используя первую формулу (40), найдём СКО  $m_\beta$  определения угла  $\beta$  на основе известного из теории ошибок выражения для ошибки функции общего вида.

После взятия частных производных по всем входящим в эту формулу аргументам и соответствующих преобразований получим:

$$m_\beta^2 = \left( \frac{\rho^2}{1 + \text{ЛП}^2 / 4d^2} \right)^2 \left( \frac{1}{4d^2} m_{\text{ЛП}}^2 + \frac{\text{ЛП}^2}{4d^4} m_d^2 \right), \quad (41)$$

где  $m_{\text{ЛП}}$  и  $m_d$  – СКО измерения ЛП и  $d$ ,  $\rho'' = 206265''$ .

В свою очередь, используя вторую формулу (40), найдём СКО  $m_R$  радиуса :

$$m_R^2 = \frac{1}{(1 - \sin\beta)^2} \left[ \sin^2\beta m_d^2 + \frac{d^2 \cos^2\beta}{\rho^2 (1 - \sin\beta)^2} m_\beta^2 \right], \quad (42)$$

где  $m_d$  и  $m_\beta$  – СКО измерения  $d$  и  $\beta$ .

Результаты вычислений по формулам (41) и (42) сведены в табл. 12. В ней расстояния  $d$  взяты в некоторых условных единицах, равных от 1 до 12 значений радиуса, для того, чтобы полученные результаты можно было распространить на сооружения любого радиуса. Ещё отметим, что в формуле (42) в качестве  $m_\beta$  фигурирует переменная величина, соответствующая конкретному значению  $d$ .

Т а б л и ц а 12

**Ошибки  $m_\beta$  и  $m_R$  подсчитанные при  $m_{\text{ЛП}} = m_d = 5$  мм**

$d=nR$	$\sin\beta=R/(d+R)$	$\beta,^\circ$	$\text{tg}\beta$	$\text{ЛП}=\text{tg}\beta \times 2d$	$m_\beta, ''$	$m_R, \text{ м}$
1	0,500000	30,00000	0,577350	1,155	591	0,0111
2	0,333333	19,47122	0,353553	1,414	281	0,0063
3	0,250000	14,47751	0,258199	1,549	181	0,0048
4	0,200000	11,53696	0,204124	1,633	134	0,0042
5	0,166667	9,594068	0,169031	1,690	106	0,0038
6	0,142857	8,213211	0,144338	1,732	88	0,0035
7	0,125000	7,180756	0,125988	1,764	75	0,0034
8	0,111111	6,379370	0,111803	1,789	65	0,0032
9	0,100000	5,739170	0,100504	1,809	58	0,0032
10	0,090909	5,215909	0,091287	1,826	52	0,0031
11	0,083333	4,780192	0,083624	1,840	47	0,0030
12	0,076923	4,411726	0,077152	1,852	43	0,0030

Данные табл. 12 позволяют констатировать, что точность определения угла  $\beta$ , а соответственно и точность определения радиуса  $R$  повышается с

увеличением расстояния  $d$ , что наглядно иллюстрируется графиками на рис. 31 и 32. На этих графиках представлены кривые, соответствующие ошибкам определения  $m_{\text{ЛП}} = m_d = m = 5, 10, 15$  мм.

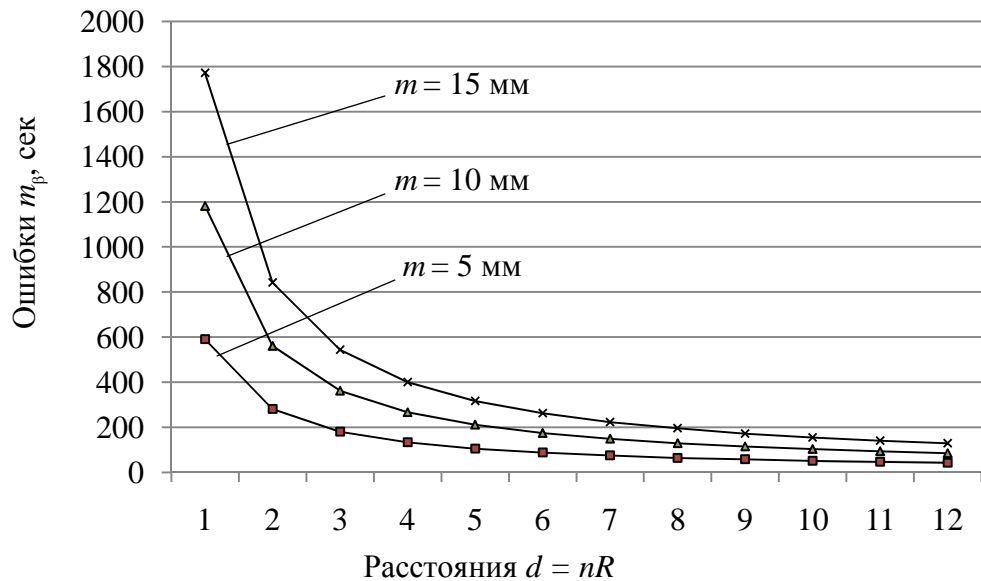


Рис. 31. График зависимости ошибки  $m_p$  от ошибок  $m_{\text{ЛП}}$  и  $m_d$

Из этих графиков видно, что начиная с  $n = 5$  и более, ошибка  $m_R$  определения радиуса остаётся практически одной и той же независимо от расстояния  $d$ . Предлагаемый способ был опробован путём фотографирования дымовой трубы с приложенной к ней 3-метровой нивелирной рейкой (рис. 33).

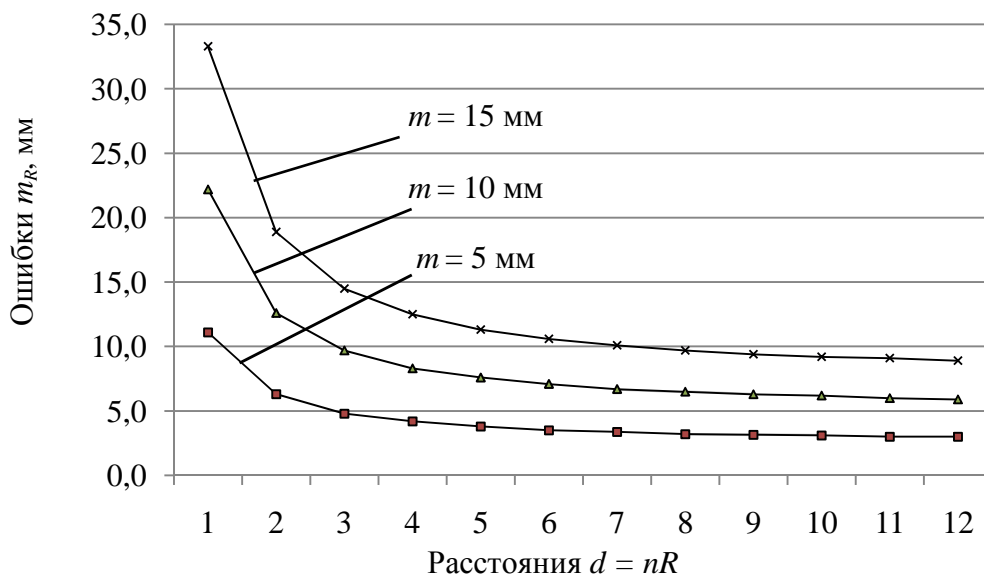


Рис. 32. График зависимости ошибки  $m_R$  от ошибок  $m_d$  и  $m_p$

Фотографирование осуществлялось с пяти точек, расположенных на расстоянии  $d$ , равных 5, 10, 15, 20 и 25 м, что соответствует величине  $n$  от 1 до 12.

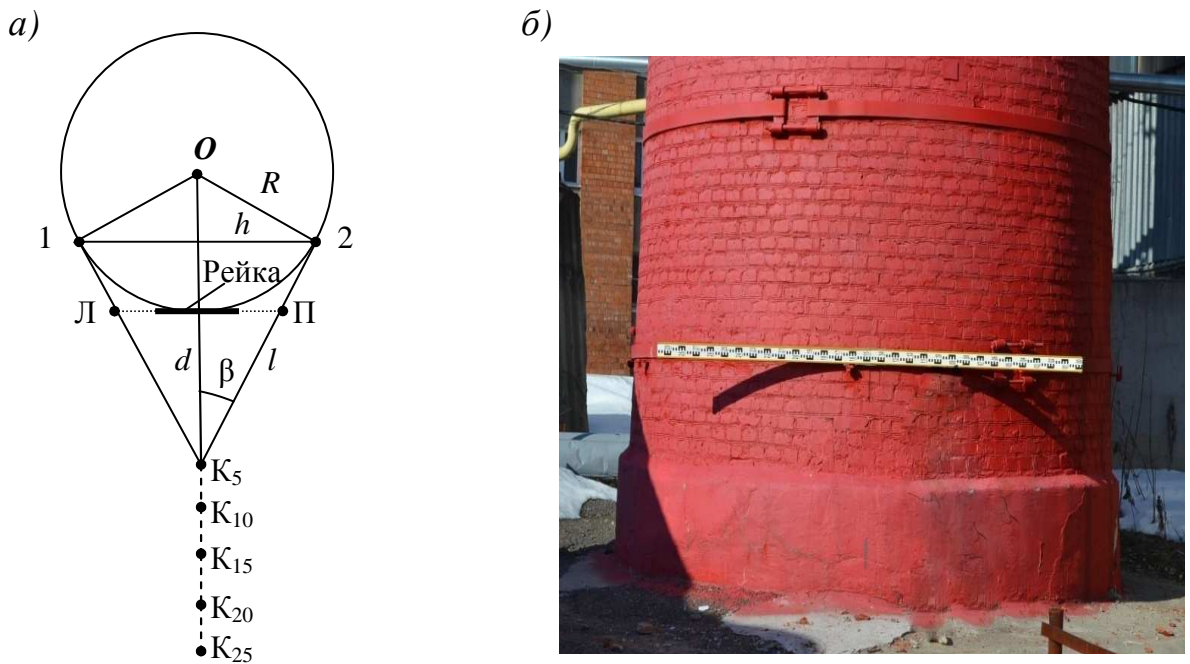


Рис. 33. Схема фотографирования (а) дымовой трубы (б)

Радиус исследуемого сечения трубы  $R_0$  был определён непосредственно путём измерения периметра  $2\pi R_0$  этого сечения и оказался равным 1,983 м. Фотографирование выполнялось с помощью аппарата *Nikon D3100*. Полученные снимки выводились на экран монитора и с помощью программы *ArchiCAD 18* выполнялся подсчёт количества пикселей, приходящихся на длину рейки и количество пикселей приходящихся на отрезок 1-2. Результаты измерений и вычислений представлены в табл. 13.

Т а б л и ц а 13

**Результаты фотографирования дымовой трубы**

Расстояние $d$ , м	Количество пикселей		ЛП, м	$\text{tg}\beta$	$\beta$ , °	$R$ , м	$R - R_0$ , мм
	ЛП	Рейка					
5,109	1079	1094	2,959	0,28957	16,1496	1,969	-14
10,161	1439	1290	3,346	0,16467	9,3512	1,971	-12
15,163	1248	1065	3,515	0,11592	6,6124	1,973	-10
20,084	1394	1158	3,611	0,0899	5,1375	1,975	-8
24,834	1027	838	3,677	0,0740	4,23352	1,979	-4

Полученные в результате измерений данные подтверждают возможность использования рассматриваемой методики для фотографического способа определения радиуса сооружения круглой формы.

Представляет интерес комбинированный способ, состоящий из сочетания фотографического (определение  $h$ ) и линейного (измерение  $l$  и  $d$ ). В таком способе радиус может быть вычислен по формуле:

$$R = \frac{dh}{l - h} . \quad (43)$$

Было выполнено соответствующее моделирование этого способа, где в качестве модели фигурировало изображение сечения радиуса 50 условных единиц. Последовательно измерялись с точностью 0,1 мм отрезки  $h$  и  $l$  при различных «отстояниях» точки К при  $d$  от 50 до 200 условных единиц. Результаты измерений по схеме на рис. 33 и вычислений радиуса по формуле (43) приведены в табл. 14.

Вычисленные значения радиуса оказались равными 49,95 – 50,03, что в среднем составило 49,99 или отличается от истинного значения на 0,01 условной единицы.

В результате исследований формулы (43) с позиций теории ошибок получено выражение (44) для определения СКО  $m_R$  радиуса в зависимости от ошибок  $m_h$ ,  $m_l$  и  $m_d$  измерения расстояний  $h$ ,  $l$  и  $d$ :

$$m_R^2 = \frac{1}{(l-h)^2} \left[ \frac{d^2}{(l-h)^2} (l^2 m_h^2 + h^2 m_l^2) + h^2 m_d^2 \right] . \quad (44)$$

Подсчитанные по формуле (44) ошибки  $m_R$  радиуса для  $m_d$ ,  $m_l$  и  $m_h$ , равных между собой соответственно 5, 3 и 2 мм, представлены в табл. 14 и иллюстрируются графиком на рис. 34.

Т а б л и ц а 14

### Результаты моделирования комбинированного способа

$d$	$h$	$l$	$R$	$m_R$ , мм		
				$m_{dlh} = 5\text{мм}$	$m_{dlh} = 3\text{мм}$	$m_{dlh} = 2\text{мм}$
50	43,3	86,6	50,00	13,8	8,3	6
100	47,1	141,4	49,95	8,7	5,2	3,7
150	48,4	193,6	50,00	7,3	4,4	3
200	49,0	244,9	50,03	6,6	4	2,7

На этих графиках можно наблюдать практически ту же закономерность, что и на рис. 19 для линейного способа.

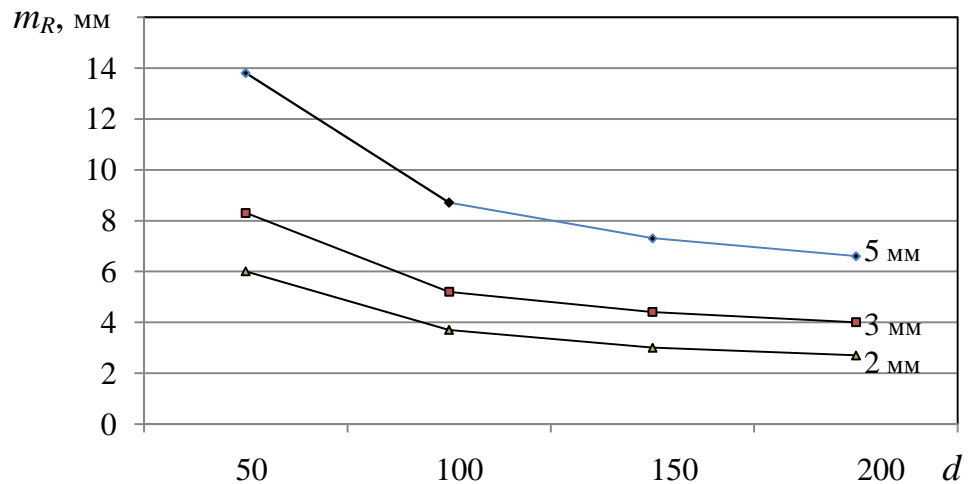


Рис. 34. Графики зависимости ошибки  $m_R$  от  $m_h = m_l = m_d = 5, 3, 2$  мм (комбинированный способ)

Если ошибки  $m_h, m_l$  и  $m_d$  не равны между собой, то представляет интерес определение их оптимального сочетания. Для этого были подсчитанные по формуле (44) ошибки радиуса  $m_R$  для ошибок  $m_h, m_l$  и  $m_d$  равных 5, 3 и 2 мм при различных шести их сочетаниях. Результаты вычислений представлены в табл. 15 и иллюстрируются графиком на рис. 35.

Т а б л и ц а 15

**Ошибки  $m_R$  в зависимости от сочетания ошибок  $m_h, m_l, m_d$**

$d$ , мм	$m_R$ , мм (при различных сочетаниях значений $m_h, m_l, m_d$ )					
	1(2,3,5)	2(3,2,5)	3(5,2,3)	4(5,3,2)	5(2,5,3)	6(3,5,2)
50	7,7	8,9	12,2	12,3	8	9,3
100	4,4	5,5	8,2	8,2	4,4	5,6
150	3,4	4,5	7	7	3,4	4,6
200	2,9	4,1	6,5	6,5	3	4,1

Анализ графиков на рис. 35 позволяет констатировать, что наиболее точные результаты определения радиуса получаются при первом и пятом со-

четании, когда ошибка  $m_h$  наименьшая по сравнению с ошибками определения  $l$  и  $d$ .

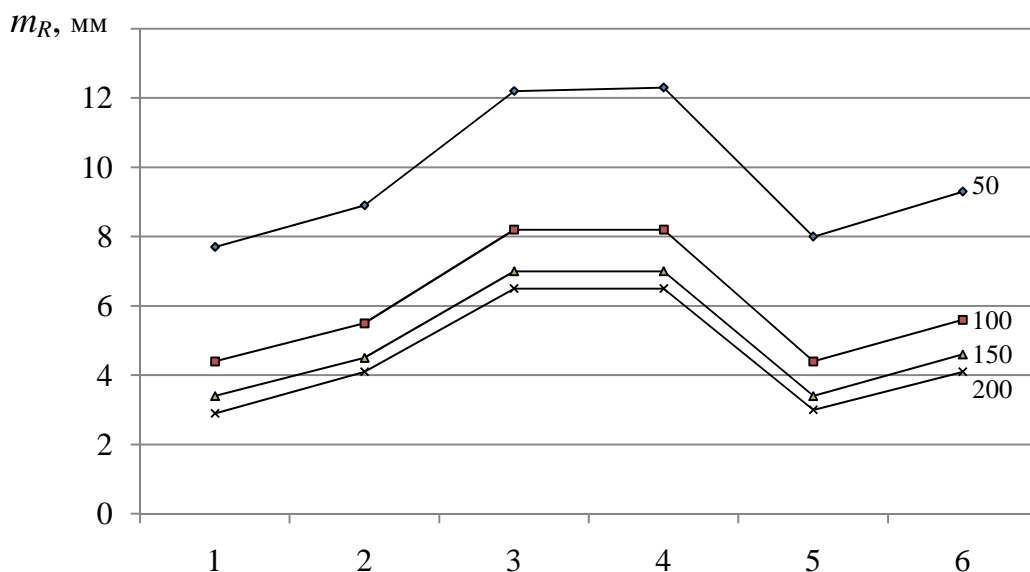


Рис. 35. Графики зависимости ошибки  $m_R$  от различного сочетания от 1 до 6 ошибок  $m_h$ ,  $m_l$  и  $m_d$

Если (рис. 33) обозначить  $KO/R = n$ , то радиус  $R$  можно определить по приведенной в работе [145] формуле:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} h = k_1 h . \quad (45)$$

Результаты измерений  $d$  и  $h$  по схеме на рис. 33 и вычислений радиуса по формуле (45) приведены в табл. 16.

Т а б л и ц а 16

### Результаты моделирования фотографического способа

$d$	$n$	$h$	$R$	$k_1$	$m_R$ , мм		
					$m_h = 5$ мм	$m_h = 3$ мм	$m_h = 2$ мм
50	2	43,3	50,00	1,155	5,775	3,465	2,310
100	3	47,1	49,96	1,061	5,305	3,183	2,122
150	4	48,4	49,99	1,033	5,165	3,099	2,066
200	5	49,0	50,01	1,021	5,105	3,063	2,042

Вычисленные значения радиуса оказались равными 49,96 – 50,01 и в среднем 49,99, что отличается от истинного значения на 0,01 условной единицы. Характер изменения коэффициента  $k_1$  представлен в табл. 16 и на графике (рис. 36).

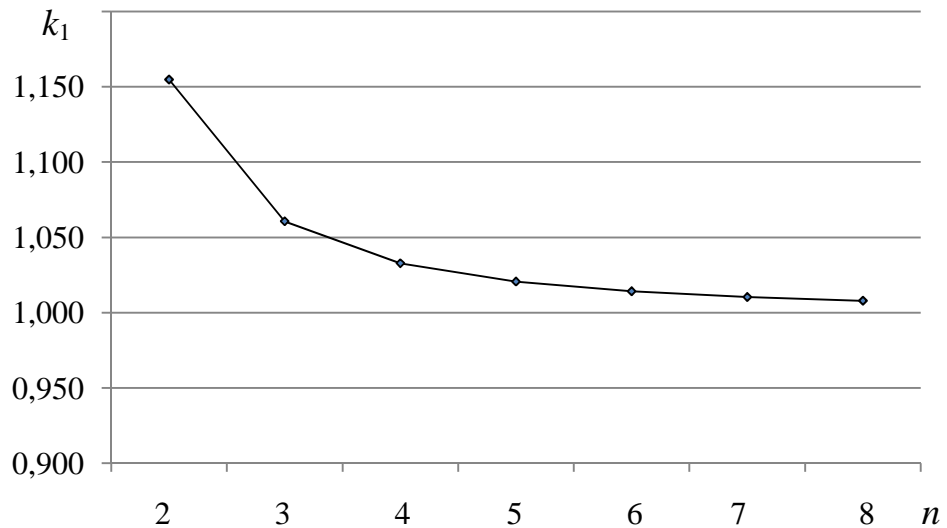


Рис. 36. График зависимости коэффициента  $k_1$  от различных значений  $n$

На основании этого графика можно констатировать, что начиная с  $n$  равного 5 и более значения  $k_1$  остаются практически неизменными. Из этого следует, что коэффициент  $k_1$  при соответствующих расстояниях  $d$  может не оказывать заметного влияния на точность определения радиуса.

Действительно, если на основании формулы (45) СКО  $m_R$  радиуса будет равна:

$$m_R = k_1 m_h, \quad (46)$$

то результаты вычислений по формуле (46), приведенные в табл. 16 и построенные по ним графики (рис. 37) наглядно иллюстрируют, что начиная с  $n$  равного 5 и более, значения  $m_R$  остаются практически неизменными.



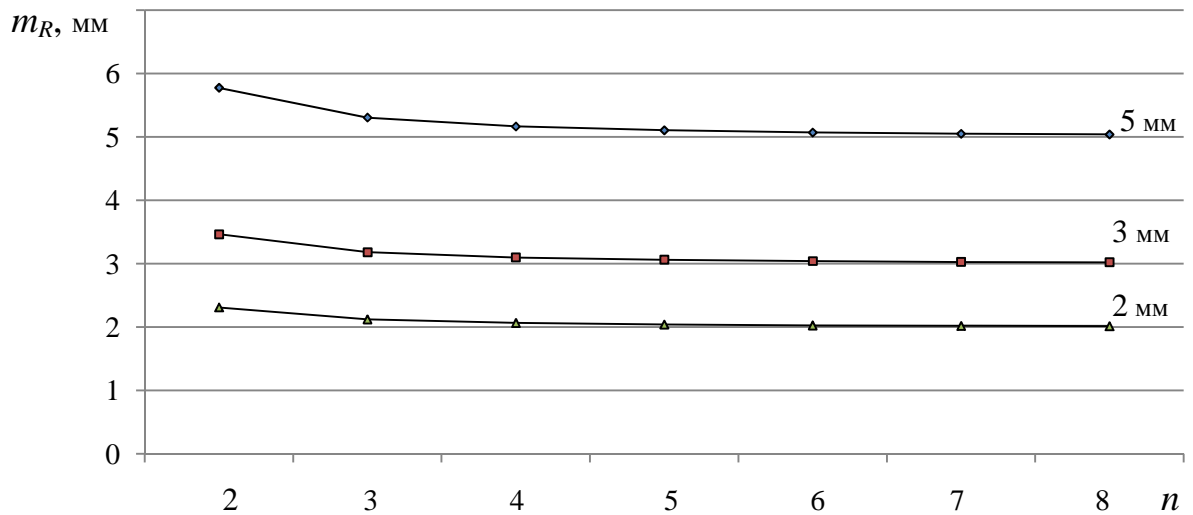


Рис. 37. Графики зависимости ошибки  $m_R$  от  $n$  для различных  $m_h = 5, 3$  и  $2$  мм

Представим формулу (33) в следующем виде:

$$p = c \frac{n-1}{n^2-1} = ck_2. \quad (47)$$

На рис. 38 показан график зависимости коэффициента  $k_2$  от  $n$ . На основании этого графика можно констатировать, что величина  $k_2$  находится в пределах от 0,3 до 0,1, поэтому коэффициент  $k_2$  подлежит при измерениях обязательному учёту.

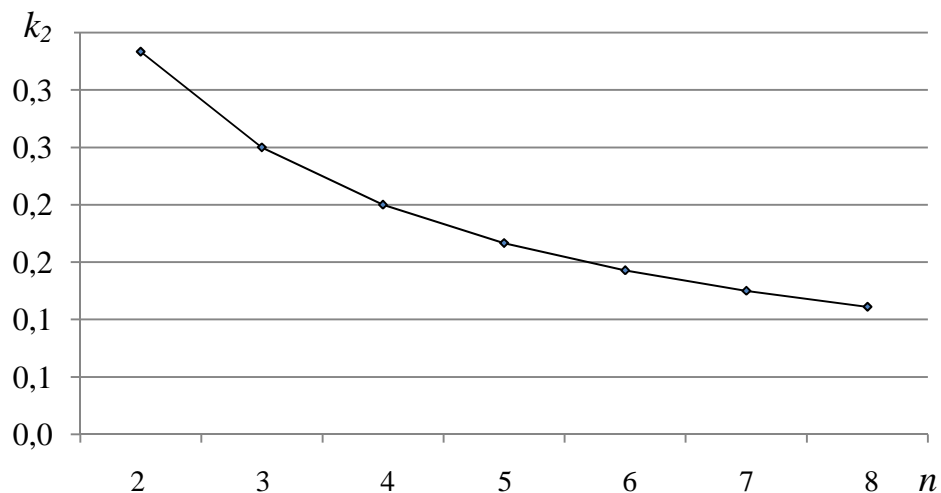


Рис. 38. График зависимости коэффициента  $k_2$  от  $n$

Что касается расстояния  $l$ , то ошибка его измерения в основном будет зависеть от точности определения положения точек касания 1 и 2 (рис. 33) на поперечном сечении сооружения. Поэтому, для обеспечения требуемой точ-

ности определения радиуса  $R$ , можно поступать следующим образом. Вначале «линейным» способом получить  $R$  и найти величину  $n = (d+R)/R$ , фигурирующую в формулах (45) и (47), а затем фотографическим способом определить  $h$  и вычислить  $R$ .

Среднюю квадратическую ошибку  $m_n$  в зависимости от ошибок  $m_d$  и  $m_R$  можно определить по формуле:

$$m_n^2 = \frac{1}{R^2} \left( m_d^2 + \frac{d^2}{R^2} m_R^2 \right). \quad (48)$$

Результаты вычислений по формуле (48) для радиуса  $R = 5$  м,  $m_d = 5$  мм и при различных значениях  $m_R$  приведены в табл. 17 и иллюстрируются графиками на рис. 39.

Т а б л и ц а 17

**Ошибки  $m_n$  в зависимости от ошибок  $m_d$  и  $m_R$**

$d, \text{ м}$	$R, \text{ м}$	$n$	$m_n$				
			$m_R=50\text{мм}$	$m_R=100\text{мм}$	$m_R=150\text{мм}$	$m_R=200\text{мм}$	$m_R=250\text{мм}$
5	5	2	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
10	5	3	0,002	0,004	0,006	0,008	0,010
15	5	4	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015
20	5	5	0,004	0,008	0,012	0,016	0,020
25	5	6	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025
30	5	7	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030
35	5	8	0,007	0,014	0,021	0,028	0,035

Данные табл. 17 свидетельствуют, что даже при больших значениях  $m_R$  ошибки  $m_n$  практически не окажут влияния на точность определения радиуса фотографическим способом.

Причём с помощью видоизменённой формулы (19):

$$m_R^2 = \frac{l^2}{d^2} m_l^2 + \left( \frac{d^2 + l^2}{2d^2} \right)^2 m_d^2, \quad (49)$$

задавая  $m_R$  и  $m_d$ , можно определить необходимую точность измерения расстояния  $l$ , а по графикам на рис. 39 по выбранному значению  $m_n$  определить оптимальное количество «отстояний»  $n$  для любого радиуса.

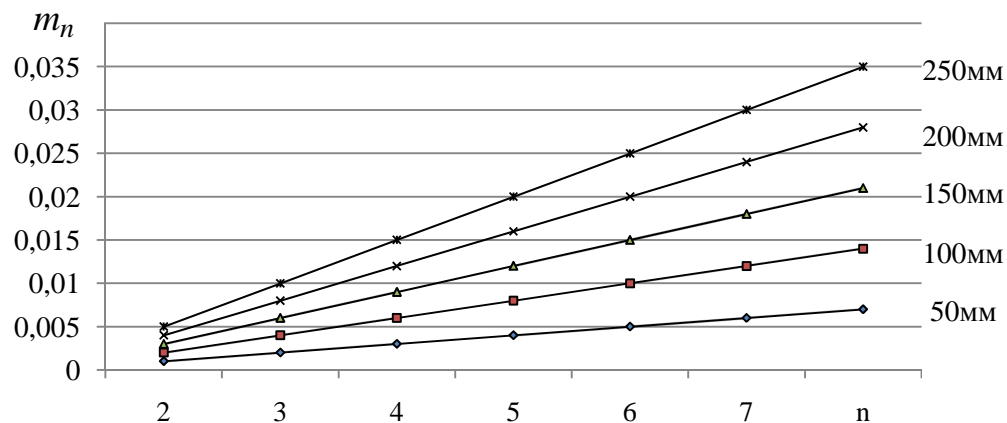


Рис. 39. Графики зависимости ошибки  $m_n$  от ошибок  $m_d = 5$  мм и  $m_R = 50, 100, 150, 200$  и  $250$  мм

В заключение отметим, что одним из путей дальнейшего развития фотографического способа может являться калибровка цифровой камеры с целью определения расстояния  $d$  непосредственно по количеству пикселей, соответствующих длине базиса, например, нивелирной рейки приложенной к исследуемому сооружению.

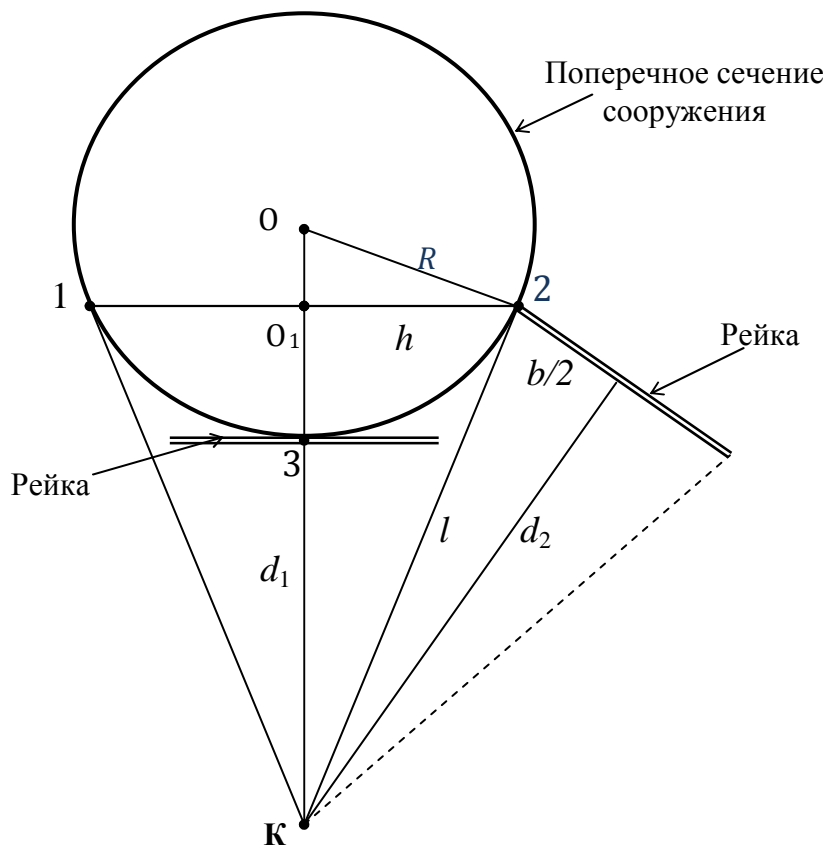


Рис. 40. Схема определения радиуса по двум расстояниям  $d_1$  и  $d_2$

Этот вариант поясняется рис. 40 и заключается в измерении двух расстояний  $d_1$  и  $d_2$  путём фотографирования базисов только из одной точки **К**.

Вначале фотографируют рейку, расположенную в точке 3. Затем устанавливают её в точке касания 1 или 2, располагая рейку горизонтально и перпендикулярно оптической оси фотокамеры. Этого можно достичь с помощью любого визирного приспособления, закреплённого в середине рейки и перпендикулярно ей.

Измеряют на снимках количество пикселей  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , приходящихся на длину рейки в первом и втором положении. По этим данным определяют два расстояния  $d_1$  и  $d_2$  и, вычислив  $l^2 = d_2^2 + b^2/4$ , находят радиус по формуле:

$$R = \frac{l^2 - d_1^2}{2d_1}. \quad (50)$$

Вообще говоря, расстояние  $l$  можно определить по фотографии рейки, расположенной вертикально в точке касания 2, для чего необходимо предварительно выполнить соответствующую калибровку фотокамеры [157]. Причём ошибка  $l$  в основном будет зависеть от точности определения положения точки касания 2, которое может быть определено с помощью действующего макета нашего устройства описанного выше.

Наконец, если по изложенной выше методике определить  $h$ , то в таком способе радиус может быть вычислен по формуле (43).

#### 1.3.4. Координатный способ определения положения центра и радиуса сечения

В работе [39] предлагается определять полярной засечкой координаты трёх точек на образующей сооружения с последующим довольно сложным переходом к координатам его центра и величине радиуса.

Упростить решение поставленной задачи можно, если с одной точки стояния электронного тахеометра безотражательного типа определить прямоугольные координаты любых трёх точек 1, 2, 3 наблюдаемого сечения. По координатам этих точек  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, y_3$  можно вычислить координаты  $x$  и  $y$  центра наблюдаемого сечения по приведенным в работах [136, 138] формулам, которые после соответствующих преобразований примут вид [150]:

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta, \quad (51)$$

где знаменатель  $\Delta$  равен:

$$\Delta = 4(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - 4(x_1 - x_3)(y_1 - y_2), \quad (52)$$

а числители  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  находят из выражений:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= [(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)](y_1 - y_3) - [(x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2)](y_1 - y_2), \\ \Delta_y &= [(x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2)](x_1 - x_2) - [(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)](x_1 - x_3)\end{aligned}\quad (53)$$

По координатам центра можно вычислить радиус  $R$  наблюдаемого сечения по формулам:

$$R = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} = \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2}, \quad (54)$$

получая по ним три одинаковых значения радиуса.

В общем виде математическая постановка задачи по определению координат центра и радиуса сечения сооружения может быть сформулирована следующим образом: на плоскости имеется некоторое количество точек, координаты которых известны. В идеале эти точки должны лежать на одной окружности, параметры которой требуется определить. Если количество точек равно 3, задача имеет единственное очевидное решение. Однако, если число точек больше, то в силу разных причин (неидеальность реальных объектов, погрешности измерений и т.п.) такой окружности может не существовать. Возникает задача подбора окружности оптимального радиуса  $R_{opt}$ , наименее отклоняющейся от заданных точек. Для этого следует задать функцию ошибок (например, сумму квадратов расстояний имеющихся точек от этой окружности), причём аргументами такой функции являются три параметра искомой окружности. Минимум этой неотрицательной функции (в идеале равный нулю) дает решение задачи.

В системе MatLab [38] поиск минимума может быть осуществлен, например, с помощью специальной функции *fminunc*, одним из входных параметров которой является идентификатор минимизируемой функции (в нашем случае – функции ошибок).

Для геометрической интерпретации получаемых результатов используется функция  $[x, y] = circle(X, Y, R, N, draw)$  для вычисления координат точек, лежащих на окружности и рисования замкнутого вписанного многоугольника. Здесь  $X, Y, R$  координаты центра отдельной окружности, а  $N$  – число точек на этой окружности, которое в рассматриваемой программе было принято равным 50 для трансформации многоугольника в окружность.

Следует сказать, что поставленная задача также может иметь одно очевидное решение даже при количестве точек больше 3 при условии, что эти точки лежат на одной окружности и их координаты определены безошибочно. Такой вывод был подтверждён соответствующими результатами моделирования. Для этого в ArchiCAD-11 в условной системе и условных единицах

были измерены координаты  $x$  и  $y$  пяти точек 1(11113, 12102), 2(6340, 6071), 3(-90, 4181), 4(-6712, 6197), 5(-11267, 12027), лежащих на одной окружности (графы 2, 3, 4, 5, 6, 7 табл. 18).

Т а б л и ц а 18

**Результаты моделирования по 5 точкам в ArchiCAD-11**

Точки	$x_i$			$y_i$			$X$	$Y$	$R$
	2	3	4	5	6	7			
1-2-3	11113	6340	-90	12102	6071	4181	-90,1	16064,0	11883,0
1-2-4	11113	6340	-6712	12102	6071	6197	-90,1	16064,1	11883,1
1-2-5	11113	6340	-11267	12102	6071	12027	-90,4	16064,3	11883,4
1-3-4	11113	-90	-6712	12102	4181	6197	-90,2	16064,2	11883,2
1-3-5	11113	-90	-11267	12102	4181	12027	-90,4	16064,5	11883,5
1-4-5	11113	-6712	-11267	12102	6197	12027	-90,4	16064,9	11883,6
2-3-4	6340	-90	-6712	6071	4181	6197	-90,1	16064,3	11883,3
2-3-5	6340	-90	-11267	6071	4181	12027	-90,3	16064,7	11883,7
2-4-5	6340	-6712	-11267	6071	6197	12027	-90,1	16065,1	11884,0
3-4-5	-90	-6712	-11267	4181	6197	12027	-89,8	16065,4	11884,4

Затем, по специально разработанной в системе MatLab программе, были подсчитаны координаты центров сечений и их радиусы (графы 8, 9, 10) для 10 различных сочетаний из пяти этих точек по три и построены окружности. Результаты моделирования показали, что для всех 10 сочетаний получены практически одни и те же значения координат центров и радиусов сечений, а все построенные окружности слились в одну, в том числе и окружность радиуса  $R_{opt}$  (рис. 41).

Однако в большинстве случаев, если реальные точки не слишком сильно отклоняются от одной (пока неизвестной) окружности, то её параметры можно с достаточной точностью найти, не прибегая к строгому способу в виде MatLab.

Проведённые численные эксперименты показывают [150], что хорошим приближением к идеалу дает метод "средних по тройкам". В этом случае перебирают все сочетания по 3 из имеющихся  $n$  точек. Для каждой  $i$ -той тройки вычисляют параметры окружности  $x_i$ ,  $y_i$  и  $R_i$ , проходящей через эти три точки, а затем находят средние значения  $X_{mean}$ ,  $Y_{mean}$ ,  $R_{mean}$  по формулам:

$$X_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad Y_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad R_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}. \quad (55)$$

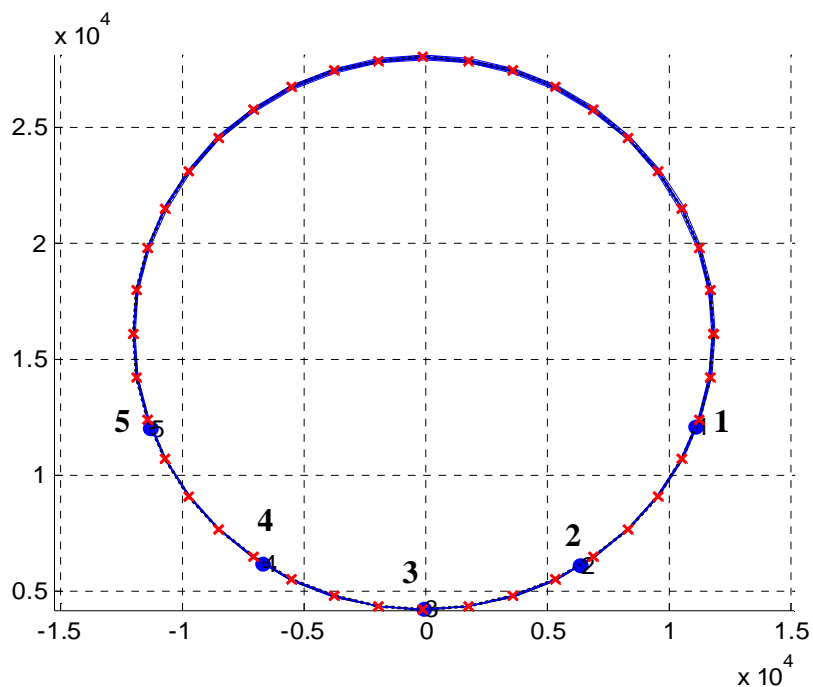


Рис. 41. Схема моделирования по пяти точкам на одной окружности

Ниже приводится пример такого рода с произвольно выбранными координатами  $x_i$  и  $y_i$  для 5 точек (графы 2, 3, 4, 5, 6, 7 табл. 19). По этим данным были подсчитаны координаты центров сечений и их радиусы с округлением результатов до одной цифры после запятой (графы 8, 9, 10) для 10 различных сочетаний из пяти этих точек по три и построены окружности, в том числе средняя и оптимальная (рис. 42).

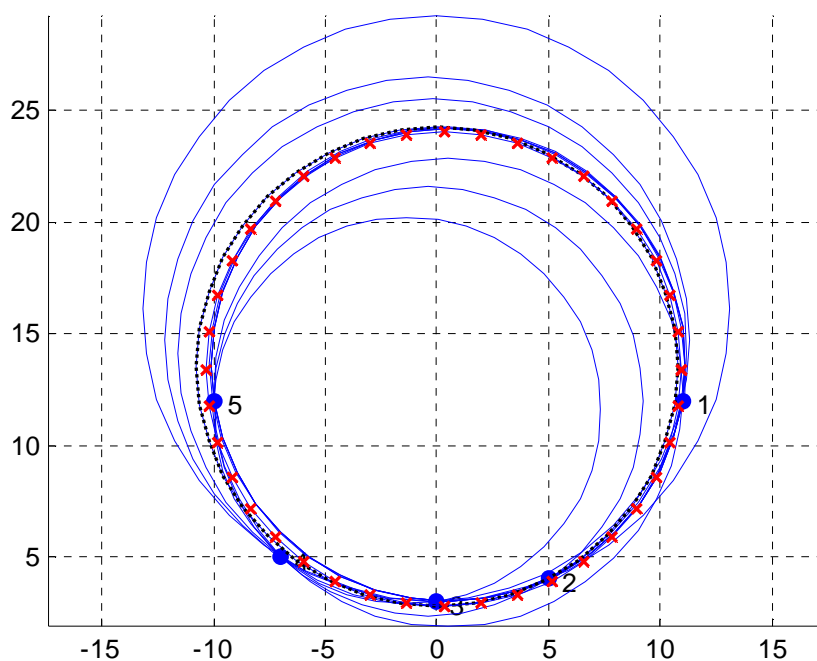


Рис. 42. Схема моделирования по пяти произвольным точкам

**Результаты моделирования по 5 произвольным точкам**

Точки	$x_i$			$y_i$			$x$	$y$	$R$
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-2-3	11	5	0	12	4	3	0,5	13,6	10,7
1-2-4	11	5	-7	12	4	5	-0,2	14,1	11,4
1-2-5	11	5	-10	12	4	12	0,5	13,6	10,6
1-3-4	11	0	-7	12	3	5	-0,4	14,7	11,8
1-3-5	11	0	-10	12	3	12	0,5	13,6	10,6
1-4-5	11	-7	-10	12	5	12	0,5	12,4	10,5
2-3-4	5	0	-7	4	3	5	0,0	16,1	13,1
2-3-5	5	0	-10	4	3	12	0,5	13,6	10,6
2-4-5	5	-7	-10	4	5	12	-0,4	12,0	9,6
3-4-5	0	-7	-10	3	5	12	-1,3	11,6	8,7

Полученная методом "средних по тройкам" окружность имеет параметры:  $X_{mean} = 0,0$ ,  $Y_{mean} = 13,5$ ,  $R_{mean} = 10,8$ , а параметры оптимальной окружности, полученной при помощи функции *fminunc*, составили:  $X_{opt} = 0,3$ ,  $Y_{opt} = 13,4$ ,  $R_{opt} = 10,7$ , то есть и те и другие оказались практически одинаковыми.

Аналогично проведенному эксперименту с пятью точками были выполнены соответствующие расчёты для четырёх произвольных точек 1, 2, 3, 4 (табл. 20) и построены окружности, в том числе средняя и оптимальная (рис. 43).

**Результаты моделирования по 4 произвольным точкам**

Точки	$x_i$			$y_i$			$x$	$y$	$R$
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-2-3	11	5	-7	12	4	5	-0,2	14,1	11,4
1-2-4	11	5	-10	12	4	12	0,5	13,6	10,6
1-3-4	11	-7	-10	12	5	12	0,5	12,4	10,5
2-3-4	5	-7	-10	4	5	12	-0,4	12,0	9,6

Параметры средней окружности оказались равными:  $X_{mean} = 0,1$ ,  $Y_{mean} = 13,0$ ,  $R_{mean} = 10,5$ , а параметры оптимальной окружности составили:  $X_{opt} = 0,3$ ,  $Y_{opt} = 13,2$ ,  $R_{opt} = 10,6$ , то есть и те и другие опять оказались практически одинаковыми.



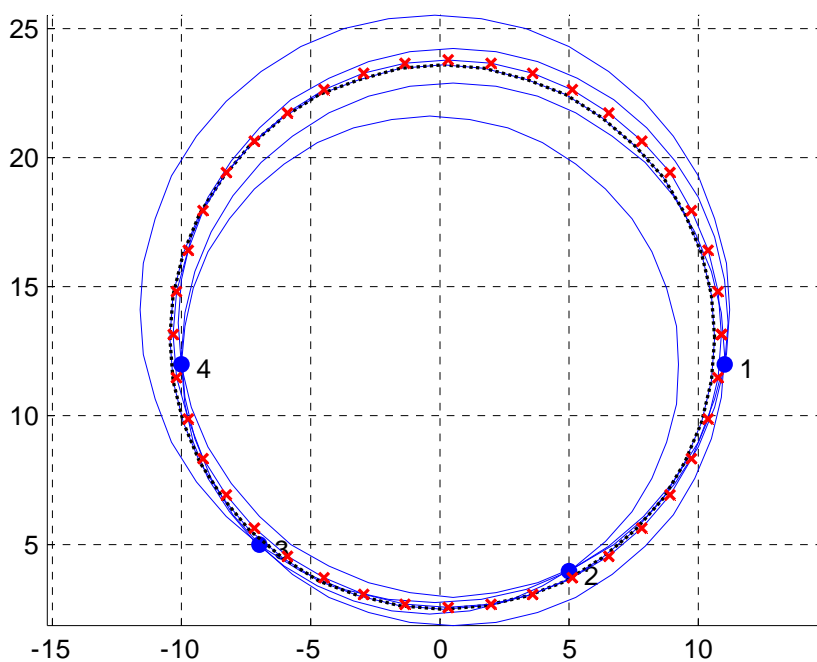


Рис. 43. Схема моделирования по четырём произвольным точкам

Предлагаемая методика была опробована при определении пространственного положения дымовой трубы высотой 30 м и радиусами: по верху 1,3 м, понизу 2,0 м [30]. Для этого с одной точки стояния Т электронного тахеометра *SET 530R/R3* были измерены в произвольной системе прямоугольных координат (одна из осей которой направлена параллельно Т-О) координаты  $x$  и  $y$  16 точек, расположенных на четырёх её сечениях (рис. 44, а). На двух нижних сечениях были взяты 5 точек, на двух верхних – 3 точки. Результаты измерений представлены в табл. 21 (графы 2, 3).

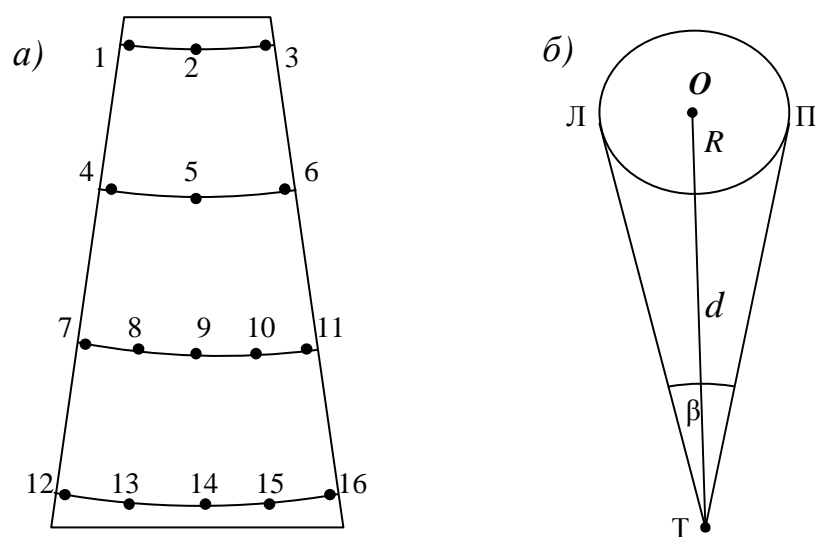


Рис. 44. Схемы координатных (а), угловых и линейных измерений (б) дымовой трубы  
Т а б л и ц а 21

### Результаты координатных измерений трубы

Точки	Координаты, м		Координаты центра сечения и радиус, м					
	$x$	$y$	$X_{opt}$	$X_{mean}$	$Y_{opt}$	$Y_{mean}$	$R_{opt}$	$R_{mean}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	98,738	127,535	100,024	100,024	127,750	127,750	1,304	1,304
2	100,290	126,474						
3	101,309	127,531						
4	98,511	127,697	100,033	100,033	127,761	127,761	1,523	1,523
5	100,122	126,241						
6	101,538	127,531						
7	98,257	127,592						
8	99,197	126,184	100,010	100,010	127,740	127,740	1,761	1,760
9	100,004	125,978						
10	101,129	126,389						
11	101,763	127,549						
12	98,011	127,466						
13	99,200	125,891	100,000	100,008	127,730	127,724	2,009	2,008
14	100,000	125,716						
15	101,127	126,060						
16	101,987	127,408						

По этим данным были подсчитаны координаты центров четырёх наблюдаемых сечений и их радиусы (графы 4, 5, 6, 7, 8, 9). Поскольку верхние два сечения содержат всего по 3 точки, то имеем для каждого сечения только одно решение и здесь должно иметь место безусловное равенство соответствующих  $X_{opt}$  и  $X_{mean}$ ,  $Y_{opt}$  и  $Y_{mean}$ ,  $R_{opt}$  и  $R_{mean}$ . Поэтому по формулам (51) – (54) получим по одному значению  $X$ ,  $Y$  и  $R$ .

Для двух нижних сечений с пятью точками каждое будем иметь по 10 различных сочетаний из пяти этих точек по три и, естественно, будем иметь для каждого сечения 10 решений.

Ниже приведен пример обработки в системе MatLab результатов измерений сечения 7...11. Для этого достаточно лишь ввести в программу измеренные координаты точек этого сечения.

```
X=[98.257 99.197 100.004 101.129 101.763]
X= 9.8257e+001 9.9197e+001 1.0000e+002 1.0113e+002
1.0176e+002
>> Y=[127.592 126.184 125.978 126.389 127.549]
Y= 1.2759e+002 1.2618e+002 1.2598e+002 1.2639e+002
1.2755e+002
>> CyclesDrawing(X,Y)
ijk = 1 ijk = 5
i = 1 i = 1
j = 3 j = 2
k = 5 k = 3
```

Xijk = 1.0003e+002	Xijk = 1.0001e+002
Yijk = 1.2776e+002	Yijk = 1.2774e+002
Rijk = 1.7789e+000	Rijk = 1.7612e+000
ijk = 2	ijk = 6
i = 1	i = 1
j = 2	j = 4
k = 4	k = 5
Xijk = 1.0001e+002	Xijk = 1.0001e+002
Yijk = 1.2774e+002	Yijk = 1.2775e+002
Rijk = 1.7579e+000	Rijk = 1.7626e+000
ijk = 3	ijk = 7
i = 1	i = 2
j = 2	j = 3
k = 5	k = 4
Xijk = 1.0001e+002	Xijk = 1.0001e+002
Yijk = 1.2775e+002	Yijk = 1.2770e+002
Rijk = 1.7619e+000	Rijk = 1.7199e+000
ijk = 4	ijk = 8
i = 1	i = 2
j = 3	j = 3
k = 4	k = 5
Xijk = 1.0000e+002	Xijk = 1.0002e+002
Yijk = 1.2773e+002	Yijk = 1.2773e+002
Rijk = 1.7504e+000	Rijk = 1.7511e+000
ijk = 9	ijk = 10
i = 2	i = 3
j = 4	j = 4
k = 5	k = 5
Xijk = 1.0001e+002	Xijk =
9.9989e+001	
Yijk = 1.2776e+002	Yijk =
1.2777e+002	
Rijk = 1.7680e+000	Rijk =
1.7877e+000	
Xmean = 1.0001e+002	
Ymean = 1.2774e+002	
Rmean = 1.7600e+000	
Warning: Gradient must be provided for trust-region method;	
using line-search method instead.	
> In fminunc at 241	
In CyclesDrawing at 26	

Line search cannot find an acceptable point along the  
current  
search direction.  
 $X_{opt} = 1.0001e+002$   
 $Y_{opt} = 1.2774e+002$   
 $R_{opt} = 1.7610e+000$

По полученным данным построены окружности, в том числе средняя и оптимальная, которые практически равны между собой (рис. 45, табл. 21).

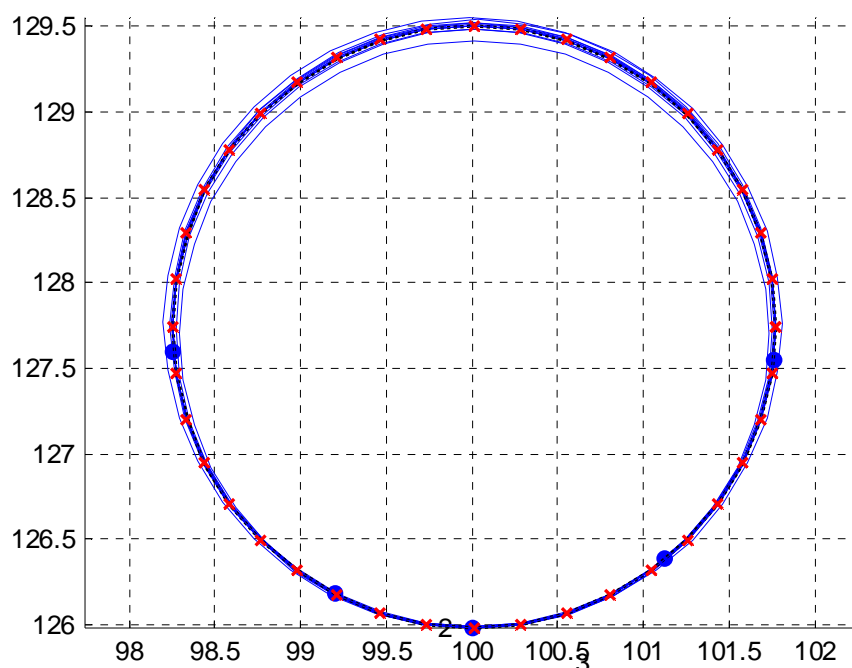


Рис. 45. Схема расположения окружностей по сечению трубы 7...11

Результаты обработки в системе MatLab координатных измерений сечения 12...16 представлены в табл. 21 и на рис. 46. Они, как и в предыдущем случае, демонстрируют равенство средней и оптимальной окружностей и хорошую сходимость десяти окружностей, соответствующих 10 сочетаниям из пяти этих точек по три.

Одновременно с определением координат измеряли направления на левый Л и правый П края каждого сечения, вычисляли угол  $\beta$ , а с помощью клавиши *SDh* определяли по биссектрисе этого угла горизонтальные проложения  $d$  до каждого сечения (рис. 44, б). Измерения производились при двух положениях вертикального круга тахеометра. По значениям  $d_i$  и  $\beta_i$  находили по формуле (20) радиусы трубы каждого наблюдаемого сечения.

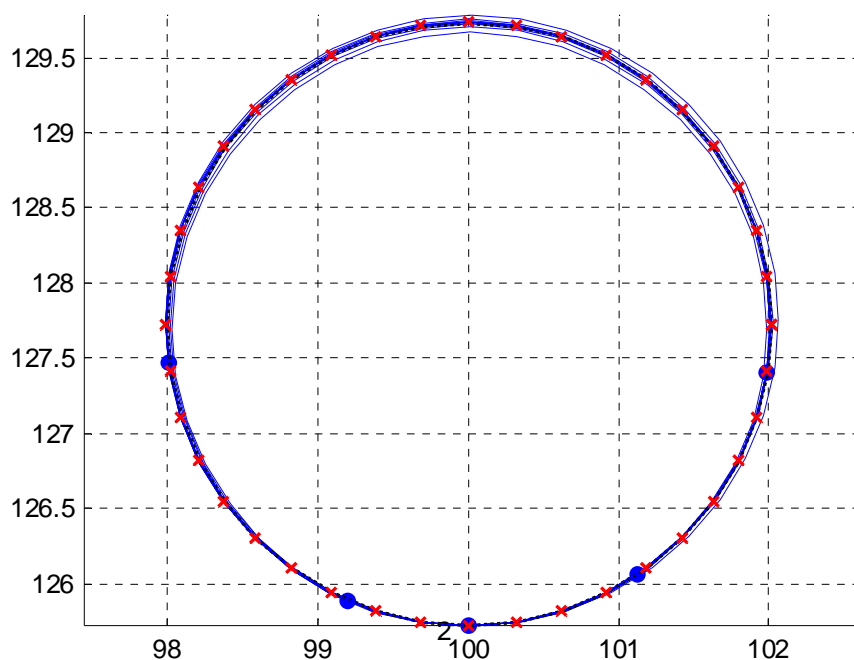


Рис. 46. Схема расположения окружностей по сечению трубы 12...16

Результаты измерений и вычислений представлены в табл. 22. Они показывают хорошую сходимость радиусов, полученных координатным и линейно-угловым способами. Наконец рулеткой была измерена длина окружности по сечению 12...16, которая составила 12,630 м. Это соответствует радиусу 2,011 м, в то время как тот же радиус из табл. 21 составил 2,009 м, а из табл. 22 – 2,007 м.

Т а б л и ц а 22

### Результаты линейно-угловых измерений трубы

Сечение	$\beta/2$	$d$ , м	$R$ , м
1	2	3	4
1...3	2°43'18"	26,022	1,297
4...6	3°11'35"	25,825	1,523
7...11	3°42'23"	25,560	1,767
12...16	4°12'58"	25,296	2,007

В работе [139] показано, что точность вычисленных координат  $X$  и  $Y$  центра и радиуса  $R$  сечения зависит от точности определения координат левой  $L$  ( $x_L, y_L$ ), средней  $C$  ( $x_C, y_C$ ) и правой  $P$  ( $x_P, y_P$ ) точек каждого сочетания по 3 (рис. 47). Отмечено также, что эта точность зависит от соотношения  $(y_C - y_L)/(x_L - x_C)$  и от расстояния  $LP = (y_P - y_L)$ . Наиболее оптимальным является соотношение, близкое к единице и расстояние, близкое к  $2R$ .

С целью определения степени влияния различных сочетаний точек отдельного сечения на точность определения его параметров  $X$ ,  $Y$  и  $R$  было выполнено соответствующее моделирование [83].

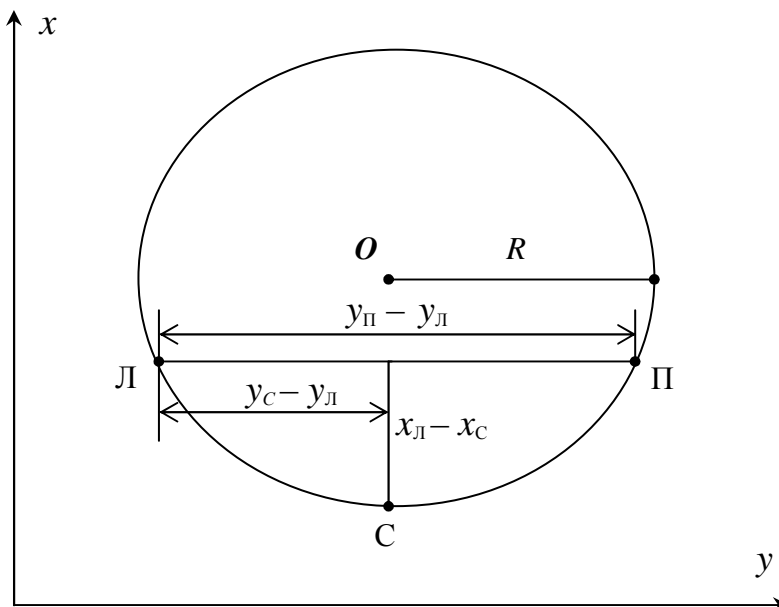


Рис. 47. Частный случай координатного способа

Для этого были использованы определённые ранее (табл. 18) в условных единицах координаты центров модели и их радиусы (графы 3, 4, 5 табл. 23) для 10 различных сочетаний из 5 этих точек по 3.

Таблица 23

### Результаты моделирования координатного способа

Сечение	Сочетание	Координаты, радиусы и отклонения от средних					
		$X$	$Y$	$R$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta R$
1	2	3	4	5	6	7	8
1-2-3-4-5 (модель, размеры в условных единицах)	(1)1-2-3	-90,1	16064,0	11883,0	-0,1	-0,6	-0,5
	(2)1-2-4	-90,1	16064,1	11883,1	-0,1	-0,5	-0,4
	(3)1-2-5	-90,4	16064,3	11883,4	0,2	-0,3	-0,1
	(4)1-3-4	-90,2	16064,2	11883,2	0,0	-0,4	-0,3
	(5)1-3-5	-90,4	16064,5	11883,5	0,2	-0,1	0,0
	(6)1-4-5	-90,4	16064,9	11883,6	0,2	0,3	0,1
	(7)2-3-4	-90,1	16064,3	11883,3	-0,1	-0,3	-0,2
	(8)2-3-5	-90,3	16064,7	11883,7	0,1	0,1	0,2
	(9)2-4-5	-90,1	16065,1	11884,0	-0,1	0,5	0,5
	(10)3-4-5	-89,8	16065,4	11884,4	-0,4	0,8	0,9
$X_{opt}, Y_{opt}, R_{opt}$		<b>-90,2</b>	<b>16064,6</b>	<b>11883,5</b>			
Средние ( <i>mean</i> )		<b>-90,2</b>	<b>16064,6</b>	<b>11883,5</b>			

Результаты подсчёта отклонений  $\Delta X = X_i - X_{opt}$ ,  $\Delta Y = Y_i - Y_{opt}$  и  $\Delta R = R_i - R_{opt}$  показали, что для всех 10 сочетаний получены практически одни и те же значения координат центров и радиусов сечений, а все построенные окружности слились в одну, в том числе и окружности радиуса  $R_{opt}$  и  $R_{mean}$ . Однако даже при таких незначительных отклонениях  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta R$  (графы 6, 7, 8 табл. 23) можно заметить, что наибольшие отклонения имеют место для сочетаний (1) и (10), что также наглядно иллюстрируется графиками на рис. 48.

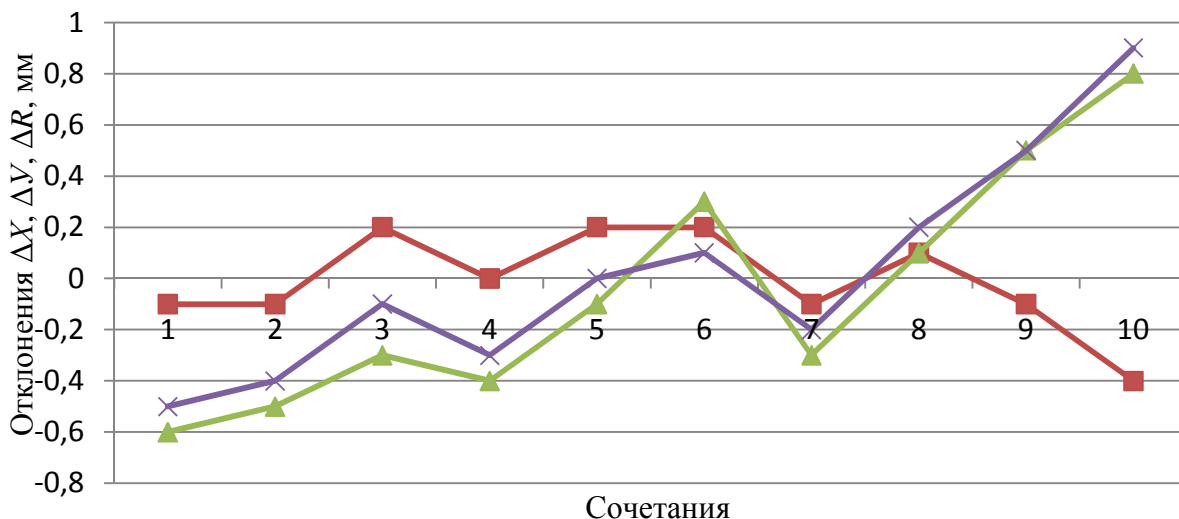


Рис. 48. Графики зависимости  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta R$  от сочетания точек 1-2-3-4-5

Предложенная методика была опробована на дымовой трубе высотой 30 м и радиусами: поверху 1,3 м, понизу 2,0 м (рис. 49).



Рис. 49. Схема расположения наблюдаемых точек на дымовой трубе

Для этого электронным тахеометром *SET 530R/R3* были измерены в произвольной системе координаты 10 точек, расположенных на двух её сечениях по 5 точек на каждом сечении (рис. 49). Результаты измерений представлены в табл. 24 (графы 3 и 4). Как и в предыдущем случае, для этих сечений будем иметь по 10 различных сочетаний (графа 2) из пяти по три. Для каждого сочетания были найдены соотношения  $(y_C - y_L)/(x_L - x_C)$  и расстояния  $(y_{II} - y_L)$  (графы 7 и 8).

Т а б л и ц а 24

### Результаты координатных измерений трубы

Сечение	Сочетание	Координаты, м		$(y_C - y_L)$	$(x_L - x_C)$	5/6	$(y_{II} - y_L)$
		y	x				
1	2	3	4	5	6	7	8
1-2-3-4-5 (труба)	(1)1-2-3	98,011 99,200 100,000	127,466 125,891 125,716	1,189	1,575	0,755	1,989
	(2)1-2-4	98,011 99,200 101,127	127,466 125,891 126,060	1,189	1,575	0,755	3,116
	(3)1-2-5	98,011 99,200 101,987	127,466 125,891 127,408	1,189	1,575	0,755	3,976
	(4)1-3-4	98,011 100,000 101,127	127,466 125,716 126,060	1,989	1,750	1,137	3,116
	(5)1-3-5	98,011 100,000 101,987	127,466 125,716 127,408	1,989	1,750	1,137	3,976
	(6)1-4-5	98,011 101,127 101,987	127,466 126,060 127,408	3,116	1,406	2,216	3,976
	(7)2-3-4	99,200 100,000 101,127	125,891 125,716 126,060	0,800	0,175	4,571	1,927
	(8)2-3-5	99,200 100,000 101,987	125,891 125,716 127,408	0,800	0,175	4,571	2,787
	(9)2-4-5	99,200 101,127 101,987	125,891 126,060 127,408	1,927	-0,169	-11,402	2,787
	(10)3-4-5	100,000 101,127 101,987	125,716 126,060 127,408	1,127	-0,344	-3,276	1,987
	(1) 6-7-8	98,257 99,197	127,592 126,184	0,940	1,408	0,668	1,747



6-7-8-9-10 (труба)		100,004	125,978				
	(2) 6-7-9	98,257 99,197 101,129	127,592 126,184 126,389	0,940	1,408	0,668	2,872
	(3) 6-7-10	98,257 99,197 101,763	127,592 126,184 127,549	0,940	1,408	0,668	3,506
	(4) 6-8-9	98,257 100,004 101,129	127,592 125,978 126,389	1,747	1,614	1,082	2,872
	(5) 6-8-10	98,257 100,004 101,763	127,592 125,978 127,549	1,747	1,614	1,082	3,506
	(6) 6-9-10	98,257 101,129 101,763	127,592 126,389 127,549	2,872	1,203	2,387	3,506
	(7) 7-8-9	99,197 100,004 101,129	126,184 125,978 126,389	0,807	0,206	3,917	1,932
	(8) 7-8-10	99,197 100,004 101,763	126,184 125,978 127,549	0,807	0,206	3,917	2,566
	(9) 7-9-10	99,197 101,129 101,763	126,184 126,389 127,549	1,932	-0,205	-9,424	2,566
	(10) 8-9-10	100,004 101,129 101,763	125,978 126,389 127,549	1,125	-0,411	-2,737	1,759

На основании данных табл. 24 можно отметить, что наиболее оптимальными следует считать сочетания (2), (3), (4) и (5) для обоих сечений.

Рассмотрим, как координаты центра сечения и его радиус, полученные из каждого сочетания, согласуются со средними их значениями. Для этого в программу MatLab были введены измеренные координаты точек сечений 1-2-3-4-5 и 6-7-8-9-10 трубы (табл. 25).

Компьютер выдаёт на экран монитора десять сочетаний из пяти точек по три (графа 2) и для каждого сочетания получаем значения координат  $X$  и  $Y$  центра и радиуса  $R$  (графы 3, 4, 5), а также  $X_{mean}$ ,  $Y_{mean}$ ,  $R_{mean}$  и  $X_{opt}$ ,  $Y_{opt}$ ,  $R_{opt}$ , которые оказались практически одинаковыми со средними значениями.

Результаты подсчёта отклонений  $\Delta X = X_i - X_{mean}$ ,  $\Delta Y = Y_i - Y_{mean}$  и  $\Delta R = R_i - R_{mean}$  (графы 6, 7, 8) показали, что отклонения  $\Delta X$  находятся в пределах от -0,006 до +0,016,  $\Delta Y$  от -0,033 до +0,027,  $\Delta R$  от -0,031 до +0,028

для сечения 1-2-3-4-5 и  $\Delta X$  от -0,021 до +0,018,  $\Delta Y$  от -0,044 до +0,024,  $\Delta R$  от -0,040 до +0,028 для сечения 6-7-8-9-10.

Для получения наглядного представления о влиянии сочетания точек наблюдения на значения  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta R$  построены соответствующие графики для двух сечений 1-2-3-4-5 и 6-7-8-9-10 (рис. 50, 51).

Т а б л и ц а 25

### Результаты моделирования по пяти измеренным точкам

Сечение	Сочетание	Координаты, радиусы и отклонения от средних, м					
		Y	X	R	$\Delta Y$	$\Delta X$	$\Delta R$
1	2	3	4	5	6	7	8
1-2-3-4-5 (труба)	(1)1-2-3	100,025	127,751	2,035	0,016	0,027	0,028
	(2)1-2-4	100,008	127,738	2,016	-0,001	0,014	0,009
	(3)1-2-5	100,003	127,734	2,010	-0,006	0,010	0,003
	(4)1-3-4	100,003	127,725	2,009	-0,006	0,001	0,002
	(5)1-3-5	100,003	127,725	2,009	-0,006	0,001	0,002
	(6)1-4-5	100,003	127,725	2,009	-0,006	0,001	0,002
	(7)2-3-4	100,013	127,691	1,976	0,004	-0,033	-0,031
	(8)2-3-5	100,017	127,709	1,993	0,008	-0,015	-0,014
	(9)2-4-5	100,010	127,721	2,001	0,001	-0,003	-0,006
	(10)3-4-5	100,003	127,726	2,010	-0,006	0,002	0,003
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,009</b>	<b>127,724</b>	<b>2,007</b>			
6-7-8-9-10 (труба)	(1) 6-7-8	100,028	127,757	1,779	0,018	0,015	0,019
	(2) 6-7-9	100,008	127,744	1,758	-0,002	0,002	-0,002
	(3) 6-7-10	100,012	127,746	1,762	0,002	0,004	0,002
	(4) 6-8-9	100,002	127,728	1,750	-0,008	-0,014	-0,010
	(5) 6-8-10	100,012	127,739	1,761	0,002	-0,003	0,001
	(6) 6-9-10	100,012	127,753	1,763	0,002	0,011	0,003
	(7) 7-8-9	100,013	127,698	1,720	0,003	-0,044	-0,040
	(8) 7-8-10	100,021	127,729	1,751	0,011	-0,013	-0,009
	(9) 7-9-10	100,007	127,756	1,768	-0,003	0,014	0,008
	(10) 8-9-10	99,989	127,766	1,788	-0,021	0,024	0,028
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,010</b>	<b>127,742</b>	<b>1,760</b>			

Анализ этих графиков позволяет сделать некоторые выводы. Во-первых, наибольшие отклонения имеют место для сочетаний (1) и (10). Наименьшие отклонения соответствуют, за некоторыми исключениями, сочетаниям (2), (3), (4), (5), (6). Как и следовало ожидать, наилучшим оказалось сочетание 5 (1-3-5 и 6-8-10) обоих сечений 1-2-3-4-5 и 6-7-8-9-10. И, наконец, «всплески» отклонений для сочетания 7 (2-3-4 и 7-8-9) можно объяснить тем, что дуги 2-3-4 и 7-8-9, как и дуги сочетаний (1) и (10), составляют малую часть видимого сечения трубы. Следует сказать, что эти выводы практически идентичны таковым, полученным на основании данных табл. 24.

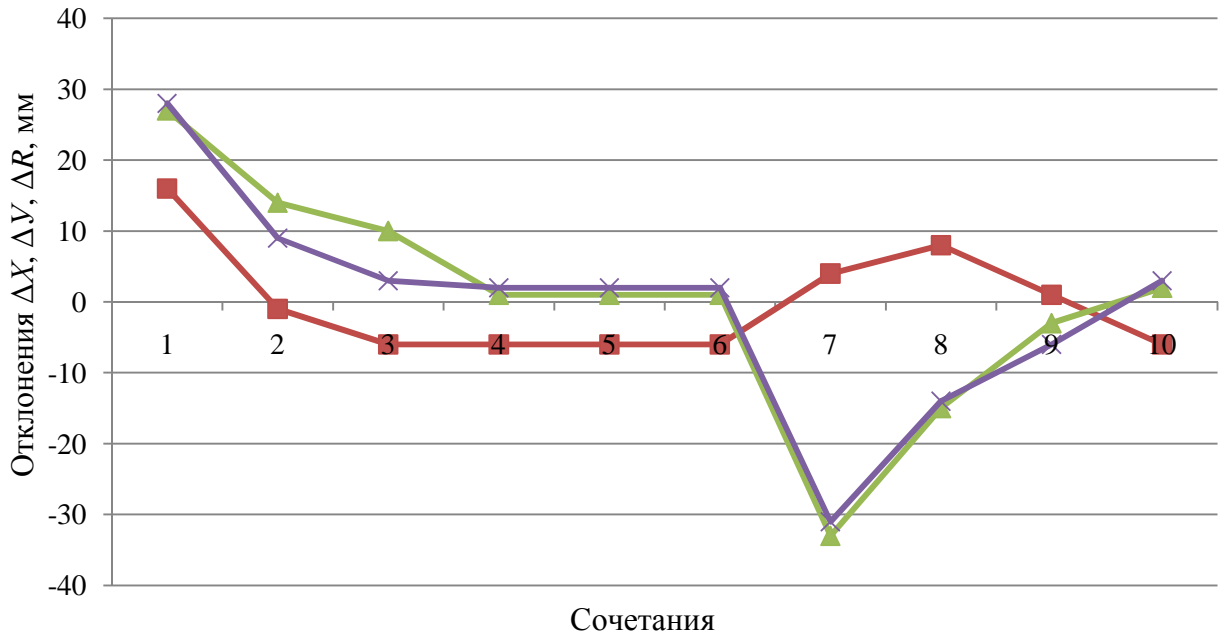


Рис. 50. Графики зависимости  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta R$  от сочетания точек для сечения трубы 1-2-3-4-5

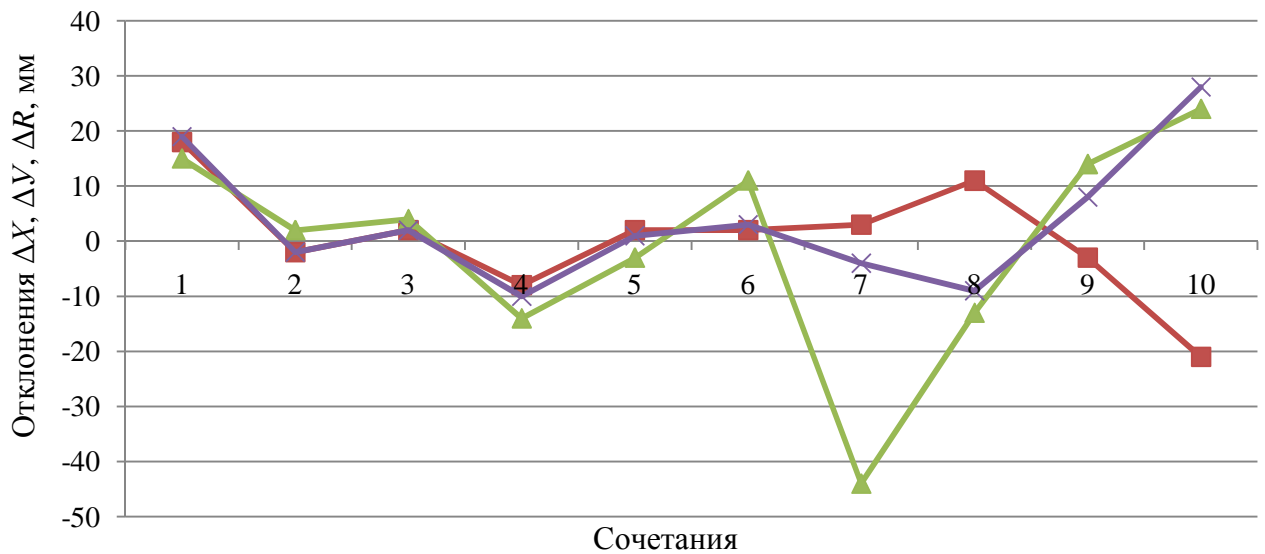


Рис. 51. Графики зависимости  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta R$  от сочетания точек для сечения трубы 6-7-8-9-10

В табл. 26 приведены результаты моделирования по четырём измеренным точкам трубы и вычислены  $U_{mean}$ ,  $X_{mean}$ ,  $R_{mean}$ , которые практически не отличаются от таковых, вычисленных по пяти измеренным точкам (указанных в знаменателе соответствующих граф табл. 25).

**Результаты моделирования по четырём измеренным точкам**

Сечение	Сочетание	Координаты, радиусы и отклонения от средних, м					
		Y	X	R	$\Delta Y$	$\Delta X$	$\Delta R$
1	2	3	4	5	6	7	8
1-2-3-4	(1)1-2-3	100,025	127,751	2,035	0,015	0,016	0,018
	(2)1-2-4	100,008	127,738	2,016	-0,002	0,003	-0,001
	(4)1-3-4	100,003	127,725	2,009	-0,007	-0,010	-0,008
	(7)2-3-4	100,003	127,725	2,009	-0,007	-0,010	-0,008
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,010</b>	<b>127,735</b>	<b>2,017</b>			
1-2-3-5	(1)1-2-3	100,025	127,751	2,035	0,013	0,021	0,023
	(3)1-2-5	100,003	127,734	2,010	-0,009	0,004	-0,002
	(5)1-3-5	100,003	127,725	2,009	-0,009	-0,005	-0,003
	(8)2-3-5	100,017	127,709	1,993	0,005	-0,021	-0,019
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,012</b>	<b>127,730</b>	<b>2,012</b>			
1-2-4-5	(2)1-2-4	100,008	127,738	2,016	0,002	0,008	0,007
	(3)1-2-5	100,003	127,734	2,010	-0,003	0,004	0,001
	(6)1-4-5	100,003	127,725	2,009	-0,003	-0,005	0,000
	(9)2-4-5	100,010	127,721	2,001	0,004	-0,009	-0,008
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,006</b>	<b>127,730</b>	<b>2,009</b>			
2-3-4-5	(7)2-3-4	100,013	127,691	1,976	0,002	-0,021	-0,019
	(8)2-3-5	100,017	127,709	1,993	0,006	-0,003	-0,002
	(9)2-4-5	100,010	127,721	2,001	-0,001	0,009	0,006
	(10)3-4-5	100,003	127,726	2,010	-0,008	0,014	0,015
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,011</b>	<b>127,712</b>	<b>1,995</b>			
<i>Ymean, Xmean, Rmean</i>		<b>100,010</b>	<b>127,727</b>	<b>2,008</b>			
		<b>100,009</b>	<b>127,724</b>	<b>2,007</b>			
6-7-8-9	(1) 6-7-8	100,028	127,757	1,779	0,015	0,025	0,027
	(2) 6-7-9	100,008	127,744	1,758	-0,005	0,012	0,006
	(4) 6-8-9	100,002	127,728	1,750	-0,011	-0,004	-0,002
	(7) 7-8-9	100,013	127,698	1,720	0,000	-0,034	-0,032
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,013</b>	<b>127,732</b>	<b>1,752</b>			
6-7-8-10	(1) 6-7-8	100,028	127,757	1,779	0,010	0,014	0,016
	(3) 6-7-10	100,012	127,746	1,762	-0,006	0,003	-0,001
	(5) 6-8-10	100,012	127,739	1,761	-0,006	-0,004	-0,002
	(8) 7-8-10	100,021	127,729	1,751	0,003	-0,014	-0,012
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,018</b>	<b>127,743</b>	<b>1,763</b>			
6-7-9-10	(2) 6-7-9	100,008	127,744	1,758	-0,002	-0,006	-0,005
	(3) 6-7-10	100,012	127,746	1,762	0,002	-0,004	-0,001
	(6) 6-9-10	100,012	127,753	1,763	0,002	0,003	0,000
	(9) 7-9-10	100,007	127,756	1,768	-0,003	0,006	0,005
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,010</b>	<b>127,750</b>	<b>1,763</b>			
7-8-9-10	(7) 7-8-9	100,013	127,698	1,720	0,005	-0,039	-0,037
	(8) 7-8-10	100,021	127,729	1,751	0,013	-0,008	-0,006

	(9) 7-9-10	100,007	127,756	1,768	-0,001	0,019	0,011
	(10) 8-9-10	99,989	127,766	1,788	-0,019	0,029	0,031
Средние ( <i>mean</i> )		<b>100,008</b>	<b>127,737</b>	<b>1,757</b>			
<i>Ymean, Xmean, Rmean</i>		<b>100,012</b>	<b>127,740</b>	<b>1,759</b>			
		<b>100,010</b>	<b>127,742</b>	<b>1,760</b>			

На рис. 52 и рис. 53 представлены графики зависимости  $\Delta Y$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta R$  от сочетания точек для четырёхточечных сечений трубы.

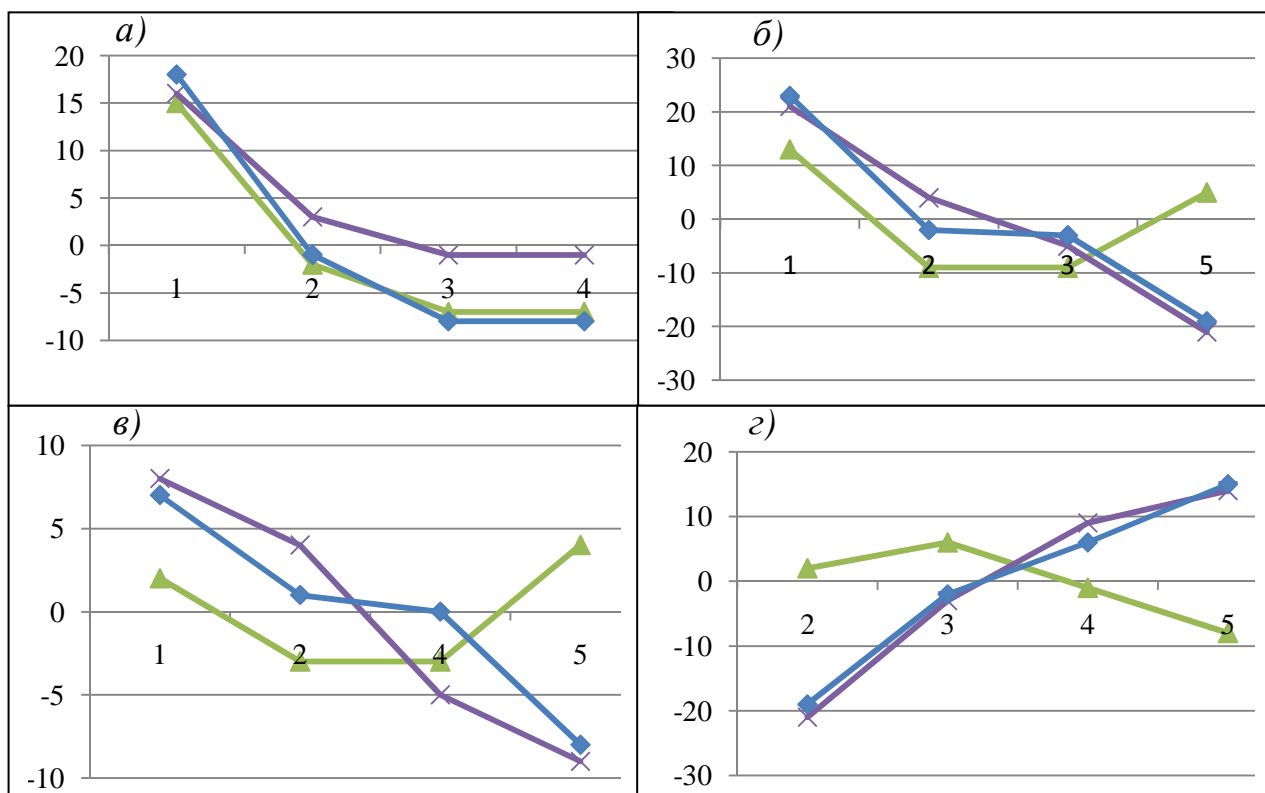


Рис. 52. Графики зависимости  $\Delta Y$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta R$  от сочетания точек для сечений трубы 1-2-3-4 (а), 1-2-3-5 (б), 1-2-4-5 (в) и 2-3-4-5 (г)

На основании данных табл. 26 и графиков на рис. 52 можно констатировать, что наиболее оптимальными являются сочетания (2), (3), (4), (5) и (6). Аналогично, на основании данных табл. 26 и графиков на рис. 53 можно констатировать, что наиболее оптимальными являются те же сочетания (2), (3), (4), (5) и (6).

В заключение отметим, что радиус нижнего сечения 1-2-3-4-5 был определён путём непосредственного измерения его периметра  $2\pi R$  и составил 2,011 м. Радиусы  $R_{mean}$ , определённые по пяти и четырём точкам, составили 2,008 м и 2,007 м, то есть отличаются от измеренного всего на 3-4 мм.

Вообще говоря, схему координатного способа определения центра  $O$  сечения можно рассматривать как многократную азимутальную или линей-

ную засечку с точек 1, 2, 3, ... с известными координатами  $x_{1,2,3...}$ ,  $y_{1,2,3...}$ , дирекционными углами  $\alpha_{1,2,3...}$  и расстояниями  $R_{1,2,3...}$ .

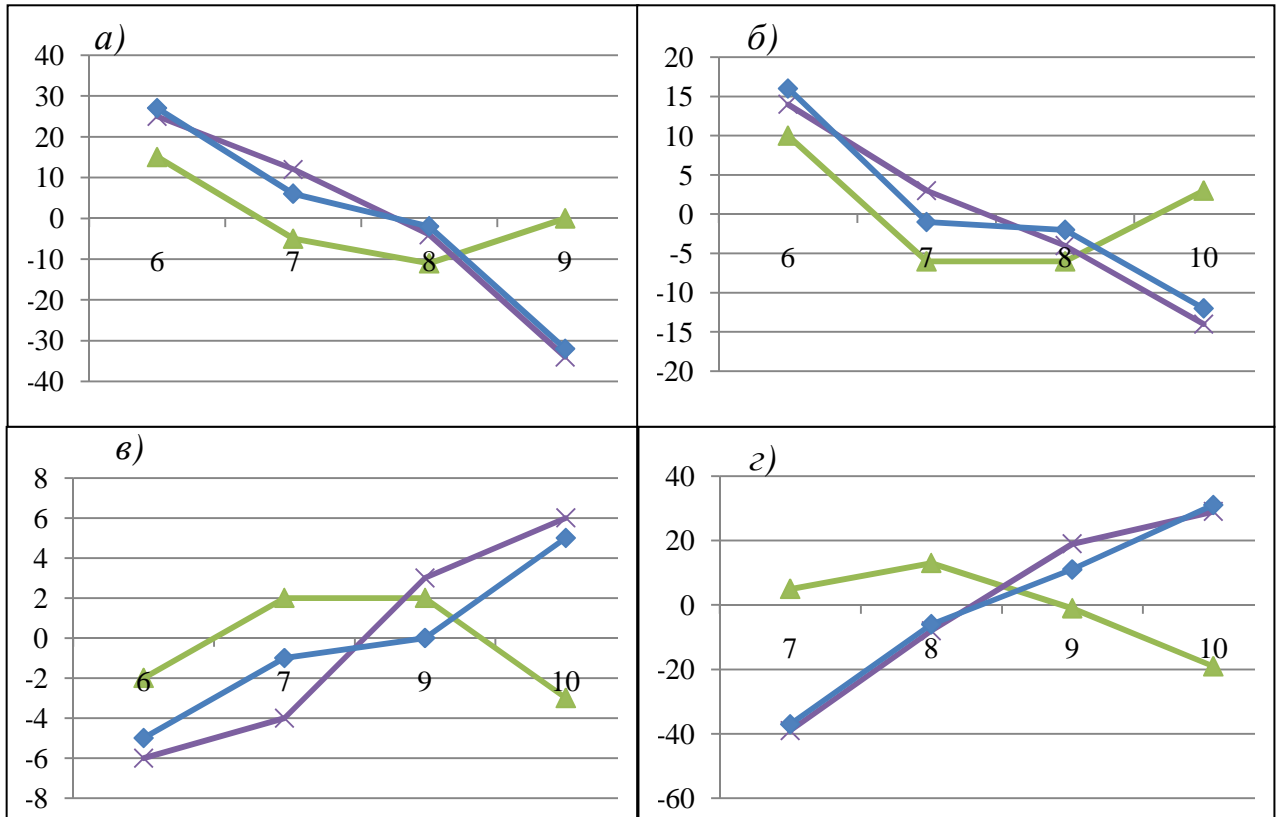


Рис. 53. Графики зависимости  $\Delta Y$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta R$  от сочетания точек для сечений трубы 6-7-8-9 (а), 6-7-8-10 (б), 6-7-9-10 (в) и 7-8-9-10 (г)

В случае линейной засечки следует, после измерения прямоугольных координат  $x_{1,2,3...}$ ,  $y_{1,2,3...}$  точек наблюдаемого сечения и вычисления вероятнейшего значения радиуса  $R$ , найти также  $n$  значений радиусов  $R_i$ . Здесь  $n$  представляет собой число сочетаний по три из количества точек, координаты которых измерены. Так при трёх точках  $n = 1$ , при четырёх точках  $n = 4$ , при пяти –  $n = 10$  и т. д.

Затем, по принципу обработки ряда равноточных измерений, вычисляют вероятнейшие ошибки  $\Delta = R_i - R$  и по известной формуле Бесселя находят СКО  $m_R$ .

. Одной из основных отличительных особенностей рассмотренного способа является возможность определения координат любого количества точек почти половины периметра наблюдаемого сечения с последующим выбором наиболее оптимальных сочетаний по три точки из всех. Причем такие измерения можно выполнять для сечений, расположенных на разной высоте сооружения. Этот способ не требует обязательной видимости левой и правой

образующих такого сооружения. Для реализации способа достаточно наблюдать часть тела сооружения

Проведенные исследования показали, что рассмотренный координатный способ может с успехом применяться для определения положения и радиусов сечений любых сооружений круглой формы. Он отличается высокой производительностью и имеет соответствующее программное обеспечение, позволяющее получать по координатам  $n$  точек наблюдаемых сечений искомые результаты не только в аналитической, но и в графической форме. Последнее позволяет путём совмещения оптимальных окружностей нижнего, промежуточных и верхнего наблюдаемых сечений получить наглядное представление о пространственном положении исследуемого сооружения. По координатам центров наблюдаемых сечений можно определить частные и общий крен сооружения всего с одной точки стояния тахеометра.

#### 1.4. Угловые способы определения крена

К угловым относятся способы: горизонтальных углов, малых углов, направлений. Их сущность заключается в определении разности направлений на центры верхнего, промежуточных и центр нижнего сечения сооружения. Эти разности будут соответствовать частным и общему крену сооружения в угловой мере, которые затем переводят в линейную систему единиц.

Угловые способы просты в исполнении и удобны для систематических наблюдений за креном сооружений круглой, треугольной, четырёхугольной формы, а также для контроля прямолинейности их поясов и геометрии их решетки [18, 20], но требуют производства наблюдений как минимум в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Следует сказать, что любые угловые измерения рекомендуется выполнять при 100% – ной облачности и при скорости ветра менее 3 м/с на высоте 10 м.

##### 1.4.1. Способ горизонтальных углов

Этот способ предусматривает наблюдения верхней точки В сооружения с двух закрепленных на местности опорных точек **1** и **2** в двух взаимно перпендикулярных ( $\gamma = 90^\circ$ ) направлениях (рис. 54).

В первом цикле измеряют горизонтальные углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  на точку В. Во втором цикле вновь измеряют горизонтальные углы  $\beta'_1$  и  $\beta'_2$ , находят разности  $\Delta\beta_1 = \beta'_1 - \beta_1$  и  $\Delta\beta_2 = \beta'_2 - \beta_2$  и вычисляют приращения крена и его полную величину в данном цикле:

$$q_1 = \frac{\Delta\beta_1 L_1}{\rho}, \quad q_2 = \frac{\Delta\beta_2 L_2}{\rho}, \quad K = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad (56)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – горизонтальные расстояния от опорных точек до наблюдаемой точки В. Эти расстояния могут быть сняты графически с плана, измерены непосредственно на местности, определены прямой угловой засечкой с опорных пунктов, получены из решения обратных геодезических задач по известным координатам опорных пунктов и наблюдаемой точки.

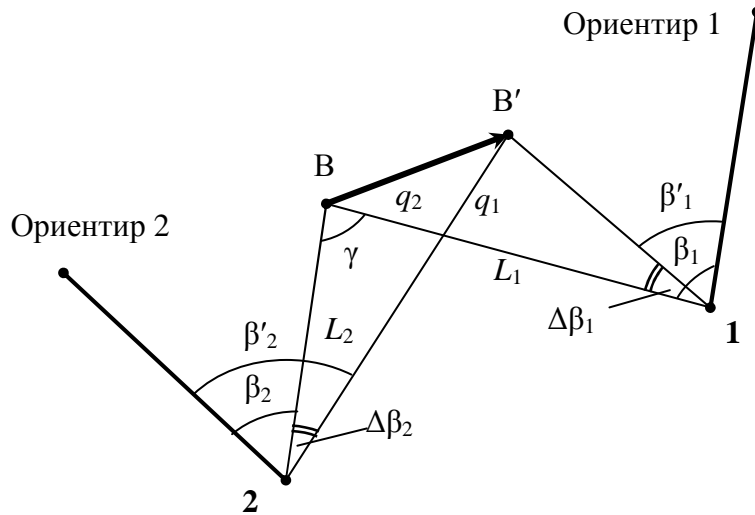


Рис. 54. Схема определения крена способом горизонтальных углов

Если угол засечки  $\gamma$  отличается от  $90^\circ$ , но в незначительных пределах, то величину крена следует вычислять по формуле:

$$K = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2 \cos \gamma} . \quad (57)$$

Если с точек **1** и **2** можно наблюдать верхнюю В и нижнюю Н точки сооружения, которые по техническим условиям должны находиться на одной отвесной линии (например, вертикальное ребро сооружения или колонны), то по разности измеренных горизонтальных углов будем получать полную величину крена.

Эта методика применима и для башен треугольной формы с целью определения угловых смещений  $\Delta\beta$  вершин верхнего треугольника с соответствующих осей сооружения. Для этого три точки **1**, **2**, **3** должны располагаться на трех осях башни и вместо измерения углов  $\beta$  будут измеряться непосредственно углы  $\Delta\beta$ . Таким образом перейдем от способа углов к видоизмененному *способу малых углов*.

#### 1.4.2. Способ малых углов



Рассмотрим этот способ на примере башни треугольной формы. Пусть (рис. 55) с точек **1**, **2** и **3**, расположенных на осях башни на расстояниях  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  от её верхних точек **a**, **b** и **c**, измерены малые горизонтальные углы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$ , характеризующие линейные смещения  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  верхних точек с осей сооружения, которые можно вычислить по формуле:

$$q_i = \frac{S_i}{\rho} \beta_i'' , \quad (58)$$

где  $\rho'' = 206265''$ , причём, если смещения точек **a**, **b** и **c** происходят по часовой стрелке, то  $q_i$  будут считаться положительными, если против часовой стрелки – отрицательными. Так на рис. 55 смещения  $q_1$  и  $q_2$  положительные, а  $q_3$  – отрицательное.

Точность  $m_q$  определения смещений по формуле (58) может быть оценена следующим образом:

$$m_q = \frac{\sqrt{S^2 m_\beta^2 + \beta^2 m_S^2}}{\rho} , \quad (59)$$

где  $m_\beta$ ,  $m_S$  – СКО определения углов  $\beta_i$  и расстояний  $S_i$ .

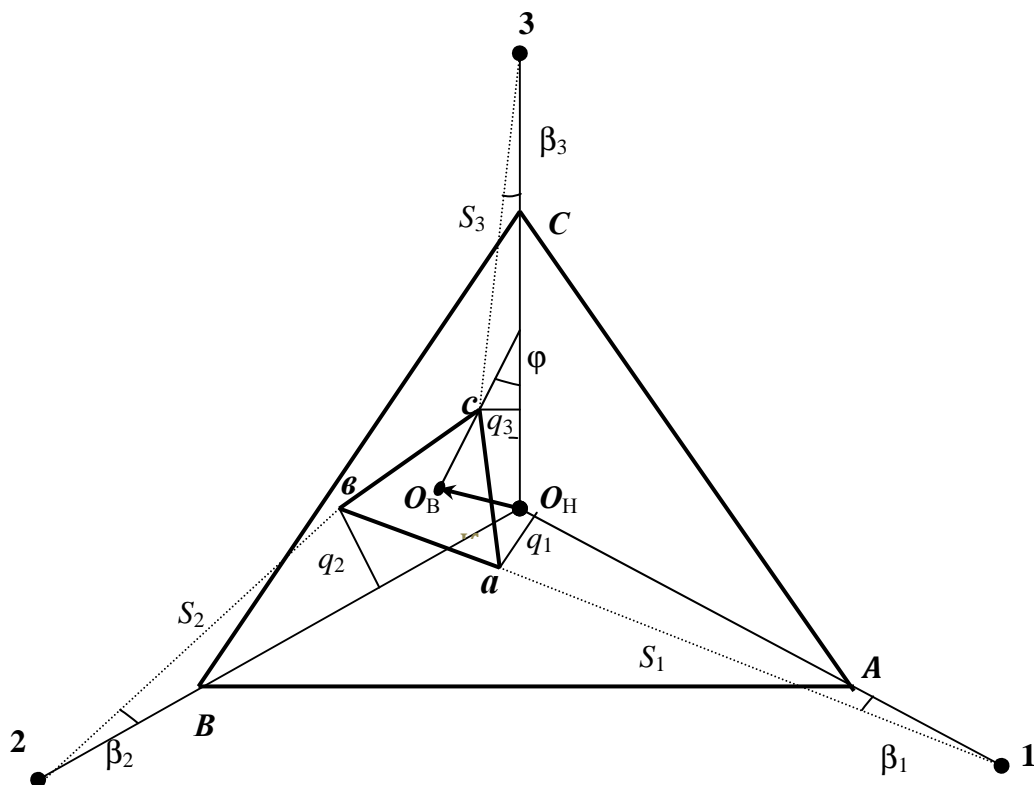


Рис. 55. Схема к определению величины и направления крена башни (**A**, **B**, **C** и **a**, **b**, **c** – соответственно нижние и верхние точки башни)

По формуле (59) подсчитаны значения  $m_q$  при  $m_\beta = 2''$ ,  $5''$ ,  $15''$  и  $30''$  и относительной ошибке измерения расстояний 1:100, 1:200, 1:300, 1:500 и 1:1000 для  $\beta = 5''$  и  $\beta = 600''$ .

Выбранные ошибки  $m_\beta$  измерения углов соответствуют точности теодолитов Т2, Т5, Т15, Т30. Полученные результаты показаны в табл. 27 и на рис. 56, причем значения  $m_q$  в числителе в графах таблицы соответствуют  $\beta = 5''$ , в знаменателе для  $\beta = 600''$ .

На основании данных табл. 27 и графика на рис. 56 можно констатировать, что в способе малых углов точность определения смещений зависит в основном от ошибок угловых измерений. Для отдельного теодолита она практически остается неизменной при различных относительных ошибках линейных измерений и различных значениях малого угла [47, 149].

Рассмотрим особенности применения так называемого «принципа равных влияний» на ошибку определения линейных смещений. Его сущность заключается в нахождении таких  $m_\beta$  и  $m_s$ , которые оказывают одинаковое влияние на заданную погрешность  $m_q$ .

Для этого представим формулу (59) в следующем виде:  $m_q^2 \rho^2 = S^2 m_\beta^2 + \beta^2 m_s^2$  и, приравняв  $S^2 m_\beta^2 = \beta^2 m_s^2$ , получим:

$$m_\beta = \frac{m_q \rho}{S \sqrt{2}}, \quad m_s = \frac{m_q \rho}{\beta \sqrt{2}}, \quad \frac{m_s}{S} = \frac{m_\beta}{\beta}. \quad (60)$$

Таблица 27

### Ошибки $m_q$ в зависимости от ошибок измерения расстояний и углов

$S_i$ , м	$m_q$ , мм			
	Т2	Т5	Т15	Т30
$m_s = 1:100$				
1,0H(70)	1/2	2/3	5/5	10/10
3,0H(210)	2/6	5/8	15/16	30/31
$m_s = 1:200$				
1,0H(70)	1/1	2/2	5/5	10/10
3,0H(210)	2/4	5/6	15/16	30/31
$m_s = 1:300$				
1,0H(70)	1/1	2/2	5/5	10/10
3,0H(210)	2/3	5/6	15/15	30/31
$m_s = 1:500$				
1,0H(70)	1/1	2/2	5/5	10/10
3,0H(210)	2/2	5/5	15/15	30/31
$m_s = 1:1000$				
1,0H(70)	1/1	2/2	5/5	10/10
3,0H(210)	2/2	5/5	15/15	30/31

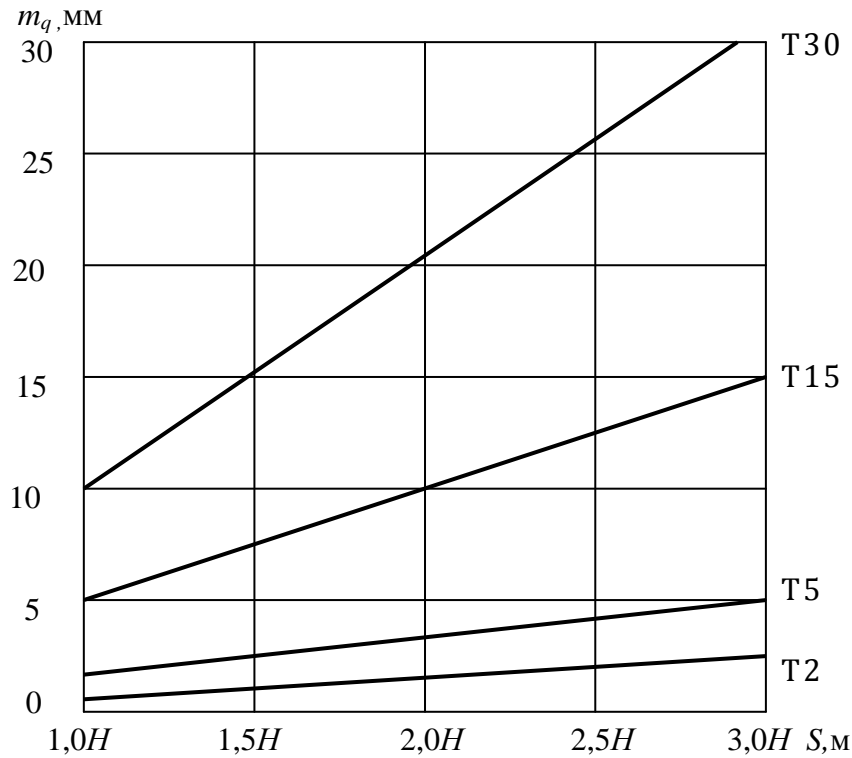


Рис. 56. График зависимости  $m_q$  от  $m_\beta$  и  $m_S$  при различных  $\beta$  и  $S$

Из выражений (60) следует, что при заданном значении  $m_q$  требуемая точность  $m_\beta$  измерения углов не зависит от их величины, а зависит только от расстояний  $S$ . Аналогично, требуемая точность  $m_S$  измерения расстояний не зависит от их величины, а зависит только от углов  $\beta$ . И, наконец, относительные ошибки линейных и угловых измерений должны быть равны между собой.

По формулам (60) было выполнено статистическое моделирование для  $S$  от  $1,0H$  до  $3,0H$  ( $H = 70$  м),  $m_q$  от 1 мм до 30 мм и  $\beta$  от  $5''$  до  $600''$ . Пример такого моделирования для  $m_q = 5$  мм приведен в табл. 28.

Т а б л и ц а 28

**Результаты моделирования принципа равного влияния для  $m_q = 5$  мм**

$S$	$m_\beta$ , сек	$m_S/s$								
		$5''$	$10''$	$30''$	$60''$	$120''$	$180''$	$240''$	$300''$	$600''$
$1,0H$	10,4	>1	>1	1:3	1:6	1:12	1:17	1:23	1:29	1:58
$1,5H$	6,9	>1	1:1	1:4	1:6	1:17	1:26	1:35	1:43	1:86
$2,0H$	5,2	1:1	1:2	1:6	1:12	1:23	1:35	1:46	1:58	1:115
$2,5H$	4,2	1:1	1:2	1:7	1:14	1:29	1:43	1:58	1:72	1:144
$3,0H$	3,5	1:1	1:3	1:9	1:17	1:35	1:52	1:69	1:86	1:172

Результаты статистического моделирования позволяют сделать вывод о нецелесообразности применения принципа равного влияния в способе малых углов, поскольку могут быть получены парадоксальные значения  $m_S$ , которые окажутся больше или соизмеримы с самой  $S$ . Для обоснования  $m_q$  следует пользоваться формулой (59), задавая  $m_B$  и обосновывая  $m_S$ .

По значениям найденных смещений  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  можно вычислить величину и направление крена и угол скручивания башни по приведенным выше формулам (11, 12, 13, 15).

Для подтверждения правильности этих формул было выполнено знаковое моделирование, включающее геометрическую интерпретацию крена и скручивания башни с последующим математическим моделированием [47].

Геометрическая интерпретация заключалась в построении схемы с различными вариантами расположения верхнего треугольника  $abc$  относительно нижнего ортоцентра  $O$  (рис. 57).

Всего было рассмотрено 7 вариантов, обозначенных нумерацией одной из сторон треугольника каждого варианта. На этой схеме были измерены величины смещений  $q_{1,2,3}$ , соответствующие каждому варианту, которые послужили основой для математического моделирования. Оно осуществлялось по специально разработанной в Microsoft Excel программе.

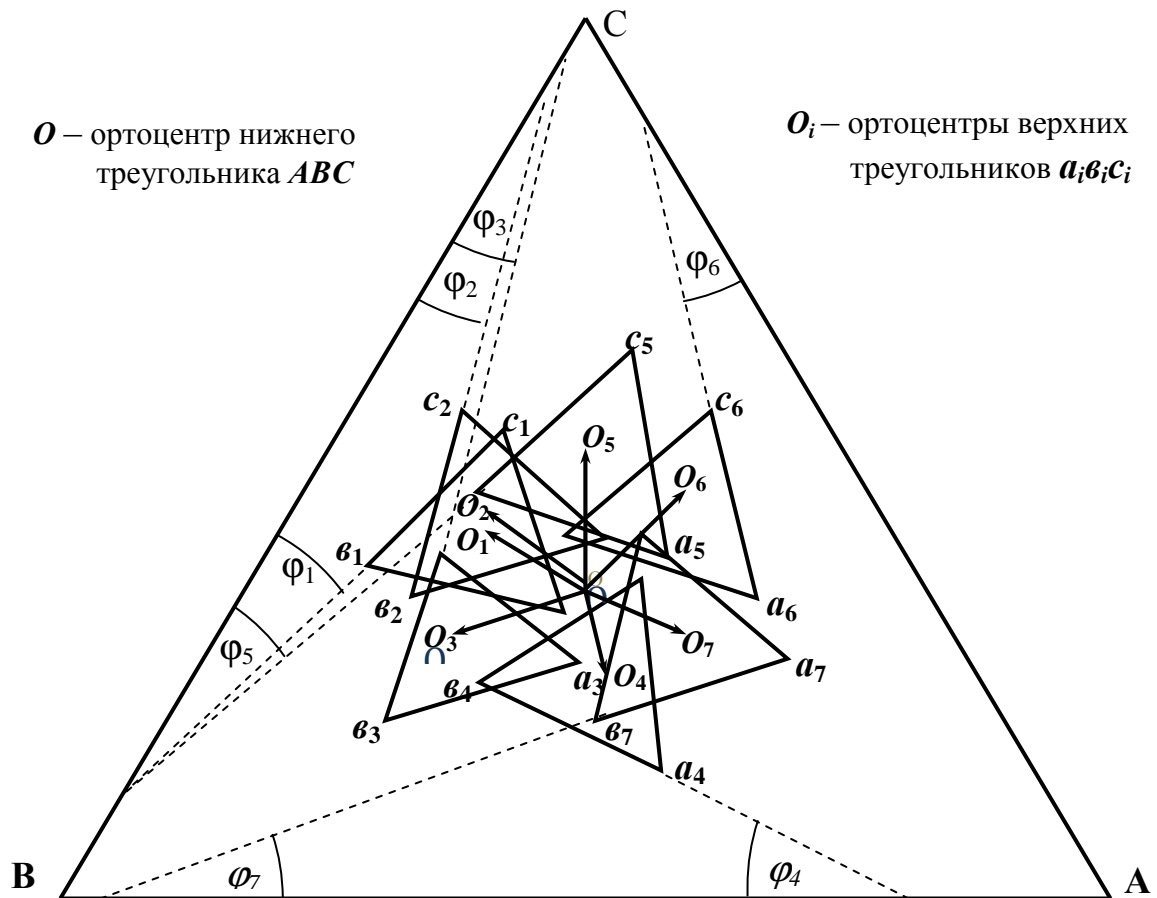


Рис. 57. Геометрическая интерпретация крена и скручивания башни

В табл. 29 приведены результаты вычислений по формулам (11, 12, 13, 15) величины крена  $K$ , координат  $X_K, Y_K$ , румбов  $r$  и углов скручивания  $\varphi$  для различных вариантов.

Затем величины крена, координаты, румбы и углы скручивания были измерены непосредственно на схеме (рис. 57) с помощью масштабной линейки и транспортира с точностью 0,2 мм при измерении расстояний и 0,3° при измерении углов (в графах 5...9 в знаменателе).

Сравнение результатов, полученных графически и вычисленных по формулам, подтвердили как их идентичность, так и правильность выведенных формул.

На практике зачастую ограничиваются наблюдениями на верхние точки  $a, b, c$  башни лишь с двух сторон с точек 1, 2, или 2, 3, или 1, 3. В этом случае, приняв угол скручивания  $\varphi$  в формуле (15) равным нулю, получим в общем виде следующие соотношения:

$$q_1 = -q_2 - q_3, \quad q_2 = -q_1 - q_3, \quad q_3 = -q_2 - q_1, \quad (61)$$

подставляя в них значения  $q_i$  со своим знаком.

Т а б л и ц а 29

**Результаты моделирования способа малых углов, полученные аналитическим и графическим путем**

Вариант	Смещения, мм			Крен $K$ , мм	Координаты, мм		Румб $r$ , название: градус	Угол $\varphi$ , градус
	$q_1$	$q_2$	$q_3$		$X_K$	$Y_K$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+8,0	+33,8	-18,7	30,3/30,0	+14,9/15,0	-26,4/26,2	СЗ : 60,6/60,0	+15,5/15,8
2	-8,0	+17,5	-34,2	29,8/30,0	+14,7/14,9	-26,0/26,0	СЗ : 60,5/60,0	-16,6/16,8
3	+18,6	-8,0	-33,7	30,2/30,3	-15,4/15,3	-26,0/26,0	ЮЗ : 59,4/60,0	-15,5/15,4
4	+34,5	-17,8	+8,8	30,2/30,0	-30,2/30,0	+0,3/0,2	ЮВ : 0,6/0,5	+17,1/17,3
5	-15,2	+37,3	+10,8	30,3/30,2	+30,3/30,3	-0,5/0,3	СЗ : 0,9/0,5	+22,3/21,9
6	-18,0	+8,7	+34,6	30,4/30,4	+15,4/15,3	+26,2/26,3	СВ : 59,6/60,0	+17,0/16,5
7	-10,6	-37,0	+15,0	30,0/30,0	-15,2/15,0	+25,9/25,9	ЮВ : 59,6/60,0	-22,1/22,2

Исследования показывают, что по полученным таким образом смещениям можно вычислить по формулам (12, 13) только приближенные значения крена  $K$  и его направления. В случае такого сокращенного способа

контроля сделанные выводы о пространственном положении башни могут совершенно не соответствовать действительности. Покажем это на примерах, приведенных в работе [132].

При идеальном положении верхнего треугольника  $abc$  относительно нижнего  $ABC$  (рис. 58) ортоцентры треугольников находятся на одной вертикали, а вершины  $a$  и  $A$ ,  $b$  и  $B$ ,  $c$  и  $C$  попарно располагаются в вертикальных плоскостях, проходящих через оси башни  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ .

Предположим, что контроль за пространственным положением башни осуществляется с двух направлений  $CO$  и  $BO$ . Пусть положение верхнего треугольника  $a_1b_1c_1$  (или  $a_2b_2c_2$ ) таково, что точки  $b_1$  ( $b_2$ ) и  $c_1$  ( $c_2$ ) находятся на соответствующих осях башни, что выявлено результатами их вертикального проектирования теодолитом. Отсюда может последовать ошибочный вывод об отсутствии крена башни и скручивания её верха относительно основания.

Как видно из рис. 58, вершина  $a$  верхнего треугольника даже при нулевых линейных смещениях вершин  $b$  и  $c$  может занимать произвольное положение  $a_1$  или  $a_2$  на некотором линейном смещении  $q_{A1}$  или  $q_{A2}$  от оси  $OA$ . В результате этого будут иметь место крен сооружения  $OO_1$  ( $OO_2$ ) и угол скручивания  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ).

Аналогично (рис. 59), при некоторых линейных смещениях  $q_b$  и  $q_c$  вершин  $b$  и  $c$ , вершина  $a$  может занимать произвольное положение  $a_1$  или  $a_2$ , соответствующее линейному смещению  $q_{A1}$  или  $q_{A2}$ . В результате, как и в первом случае, будут иметь место крен сооружения  $OO_1$  ( $OO_2$ ) и угол скручивания  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ).

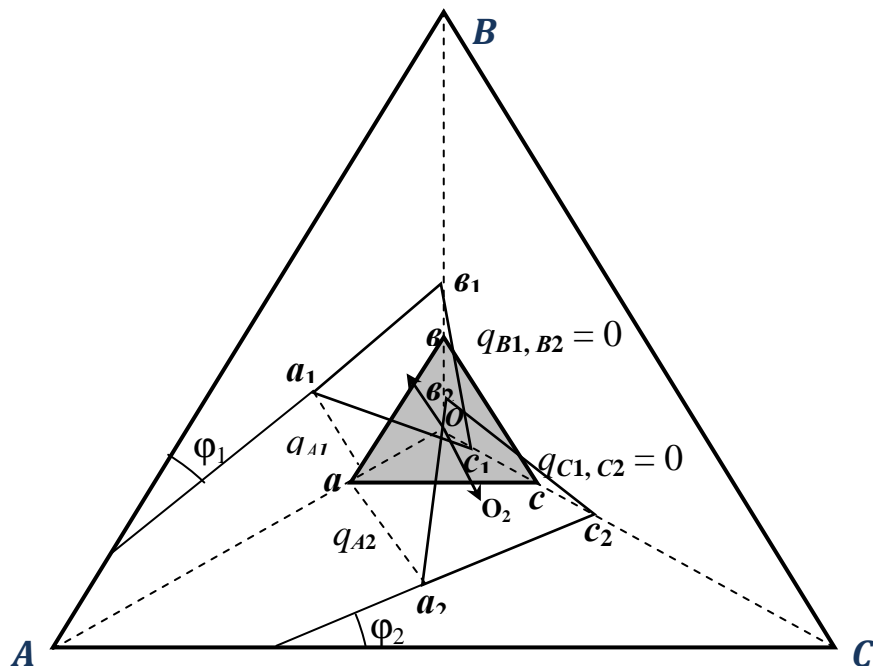


Рис. 58. Случай нулевых  $q_B = 0$  и  $q_C = 0$  линейных смещений вершин  $b$  и  $c$

Угол скручивания башни  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ) может оказывать существенное влияние на величину и направление крена. Для того, чтобы судить о наличии или отсутствии скручивания, следует вертикальное проектирование точек  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{c}$  дополнить измерением горизонтальных углов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\beta_4$  (рис. 60).

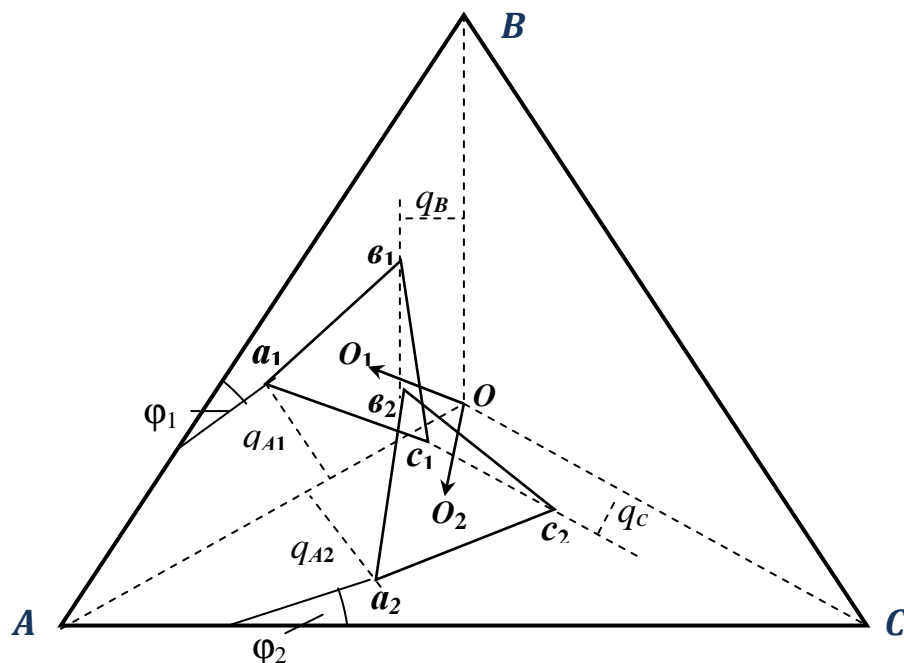


Рис. 59. Случай фактических  $q_B$  и  $q_C$  линейных смещений вершин  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{c}$

Так (рис. 60, *a*), если измеренные горизонтальные углы попарно равны, то есть  $\beta_1 = \beta_2, \beta_3 = \beta_4$ , а точки  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{C}$  расположены в вертикальных плоскостях, проходящих через оси башни  $\mathbf{OB}$  и  $\mathbf{OC}$ , то нет ни крена, ни скручивания сооружения.

Если (рис. 60, *б*)  $\beta_1 < \beta_2$ , а  $\beta_3 = \beta_4$ , то имеет место крен в направлении  $\mathbf{CO}$ , а скручивание отсутствует. При  $\beta_1 > \beta_2$ , а  $\beta_3 = \beta_4$ , скручивание отсутствует, а крен имеет направление от  $\mathbf{O}$  к  $\mathbf{C}$ .

В том случае (рис. 60, *в*), когда  $\beta_1 = \beta_2$ , а  $\beta_3 < \beta_4$ , то нет скручивания, но есть крен в направлении  $\mathbf{OB}$ . Если при  $\beta_1 = \beta_2$  будет  $\beta_3 > \beta_4$ , то при отсутствии скручивания имеем крен в направлении  $\mathbf{BO}$ .

Наконец (рис. 60, *г*), при  $\beta_1 \neq \beta_2, \beta_3 \neq \beta_4$  можно утверждать о наличии крена, ориентировочно оценить его направление, но о наличии или отсутствии скручивания башни нельзя сказать ничего определенного.

Таким образом, как при нулевых  $q_{B1}(q_{B2}) = 0, q_{C1}(q_{C2}) = 0$ , так и при фактических  $q_B$  и  $q_C$  линейных смещениях вершин  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{c}$  (рис. 58, 59), получить по этим данным какую-либо информацию о величине крена, его направлении и угле скручивания башни не представляется возможным.

На рис. 61 показаны теоретически возможные экстремальные случаи расположения верхнего треугольника  $\mathbf{abc}$  относительно нижнего  $\mathbf{ABC}$ . Так

(рис. 61, а), если вершина  $c_1$  совпадает с ортоцентром  $O$  нижнего треугольника, а вершина  $b_1$  располагается на оси  $OB$  или вершина  $b_2$  совпадает с  $O$ , а вершина  $c_2$  находится на оси  $OC$ , то линейные смещения  $q_{A1}$  и  $q_{A2}$  по модулю равны длине медианы верхнего треугольника  $(av\sqrt{3})/2$ . Крены  $OO_1 = OO_2 = av/\sqrt{3}$  имеют противоположные направления, составляющие  $30^\circ$  в первом случае с осью  $OB$ , а во втором случае – с осью  $OC$ . И, наконец, углы скручивания  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в обоих случаях равны  $30^\circ$ .

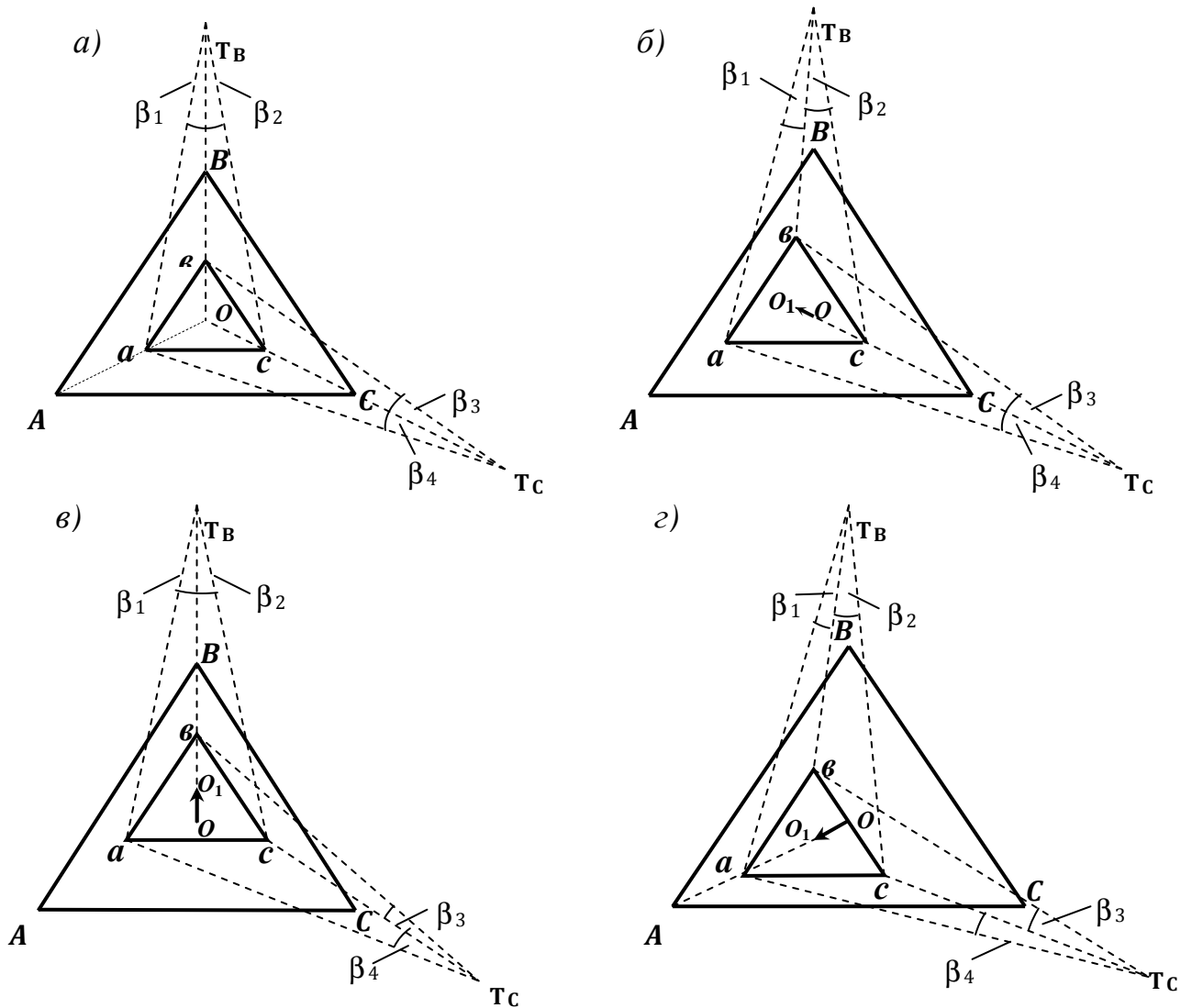


Рис. 60. Схемы к определению наличия или отсутствия угла скручивания башни ( $T_B$  и  $T_C$  – точки стояния теодолита)

При фактических  $q_B$  и  $q_C$  линейных смещениях вершин  $b$  и  $c$  (рис. 61, б), если  $q_{B1,C1} = q_B$  или  $q_{B2,C2} = q_C$ , то  $\varphi_1 = \varphi_2 = 30^\circ$ , а величины линейных смещений  $q_{A1}$  ( $q_{A2}$ ), крена  $OO_1$  ( $OO_2$ ) и его направления зависят от соотношения  $q_B$  и  $q_C$ .



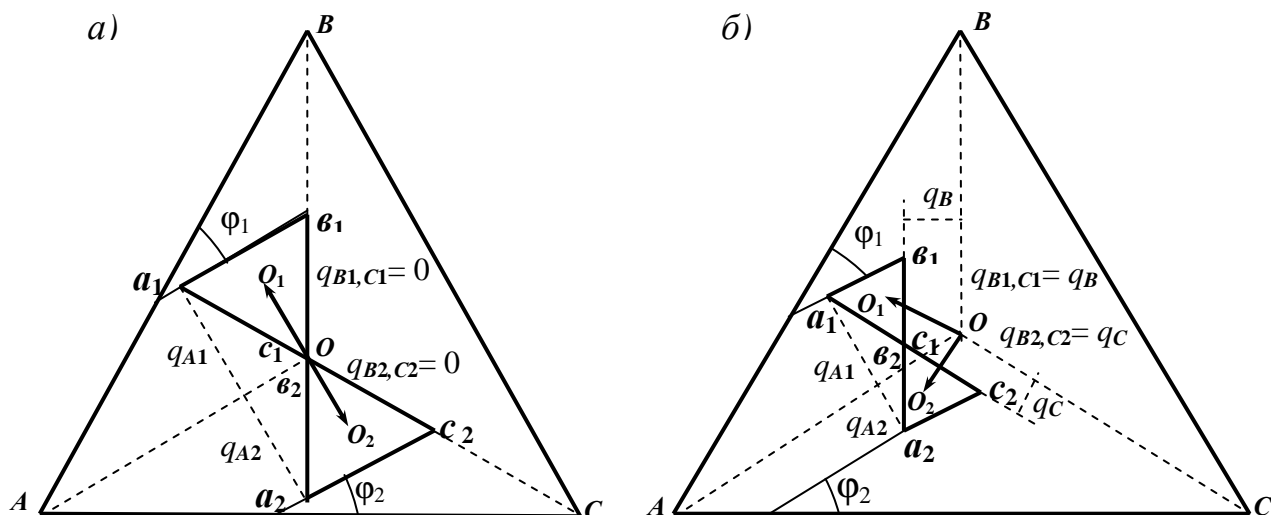


Рис. 61. Экстремальные случаи при нулевых  $q_B = 0$ ,  $q_C = 0$  (а) и фактических  $q_B$  и  $q_C$  (б) линейных смещениях вершин  $v$  и  $c$

Таким образом, рассмотренные выше сокращенные способы контроля путём наблюдениями всего двух произвольно выбранных рёбер не позволяют с уверенностью судить о пространственном положении сооружений башенного типа треугольной формы.

Для получения полной и достоверной информации о величине крена, его направлении и угле скручивания башни треугольной формы необходимо в способе малых углов, помимо наблюдений только двух точек ( $v$  и  $c$ , или  $a$  и  $v$ , или  $a$  и  $c$ ), выполнить наблюдения третьего пояса башни.

Следует отметить, что на точность способа малых углов может оказывать существенное влияние смещение точек стояния теодолита 1, 2, 3 (рис. 55) с осей башни [130]. Действительно, (рис. 62) если точка стояния теодолита смещена с оси башни на некоторую величину  $ТТ'$  (нестворность теодолита), то вместо правильного малого угла  $\beta$  будет измерен некоторый угол  $\beta'$ . В результате этого, вместо правильного линейное отклонение  $ap$  будет получено неправильное линейное отклонение  $ap'$ .

С целью определения степени влияния нестворности теодолита на величину линейного отклонения  $q$ , было проведено статистическое моделирование. В табл. 30 приведены подсчитанные по формуле:

$$(ap' - ap) = \frac{S}{\rho} (\beta' - \beta), \quad (62)$$

изменения значения  $ap$  для башни высотой  $H = 70$  м в зависимости от разности  $(\beta' - \beta)$  при различных расстояниях  $S$  от точки стояния теодолита до верхних точек и построен график (рис. 63).

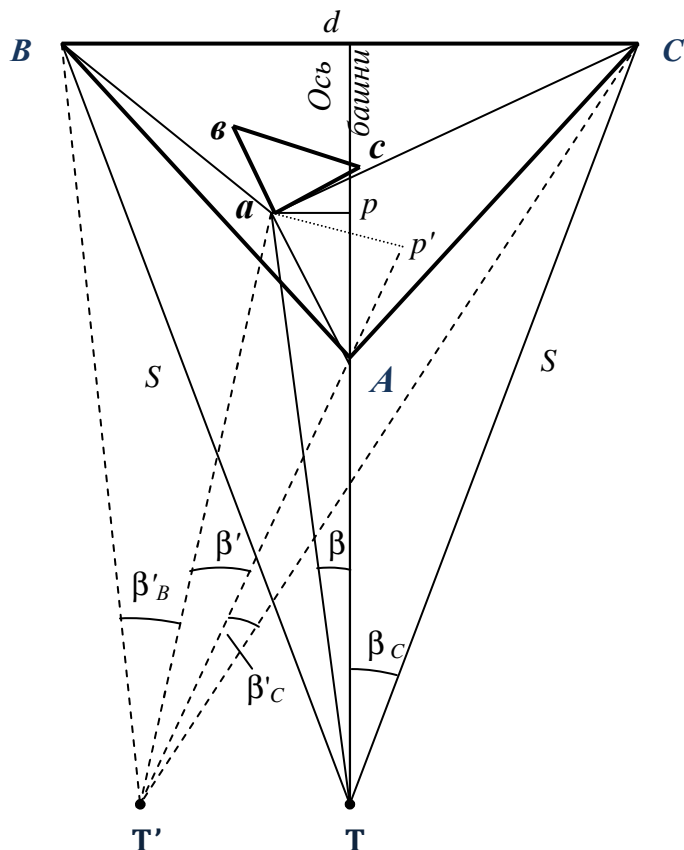


Рис. 62. Схема к определению влияния нестворности теодолита

Расчеты показывают, что для башни высотой 70 м при изменении разности  $(\beta' - \beta)$  от 5 до 300 угловых секунд и для различных расстояний  $S$  от  $1,0H$  до  $3,0H$  ошибка определения линейного отклонения  $ap$  может находиться в пределах от 0,2 до 30,5 см.

Т а б л и ц а 30

**Ошибки определения линейного отклонения  $ap$  ( в см ) в зависимости от нестворности теодолита  $(\beta' - \beta)$  для различных расстояний  $S$**

$S_i$ , м	$(\beta' - \beta)$ , секунды										
	5	10	20	30	40	50	60	120	180	240	300
$1,0H(70)$	0,2	0,3	0,7	1,0	1,4	1,7	2,0	4,1	6,1	8,1	10,2
$1,5H(105)$	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	6,1	9,2	12,2	15,3
$2,0H(140)$	0,3	0,7	1,4	2,0	2,7	3,4	4,1	8,1	12,2	16,3	20,4
$2,5H(175)$	0,4	0,8	1,7	2,5	3,4	4,2	5,1	10,2	15,3	20,4	25,4
$3,0H(210)$	0,5	1,0	2,0	3,0	4,1	5,1	6,1	12,2	18,3	24,4	30,5

Исключить влияние нестворности можно следующим образом. Во-первых, можно контролировать положение теодолита на оси сооружения путем измерения горизонтальных углов  $BT'A$  и  $AT'C$  (рис. 62) и, при необхо-

димости, положение теодолита корректировать, добиваясь равенства этих углов, а точку стояния теодолита стараться максимально приближать к наблюдаемому сооружению.

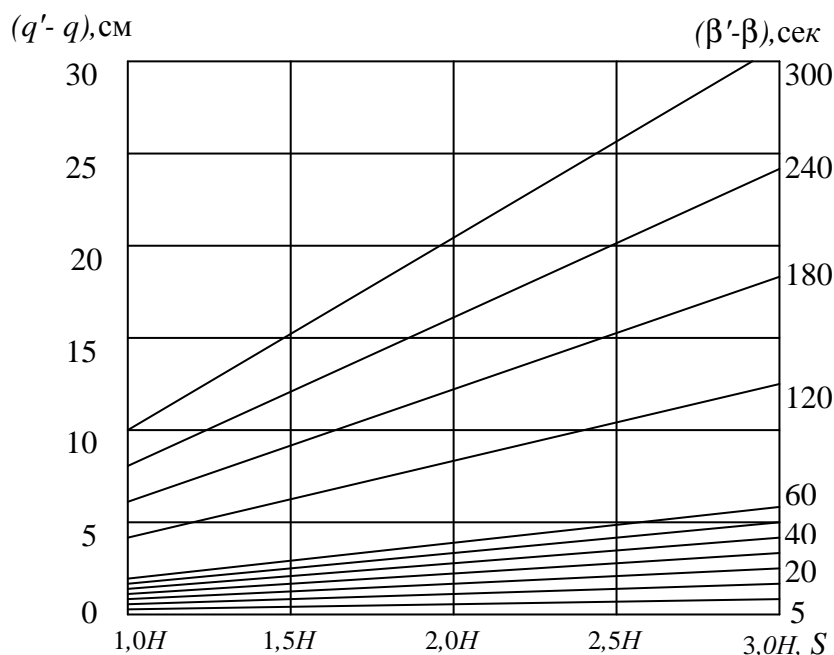


Рис. 63. График зависимости  $(q' - q)$  от  $(\beta' - \beta)$  при различных  $S$

Рассмотрим другой путь, который предусматривает введение в результаты измерений поправок, соответствующих неравенству этих углов. Пусть теодолит расположен в точке  $T'$ . Измерены горизонтальные углы  $\beta'_B, \beta', \beta'_C$  и измерены горизонтальные проложения  $T'B, T'a, T'A, T'C$ .

Выразим длины сторон  $TB$  и  $TC$  как  $TB = TC = \frac{T'B + T'C}{2} = S$ , тогда  $\sin \beta_C = d/2S$ , где  $d$  – сторона равностороннего треугольника  $ABC$ .

Зная в треугольнике  $TAC$  угол  $\beta_C$  и угол  $\angle TAC = 150^\circ$ , находим угол  $\angle ACT = 180^\circ - 150^\circ - \beta_C = 30^\circ - \beta_C$ . По теореме косинусов определяем длину  $AT$ :

$$(AT)^2 = d^2 + S^2 - 2dS \cos(30^\circ - \beta_C).$$

Аналогичным образом находим из треугольников  $T'aA$  и  $T'aB$  отрезки  $aA$  и  $aB$ :

$$(aA)^2 = (T'a)^2 + (T'A)^2 - 2(T'a)(T'A) \cos \beta',$$

$$(aB)^2 = (T'B)^2 + (T'a)^2 - 2(T'B)(T'a) \cos \beta'_B.$$

Зная в треугольнике  $BaA$  все три стороны, вычисляем угол  $\angle aAB$ :

$$\cos(aAB) = \frac{(aA)^2 + d^2 - (aB)^2}{2(aA)d} .$$

Теперь в треугольнике  $TaA$  угол  $\angle aAT = 150^\circ + \angle aAB$ , что дает возможность, во-первых, вычислить длину  $aT$ :

$$(aT)^2 = (aA)^2 + (AT)^2 - 2(aA)(AT)\cos(aAT) ,$$

и затем вычислить правильное угловое отклонение  $\beta$ :

$$\cos\beta = \frac{(aT)^2 + (AT)^2 - (aA)^2}{2(aT)(AT)} . \quad (63)$$

Справедливость полученной формулы (63) можно подтвердить, если подставить в неё вместо  $(aT)^2$  предыдущее выражение и, произведя соответствующие сокращения и преобразования, получить видоизмененную формулу:

$$\cos\beta = \frac{(AT) - (aA)\cos(aAT)}{(aT)} . \quad (64)$$

Числитель формулы (64) представляет собой катет  $pT$ , а знаменатель – гипотенузу  $aT$  прямоугольного треугольника  $Tap$ , соотношение которых является косинусом угла  $\beta$ .

Другой путь исключения влияния нестворности теодолита предусматривает непосредственное определение правильного линейного отклонения  $ap$ . Для этого можно использовать следующие способы.

Линейное отклонение  $ap$  (см. треугольник  $Aap$  на рис. 62) можно вычислить по формуле:

$$ap = (aA) \sin(aAp) , \quad (65)$$

где угол  $\angle aAp = 180^\circ - \angle aAT$  (порядок определения угла  $\angle aAT$  приведен выше).

Определение правильного линейного отклонения  $ap$  может быть выполнено графическим способом. Для этого достаточно в треугольниках  $T'Va$ ,  $T'aA$ ,  $T'aC$  вычислить по теореме косинусов отрезки  $aB$ ,  $aA$ ,  $aC$  и на чертеже крупного масштаба определить тройной линейной засечкой положение точки  $a$ , от которой измерить в масштабе чертежа  $ap$ .

Аналитическое решение такой тройной линейной засечки может быть выполнено следующим образом (рис. 64). Опустим из точки  $a$  на стороны треугольника  $ABC$  перпендикуляры  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , которые отсекут на этих сто-

ронах отрезки  $l_1, l_2, l_3$ . Выберем условную систему координат  $xAy$ , в которой:

$$x_A = 0, y_A = 0, x_B = \frac{d\sqrt{3}}{2}, y_B = -\frac{d}{2}, x_C = \frac{d\sqrt{3}}{2}, y_C = \frac{d}{2}.$$

В этой системе координаты точки  $a$  могут быть вычислены трижды:

$$x_a = x_{1,2,3} + \Delta x_{1,2,3}, \quad y_a = y_{1,2,3} + \Delta y_{1,2,3},$$

где индексы 1,2,3 соответствуют номеру треугольника  $AaB, CaB, CaA$ .

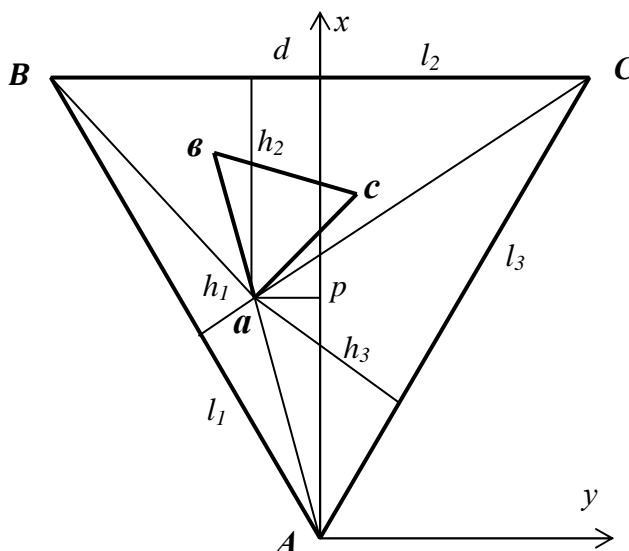


Рис. 64. Аналитическое решение линейной засечки

Приращения координат вычисляются по формулам:

$$\Delta x_i = \frac{l_i(x_k - x_n) + h_i(y_k - y_n)}{d}, \quad \Delta y_i = \frac{l_i(y_k - y_n) - h_i(x_k - x_n)}{d}, \quad (66)$$

где  $x_k, y_k$  и  $x_n, y_n$  – координаты конечной и начальной точек соответственно треугольника.

Так в треугольнике  $AaB$  точка  $A$  начальная, точка  $B$  конечная, в треугольнике  $CaB$  точка  $C$  начальная,  $B$  – конечная и в треугольнике  $CaA$  точка  $C$  начальная,  $A$  – конечная.

Входящие в формулы (66) величины  $l_i$  и  $h_i$  в каждом треугольнике находят следующим образом:

$$l_1 = \frac{d^2 + (aA)^2 - (aB)^2}{2d}, \quad l_2 = \frac{d^2 + (aC)^2 - (aB)^2}{2d}, \quad l_3 = \frac{d^2 + (aC)^2 - (aA)^2}{2d}, \quad (67)$$

$$h_1 = -\sqrt{(aA)^2 - l_1^2}, \quad h_2 = \sqrt{(aC)^2 - l_2^2}, \quad h_3 = -\sqrt{(aC)^2 - l_3^2},$$

причем, знак «+» или «-» перед радикалом выбирается в зависимости от направления следования вершин отдельного треугольника по ходу или против хода часовой стрелки.

В треугольнике  $AaB$  вершины следуют против хода часовой стрелки, значит будет знак «-», в треугольнике  $CaB$  – по ходу (знак «+»), в треугольнике  $CaA$  – против хода (знак «-»).

Обратим внимание на то, что вычисляемые из трех треугольников значения  $y_a$  соответствуют правильному линейному отклонению  $ap$ . Аналогичным образом, произведя наблюдения со стороны точек  $B$  и  $C$  и вводя каждый раз соответствующую систему координат  $xBy$  и  $xCy$ , можно найти правильные линейные отклонения точек  $b$  и  $c$  с осей башни. А затем по отклонениям точек  $a, b, c$  вычисляют крен сооружения, его направление и угол скручивания вершины относительно основания.

Эту же задачу можно решить иначе, если вычислить координаты точек  $a, b, c$  в одной системе координат  $xAy$  по приведенной выше методике. Затем определить координаты ортоцентра верхнего треугольника  $abc$ :

$$x_o = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \quad y_o = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}. \quad (68)$$

Зная координаты ортоцентра нижнего треугольника  $ABC$ :

$$X_o = d/\sqrt{3}, \quad Y_o = 0,$$

можно сразу получить величину и направление крена башни путём решения обратной геодезической задачи между ортоцентрами верхнего и нижнего треугольников. Определив по координатам вершин треугольников  $ABC$  и  $abc$  дирекционные углы сторон этих треугольников  $\alpha_i$ , находят угол скручивания  $\varphi$  сооружения как разность дирекционных углов соответствующих сторон:

$$\varphi = \alpha_{ab} - \alpha_{AB} = \alpha_{bc} - \alpha_{BC} = \alpha_{ca} - \alpha_{CA}. \quad (69)$$

Таким образом, по приведенной выше методике можно определить наличие нестворности теодолита и исключить её влияние на точность получае-

мых результатов, характеризующих пространственное положение сооружения башенного типа треугольной формы.

Для оценки степени влияния точности измерения расстояний  $S$  на ошибки определения линейного отклонения  $ap$ , были подсчитаны по формуле (62) значения  $(ap'-ap)$  для условий, представленных в табл. 30 при относительной ошибке измерения расстояний 1:100, 1:200 и 1:300. Полученные результаты показаны в табл. 31.

В табл. 31 первая графа содержит расстояния  $(1,0...3,0)H \pm (1:100...1:300)H$ , а в остальных графах значения  $(ap'-ap)$  в числителе соответствуют сумме, в знаменателе – разности этих расстояний. Данные этой таблицы показывают, что уже при относительной ошибке измерения расстояний 1:300 значения  $(ap'-ap)$  в числителе и знаменателе практически одинаковы и не отличаются от таковых в табл. 30. Такая точность измерения расстояний вполне достижима даже с помощью обычного нитяного дальномера.

Т а б л и ц а 31

**Ошибки определения  $(ap'-ap)$  ( в см) в зависимости от  $(\beta'-\beta)$  для различных  $S$  и относительных ошибок их измерения**

$S_i, м$	$(\beta'-\beta)$ , секунды										
	5	10	20	30	40	50	60	120	180	240	300
Относительная ошибка измерения расстояний $S$ (1:100)											
$1,0H$ (70,70/69,3)	<u>0,2</u> 0,2	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,7</u> 0,7	<u>1,0</u> 1,0	<u>1,4</u> 1,3	<u>1,7</u> 1,7	<u>2,0</u> 2,0	<u>4,1</u> 4,0	<u>6,2</u> 6,0	<u>8,2</u> 8,1	<u>10,3</u> 10,1
$1,5H$ (106,05/103,9)	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,5</u> 0,5	<u>1,0</u> 1,0	<u>1,5</u> 1,5	<u>2,1</u> 2,0	<u>2,6</u> 2,5	<u>3,1</u> 3,0	<u>6,2</u> 6,1	<u>9,2</u> 9,1	<u>12,3</u> 12,1	<u>15,4</u> 15,1
$2,0H$ (141,40/138,6)	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,7</u> 0,7	<u>1,4</u> 1,3	<u>2,1</u> 2,0	<u>2,7</u> 2,7	<u>3,4</u> 3,4	<u>4,1</u> 4,0	<u>8,2</u> 8,1	<u>12,3</u> 12,1	<u>16,4</u> 16,1	<u>20,6</u> 20,2
$2,5H$ (176,75/173,2)	<u>0,4</u> 0,4	<u>0,9</u> 0,8	<u>1,7</u> 1,7	<u>2,6</u> 2,5	<u>3,4</u> 3,4	<u>4,3</u> 4,2	<u>5,1</u> 5,0	<u>10,3</u> 10,1	<u>15,4</u> 15,1	<u>20,6</u> 20,2	<u>25,7</u> 25,2
$3,0H$ (212,10/207,9)	<u>0,5</u> 0,5	<u>1,0</u> 1,0	<u>2,1</u> 2,0	<u>3,1</u> 3,0	<u>4,1</u> 4,0	<u>5,1</u> 5,0	<u>6,2</u> 6,0	<u>12,3</u> 12,1	<u>18,5</u> 18,1	<u>24,7</u> 24,2	<u>30,8</u> 30,2
Относительная ошибка измерения расстояний $S$ (1:200)											
$1,0H$ (70,35/69,6)	<u>0,2</u> 0,2	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,7</u> 0,7	<u>1,0</u> 1,0	<u>1,4</u> 1,4	<u>1,7</u> 1,7	<u>2,0</u> 2,0	<u>4,1</u> 4,0	<u>6,1</u> 6,1	<u>8,2</u> 8,1	<u>10,2</u> 10,1
$1,5H$ (105,52/104,4)	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,5</u> 0,5	<u>1,0</u> 1,0	<u>1,5</u> 1,5	<u>2,0</u> 2,0	<u>2,6</u> 2,5	<u>3,1</u> 3,0	<u>6,1</u> 6,1	<u>9,2</u> 9,1	<u>12,3</u> 12,2	<u>15,3</u> 15,2
$2,0H$ (140,70/139,3)	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,7</u> 0,7	<u>1,4</u> 1,4	<u>2,0</u> 2,0	<u>2,7</u> 2,7	<u>3,4</u> 3,4	<u>4,1</u> 4,0	<u>8,1</u> 8,1	<u>12,2</u> 12,2	<u>16,3</u> 16,2	<u>20,4</u> 20,3
$2,5H$ (175,88/174,1)	<u>0,4</u> 0,4	<u>0,8</u> 0,8	<u>1,7</u> 1,7	<u>2,6</u> 2,5	<u>3,4</u> 3,4	<u>4,3</u> 4,2	<u>5,1</u> 5,1	<u>10,2</u> 10,1	<u>15,3</u> 15,2	<u>20,5</u> 20,3	<u>25,6</u> 25,3
$3,0H$ (211,05/208,9)	<u>0,5</u> 0,5	<u>1,0</u> 1,0	<u>2,0</u> 2,0	<u>3,1</u> 3,0	<u>4,1</u> 4,1	<u>5,1</u> 5,1	<u>6,1</u> 6,1	<u>12,3</u> 12,2	<u>18,4</u> 18,2	<u>24,6</u> 24,3	<u>30,7</u> 30,4

Относительная ошибка измерения расстояний $S$ (1:300)											
1,0H (70,23/69,7)	<u>0,2</u> 0,2	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,7</u> 0,7	<u>1,0</u> 1,0	<u>1,4</u> 1,4	<u>1,7</u> 1,7	<u>2,0</u> 2,0	<u>4,1</u> 4,1	<u>6,1</u> 6,1	<u>8,2</u> 8,1	<u>10,2</u> 10,1
1,5H (105,35/104,6)	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,5</u> 0,5	<u>1,0</u> 1,0	<u>1,5</u> 1,5	<u>2,0</u> 2,0	<u>2,6</u> 2,5	<u>3,1</u> 3,0	<u>6,1</u> 6,1	<u>9,2</u> 9,1	<u>12,3</u> 12,2	<u>15,3</u> 15,2
2,0H (140,47/139,5)	<u>0,3</u> 0,3	<u>0,7</u> 0,7	<u>1,4</u> 1,4	<u>2,0</u> 2,0	<u>2,7</u> 2,7	<u>3,4</u> 3,4	<u>4,1</u> 4,1	<u>8,2</u> 8,1	<u>12,3</u> 12,2	<u>16,3</u> 16,2	<u>20,4</u> 20,3
2,5H (175,58/174,4)	<u>0,4</u> 0,4	<u>0,8</u> 0,8	<u>1,7</u> 1,7	<u>2,6</u> 2,5	<u>3,4</u> 3,4	<u>4,3</u> 4,2	<u>5,1</u> 5,1	<u>10,2</u> 10,2	<u>15,3</u> 15,2	<u>20,4</u> 20,3	<u>25,5</u> 25,4
3,0H (210,70/209,3)	<u>0,5</u> 0,5	<u>1,0</u> 1,0	<u>2,0</u> 2,0	<u>3,1</u> 3,0	<u>4,1</u> 4,1	<u>5,1</u> 5,1	<u>6,1</u> 6,1	<u>12,3</u> 12,2	<u>18,4</u> 18,3	<u>24,5</u> 24,4	<u>30,6</u> 30,4

### 1.4.3. Способ направлений

Этот способ заключается в определении произвольных направлений или магнитных азимутов, например, на образующую дымовой трубы в верхнем и нижнем (или верхнем, нижнем и промежуточных) её сечениях. Пример определения крена дымовой трубы Ново-Горьковской ТЭЦ с расположением наблюдаемых точек 1-1', 2-2',... на уровне светофорных площадок приведен на рис. 65. Наблюдения производились с двух станций *Ст. 2* и *Ст. 3* в двух взаимно перпендикулярных направлениях (угол засечки  $88^\circ$ ) теодолитом 2Т5К с использованием ориентир-буссоли.

Одновременно с измерением направлений (графы 1-4) измерялись углы наклона на наблюдаемые точки (в табл. 32 и 33 не показаны).

Малое расстояние от станции **2** до трубы компенсировалось тем, что эта станция располагалась на крыше химцеха НГ-ТЭЦ, что позволило уменьшить измеряемые углы наклона.

Находят средние направления на нижний, верхний и промежуточные центры трубы, разность которых характеризует крен трубы в угловой мере  $\Delta_{1,2}$  по двум взаимно перпендикулярным направлениям (графа 5). По формуле:

$$K_{1,2} = 0,49 \times \Delta_{1,2} \times 0,01 \times L_{1,2}, \text{ мм} \quad (70)$$

вычисляют значения частных кренов  $K_{1,2}$  (графа 6), причем знак плюс означает крен вправо, а знак минус – влево. В этой формуле  $L_{1,2}$  – расстояния от центра трубы до точек стояния теодолита в метрах, а  $\Delta_{1,2}$  – в секундах.

Полученные значения частных кренов необходимо экстраполировать на всю высоту трубы (графа 7).

На рис. 65 показаны разрезы, характеризующие отклонения оси трубы от вертикали по направлениям, перпендикулярным наблюдаемым.



Т а б л и ц а 32

Результаты измерений со станции 2 ( $L_2 = 98,25$  м)

№№ точек	Отсчеты по гориз. кругу		Азимут на центр трубы	$\Delta_i$	$K_i$ , мм	$K_H$ , мм
	КП и КЛ	Средние				
1	2	3	4	5	6	7
1	94°25,3	94°25,6				
	274°26,0		96°26,2	-5',5	-159	-191
1	98°26,3	98°26,6				
	278°27,0					
2	94°15,0	94°15,4				
	274°15,8		96°29,8	-1',9	-55	-87
2	98°44,0	98°44,2				
	278°44,5					
3	93°55,0	93°55,0				
	273°54,9		96°29,2	-2',5	-72	-104
3	99°03,5	99°03,4				
	279°03,4					
4	93°29,3	93°29,0				
	273°28,8		96°31,7	-	-	-32
4	99°34,8	99°34,4				
	279°34,0					

Т а б л и ц а 33

Результаты измерений со станции 3 ( $L_3 = 174,00$  м)

№№ точек	Отсчеты по гориз. кругу		Азимут на центр трубы	$\Delta_i$	$K_i$ , мм	$K_H$ , мм
	КП и КЛ	Средние				
1	2	3	4	5	6	7
1	182°52,7	182°53,4				
	2°54,0		184°02,5	-1',0	-51	-61
1	185°11,0	185°11,6				
	5°12,1					
2	182°47,0	182°47,5				
	2°48,0		184°03,6	+0',1	+5	-5
2	185°19,3	185°19,6				
	5°20,0					
3	182°36,4	182°36,4				
	2°36,5		184°02,9	-0',6	-30	-40
3	185°29,4	185°29,4				
	5°29,4					
4	182°19,6	182°19,2				
	2°18,8		184°03,5	-	-	-10
4	185°47,7	185°47,8				
	5°47,8					

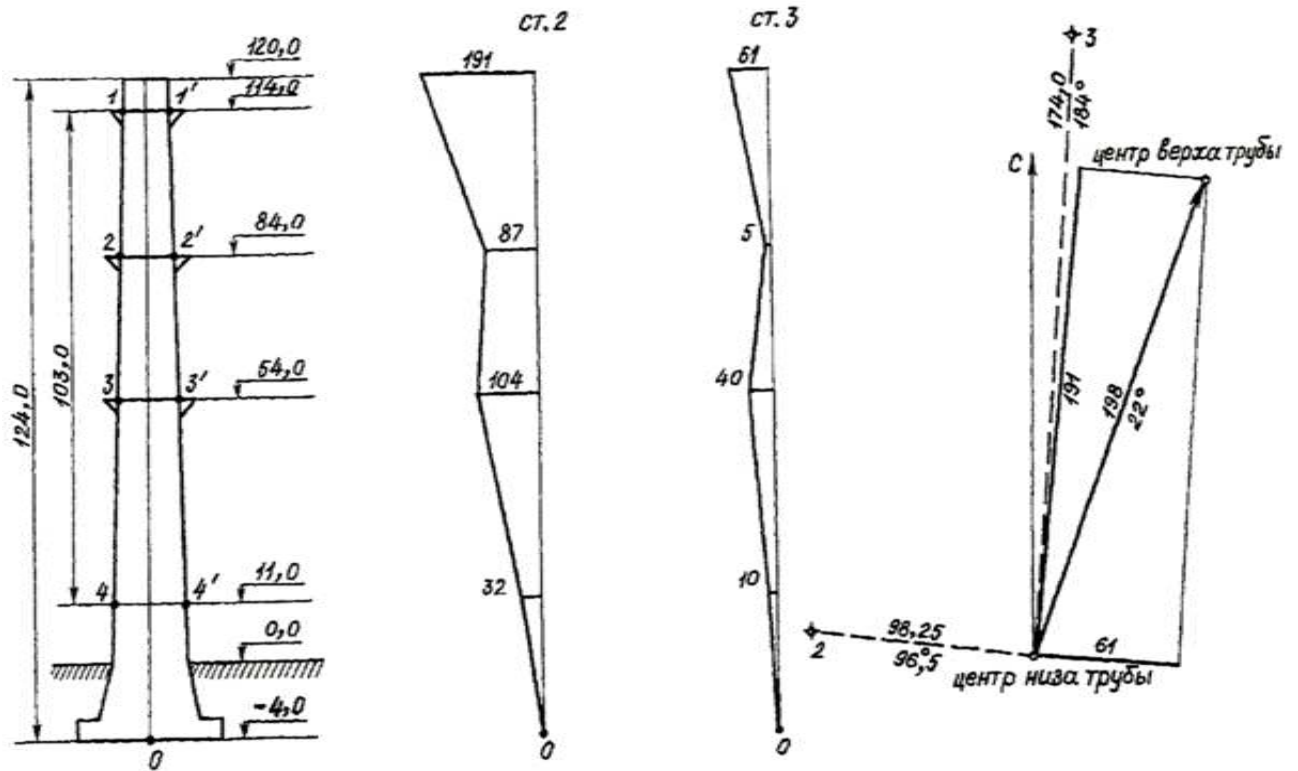


Рис. 65. Точки наблюдений, частные крены и общий крен трубы

Кроме того, на рис. 65 построены графики, характеризующие величины в мм и направления крена трубы, полное значение  $K$  которого можно определить графически способом перпендикуляров или вычислить по формуле:

$$K = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2 \cos \gamma}, \quad (71)$$

где  $\gamma$  – угол засечки с двух станций;  $K_1$  и  $K_2$  – экстраполированные значения частных кренов верха трубы.

Для геометрической интерпретации результатов измерения крена трубы разработаны программы «Профиль» и «План» (Раскаткин Ю. Н., Огурцов М. С. О геометрической интерпретации пространственного положения высоких сооружений башенного типа // Сборник трудов аспирантов и магистрантов. Т. 1.– Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, –2014. – С.164–168.)

Исходными данными для программы «Профиль» являются величины отклонений центров сечений трубы от вертикали и высота сечений.

Исходными данными для программы «План» являются величины отклонений центров сечений трубы от вертикали по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Ниже приведены примеры использования программ «Профиль» и «План» (рис. 66, 67) для частных кренов, представленных на рис. 65.

Способ направлений для треугольных башен может выполняться одновременно со способом малых углов путем визирования теодолитом с каждой из трех осевых точек на соответствующие три пояса башни (левый, средний и правый).

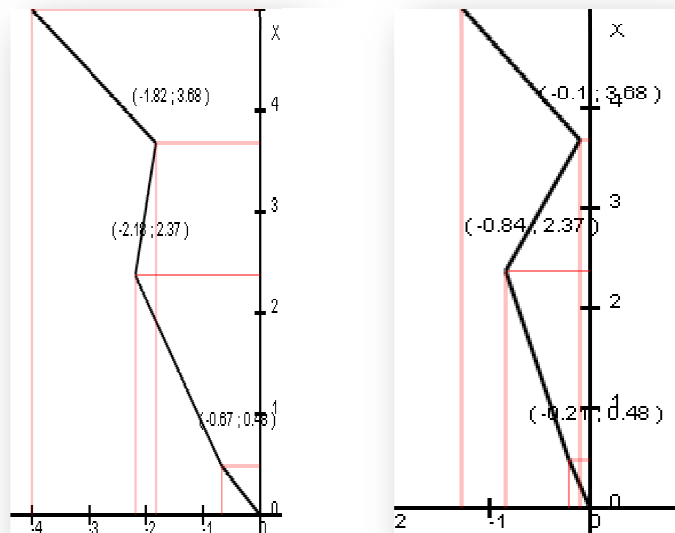


Рис. 66. Программа «Профиль» для построения вертикальных разрезов трубы

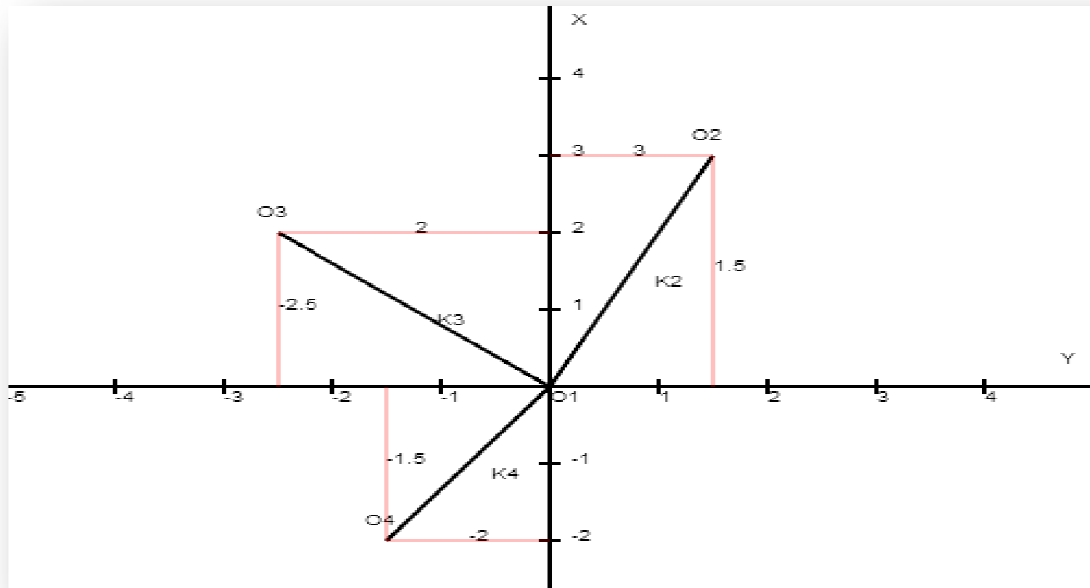


Рис. 67. Программа «План» для построения частных кренов трубы

Типовая схема угловых измерений при контроле башни четырехугольной формы представлена на рис. 68. Угловые измерения выполняются с пунктов планового обоснования в следующей последовательности [33]:

а) «круг лево» КЛ: наведение на центр основания башни, на левый и правый пояса в местах фланцевых или болтовых соединений смежных секций последовательно снизу вверх в порядке сечений 1, 2, 3 и т. д.;

б) «круг право» КП: действия в порядке, аналогичном при «круге лево», но в обратной последовательности.

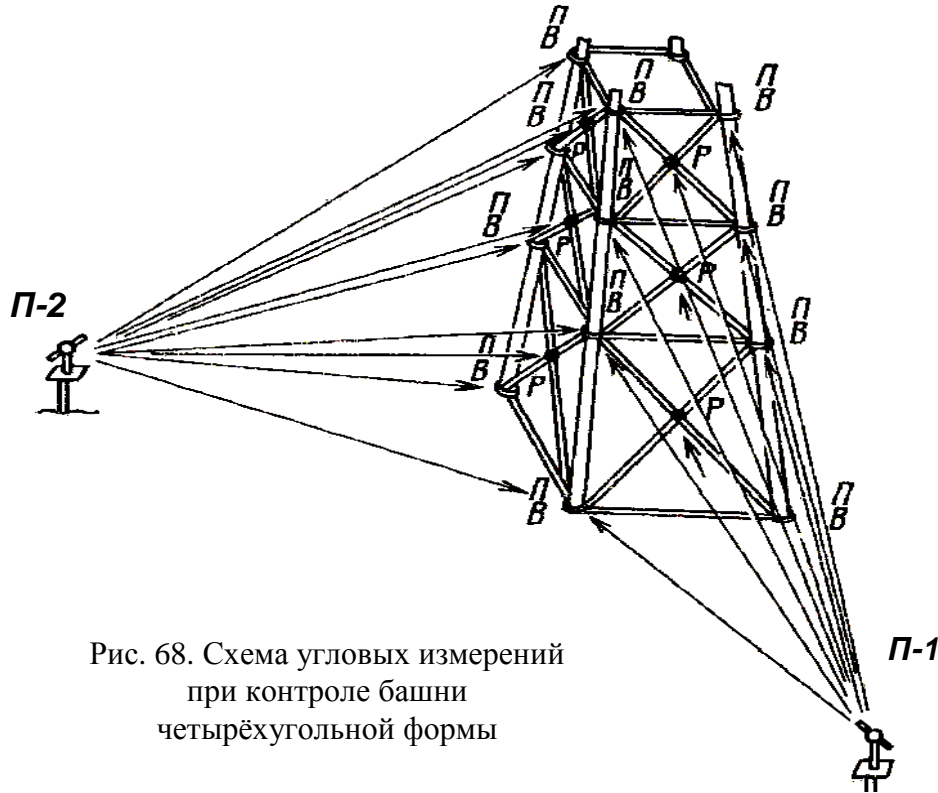


Рис. 68. Схема угловых измерений при контроле башни четырёхугольной формы

Обработка результатов угловых измерений аналогична таковой при контроле пространственного положения дымовой трубы, пример которой рассмотрен выше.

Отклонение оси ствола такой башни от вертикали допускается не более  $1/1000$  высоты контролируемого сечения над фундаментом. Отклонение оси ствола и поясов мачты от вертикали допускается не более  $1/1500$  высоты выверяемой точки над фундаментом.

Типовая исполнительная схема результатов контроля вертикальности ствола опоры представлена на рис. 69, а.

Контроль прямолинейности поясов мачты или башни выполняется с целью выявления стрелы прогиба этих конструкций, которая не должна превышать  $1/750$  длины выверяемого участка. Измерения производятся последовательно по всем наружным граням опоры. Методика измерений аналогична измерениям, выполняемым при контроле вертикальности. Пример типовой исполнительной схемы результатов контроля прямолинейности двух поясов башни четырёхугольной формы представлен на рис. 69, б.

Контроль геометрии решетки башни выполняется с целью выявления деформаций диагональных раскосов решетки по смещениям центральных фасонки. Предельное смещение деталей фасонки не должно превышать  $1/750$  высоты секции. Методика измерений аналогична измерениям, выполняемым при контроле вертикальности башни. Дополнительными являются наведения на детали фасонки, выполняемые по всем четырем наружным граням ствола. Пример типовой исполнительной схемы результатов контроля решетки ствола башни четырехугольной формы представлен на рис. 70.

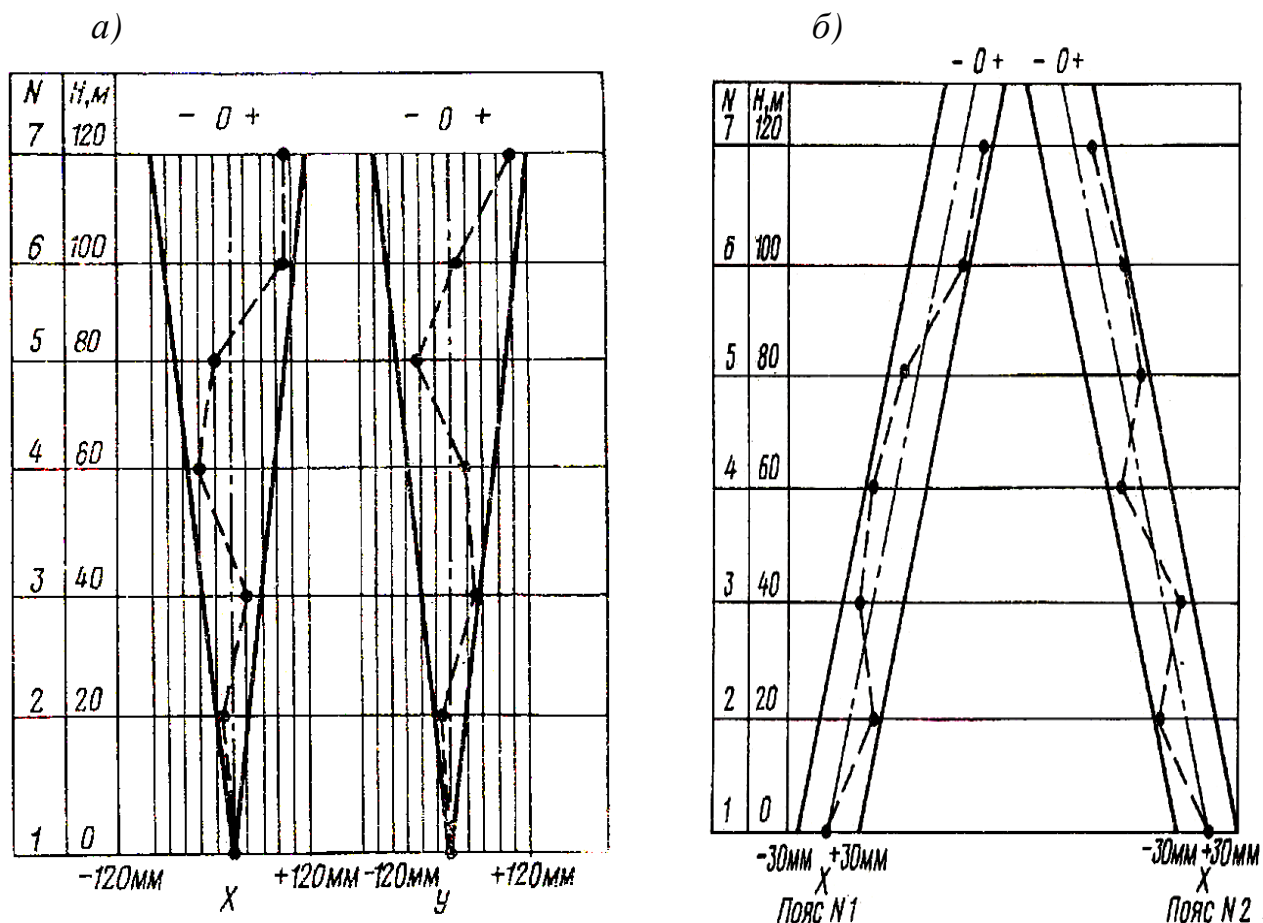


Рис. 69. Исполнительные схемы вертикальности ствола (а) и прямолинейности поясов башни четырехугольной формы (б)

Для сооружений типа телебашни можно использовать упрощенный способ направлений. Его сущность заключается в том, что вначале визируют на верхнюю точку башни и на горизонтальном круге теодолита устанавливают  $0^{\circ}00'$ . Затем визируют на нижние видимые точки её левой и правой опор и берут отсчёты по горизонтальному кругу Л и П. Действия выполняют при КЛ и КП. Разность средних отсчётов  $[(360^{\circ} - Л) - П]$  будет сразу соответствовать крену башни в угловой мере.

Что касается способа зенитных расстояний [94], то возможности его применения ограничиваются необходимостью оборудования сооружения четырьмя марками на верхнем и четырьмя кронштейнами для установки на них теодолита на цокольном сечениях и применения специальных насадок на трубу теодолита.

Аналогичные ограничения можно отнести и к предложению использовать вместо теодолита фотокамеру для периодического фотографирования снизу вверх марки закреплённой на верху трубы [41]. Кроме того, точность этих двух способов в значительной степени зависит от влияния вертикальной рефракции и колебания изображений марок, вызванных конвекционными токами воздуха от солнечного и внутреннего нагрева.

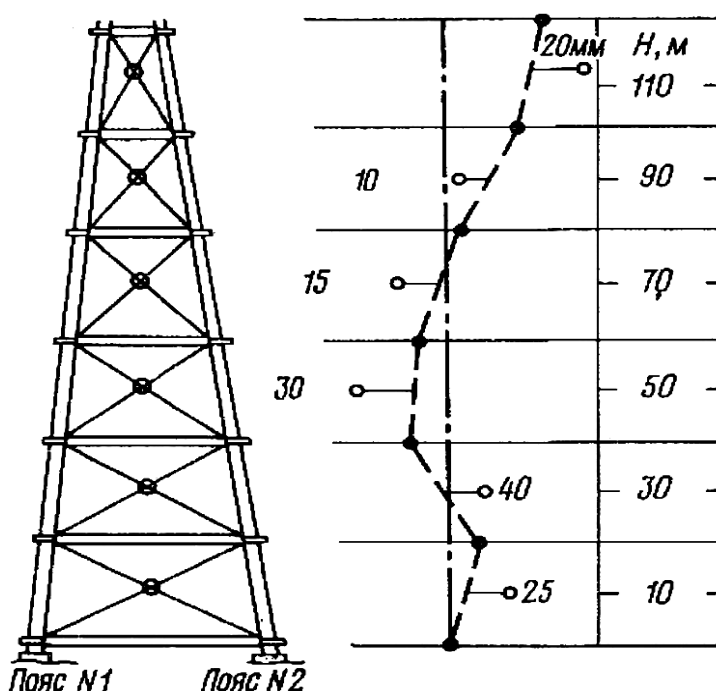


Рис. 70. Исполнительная схема решётки ствола башни

#### 1.4.4. Способ координат (засечек)

Способ координат в том виде, в котором он рассмотрен в работе [94], представляет собой прямую угловую засечку, с помощью которой в начальном цикле наблюдений определяют прямоугольные координаты центров нижнего и верхнего (а при необходимости и промежуточных) сечений сооружения, а затем периодически определяют координаты только верхнего (и промежуточных) сечений.

Он заключается в том, что с геодезических пунктов *I* и *II* (с известными координатами) путём измерения, например, горизонтальных

углов 1 и 2 на хорошо заметную точку В на верху сооружения, определяют координаты  $x$  и  $y$  этой точки (рис. 71). Для контроля можно дополнительно измерить углы 3, 4, 5 и 6, используя пункт III. По разности координат

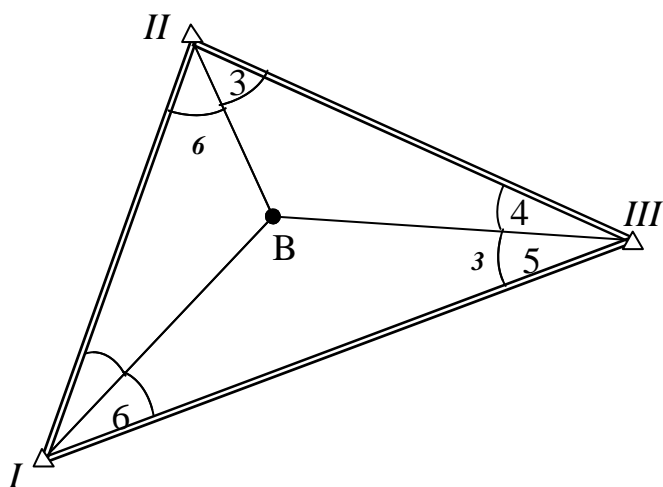


Рис. 71. Способ прямых угловых засечек

между начальным и последующими циклами наблюдений находят величину и направление крена за истекший период.

Если имеется возможность определять пространственные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  верхней В и нижней Н точек сооружения, которые должны лежать на одной отвесной линии, то угол  $\gamma$  крена сооружения вычисляют по формуле:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{(x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2}}{z_B - z_H}, \quad (72)$$

где  $x_B$ ,  $y_B$ ,  $z_B$  и  $x_H$ ,  $y_H$ ,  $z_H$  – координаты верхней и нижней точек сооружения.

Покажем (рис. 72) методику использования прямой угловой засечки на примере наблюдений за креном дымовой трубы Сормовской ТЭЦ высотой 155 м [125].

На территории ТЭЦ были закреплены два постоянных знака I и II на расстоянии 196,73 м друг от друга. Направление базиса II – I совпадает с направлением оси  $x$  условной системы координат. Методика наблюдений в отдельном цикле заключалась в измерении теодолитом Т10 горизонтальных углов  $\beta_I$  и  $\beta_{II}$  между базисной линией и образующими трубы на верхнем её срезе и на высоте 20 м от подошвы фундамента.

По результатам наблюдений вычисляли координаты центров верхнего и нижнего наблюдаемых сечений трубы. По ним определяли частный крен  $K'$ , его направление и находили  $K$  – полный крен в данном цикле наблюдений по известной формуле  $K = K'H/h$ , где  $H$  – высота трубы от подошвы фундамента;  $h$  – превышение центра верхнего сечения над центром нижнего наблюдаемого сечения.

Ошибка определения полного крена зависит от ошибки частного крена, на которую в свою очередь оказывают влияние ошибки определения координат центров верхнего и нижнего наблюдаемых сечений. Координаты этих центров определяются независимо друг от друга, а точность положения этих центров наиболее полно характеризуется подерой эллипса СКО. Такая поде-

ра, в отличие от эллипса, выражает закон распределения одномерных случайных величин по различным направлениям.

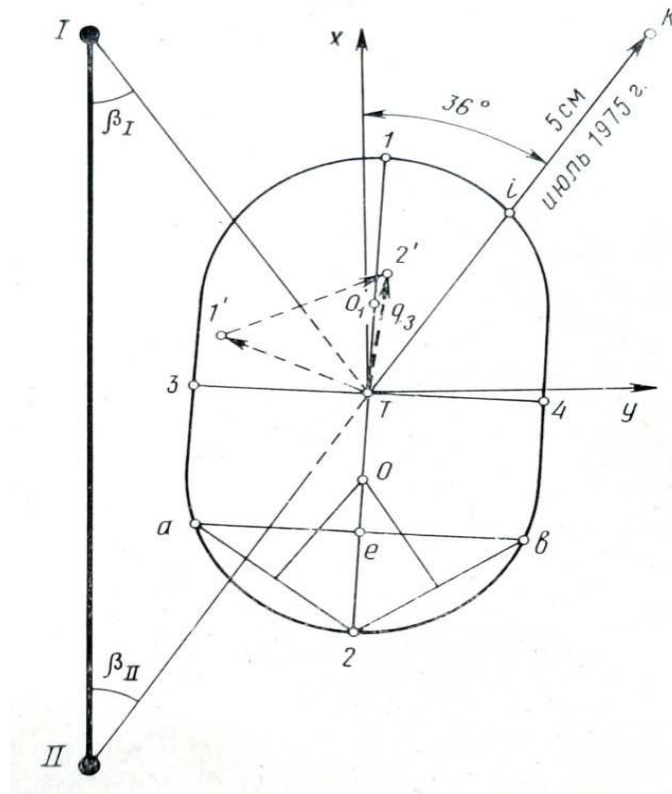


Рис. 72. Схема засечки и её подера

Элементами подеры являются большая полуось  $A$ , малая полуось  $B$  и угол  $\varphi$  большой оси. Если координаты центров верхнего и нижнего сечений определяются с равной точностью, то элементы их подер будут одинаковы. Выполнив операцию квадратического сложения подер верхнего и нижнего центров и используя принцип  $t$  – кратного подобного увеличения, получим элементы  $A_0$ ,  $B_0$  и  $\varphi_0$  результирующей подеры:

$$A_0 = A \sqrt{2} \frac{H}{h} t, \quad B_0 = B \sqrt{2} \frac{H}{h} t, \quad \varphi_0 = \varphi, \quad (73)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $\varphi$  – элементы подеры центра верхнего (нижнего) наблюдаемого сечения;  $t$  – нормированный множитель, зависящий от заданной вероятности получения данных о крене сооружения.

Таким образом, задача оценки точности определения полного крена сводится в основном к определению элементов подеры центров верхнего (нижнего) наблюдаемых сечений. Эти элементы вычисляются по формулам, приведенным в работе [126]:

$$A^2 = \frac{2m_{\beta}^2}{[q^2] - q_3}, \quad B^2 = \frac{2m_{\beta}^2}{[q^2] + q_3}, \quad \varphi' = \frac{1}{2} \arctg \frac{[q^2 \sin 2\alpha]}{[q^2 \cos 2\alpha]}, \quad (74)$$



где  $m_{\beta}$  – СКО измерения углов;  $\alpha_i$  – дирекционные углы направлений засечки;  $[q^2]$  – сумма квадратов градиентов сторон засечки;  $q_3$  – замыкающая квадратического полигона;  $\varphi'$  – румб, по величине и названию которого вычисляют дирекционный угол  $\varphi$  большой полуоси подеры.

В свою очередь градиенты и замыкающую вычисляют по формулам:

$$q_i = \rho/S_i, (q_3)^2 = [q^2 \sin 2\alpha]^2 + [q^2 \cos 2\alpha]^2, \quad (75)$$

где  $S_i$  – длины сторон засечки, которые могут быть определены графически со схемы засечки;  $\rho'' = 206265''$ .

Необходимые данные для вычислений по формулам (74, 75) приведены в табл. 34.

Т а б л и ц а 34

### Исходные данные засечки

Направления засечки	$\alpha_i$ , градус	$S_i$ , м	$q_i$ , с/см	$q_i^2$ , с <sup>2</sup> /см <sup>2</sup>	$2\alpha_i$ , градус
<i>I – T</i>	147,5	121,7	16,95	287,26	295
<i>II – T</i>	34,5	116,0	17,79	316,40	69

В результате вычислений при  $m_{\beta} = 10''$  получены следующие значения:  $q_3 = 237,39 \text{ с}^2/\text{см}^2$ ,  $A = 0,74 \text{ см}$ ,  $B = 0,49 \text{ см}$ ,  $\varphi = 4^\circ 14'$ . Следует отметить, что такие аргументы как  $q_3$  и  $\varphi$  могут быть найдены путём элементарных графических построений так называемого квадратического полигона  $T-1'-2'$  со сторонами  $q_i^2$ , дирекционные углы которых  $2\alpha_i$ . В этом полигоне  $T-2' = q_3$ , а её дирекционный угол равен  $2\varphi$ .

По формулам (73), приняв, например,  $t = 2$ , вычисляем элементы результирующей подеры, характеризующей ошибку определения полного крена с вероятностью 0,955:

$$A_0 = 0,74\sqrt{2} \frac{155}{135} 2 = 2,40 \text{ см}; B_0 = 0,49\sqrt{2} \frac{155}{135} 2 = 1,59 \text{ см}; \varphi_0 = 4^\circ 14'.$$

Подеру можно построить различными способами [126]. Рассмотрим один из них (рис. 72). Проводим через точку  $T$  прямую, дирекционный угол которой равен  $4^\circ 14'$ . На ней откладываем в выбранном масштабе отрезки  $T-1 = T-2 = 2,40 \text{ см}$ , а по перпендикулярному направлению – отрезки  $T-3 = T-4 = 1,59 \text{ см}$ . Заметим, что расстояния  $1-4 = 1-3 = 2-4 = 2-3 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = M$  – средней квадратической (круговой, радиальной) ошибке. В точке  $e$  восстанавливаем перпендикуляр  $av$  к большой полуоси подеры, причём  $Te = ea = ev = M/2$ . По точкам  $a$ ,  $2$  и  $v$  находим центр окружности  $O$ , а также симметричный ему  $O_1$ . Проведя окружности радиусом  $O-2 = O_1-1$  и плавно соединив их с точками  $3$  и  $4$ , получаем подеру. При неизменной методике на-

блюдений в каждом цикле такие вычисления и построения достаточно выполнить один раз.

Из других способов построения подеры отметим механический способ с помощью приборов типа «Подерограф» или на ПК с использованием специальной программы.

Оценка точности определения полного крена с помощью подеры осуществляется следующим образом. Пусть в одном из циклов наблюдений был определён полный крен  $K = 5$  см с дирекционным углом  $36^\circ$ . Проводим линию  $TK = 5$  см под углом  $36^\circ$  к оси  $x$  и измеряем отрезок  $T-i$ , который в масштабе построений оказался равным 2,2 см. Следовательно, полный крен в данном цикле измерений был определён с ошибкой 2,2 см.

В общем случае с заданной вероятностью можно судить о полном крене, если его величина  $K_i \geq R_i$ , где  $R_i$  – радиус-вектор подеры по направлению крена. При  $K_i < R_i$  нельзя судить о полном крене с заданной степенью вероятности, поскольку ошибка определения превышает его величину. Следовательно, при расчётах требуемой точности измерения горизонтальных углов  $\beta_I$  и  $\beta_{II}$  необходимо исходить из величины минимального крена, который необходимо фиксировать в результате наблюдений с заданной вероятностью.

Особый интерес представляет расположение точек так называемой  $E$ -оптимальной опорной сети (Тамутис З.П. Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М.: Недра, –1979. –133 с.), для которой подера трансформируется в круг. В этом случае ошибки точек по любому направлению будут одинаковы. Из формул (74) видно, что  $A = B$  в том случае, если  $q_3 = 0$ . Эта задача может быть решена различными способами [126], причём наиболее просто с помощью построения и анализа квадратического полигона.

Одним из способов является выбор соответствующего расположения опорных пунктов. Так, подера однократной угловой засечки трансформируется в круг, если угол засечки равен  $90^\circ$ , а стороны засечки одинаковы. В этом случае точка  $2'$  квадратического полигона  $T-1'-2'$  совпадает с точкой  $T$ , следовательно  $q_3 = 0$ .

Если наблюдения следует производить более чем с двух пунктов, то на плане необходимо наметить возможные направления засечки и определить их дирекционные углы. Затем на схеме провести через точку  $T$  линии под двойными дирекционными углами. Варьируя расстояния (квадраты градиентов), число и сочетание направлений, добиваются замкнутого квадратического полигона. По квадратам градиентов определяют длины сторон засечки.

Другим способом  $E$ -оптимизации является включение в сеть дополнительных измерений. Например, если положение некоторых опорных пунктов фиксировано, то по длине и направлению замыкающей квадратического полигона можно вычислить параметры дополнительного направления засечки для включения его в наблюдения. В нашем примере подера трансформирует-

ся в круг, если есть возможность к существующей схеме засечки добавить ещё одно направление, дирекционный угол которого  $2\alpha_3 = \varphi_0 - 90^\circ = 274^\circ 14'$ , а длина стороны  $S_3 = 206265''/\sqrt{237,39} = 133,87$  м.

*E*-оптимальная сеть позволяет довольно просто решать вопрос о необходимой точности измерения горизонтальных углов. В каждом конкретном случае специалисту, производящему наблюдения, следует исходить из заданной наименьшей величины крена, которую необходимо фиксировать с требуемой степенью достоверности. Тогда, приняв радиус трансформированной в круг подеры равным  $K_{min}$ , на основании формул (73, 74) можно определить требуемую точность измерения горизонтальных углов засечки:

$$m_\beta = \frac{K_{min}\sqrt{[q^2]}h}{2Ht} \quad (76)$$

Использование способа координат для определения крена башен треугольной формы предлагается осуществлять по следующей схеме [143]. Вначале определяют координаты вершин нижнего и верхнего треугольников и находят координаты ортоцентров этих треугольников.

По координатам ортоцентров получают всю необходимую информацию. Координаты вершин треугольников могут определяться способом засечек, электронными тахеометрами или (в перспективе, согласно работе [116]) GPS-приемниками. На рис. 73 показан способ прямых угловых засечек.

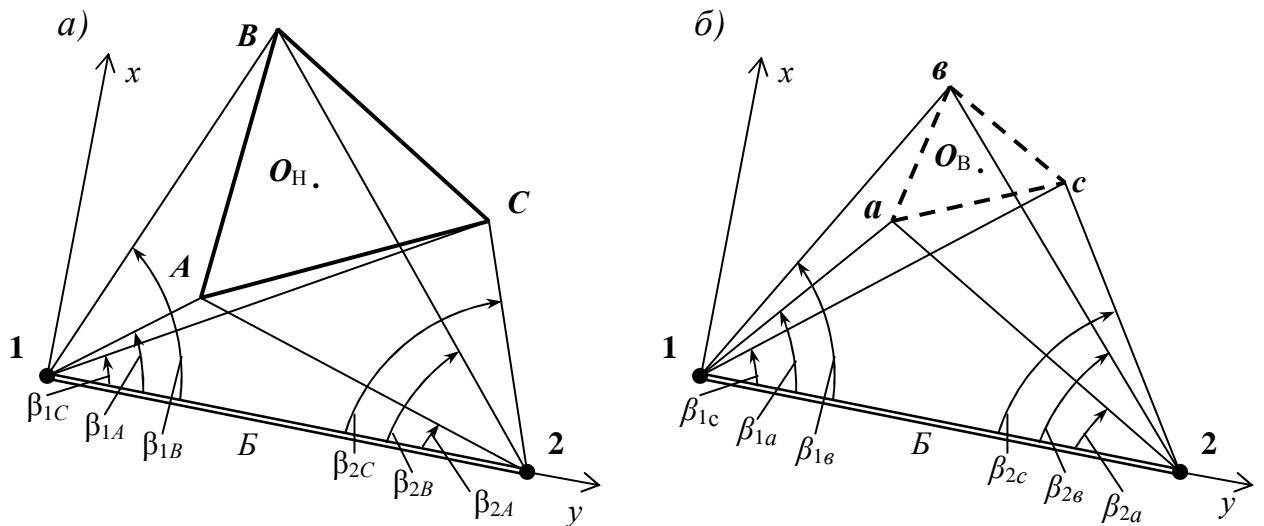


Рис. 73. Схемы к определению координат нижних (а) и верхних (б) точек башни

Для выполнения способа засечек разбивают рядом с сооружением базис 1-2 известной длины  $B$ . Точки 1 и 2 располагают произвольно на расстоянии от башни не менее полутора – двух  $H$  ( $H$  – высота башни) так, чтобы с них была обеспечена видимость на нижние  $ABC$  и верхние  $abc$  точки, а углы в треугольниках засечек находились в пределах  $30-120^\circ$ .

С точек **1** и **2** измеряют теодолитом горизонтальные углы  $\beta_{1C}$ ,  $\beta_{1A}$ ,  $\beta_{1B}$  и  $\beta_2$ ,  $\beta_{2B}$ ,  $\beta_{2A}$  на нижние точки **ABC** и  $\beta_{1c}$ ,  $\beta_{1a}$ ,  $\beta_{1b}$  и  $\beta_{2c}$ ,  $\beta_{2b}$ ,  $\beta_{2a}$  на верхние точки **abc**.

Дальнейшие вычисления ведут в условно выбранной системе прямоугольных координат, в которой направление оси  $x$  перпендикулярно базису **1-2**, ось  $y$  совпадает с направлением базиса, начало координат выбирается в точке **1** ( $X_1 = 0$ ,  $Y_1 = 0$ ), а точка **2** имеет координаты  $X_2 = 0$ ,  $Y_2 = B$ . Исходя из этого формулы для вычисления прямоугольных координат нижних и верхних точек башни будут иметь вид:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{B \sin \beta_{2A} \sin \beta_{1A}}{\sin (\beta_{1A} + \beta_{2A})}, & X_B &= \frac{B \sin \beta_{2B} \sin \beta_{1B}}{\sin (\beta_{1B} + \beta_{2B})}, & X_C &= \frac{B \sin \beta_{2C} \sin \beta_{1C}}{\sin (\beta_{1C} + \beta_{2C})}, \\ Y_A &= \frac{B \sin \beta_{2A} \cos \beta_{1A}}{\sin (\beta_{1A} + \beta_{2A})}, & Y_B &= \frac{B \sin \beta_{2B} \cos \beta_{1B}}{\sin (\beta_{1B} + \beta_{2B})}, & Y_C &= \frac{B \sin \beta_{2C} \cos \beta_{1C}}{\sin (\beta_{1C} + \beta_{2C})}, & (77) \\ X_a &= \frac{B \sin \beta_{2a} \sin \beta_{1a}}{\sin (\beta_{1a} + \beta_{2a})}, & X_b &= \frac{B \sin \beta_{2b} \sin \beta_{1b}}{\sin (\beta_{1b} + \beta_{2b})}, & X_c &= \frac{B \sin \beta_{2c} \sin \beta_{1c}}{\sin (\beta_{1c} + \beta_{2c})}, \\ Y_a &= \frac{B \sin \beta_{2a} \cos \beta_{1a}}{\sin (\beta_{1a} + \beta_{2a})}, & Y_b &= \frac{B \sin \beta_{2b} \cos \beta_{1b}}{\sin (\beta_{1b} + \beta_{2b})}, & Y_c &= \frac{B \sin \beta_{2c} \cos \beta_{1c}}{\sin (\beta_{1c} + \beta_{2c})}. \end{aligned}$$

В равносторонних треугольниках **ABC** и **abc** координаты ортоцентров  $O_H$  и  $O_B$  находят как:

$$\begin{aligned} X_{OH} &= \frac{X_A + X_B + X_C}{3}, & Y_{OH} &= \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}, \\ X_{OB} &= \frac{X_a + X_b + X_c}{3}, & Y_{OB} &= \frac{Y_a + Y_b + Y_c}{3}. \end{aligned} \quad (78)$$

Если СКО определения координат точек **ABC** и **abc** соответственно равны между собой, то есть  $m_{X_A, Y_A} = m_{X_B, Y_B} = m_{X_C, Y_C} = m_{X, Y}$ ,  $m_{X_a, Y_a} = m_{X_b, Y_b} = m_{X_c, Y_c} = m_{x, y}$ , то СКО координат ортоцентров составят:

$$\begin{aligned} m_{X_{OH}} &= \frac{m_x}{\sqrt{3}}, & m_{Y_{OH}} &= \frac{m_y}{\sqrt{3}}, \\ m_{X_{OB}} &= \frac{m_x}{\sqrt{3}}, & m_{Y_{OB}} &= \frac{m_y}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (79)$$

По координатам ортоцентров  $O_H$ ,  $O_B$  и вершин  $ABC$ ,  $abc$  путём решения обратных геодезических задач определяют величину крена  $K$ , его направление и угол скручивания  $\varphi$ .

При необходимости координаты вершин треугольников и их ортоцентров могут быть пересчитаны в другую систему координат по существующим формулам перехода из одной системы координат в другую.

На рис. 74 приведен пример одной из разработанных нами на базе Microsoft Excel программ для обработки результатов измерений, получаемых способом прямоугольных координат [131].

Для этого достаточно ввести в ПК длину базиса  $B$  и 12 измеренных углов. Программа вычисляет координаты каждой вершины треугольников  $ABC$  и  $abc$ , координаты ортоцентров, величину крена и его направление и дает геометрическую интерпретацию положения верхнего треугольника относительно нижнего и их ортоцентров.

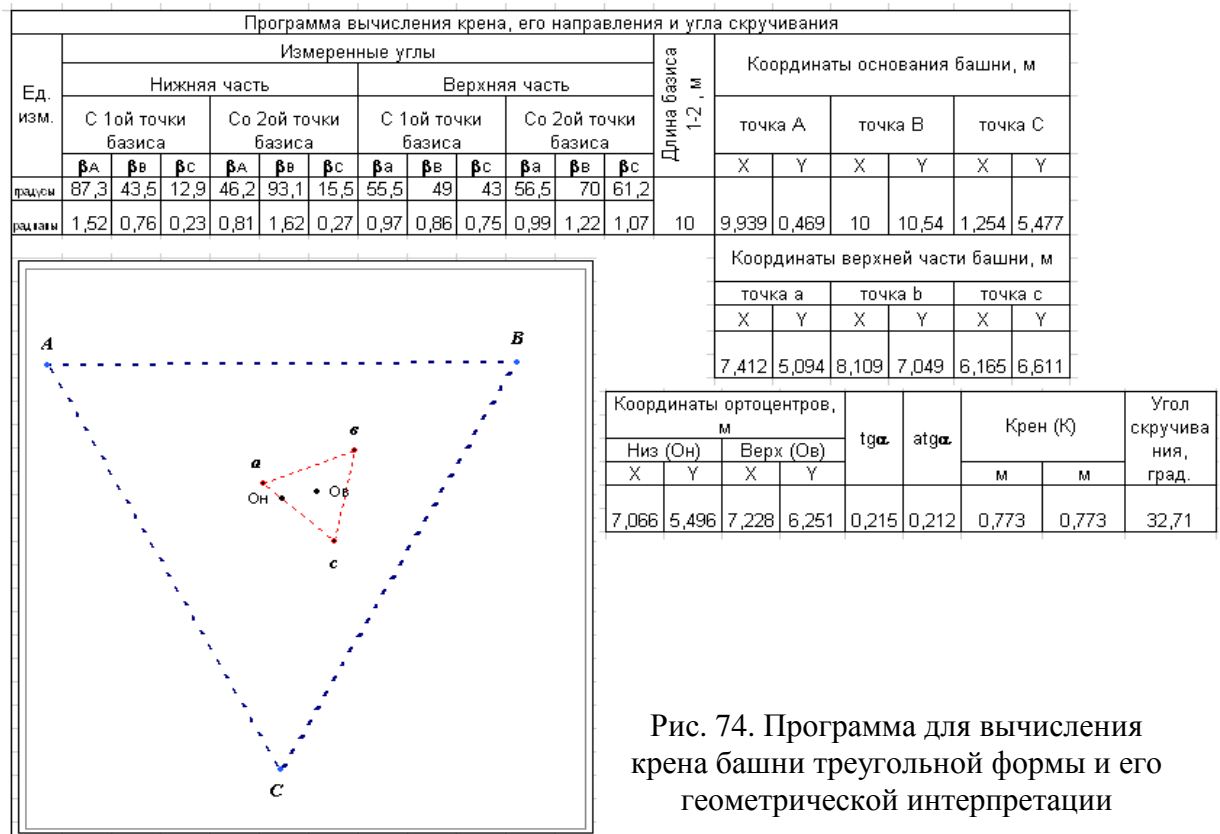


Рис. 74. Программа для вычисления крена башни треугольной формы и его геометрической интерпретации

В работе [27] также описана в Excel программа вычисления по известным формулам результатов измерения прямой угловой засечкой геометрии высоких стальных трёхгранных сооружений с одновременной геометрической интерпретацией крена, непрямолинейности отдельных элементов сооружения и его кручения.

Крен трубы  $K$  и его направление (рис. 75) можно также найти путём простых графических построений. Для этого достаточно на осях прямоуголь-

ной системы координат  $XO_HY$  отложить в крупном масштабе отрезки  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  с учётом их знака, равные соответственно разностям  $X_{OH} - X_{OB}$  и  $Y_{OH} - Y_{OB}$ , и измерить величину и направление крена.

Для упрощения решения прямой угловой засечки можно использовать приведенные в работах [69, 70] формулы. Их сущность заключается в том, что, зная координаты  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$  концов базиса засечки  $1-2 = b$  и дирекционные углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с пунктов базиса 1 и 2 на определяемый пункт Т, можно вычислить координаты  $x_T$  и  $y_T$ :

$$x_T = F_2 \cos \alpha_1 - F_1 \cos \alpha_2, \quad y_T = F_2 \sin \alpha_1 - F_1 \sin \alpha_2, \quad (80)$$

$$F_i = (y_i \cos \alpha_i - x_i \sin \alpha_i) / \sin (\alpha_1 - \alpha_2), \quad i = 1, 2.$$

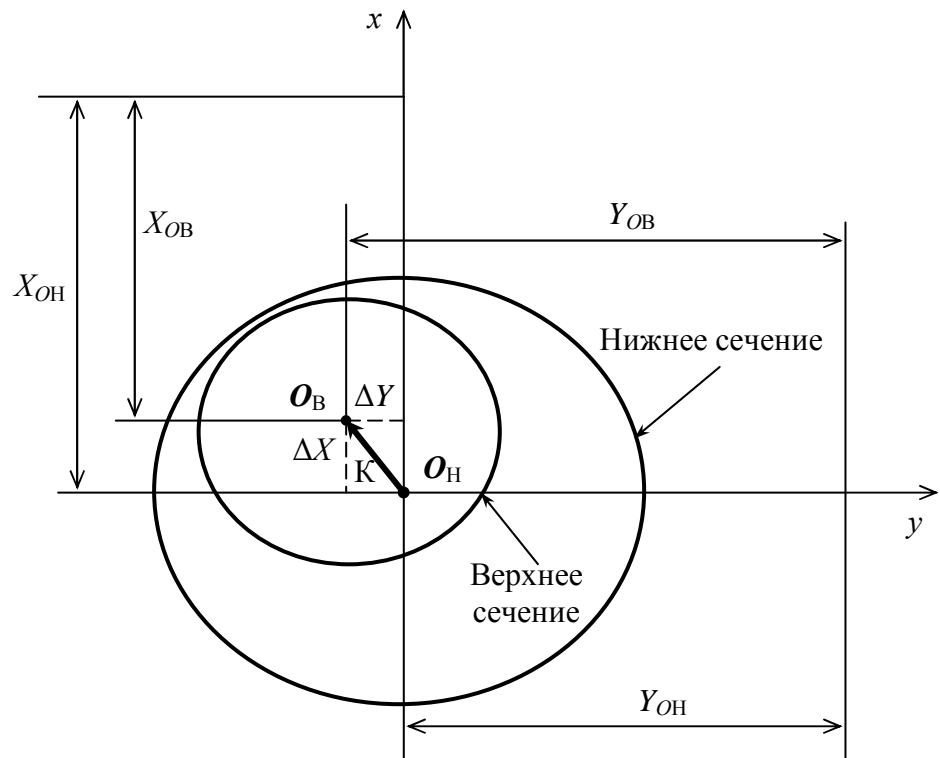


Рис. 75. Схема к графическому способу определения крена

Наш многолетний опыт определения крена дымовых труб промышленных предприятий и ТЭЦ Нижегородской области показал, что ввиду застроенности их территории все работы производятся, как правило, в условной системе прямоугольных координат.

В связи с этим, с целью максимального упрощения формул (80), предлагается за начало координат условной системы принимать точку 1 ( $x_1 = 0, y_1 = 0$ ), а направление базиса 1-2 совмещать с положительным или отрицательным направлением осей  $x$  или  $y$  такой условной системы (рис.

76). В этом случае получим  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = (y_2 \cos \alpha_2 - x_2 \sin \alpha_2) / \sin (\alpha_1 - \alpha_2)$ ,  $x_T = F_2 \cos \alpha_1$ ,  $y_T = F_2 \sin \alpha_1$ , где в зависимости от варианта  $x_2 = 0, y_2 = b$ ;  $x_2 = b, y_2 = 0$ ;  $x_2 = 0, y_2 = b$ ;  $x_2 = b, y_2 = 0$ .

В соответствии с этим было выполнено знаковое моделирование [159], где в качестве засечки фигурировал равносторонний треугольник со стороной равной 150 м (рис. 76).

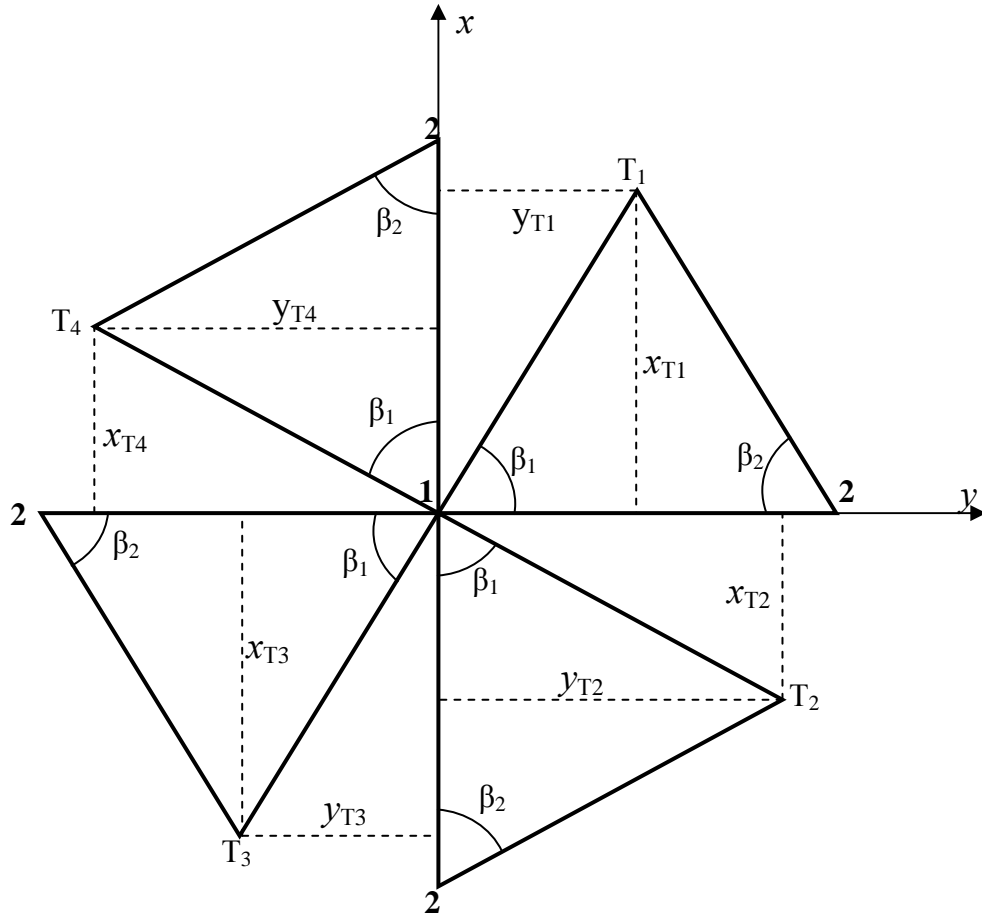


Рис. 76. Оптимальные варианты ориентирования базиса засечки

Для этого на базе Microsoft Excel для любой координатной системы была разработана программа, в которой достаточно ввести в ПК значения координат точек базиса засечки и дирекционных углов двух сторон этой засечки, по которым программа вычисляет координаты точки Т. Полученные результаты моделирования представлены в табл. 35.

Т а б л и ц а 35

**Результаты моделирования однократных угловых засечек**

Вариант	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	F1	F2	x	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

T <sub>1</sub>	0	0	0	+150	30	330	0	150	129,904	75,000
T <sub>2</sub>	0	0	-150	0	120	60	0	150	-75,000	129,904
T <sub>3</sub>	0	0	0	-150	210	150	0	150	-129,904	-75,000
T <sub>4</sub>	0	0	+150	0	300	240	0	150	75,000	-129,904

Координаты точек T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub> и T<sub>4</sub> на рис. 76 были также определены графическим способом, которые полностью совпали с таковыми в табл. 35.

В соответствии с табл. 35 формулы (80) можно представить в виде:

$$x_{T_{1,3}} = \frac{bc \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \pm 0,866 \times b, \quad y_{T_{1,3}} = \frac{bc \sin \alpha_2 \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \pm 0,5 \times b, \quad (81)$$

$$x_{T_{2,4}} = \frac{b \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \mp 0,5 \times b, \quad y_{T_{2,4}} = \frac{b \sin \alpha_2 \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \pm 0,866 \times b,$$

где верхние знаки перед коэффициентом  $b$  (плюс или минус) относятся к вариантам 1 и 2, а нижние – к вариантам 3 и 4. Действительно, как следует из рис. 76, абсолютные значения  $|x_{T_{1,3}}| = |y_{T_{2,4}}|$  равны между собой и являются высотами треугольников, которые равны по модулю половине базиса умноженного на  $\text{tg}60^\circ$ , а  $|y_{T_{1,3}}| = |x_{T_{2,4}}|$  просто равны по модулю половине базиса.

Что касается определения дирекционных углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , то для этого на местности необходимо измерить горизонтальные углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (рис. 76). Тогда, применительно к рис. 76, дирекционные углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  могут быть вычислены по формулам, приведенным в табл. 36.

Т а б л и ц а 36

### Дирекционные углы засечки

Вариант	$\alpha_1$	$\alpha_2$
T <sub>1</sub>	$90^\circ - \beta_1$	$270^\circ + \beta_2$
T <sub>2</sub>	$180^\circ - \beta_1$	$\beta_2$
T <sub>3</sub>	$270^\circ - \beta_1$	$90^\circ + \beta_2$
T <sub>4</sub>	$360^\circ - \beta_1$	$180^\circ + \beta_2$

Причём, если сооружение круглого сечения, то визирование рекомендуется выполнять по двум касательным (слева Л и справа П) к верхнему и нижнему сечению, получая два значения  $\beta_L$  и  $\beta_P$ . Средние значения  $\beta = (\beta_L + \beta_P)/2$  из этих измерений принимают за направление соответственно на центр верхнего и нижнего наблюдаемого сечения.

В случае, относящемся к рис. 76, СКО координат в зависимости от варианта будут равны:

$$m_{x_{1,3}} = 0,866 m_b, \quad m_{y_{1,3}} = 0,5 m_b,$$



(82)

$$m_{x_{2,4}} = 0,5m_b, \quad m_{y_{2,4}} = 0,866m_b,$$

где  $m_b$  – СКО определения длины базиса засечки.

Однако формулы (82) дают лишь приблизительную оценку точности, поскольку они не учитывают СКО угловых измерений. В общем случае, исходя из формулы (81) с позиций теории ошибок с использованием ошибки функции общего вида, можно получить формулы оценки точности координат точки Т, которые будут иметь сложный вид. Вместо этого рекомендуется использовать методику геометрической интерпретации ошибки положения точки Т изложенную в монографии [126].

Как было отмечено выше, сущность этой методики заключается в том, что ошибка определения координат точки Т наиболее полно характеризуется подерой эллипса СКО, элементы которой  $A$ ,  $B$  и  $\varphi$  вычисляются по формулам (74) и (75). Исходные данные и результаты вычислений по этим формулам для однократных засечек на рис. 76 при принятом значении  $m_{\beta,\alpha} = 10''$  приведены в табл. 37.

Для этого на базе Microsoft Excel была разработана программа, в которой достаточно ввести в ПК значения дирекционных углов и длин сторон засечек, по которым программа вычисляет большую полуось  $A$ , малую полуось  $B$  и румб  $\varphi'$ .

Т а б л и ц а 37

### Исходные данные и характеристика однократных угловых засечек

Вариант	$2\alpha_i, \circ$	$s_i, \text{ м}$	$q_i, \text{ с/см}$	$q_i^2, \text{ с}^2/\text{см}^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	$q_3, \text{ с}^2/\text{см}^2$	$A, \text{ см}$	$B, \text{ см}$	$\varphi', \circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Т <sub>1</sub>	60	150	13,751	189,09	163,76	94,55	189,09	1,03	0,59	-0
	300	150	13,751	189,09	-163,76	94,55				
Т <sub>2</sub>	240	150	13,751	189,09	-163,76	-94,55	189,09	1,03	0,59	-0
	120	150	13,751	189,09	163,76	-94,55				
Т <sub>3</sub>	60	150	13,751	189,09	163,76	94,55	189,09	1,03	0,59	+0
	300	150	13,751	189,09	-163,76	94,55				
Т <sub>4</sub>	240	150	13,751	189,09	-163,76	-94,55	189,09	1,03	0,59	-0
	120	150	13,751	189,09	163,76	-94,55				

Большая полуось подеры  $A$  всегда располагается внутри острого угла засечки  $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ . Если угол засечки тупой, то  $A$  располагается внутри острого угла, являющегося дополнением  $\gamma$  до  $180^\circ$ . В то же время при определении румба  $\varphi'$  по формуле (74) для всех четырёх вариантов на рис. 76 будем получать положительный или отрицательный нуль (графа 11 табл. 37). Наглядный переход от такого нуля к удвоенному дирекционному углу большой полуоси  $2\varphi$  в градусной мере можно получить путём элементарных графиче-

ских построений квадратического полигона  $T-1'-2'$  со сторонами  $q_i^2$ , дирекционные углы которых  $2\alpha_i$  (рис. 77).

В таком полигоне  $T-2' = q_3$  является замыкающей полигона, а её дирекционный угол равен  $2\varphi$ , что наглядно иллюстрируется на рис. 77. Причём замыкающая всегда имеет направление от определяемой точки  $T$  к конечной точке квадратического полигона (на рис. 77 это точка  $2'$ ).

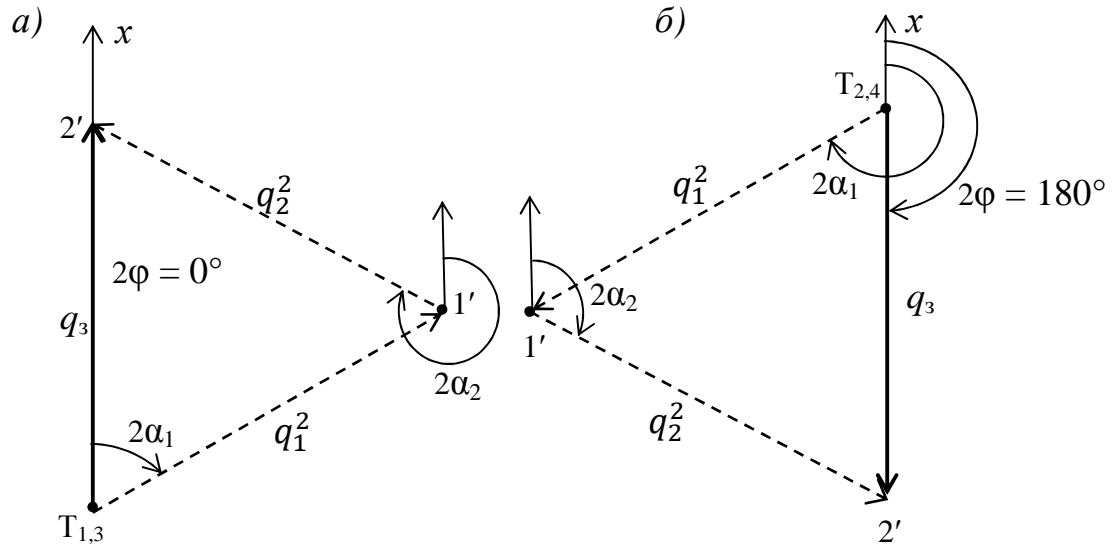


Рис. 77. Квадратические полигоны однократных засечек для вариантов 1,3 (а) и 2,4 (б)

Следует подчеркнуть, что периметр полигона  $\Pi = [q_i^2]$  и его замыкающая  $q_3$  обладают важными свойствами. Во-первых, они могут быть использованы для определения полуосей  $A$  и  $B$  эллипса СКО или его подеры, а проекции замыкающей  $q_x$  и  $q_y$  на оси координат – для вычисления дирекционного угла  $\varphi$  большой полуоси:

$$A^2 = \frac{2m_{\beta,\alpha}^2}{\Pi - q_3}, \quad B^2 = \frac{2m_{\beta,\alpha}^2}{\Pi + q_3}, \quad 2\varphi' = \arctg \frac{q_y}{q_x}, \quad (83)$$

где  $2\varphi'$  – является румбом замыкающей полигона, причём название румба зависит от знаков  $q_x$  и  $q_y$ . По величине и названию румба определяют дирекционный угол  $2\varphi$  общеизвестным способом.

Во-вторых, зная периметр полигона и его замыкающую, можно вычислить радиус  $R$  и эксцентриситет  $e$  так называемой окружности СКО с внутренним или внешним эксцентриситетом, которая была в своё время предложена нами [126]. Её отличительной особенностью является то, что она может с успехом заменить такие, вообще говоря, довольно сложные по конфигурации эллипс или подеру, позволяя в то же время получать наглядно практически любую информацию о погрешности положения определяемого пункта.

Элементы окружности СКО связаны с полуосями  $A$  и  $B$  соотношениями  $R = 0,5(A + B)$ ,  $e = 0,5(A - B)$  или их можно вычислить по формулам:

$$R^2 = m_{\beta,\alpha}^2 \left( \frac{\Pi + \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad e^2 = m_{\beta,\alpha}^2 \left( \frac{\Pi - \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right). \quad (84)$$

Исходные данные и результаты вычислений по формулам (83, 84) для однократных засечек на рис. 76 по специально разработанной программе при принятом значении  $m_{\beta,\alpha} = 10''$  приведены в табл. 38.

Т а б л и ц а 38

### Оценка точности однократных угловых засечек

Вариант	$\Pi$ , $\text{с}^2/\text{см}^2$	$q_3$ , $\text{с}^2/\text{см}^2$	$A$ , см	$B$ , см	$R$ , см	$e$ , см	$m_x$ , см	$m_y$ , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_{1,3}$	378,18	189,09	1,03	0,59	0,81	0,22	1,03	0,59
$T_{2,4}$	378,18	189,09	1,03	0,59	0,81	0,22	0,59	1,03

Для построения окружности СКО с внутренним эксцентриситетом достаточно отложить от точки  $T$  по направлению замыкающей величину  $TO$ , равную эксцентриситету  $e$  (рис. 78).

Точка  $O$  является центром этой окружности сразу ориентированной относительно координатных осей и она делит диаметр 1-2 на  $T-1 = A$  и  $T-2 = B$ .

Проведя в общем случае через центр окружности  $O$  диаметр 1-2 этой окружности параллельно оси  $x$  (см. рис. 80,  $a$ ), получаем СКО положения точки  $T$  по осям координат  $m_x$  и  $m_y$  (графы 8, 9 табл. 38) как расстояния  $T-1$  и  $T-2$ . В наших частных примерах (рис. 78) диаметр 1-2 совпадает с осью  $x$ , поэтому для варианта 1, 3 СКО  $m_x = A = R + e$ ,  $m_y = B = R - e$ , а для варианта 2, 4 наоборот:  $m_x = B = R - e$ ,  $m_y = A = R + e$ .

Существует значительное количество работ, посвящённых вопросам  $A$ -,  $D$ -,  $E$ - и  $I$ -оптимизации геодезических сетей. Не вдаваясь в подробности, отметим, что для нас особый интерес представляет  $E$ -оптимальная конфигурация треугольника засечки, при которой эллипс и его подера трансформируются в круг, в котором  $A = B = m_{\beta,\alpha} \sqrt{\frac{2}{\Pi}} = R = m_x = m_y$ , а эксцентриситет  $e$  окружности СКО равен нулю. Это возможно, если согласно формул (83) замыкающая квадратического полигона равна нулю. Достичь этого можно в том случае, если угол однократной угловой засечки  $\gamma$  будет равен  $90^\circ$ , а стороны засечки равны между собой. В этом случае полигон представляет из себя прямую из двух наложенных друг на друга отрезков  $q_i^2$  противоположной

направленности, а точка  $2'$  квадратического полигона  $T-1'-2'$  совпадает с точкой  $T$ , следовательно  $q_3 = 0$ .

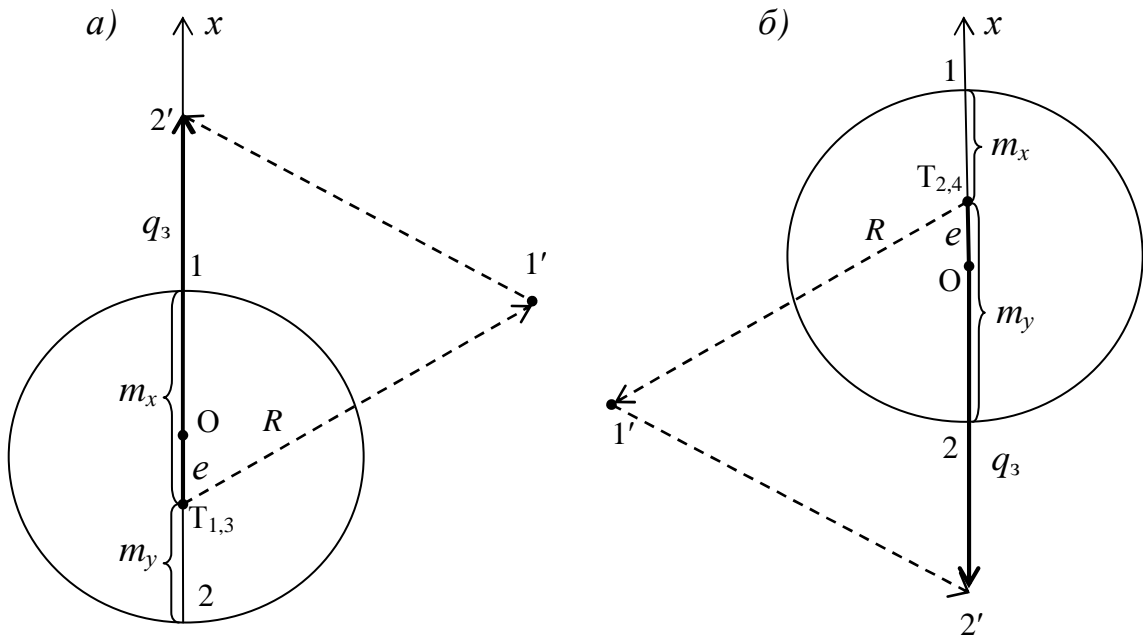


Рис. 78. Окружности СКО для вариантов 1,3 (а) и 2,4 (б)

В Руководстве [94] для наблюдений за креном высоких сооружений рекомендуется иметь не менее трёх определённым образом расположенных вокруг него пунктов. На практике, при наблюдении за сооружениями башенного типа способом прямой угловой засечки в условиях плотной застройки, бывает трудно выбрать такое местоположение этих пунктов, которое обеспечивало бы одновременно ряд условий. К таким условиям относятся: видимость не менее  $\frac{3}{4}$  высоты сооружения, выгодная геометрическая форма треугольников, взаимная видимость между соответствующими пунктами, расположение пунктов примерно на одинаковом удалении от сооружения на расстоянии порядка двух-трёх его высот и др.

Предположим, что местоположение дополнительной точки 5 (рис. 79) удовлетворяет перечисленным выше условиям, за исключением видимости между точками 2 и 5. В этом случае между этими точками можно проложить полигонометрический ход 2-3-4-5 и определить в принятой системе координаты точки 5.

Теперь достаточно измерить горизонтальные углы  $\Delta\alpha_{2-3}$  и  $\Delta\alpha_{5-4}$  и вычислить дирекционные углы:

$$\alpha_{2-T} = \alpha_{2-3} - \Delta\alpha_{2-3}, \quad \alpha_{5-T} = \alpha_{5-4} + \Delta\alpha_{5-4}, \quad (85)$$

в результате чего можно по формулам (80) определить координаты точки Т не только из дополнительного треугольника 2-5-Т, но также из треугольника 1-5-Т.

Для схемы на рис. 79 было выполнено знаковое моделирование, в котором дирекционные углы  $\alpha_{1-T}$ ,  $\alpha_{2-T}$ ,  $\alpha_{5-T}$  и координаты точек 1, 2, 5 были определены графически (в некоторых условных единицах). Результаты моделирования представлены в табл. 39.

Как следует из табл. 39, координаты точки Т, вычисленные из трёх треугольников по формулам (80), равны между собой и практически совпали с таковыми, определенными на рис. 79 графическим способом.

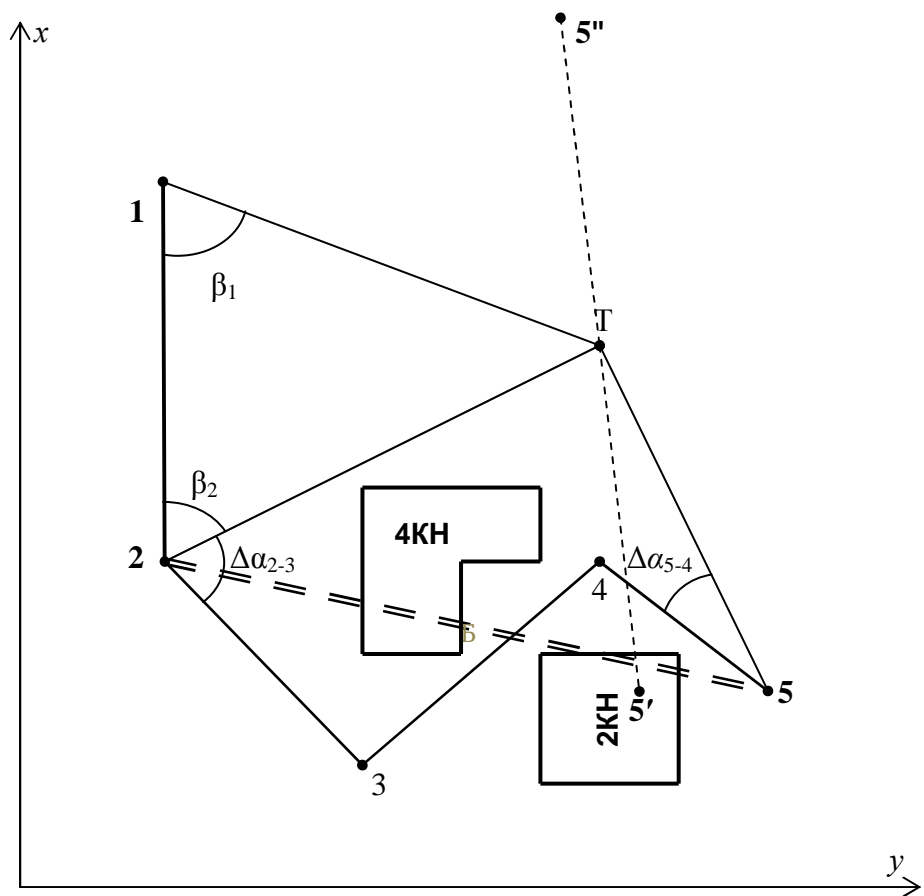


Рис. 79. Схема косвенного определения дирекционных углов засечки и оптимального расположения точки 5

Т а б л и ц а 39

### Результаты моделирования многократной прямой угловой засечки

Засечка	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	F1	F2	$x$	$y$
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-2-Т	129,5	70,1	77,1	70,1	112	61	-188,292	-43,040	107,409	124,778
2-5-Т	77,1	70,1	59,6	148,1	61	334	-33,4939	159,457	107,410	124,781
1-5-Т	129,5	70,1	59,6	148,1	112	334	-218,687	237,978	107,407	124,783

Исходные данные, где  $s_i$  определены графически со схемы на рис. 79 в некоторых условных единицах и результаты вычислений по приведенным выше формулам для оценки точности многократной угловой засечки при принятом значении  $m_{\beta,\alpha} = 10''$  приведены в табл. 40. При этом направление 2-Т в прямой угловой засечке должно участвовать в вычислениях дважды, поскольку сторона 2-Т является общей для двух треугольников 1-2-Т и 2-5-Т.

Т а б л и ц а 40

**Исходные данные и характеристика многократной угловой засечки**

Стороны	$2\alpha_i, ^\circ$	$s_i$	$q_i$	$q_i^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	$q_3$	$A$	$B$	$2\varphi', ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-Т	224	60,1	34,32	1177,9	-818,2	-847,3	10423	0,23	0,19	6,72 ЮЗ
2-Т	122	64,2	32,13	1032,2	875,4	-547,0				
2-Т	122	64,2	32,13	1032,2	875,4	-547,0				
5-Т	308	53,0	38,92	1514,6	-1193,5	932,5				
Сумма столбцов 5, 6, 7				4718,9	-261,0	-1008,8				

Как следует из табл. 40 суммы столбцов 6 и 7, представляющие собой числитель и знаменатель формулы (83), имеют оба знак минус, что соответствует третьей четверти прямоугольной системы координат, следовательно  $2\varphi = 180^\circ + 2\varphi' = 186,72^\circ$ . Графически получен тот же результат.

Исходные данные в условных единицах и результаты вычислений по формулам (83, 84) элементов окружности СКО для многократной угловой засечки на рис. 79 при принятом значении  $m_{\beta,\alpha} = 10''$  приведены в табл. 41. Полученные значения  $A$  и  $B$  в табл. 41 полностью совпадают со значениями  $A$  и  $B$  в табл. 40.

На рис. 80 представлен построенный в крупном масштабе квадратичский полигон многократной засечки. Обращаем внимание, что при построении такого полигона для прямой угловой многократной засечки градиент  $q_2^2$  участвует дважды, о чём было отмечено выше.

Т а б л и ц а 41

**Оценка точности многократной угловой засечки**

Засечка	П,	$q_3$	$A$	$B$	$R$	$e$	$m_x$	$m_y$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-2-5-Т	4718,73	1042,03	0,23	0,19	0,210	0,023	0,19	0,23

Для определения СКО по осям координат  $m_x$  и  $m_y$  следует провести через точку  $O$  диаметр 1-2 (рис. 80, а), тогда отрезок  $T-1 = m_x = 0,19$ , а  $T-2 = m_y = 0,23$ . Полученные графически СКО по осям координат практически не отличаются от  $A$  и  $B$ , поскольку диаметр 1-2 расположен в непосредственной близости от оси  $x$ .

Для определения ошибки положения точки  $T$  по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям  $\alpha$  и  $\alpha+90^\circ$  (рис. 80, б) необходимо провести диаметр 1-2 под углом  $2\alpha$  к оси  $x$  и получить  $T-1 = m_1$  по направлению  $\alpha$  и  $T-2 = m_2$  по перпендикулярному направлению  $\alpha+90^\circ$ .

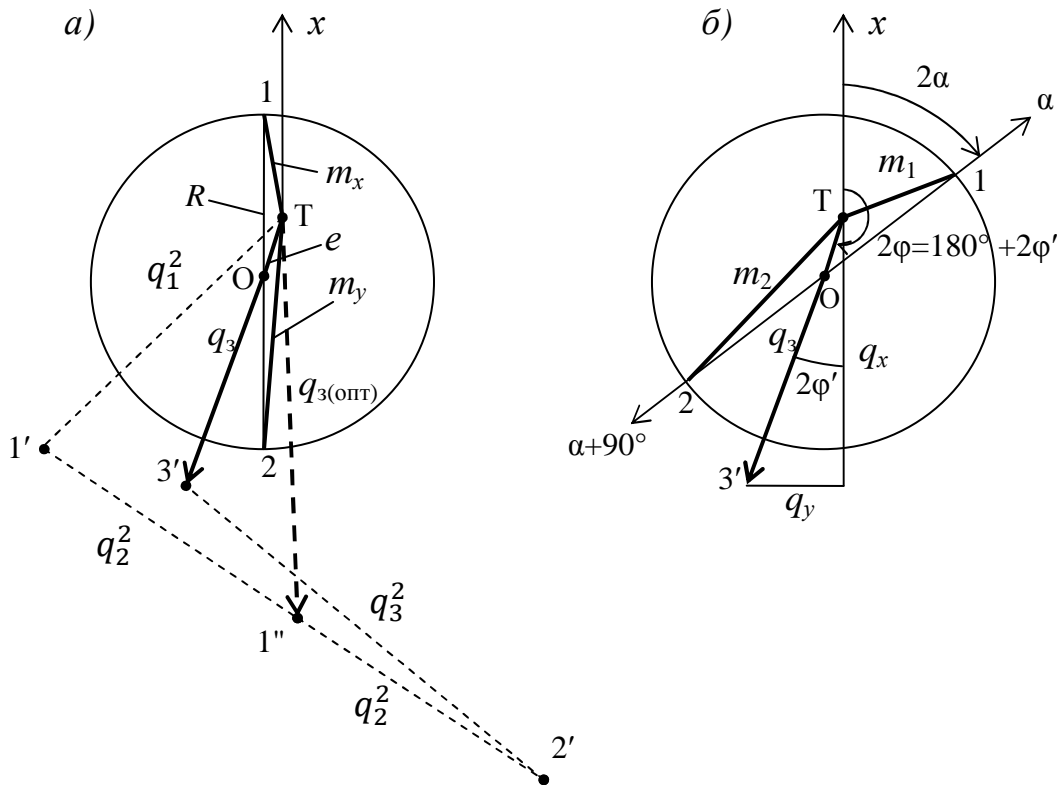


Рис. 80. Квадратический полигон (а) и окружность СКО (а, б) многократной засечки

По периметру полигона и его замыкающей можно вычислить широко используемую на практике радиальную ошибку без учёта корреляции  $M = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$  и предложенную нами радиальную ошибку  $M_K$  [126] с учётом корреляции (табл. 42):

$$M = 2m_{\beta,\alpha} \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi^2 - q_3^2}}, \quad M_K = 2m_{\beta,\alpha} \sqrt{\frac{\Pi + q_3 |\sin 2\phi|}{\Pi^2 - q_3^2}}. \quad (86)$$

### Радиальные ошибки $M$ и $M_K$ многократной угловой засечки

Засечка	$\Pi$	$q_3$	$2\varphi, ^\circ$	$M$	$M_K$	$M = \sqrt{A^2 + B^2}$
1	2	3	4	5	6	7
1-2-5-Т	4718,73	1042,03	186,72	0,298	0,302	0,298

Ошибка  $M_K$  в отличие от  $M$  позволяет учитывать одновременно форму эллипса СКО и его ориентировку с целью более объективной оценки точности положения точки Т одним числом, а значение  $\sin 2\varphi$  в формуле (86) необходимо брать по модулю.

В нашем примере коэффициент  $C = M_K/M$  составил всего 1,013. Его величина зависит от соотношения полуосей  $B/A$  и от дирекционного угла  $2\varphi$  большей полуоси и может изменяться от 1 (при  $2\varphi = 0; 180$  или  $360^\circ$ ) до  $\sqrt{2}$  (при  $2\varphi = 90$  или  $270^\circ$ ).

Как отмечалось выше,  $E$ -оптимизация обладает рядом существенных преимуществ перед другими условиями-ограничениями. Её выполнение приводит к тому, что эллипс, подера, окружность СКО трансформируются в круг радиуса  $R$ .

В результате такой изотропии ошибка определения пункта Т по любому направлению будет одна и та же. Одним из возможных способов  $E$ -оптимизации является определение геометрических параметров дополнительных угловых измерений. Покажем решение этой задачи на примере рис. 79, заключающееся в определении оптимального положения дополнительной к однократной угловой засечке 1-2-Т точки 5.

Для этого строим полигон Т-1'-1" для однократной засечки 1-2-Т (рис. 80, а), замыкающая которого  $q_{3(\text{опт})} = \text{Т-1}'' = 1395,5$  условных единиц имеет направление  $2\varphi = 180^\circ - 2\varphi' = 177,6^\circ$  ( $2\varphi'$  см. графу 11 табл. 43).

Для того, чтобы замыкающая такого полигона обратилась в 0, следует к схеме простой засечки 1-2-Т добавить ещё одно направление 5-Т, удвоенный дирекционный угол которого должен быть равен обратному удвоенному углу  $2\varphi$  замыкающей, то есть  $2\alpha_5 = 177,6^\circ + 180^\circ = 357,6^\circ$ , а длина стороны 5-Т согласно формулы (75) должна быть равна  $206265''/\sqrt{1395,5} = 55,2$  условных единиц. Подставив эти данные в табл. 43, получаем одинаковые значения  $A$  и  $B$ .

Т а б л и ц а 43

### Оптимизация многократной угловой засечки

Сторо- ны	$2\alpha_i, ^\circ$	$s_i$	$q_i$	$q_i^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	$q_3$	$A$	$B$	$2\varphi', ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-Т	224	60,1	34,3203	1177,9	-818,2	-847,30	1395,5	0,50	0,24	2,4 ЮВ
2-Т	122	64,2	32,1285	1032,2	875,4	-547,00				



Сумма столбцов 5, 6, 7				2210,1	57,2	-1394,30				
5-Т	357,66	55,2	37,3668	1396,3	-57,0	1395,1	0,8	0,235	0,235	10,5 СВ
Сумма столбцов 5, 6, 7				3606,4	0,2	0,8				

Отличие замыкающей полигона от нуля, равной 0,8 условных единиц (графа 8 табл. 43), объясняется погрешностями определения дирекционных углов и длин сторон засечки графическим способом, хотя такая её величина не оказала влияния на значение полуосей  $A$  и  $B$ .

В табл. 44 приведены исходные данные в условных единицах и результаты вычислений по формулам (83, 84) элементов окружности СКО для рассмотренной выше многократной оптимальной угловой засечки при принятом значении  $m_{\beta,\alpha} = 10''$ . Полученные значения  $A$  и  $B$  в табл. 44 полностью совпадают со значениями  $A$  и  $B$  в табл. 43, а  $R = A = B$ ,  $e = 0$ .

Таблица 44

#### Оценка точности многократной оптимальной засечки

Засечка	$\Pi$ ,	$q_3$	$A$	$B$	$R$	$e$
1	2	3	4	5	6	7
1-2-5-Т	3606,41	0,81	0,235	0,235	0,235	0,000

Таким образом, если к простой засечке 1-2-Т добавить направление 5'-Т или 5''-Т (рис. 79) длиной 55,2 условных единиц, дирекционный угол которого должен быть равен  $\alpha_5 = 357,6^\circ/2 = 178,8^\circ$  или  $178,8^\circ + 180^\circ = 358,8^\circ$ , то такая многократная засечка будет  $E$ -оптимальной. Добавим, что Руководством [94] допускается размещать опорные пункты на устойчивых зданиях и сооружениях, как в случае с точкой 5'.

Другим возможным способом  $E$ -оптимизации, как отмечалось выше, может явиться выбор соответствующего расположения опорных пунктов. Для этого на плане необходимо наметить возможные направления многократной засечки и определить их дирекционные углы. Затем на схеме провести из точки Т линии под двойными дирекционными углами. Варьируя расстояния (квадраты градиентов), число и сочетание направлений, следует добиться замкнутого или близкого к нему квадратического полигона. По квадратам градиентов можно определить длины сторон такой засечки.

Следует особо подчеркнуть, что  $E$ -оптимальная сеть позволяет довольно просто решать вопрос о необходимой точности угловых измерений засечки. В каждом конкретном случае специалисту, производящему наблюдения, следует исходить из заданной наименьшей величины крена, которую необходимо фиксировать с требуемой степенью достоверности. Тогда, приняв радиус трансформированной в круг подеры, эллипса или окружности СКО рав-

ным  $K_{min}$ , можно на основании формул (83) определить требуемую точность угловых измерений по формуле:

$$m_{\beta,\alpha} = \frac{K_{min}\sqrt{[q^2]}}{2t}, \quad (87)$$

где  $t$  – нормированный множитель, зависящий от заданной вероятности  $p$  получения данных о крене сооружения (для  $t = 1,6; 2,0; 2,5; 3,0$  вероятность  $p = 0,890; 0,955; 0,988; 0,997$ ).

Таким образом, в общем случае с заданной вероятностью  $p$  можно судить о полном крене сооружения, если его величина больше  $K_{min}$ . В противном случае нельзя судить о полном крене с заданной степенью вероятности, поскольку ошибка определения крена превышает его величину.

В заключение отметим, что при выполнении очередного цикла наблюдений за креном, например, дымовой трубы, координаты её центров верхнего В и нижнего Н наблюдаемых сечений определяются с равной точностью. В этом случае элементы  $A_H = A_B = A$ ,  $B_H = B_B = B$ ,  $\varphi_H = \varphi_B = \varphi$ ,  $R_H = R_B = R$ ,  $e_H = e_B = e$  их подер, эллипсов или окружностей СКО будут одинаковы. Поэтому для оценки точности определения крена достаточно произвести квадратическое сложение двух таких подер, эллипсов или окружностей СКО по упрощённой в отличие от описанной в работе [126] методике и определить  $A_0, B_0, \varphi_0, R_0, e_0$  результирующей кривой по формулам:

$$A_0 = \sqrt{A_H^2 + A_B^2} = A\sqrt{2}, \quad B_0 = \sqrt{B_H^2 + B_B^2} = B\sqrt{2}, \quad R_0 = R\sqrt{2}, \quad e_0 = e\sqrt{2}. \quad (88)$$

По такой окружности СКО, отложив от оси  $x$  удвоенный дирекционный угол крена, можно найти ошибку его определения по методике, показанной на рис. 80, б.

#### 1.4.5. Фотографический способ определения крена

Фотографические способы в классическом их понимании предусматривают измерение деформаций методом фотограмметрии (измерительной фотографии), который заключается в определении разности координат точек сооружения, найденных по фотоснимкам нулевого цикла и фотоснимкам последующих циклов.

Различают фотограмметрический и стереофотограмметрический методы определения деформаций. Первый метод предназначен для определения деформаций в одной плоскости, второй – для определения деформаций по любому направлению.

Следует сразу оговориться, что классическая фотограмметрическая обработка снимков потребует квалифицированного исполнителя, специального оборудования и знания современных автоматизированных программ такой обработки. В настоящее время для фотограмметрических измерений снимков можно использовать компьютерный стереокомпаратор *KSK-4* или одну из цифровых фотограмметрических систем ЦФС, таких, например, как *ERDAS*, *ENVI*, *PHOTOMOD*.

В настоящее время широкое распространение получили цифровые видеоизмерительные устройства на базе использования ПЗС-матриц в сочетании с компьютерной техникой (так называемые неметрические цифровые камеры). Наличие таких камер, совместимых с персональным компьютером, и программ редактирования фотографических изображений позволило разработать различные варианты фотографического способа контроля вертикальности сооружений башенного типа. Для этого достаточно сфотографировать сооружение и вывести его изображение на экран монитора ПК. При этом необходимо решить две задачи. Во-первых, на снимке должна присутствовать вертикальная, так называемая, референтная линия, от которой будут производиться все необходимые измерения. И, во-вторых, снимок должен быть масштабирован для получения результатов измерений в метрической системе единиц.

В работе [144] рассмотрены различные варианты формирования и использования вертикальных референтных прямых. Наиболее просто использовать в качестве вертикальной референтной прямой нить шнурового отвеса, расположенного на некотором расстоянии перед объективом фотокамеры. Так, на рис. 81 приведены две фотографии телебашни и нити отвеса. Одна фотография выполнена при нормальном расположении изображения сооружения на фотографии (рис. 81, *а*), другая (рис. 81, *б*) – специально выполнена при наклонном расположении изображения башни.

Обработка таких снимков заключается в том, что каждую фотографию выводят на экран монитора, открывают файл с помощью *Paint* и измеряют количество пикселей соответствующих расстоянию от отвеса до оси сооружения. По разности верхних расстояний  $l_B$  или  $l'_B$  и нижних расстояний  $l_H$  или  $l'_H$  судят о вертикальности сооружения. Для перехода к метрической системе единиц необходимо измеренные отрезки  $l$  умножить на размер одного пикселя  $\delta$ , который можно определить, поделив известную длину отрезка на снимке в мм на его длину в пикселях.

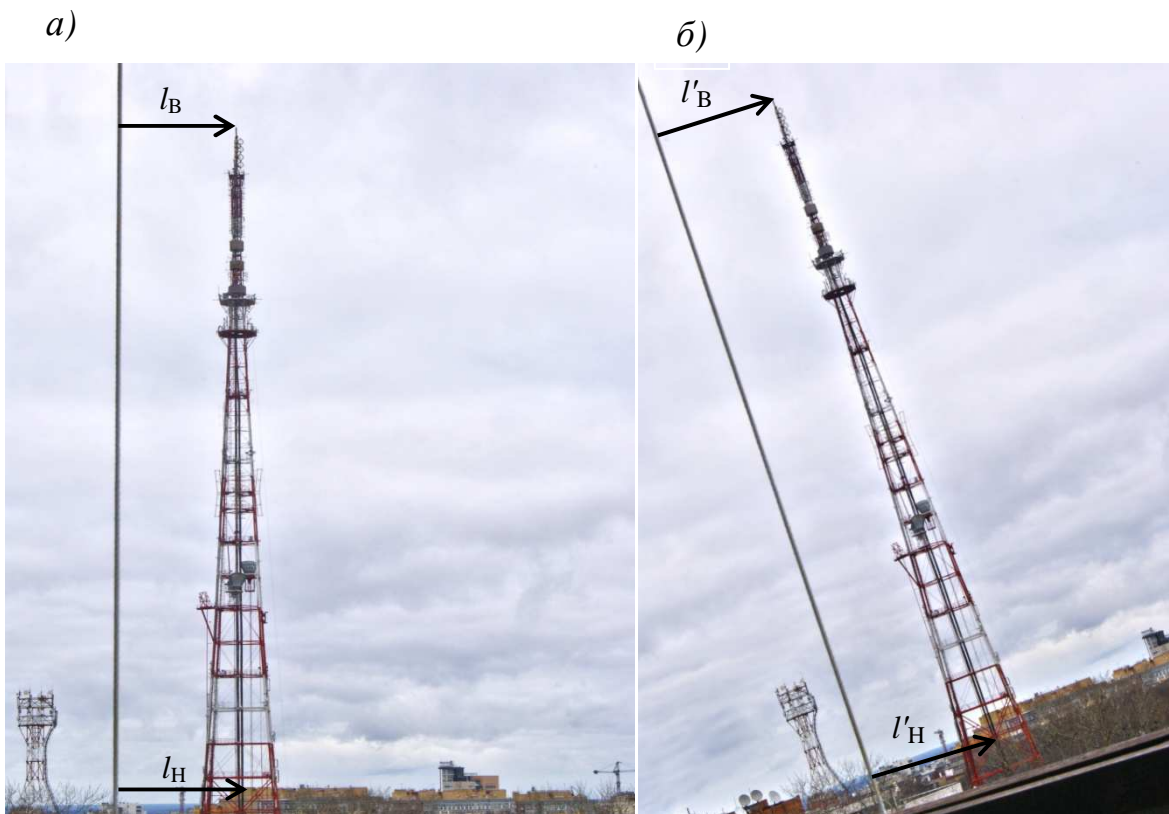


Рис. 81. Фотографии телебашни и шнурового отвеса

Так, например, для определения крена сооружения башенного типа треугольной формы можно использовать фотографический способ в сочетании с вертикальным проектированием.

Устанавливают теодолит на некотором расстоянии от башни и производят вертикальное проектирование визирным лучом теодолита при двух положениях вертикального круга хорошо заметной верхней точки  $M_B$  сооружения на горизонтальную нивелирную рейку, закрепленную внизу сооружения. Фиксируют на рейке отсчёт  $M_H$  (рис. 82).

Затем сооружение фотографируют так, чтобы на фотографии были четко видны точка  $M_B$  и рейка, которая в дальнейшем служит для масштабирования снимка. Эту фотографию выводят на экран монитора, где воображаемая линия  $M_B M_H$  будет являться референтной.

Программа редактирования фотографических изображений предусматривает наличие прямоугольной системы координат, пользовательское начало которой  $(0,0)$  может быть установлено в любой, например, в левой верхней точке снимка. Осью  $x$  является левый край снимка, а осью  $y$  – его верхний край. Подводя последовательно стрелку-курсор к точкам  $M_B$  и  $M_H$ , сразу читают на экране монитора значения расстояний  $y_B$  и  $y_H$  в условных единицах

(пикселях). Если эти расстояния одинаковы, то ось  $x$  (условная референтная линия) параллельна  $M_B M_H$ .

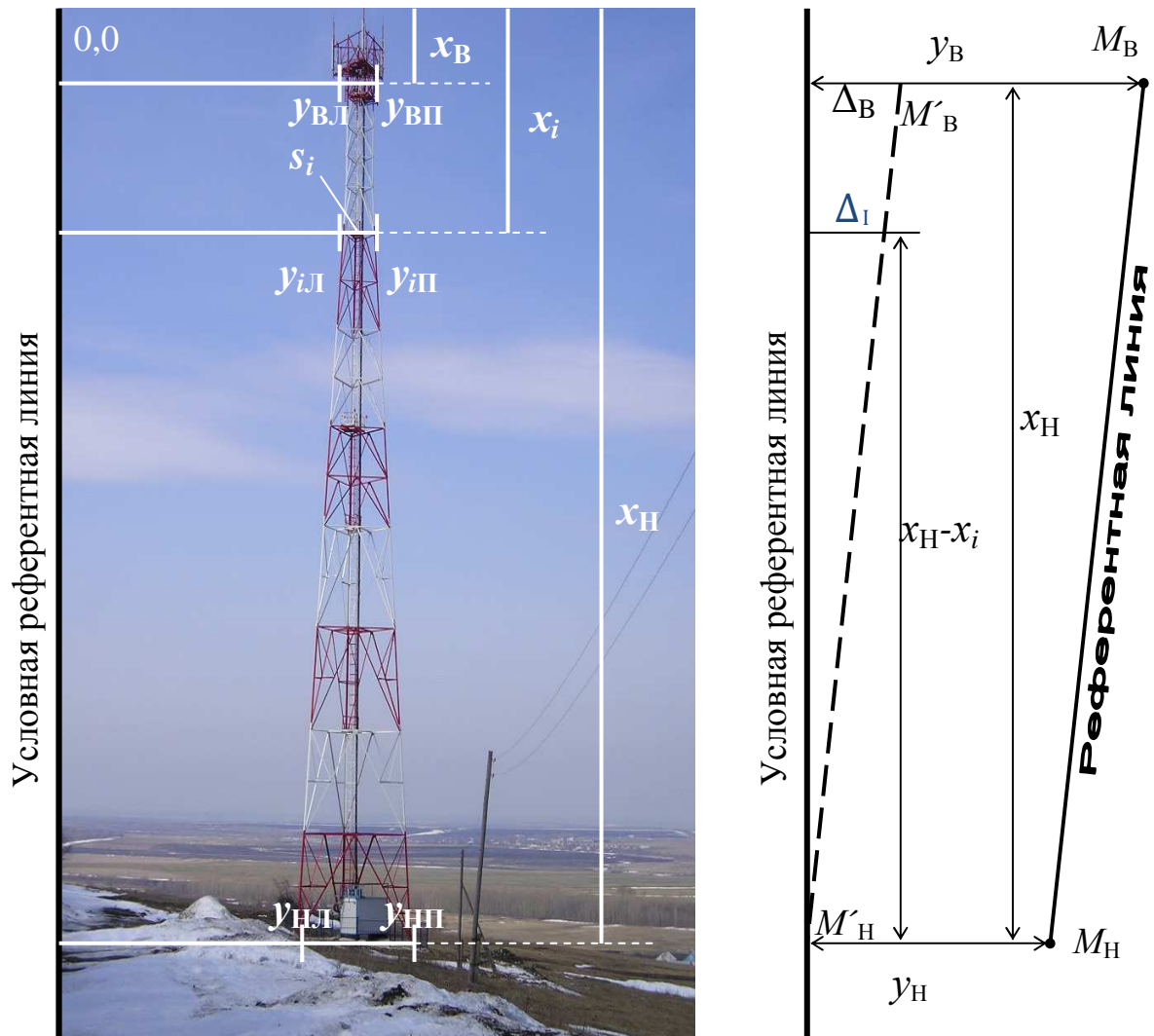


Рис. 82. Схема формирования и использования референтной линии

В дальнейшем все измерения производят от осей  $x$  и  $y$ . Измерения заключаются в определении расстояний от условной референтной линии до левого и правого края башни в верхнем  $u_{ВЛ}$ ,  $u_{ВП}$ , нижнем  $u_{НЛ}$ ,  $u_{НП}$  и любых других  $u_{iЛ}$ ,  $u_{iП}$  промежуточных сечений трубы. Одновременно с этим фиксируют вертикальные расстояния  $x_B, \dots, x_i, \dots, x_H$ .

Результаты измерения фотографии башни (рис. 82) по 11 её сечениям, расположенным на разной высоте, представлены в табл. 45.

Для каждого сечения были подсчитаны разности  $(u_{П} - u_{Л})$  и найдены расстояния  $y_0$  от условной референтной линии до оси сооружения по формуле:

$$y_0 = y_{\text{л}} + \frac{y_{\text{п}} - y_{\text{л}}}{2} . \quad (89)$$

Т а б л и ц а 45

**Результаты измерения фотографий башен**

Сече- ние	Отмет- ка, м	$S_i$ , мм	Результаты измерений, пкс					$\delta$ , мм/пкс
			$y_{\text{л}}$	$y_{\text{п}}$	$x$	$y_{\text{п}} - y_{\text{л}}$	$y_0$	
Башня треугольной формы, рис. 82								
1	0	10500	289	424	925	135	356,5	77,78
2	8	9433	296	417	820	121	356,5	77,96
3	16	8367	304	411	718	107	357,5	78,20
4	24	7300	312	404	615	92	358,0	79,35
5	32	6233	320	398	514	78	359,0	79,91
6	40	5167	328	392	414	64	360,0	80,73
7	48	4100	336	386	318	51	360,5	80,39
8	56	3033	343	381	222	38	362,0	79,82
9	60	2500	347	378	178	31	362,5	80,64
10	65	2500	348	379	116	31	363,5	80,64
11	72,5	2500	347	379	68	31	363,5	80,64
Башня четырёхугольной формы, рис. 83								
Верх	-	-	543	617	569	74	580	-
Низ	-	-	499	729	1523	230	614	-

Сравнивая полученные значения  $y_0$  между собой, судят об отклонениях оси башни от вертикали на разных уровнях. В нашем примере общий крен башни составляет  $363,5(\text{сечение } 11) - 356,5(\text{сечение } 1) = 7$  пикселей, умножив которые на размер одного пикселя  $\delta$ , можно выразить его в миллиметрах.

Размер одного пикселя  $\delta$  можно определить, поделив известную длину отрезка в мм на её длину в пикселях. В нашем примере отрезками известной длины были проектные длины сторон  $S_i$  треугольников разных сечений, поэтому  $\delta$  определялась по формуле:

$$\delta = \frac{S}{y_{\text{п}} - y_{\text{л}}} . \quad (90)$$

Результаты определения  $\delta$ , представленные в табл. 45, находятся в пределах  $77,78 - 80,64$  мм/пкс, то есть отличаются всего на  $2,86$  мм/пкс. Среднее значение  $\delta$  составило  $79,64$  мм/пкс, поэтому общий крен башни в нашем примере будет равен  $7 \times 79,64 = 557$  мм или  $1/130$  высоты башни.

Рассмотренный выше пример предусматривал параллельность референтной линии  $M_{\text{В}}M_{\text{Н}}$  левому краю фотографии (оси  $x$ ). Если на этой фотографии  $y_{\text{В}}$  не равно  $y_{\text{Н}}$ , отличаясь на  $\Delta_{\text{В}} = y_{\text{В}} - y_{\text{Н}}$ , то в результаты измерений

$u_{iЛ}$ ,  $u_{iП}$  необходимо вводить поправки  $\Delta_i$  со знаком, противоположным знаку  $\Delta_B$ , вычисляя их по формуле:

$$\Delta_i = \Delta_B \frac{x_H - x_i}{x_H} \quad (91)$$

Примером этому может служить фотография четырёхугольной башни и отвеса (рис. 83), специально выполненная при произвольном положении камеры. Результаты измерений по ней представлены в табл. 45.

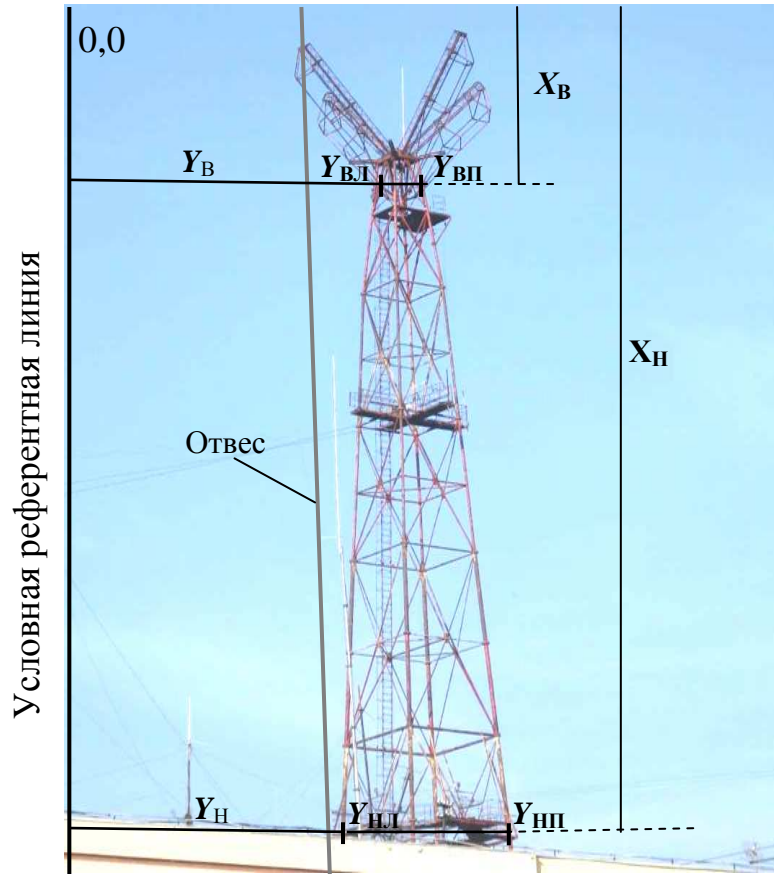


Рис. 83. Фотография и схема измерения четырёхугольной башни

Подсчитанный по этим данным крен оказался равным 34 пкс. По значениям измеренных  $y_B = 432$  пкс и  $y_H = 463$  пкс в него была введена поправка  $\Delta_B = -31$  пкс и получено окончательное значение крена 3 пкс.

В наших работах [81, 82] доказано, что размер одного пикселя зависит только от расстояния фотографирования и одинаков по осям  $x$  и  $y$ . Поэтому, определив высоту башни  $H = X_H - X_B = 954$  пкс, можно найти относительную величину крена  $1/H = 3/954 = 1/318$  и сравнить её с допуском, приведенным в табл. 1.

Рассмотренные примеры использования фотоснимка и программы редактирования фотографических изображений доказывают возможность

применения фотографического способа контроля вертикальности сооружений башенного типа. В настоящее время современная фотоаппаратура позволяет выполнять фотоснимки с разрешением 30 мегапикселей и более. Поэтому, значительно повысить точность получаемых результатов можно путём использования фотоснимков высокого разрешения.

При фотографическом способе контроля вертикальности, например, дымовых труб [89] отвес в общем случае может занимать произвольное положение относительно оси трубы (рис. 84).

В этом случае определяют в пикселях расстояния  $L_B$ ,  $P_B$  и  $L_H$ ,  $P_H$  от верхних и нижних краёв трубы до отвеса. Вычисляют в пикселях расстояния от отвеса до оси трубы поверху  $B = (P_B - L_B)/2$  и понизу  $H = (P_H - L_H)/2$  (рис. 84, а) или  $B = (L_B - P_B)/2$  и  $H = (L_H - P_H)/2$  (рис. 84, б).

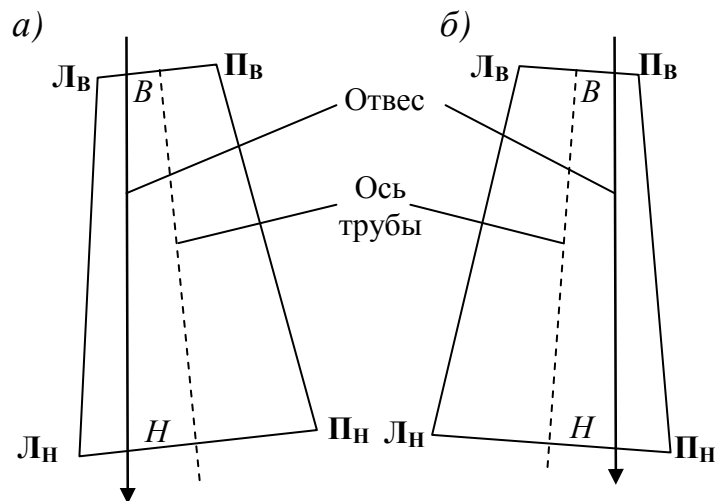


Рис. 84. Схемы к определению крена трубы

Крен трубы  $K$  в пикселях будет равен разности  $B$  и  $H$ , а в метрической системе единиц он будет равен:

$$K = B\delta_B - H\delta_H, \quad (92)$$

где  $\delta_B$  и  $\delta_H$  – размер одного пикселя соответственно для верхнего и нижнего сечения трубы, мм/пкс.

В работе [157] выполнено детальное исследование точности фотографического способа контроля башенных сооружений. В результате выведена формула СКО определения крена по схеме на рис. 84:

$$m_K^2 = \delta_B^2 + B^2 m_{\delta_B}^2 + \delta_H^2 + H^2 m_{\delta_H}^2, \quad (93)$$

где  $m_{\delta_B}$ ,  $m_{\delta_H}$  – СКО определения размера одного пикселя соответственно поверху и понизу.



Таким образом, ошибка определения крена будет зависеть от размеров пикселей поверху и понизу, ошибки их определения и расстояний от отвеса до оси трубы поверху и понизу.

На рис. 85 представлена схема к определению размера одного пикселя при расположении фотокамеры на некотором расстоянии от оси трубы  $\mathbf{K-O} = nR$  (где  $n$  – число укладываний радиуса  $R$  в расстоянии  $\mathbf{K-O}$ ).

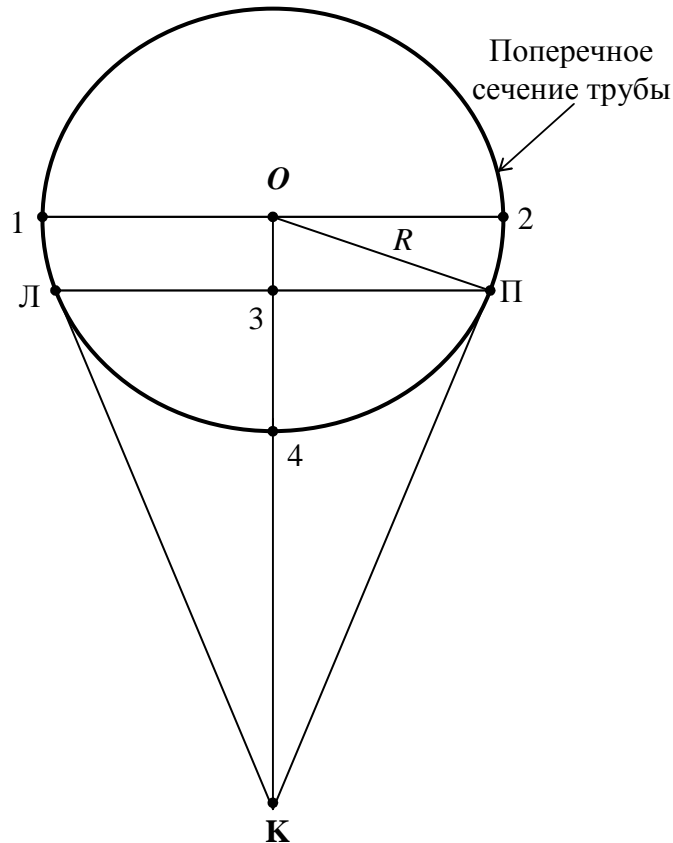


Рис. 85. Схема к определению размера одного пикселя

В работе [157] описывается масштабирование снимка с помощью приложенной к трубе в точке 4 нивелирной рейки. Однако для верхнего сечения трубы этот способ неприемлем. При фотографировании трубы полученное на снимке изображение хорды (ЛП) не соответствует диаметру (1-2) её поперечного сечения, а всегда меньше его. Поэтому размер одного пикселя в метрической системе единиц соответственно для верхнего и нижнего сечений трубы предлагается определять по формулам:

$$\delta_B = (\text{ЛП})_B / (\text{Л}_B + \text{П}_B), \quad \delta_H = (\text{ЛП})_H / (\text{Л}_H + \text{П}_H), \quad (94)$$

где  $(\text{ЛП})_B$ ,  $(\text{ЛП})_H$  и  $(\text{Л}_B + \text{П}_B)$ ,  $(\text{Л}_H + \text{П}_H)$  – длина хорды (ЛП) верхнего или нижнего сечений трубы соответственно в метрической системе единиц и в пикселях (рис. 85).

Проведенные нами исследования четырёх фотокамер (*Nikon D3100*, *Nikon COOLPIX S9100*, *Sony Exmor R*, *Canon PowerShot S2 IS*) показали, что  $\delta$  зависит только от расстояния до объекта съёмки и для рассмотренных фотокамер может находиться в пределах от 1-2 до 8-15 мм в диапазоне 3-30 м.

В цитируемой выше работе [147] выведена формула для определения радиуса сооружения круглой формы фотографическим способом. На основании этой формулы длину хорды (ЛП) в метрической системе единиц можно определить следующим образом:

$$(\text{ЛП}) = 2R \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 2cR. \quad (95)$$

В формуле (95) корень квадратный представляет собой поправочный коэффициент  $c$  к радиусу верхнего или нижнего сечения трубы. Для различных значений  $n$  характер изменения этого коэффициента иллюстрируется графиком на рис. 86.

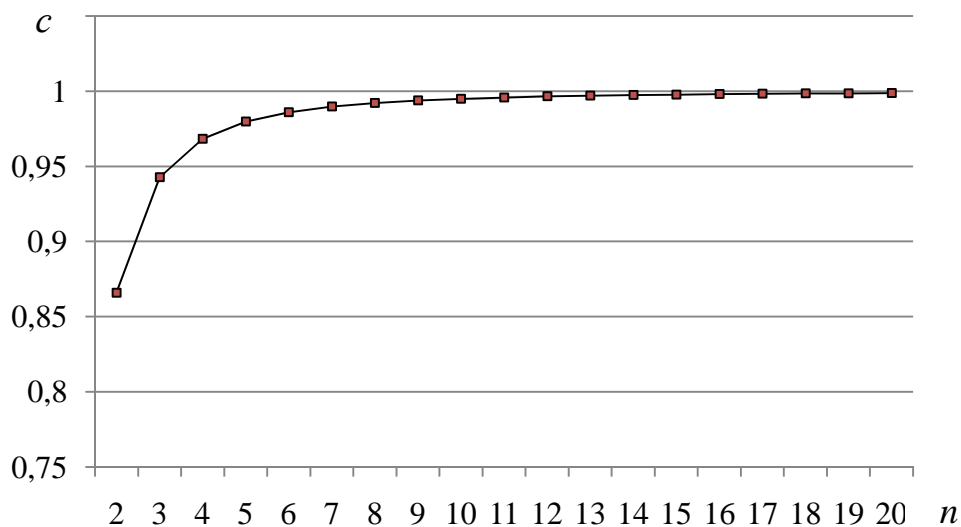


Рис. 86. График зависимости коэффициента  $c$  от  $n$

Анализ данного графика позволяет констатировать, что точность определения хорды (ЛП) в основном зависит от точности определения радиуса сооружения  $R$ , поскольку поправочный коэффициент  $c$  даже при  $n = 2$  составляет всего 0,866 и с увеличением  $n$  стремится к единице, достигая уже при  $n = 10$  значения 0,995.

В результате проведенных исследований окончательно установлено, что если при фотографическом способе определения крена дымовой трубы её радиусы поверху и понизу известны с ошибкой 5 – 15 мм, поправочный коэффициент  $c$  найден с ошибкой 0,001, точность отсчёта по курсору при обра-

ботке снимка равна 1 пкс, то СКО крена можно определить по простой формуле:

$$m_K = \sqrt{\delta_B^2 + \delta_H^2}. \quad (96)$$

Однако, при использовании фотографического способа необходимо иметь в виду так называемую геометрическую aberrацию, иначе дисторсию. Известно, что дисторсия представляет собой геометрическое искажение прямых линий (рис. 87, а). Если прямые стали вогнутыми – дисторсия подушкообразная (рис. 87, б), если выпуклыми – дисторсия бочкообразная (рис. 87, в).

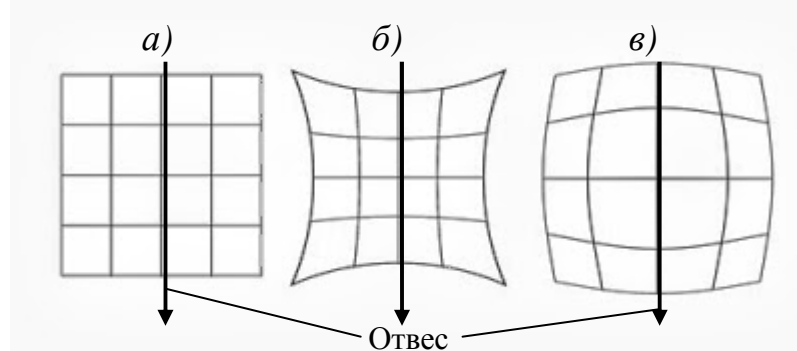


Рис. 87. Подушкообразная (б) и бочкообразная (в) дисторсии

Дисторсия целиком определяется применяемым объективом. Для уменьшения её влияния рекомендуется пользоваться качественными объективами (типа фикс-объектив *SONY 20 mm F/2.8*), пользоваться функцией приближения и снимать «с запасом» по краям фотографии, применять проективные методы обработки и др.

С целью определения степени влияния расположения на снимке отвеса относительно оси сооружения на точность определения его крена были выполнены экспериментальные исследования [92] путём фотографирования дымовой трубы высотой 30 м и радиусами: поверху 1,3 м, понизу 2,0 м (рис. 88).

Труба фотографировалась при неподвижном положении фотокамеры при различных вариантах расположения нити шнурового отвеса относительно оси трубы: по центру верхнего сечения (вариант 1), слева (варианты 2, 3, 4) и справа (варианты 5, 6, 7) от неё. Измерения выполнялись цифровой камерой *Nikon S9100* так, чтобы изображение трубы располагалось в центральной части снимка. Положение отвеса в первом варианте в центральной части снимка исключало влияние подушкообразной или бочкообразной дисперсии на результаты измерений. В эксперименте принимали участие студенты группы СУЗ.07 Анущенко А.М., Терешанцев С.А., Ярошук Е.Д.



Рис. 88. Расположение отвеса относительно оси трубы

Находили расстояния  $L$  и  $P$  от отвеса до верхних и нижних краёв трубы по изложенной выше методике. Эти расстояния для первого варианта оказались по модулю практически одинаковыми, что свидетельствует о симметричном расположении отвеса относительно верхнего сечения трубы. Отклонение от симметрии составило всего 0,5 пкс.

Вычисляли расстояния от отвеса до оси трубы поверху  $B$  и понизу  $H$  и находили крен трубы  $K$  в пикселях. По этим данным построены графики, характеризующие ошибки крена  $S_2 \dots S_7$  в зависимости от местоположения отвеса относительно оси трубы, где  $S_i = K_i - K_1$ .

Анализ графиков на рис. 89 позволяет констатировать, что местоположение отвеса относительно оси трубы оказывает большое влияние на точность определения её крена. Чем ближе отвес к объективу фотокамеры, тем это влияние больше. Причём, одинаковые расположения нити шнурового отвеса слева или справа относительно оси трубы вызвали практически одинаковые ошибки крена по модулю и разные по знаку относительно этой оси.

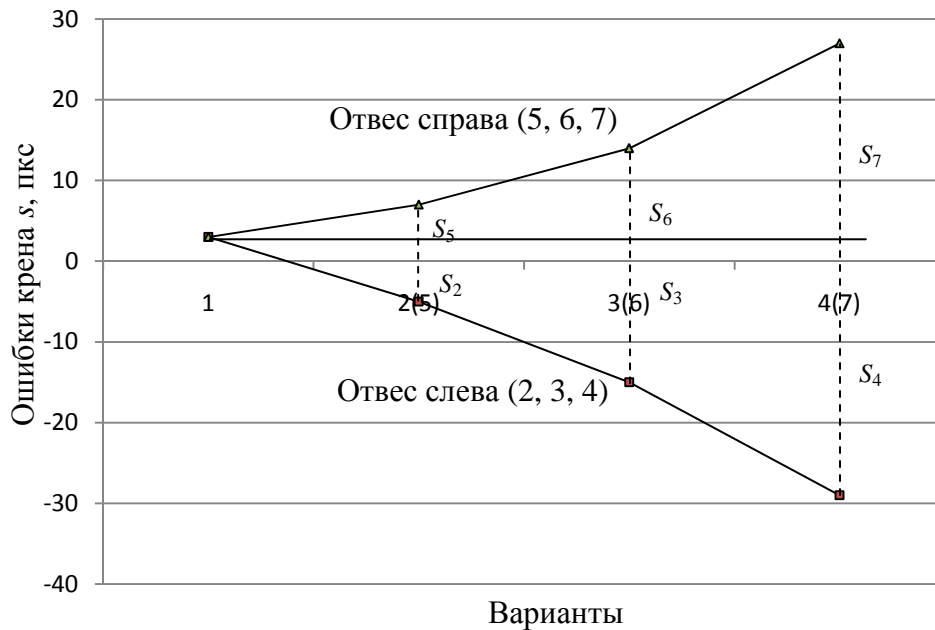


Рис. 89. Графики зависимости ошибок крена от местоположения отвеса

Эффективным способом уменьшения или исключения влияния дисторсии является выбор соответствующего расстояния фотографирования объекта, поскольку с увеличением расстояния фотографирования дисторсия уменьшается.

В подтверждение сказанному приводим результаты обработки выполненных нами фотокамерой *Nikon COOLPIX S9100* снимков кафельной стены с размерами плиток 150x150 мм (рис. 90) с расстояний 1 (а), 2 (б), 3 (в) м при неподвижном положении отвеса на расстоянии 0,7 м от стены.

С помощью *Paint* измерялись отрезки  $O_{В-1, 2, 3_{ВЛ, ВП}}$  и  $O_{Н-1, 2, 3_{НЛ, НП}}$  и их верхние значения сравнивались с соответствующими нижними. По полученным разностям построенные графики (рис. 90, г, д, е), наглядно иллюстрирующие как влияние дисторсии с 50-60 пкс при 1 м снижается до 5-8 пкс при 3 м, а при 4 м она практически равна точности измерения снимков 1-2 пкс.

На основании этого следует располагать референтную прямую по центру верхнего сечения трубы (рис. 91) и в центральной части снимка. В этом случае расстояние от отвеса до оси трубы В поверху будет равно нулю и в обработке снимка будет участвовать только нижнее сечение трубы, в результате чего крен будет равен:

$$K = H\delta_H. \quad (97)$$

В этом случае ошибка крена будет зависеть от величины  $H$  и ошибки её определения и от размера пикселя  $\delta_H$  и ошибки его определения:

$$m_K^2 = \delta_H^2 m_H^2 + H^2 m_{\delta_H}^2. \quad (98)$$

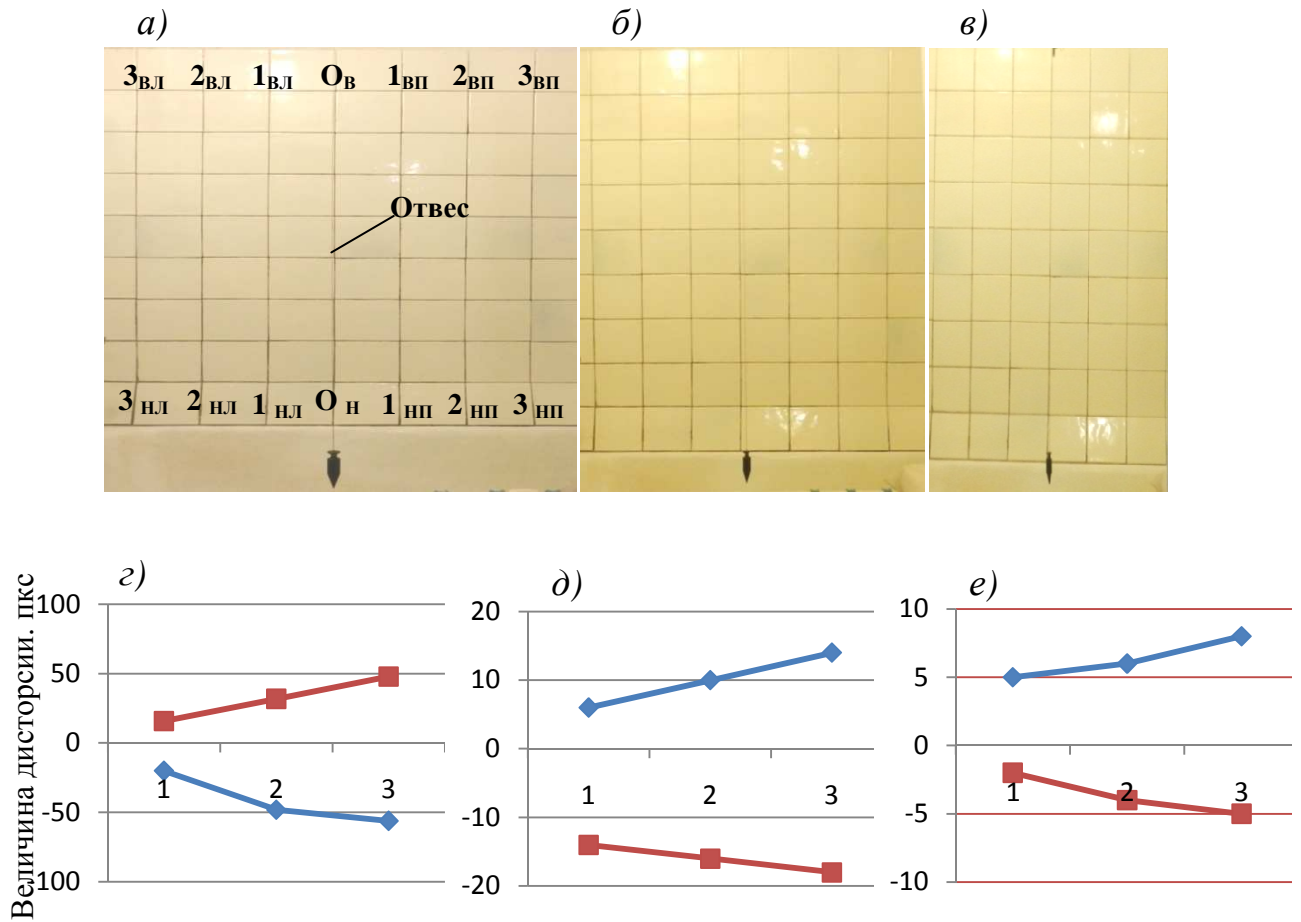


Рис. 90. Снимка (а, б, в) и графики зависимости дисторсии от расстояния фотографирования (з, д, е)

Расположение отвеса относительно центра верхнего сечения можно проконтролировать по верхним отсчётам Л, О и П по формуле:

$$(Л - П)/2 - О = С, \quad (99)$$

где С – смещение отвеса относительно центра верхнего сечения, пкс; Л, О и П – отсчёты на уровне верхнего сечения, пкс (с учётом их знаков).

Если подсчитанное по формуле (99) смещение С оказалось со знаком плюс, то отвес смещен в левую сторону от оси трубы, со знаком минус – в правую. С учётом смещения С крен будет вычисляться по формуле

$$К = (Н - С)\delta_H. \quad (100)$$

Следует сказать, что основное влияние на точность определения крена фотографическим способом при оптимальном расположении отвеса по центру верхнего сечения трубы оказывает размер пикселя  $\delta_H$ , который зависит от качества фотокамеры и расстояния до снимаемого объекта.

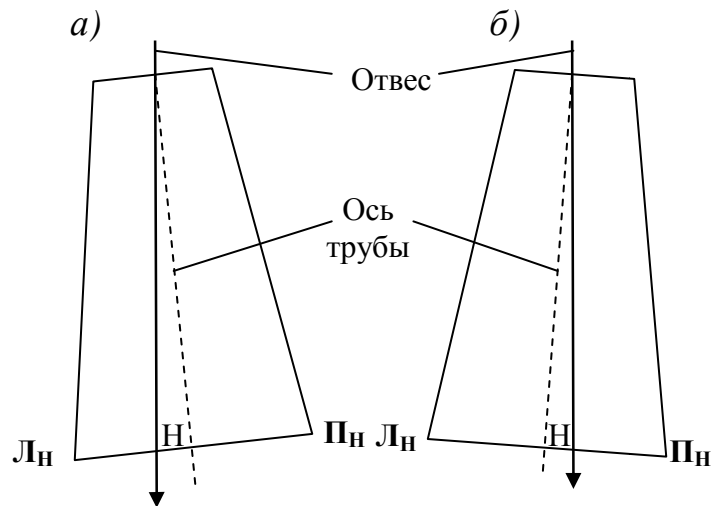


Рис. 91. Оптимальный случай расположения референтной прямой

Проведенные нами исследования фотокамеры *Nikon COOLPIX S9100* показали, что размер пикселя  $\delta$  может находиться в пределах от 1 до 10 мм/пкс в диапазоне 3-30 м. Для уменьшения влияния размера пикселя на точность определения крена можно поступать следующим образом. Вначале необходимо сфотографировать всю трубу с отвесом (рис. 88) и отметить проекцию отвеса на нижнем сечении трубы, например, взяв отсчёт по горизонтально приложенной к этому сечению нивелирной рейке.



Рис. 92. Фотография трубы с расстояния 3 м

Переместить фотокамеру по направлению на эту метку и сфотографировать нижнее сечение с близкого расстояния. Обработка первого снимка будет заключаться в определении  $C$ , а второго снимка – в определении  $H$ . В этом случае влияние размера пикселя может быть сведено до минимума, а также открыта видимость всей нижней части трубы (рис. 92), что позволит реализовать рассмотренный далее новый двухэтапный фотографический способ определения крена.

Так, на этой фотографии трубы, обработанной в *Paint*, отсчёт по левому концу рейки составил 1241 пкс, по правому отсчёт равен 4266 пкс, длина рейки 3000 мм, следовательно размер одного пикселя будет равен  $3000/(4266 - 1241) = 0,992$  мм/пкс.

Экспериментальные исследования фотографического способа были выполнены на дымовой трубе (рис. 88) при расположении отвеса по оси трубы. Измерения выполнялись цифровой камерой *Nikon COOLPIX S9100*. Полученное значение частного крена составило 17 мм и практически совпало с таковым, определённым линейно-угловым и координатным способами.

В работе [32] показано прикладное значение фотографического способа для геодезической выверки колонн по вертикали, обеспечивающего одинаковую точность со способами дискретного сканирования и координатным, выполняемых с помощью электронного тахеометра.

#### 1.4.6. Двухэтапный фотографический способ определения крена

На практике зачастую нижняя часть сооружения бывает закрыта посторонними предметами (здания, сооружения, деревья, транспорт и т. п.). Вследствие этого наблюдатели ограничиваются определением крена только верхней видимой части сооружения с последующей экстраполяцией крена на всю высоту сооружения, что может отрицательно сказаться на точности получаемых результатов.

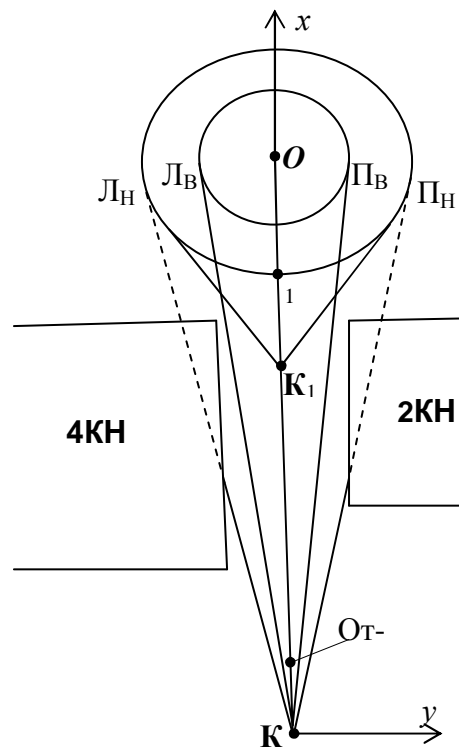


Рис. 93. Схема выполнения двухэтапного фотографического способа



Для устранения этого недостатка предлагается, названный нами, двух-этапный способ определения крена. Его сущность поясняется рис. 93 и заключается в следующем.

Из точки **К** фотографируют всё сооружение с отвесом, расположенным на некотором расстоянии перед объективом фотокамеры. Причём отвес, во-первых, должен располагаться по центру верхнего сечения и, во-вторых, для исключения влияния дисторсии объектива отвес и сооружение должны располагаться в центральной части снимка.

Отмечают на нижнем сечении сооружения точку 1 по направлению линии **К-О**. Переносят фотокамеру в точку **К<sub>1</sub>**, расположенную на линии **К-1** и фотографируют нижнюю невидимую ранее часть сооружения с точкой 1.

Предлагаемая методика была опробована на дымовой трубе (рис. 94), левая нижняя часть которой была закрыта транспортным средством [154]. Вначале был осуществлён первый этап, который заключался в том, что с точки **К** (рис. 93) была сфотографирована вся труба с горизонтально расположенной на нижнем сечении трубы рейкой (рис. 94, *а*) с расстояния 11,1 м при расположении отвеса в 3 м от фотокамеры. В качестве точки 1 фигурировал взятый по отвесу отсчёт по рейке, равный 1500 мм, отмеченный также на трубе белой чертой. Затем фотокамеру перенесли в точку **К<sub>1</sub>**, расположенную на линии **К-1** на расстоянии 3,6 м от трубы, и сфотографировали нижнюю невидимую ранее часть трубы (рис. 94, *б*).



Рис. 94. Фотографии трубы с точки **К** (*а*) и с точки **К<sub>1</sub>** (*б*)

Обработка обоих снимков, открытых в *Paint*, заключалась в следующем. Подводили курсор к левому краю, отвесу и правому краю трубы на уровне её верхнего сечения на первом снимке и нижнего сечения на втором снимке и брали отсчёты в пикселях Л, О и П, соответствующие каждому положению курсора. Результаты измерений приведены в табл. 46 (графы 1...6).

Т а б л и ц а 46

### Результаты обработки фотоснимков трубы

Верхние отсчёты, пкс			Нижние отсчёты, пкс			Верх	Низ	В пкс	Н пкс	К <sub>у</sub> , пкс
Л	О	П	Л	О	П	Л <sub>в</sub> П <sub>в</sub>	Л <sub>н</sub> П <sub>н</sub>			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1330	1450	1605	545	1449	2350	120 -155	904 -901	17,5	-1,5	19

Находили в пикселях расстояния Л<sub>в</sub>, П<sub>в</sub> и Л<sub>н</sub>, П<sub>н</sub> (графы 7, 8) от отвеса до верхних и нижних краёв трубы как разности соответствующих отсчётов О – Л и О – П. Вычисляли в пикселях расстояния от отвеса до оси сооружения поверху  $V = -(L_B + P_B)/2 = -(120 - 155)/2 = 17,5$  пкс и понизу  $H = -(L_H + P_H)/2 = -(904 - 901)/2 = -1,5$  пкс (графы 9, 10), причём в этих выражениях необходимо учитывать знаки Л<sub>в</sub>, П<sub>в</sub> и Л<sub>н</sub>, П<sub>н</sub>.

Крен сооружения в пикселях, в данном случае по оси у (рис. 93), будет равен  $K_y = V - H = 17,5 + 1,5 = 19$  пкс (графа 11), а в метрической системе единиц крен будет равен произведению  $K_y$  на размер одного пикселя.

Для определения размера одного пикселя необходимо известную длину отрезка разделить на количество содержащихся в нём пикселей. В результате измерений снимка на рис. 94, а установлено, что в 1,5-метровой рейке содержится 1119 пкс, следовательно  $\delta = 1500/1119 = 1,340$  мм/пкс. Поэтому крен трубы в метрической системе равен  $K_y = 19 \times 1,340 = 25$  мм.

В своё время [30] были выполнены координатные и линейно-угловые измерения этой же трубы с одной точки **К**. Были получены значения частных кренов по осям координат, причём частный крен  $K_y$  составил соответственно 24 мм и 15 мм (фотографическим способом 25 мм). В силу разных причин (неидеальность реального объекта, несовпадение наблюдаемых сечений, погрешности измерений и т.п.) расхождения в значениях частных кренов  $K_y$  составили соответственно 1 мм и 10 мм, что, на основании исследований, приведенных в работе [83], вполне возможно. Кроме того, согласно [94], допустимые погрешности измерения крена таких сооружений высотой до 100 м не должны превышать 30 мм, что и соблюдается в нашем случае.

Представляет интерес степень влияния погрешности центрирования фотокамеры в точке  $K_1$  на точность определения крена сооружения (рис. 95).

Действительно, если точка расположения фотокамеры  $K_1$  сместится с линии  $K-1$  на некоторую величину  $K_1K'_1 = l$  (нестворность фотокамеры), то вместо правильных значений  $L_H$  и  $\Pi_H$  будут на снимке измерены неправильные значения  $L_{H'}$  и  $\Pi_{H'}$ . В результате этого вместо правильного значения  $H = -(L_H + \Pi_H)/2$  в формуле (97) будет определено его неправильное значение  $H' = -(L_{H'} + \Pi_{H'})/2$ , отличающееся на величину  $\Delta'$ .

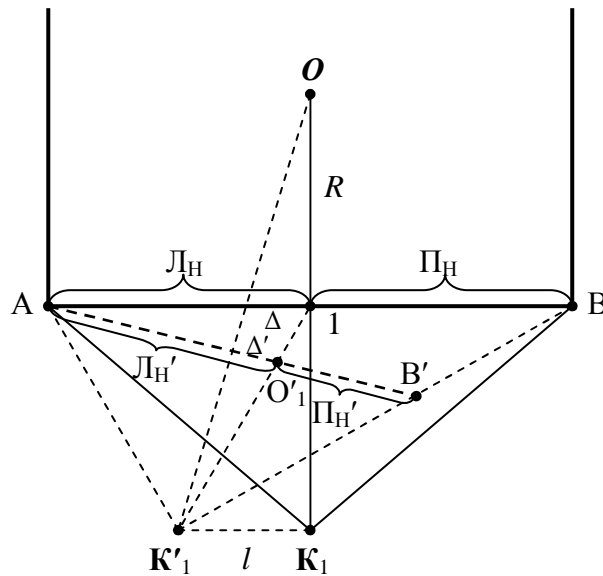


Рис. 95. Схема к определению влияния нестворности фотокамеры

Ввиду малости угла  $K'-1-K_1$  примем с некоторой незначительной долей приближения  $\Delta' \approx \Delta$ , тогда из подобия соответствующих треугольников получим:

$$\Delta = \frac{lR}{OK_1} = lk, \quad (101)$$

где  $k = R/OK_1$  – коэффициент, характеризующий величину отстояния фотокамеры от сооружения, причём, чем он меньше, тем меньше влияние величины  $l$  на  $\Delta$ .

Для различных значений  $l = 5; 10; 15; 20$  мм и  $k = 1/2; 1/3; 1/4; 1/5$  вычислены погрешности  $\Delta$  и построены графики зависимости погрешности  $\Delta$  от величины нестворности  $l$  и коэффициента  $k$  (рис. 96) наглядно иллюстрирующие, как с увеличением расстояния  $K_1-1$  от  $1R$  до  $4R$  погрешность  $\Delta$  уменьшается от 2,5 – 10 мм до 1 – 4 мм при величине нестворности 5 – 20 мм.

На основании рис. 96 можно констатировать, что при точности центрирования фотокамеры в точке  $K_1$  равной 5 мм погрешность определения крена не превысит 1-2 мм. Таким образом, проведённые исследования подтвердили состоятельность предлагаемого двухэтапного способа определения крена сооружений башенного типа.

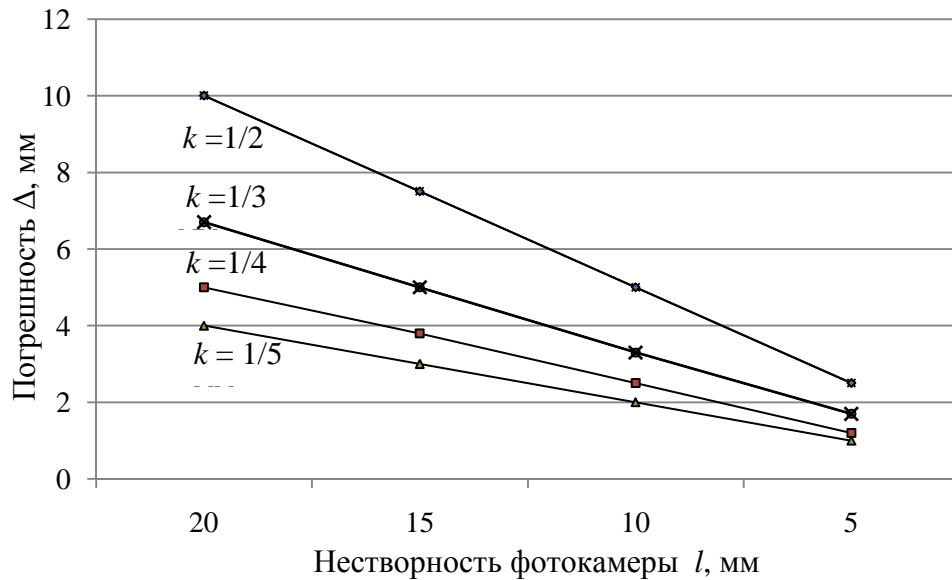


Рис. 96. Графики зависимости погрешности  $\Delta$  от  $l$  и  $k$

В заключение можно рекомендовать комбинированный способ, включающий проектирование с помощью, например, теодолита с точки  $K$  средней точки верхнего сечения на горизонтальную рейку внизу сооружения с последующим отмечанием точки  $K_1$  и фотографированием с этой точки нижней ранее закрытой части сооружения с рейкой.

Рассмотренную двухэтапную методику можно применять для контроля пространственного положения сооружений башенного типа практически любыми способами, описанными в работе [142].

#### 1.4.7. Фотографический способ мониторинга крена

Сущность фотографического способа мониторинга крена, например, дымовой трубы поясняется (рис. 97, а) и заключается в следующем [93].

В точке  $K$  устанавливают фотокамеру на таком расстоянии  $K-O$ , чтобы на будущей фотографии разместилось изображение всей трубы. Ориентируют оптическую ось фотокамеры на отмеченную заранее точку  $O_1$ , фиксирующую направление на центр нижнего поперечного сечения трубы. На некотором расстоянии от фотокамеры располагают на линии  $K-O$  шнуровой отвес так, чтобы нить отвеса проектировалась на всю высоту трубы.

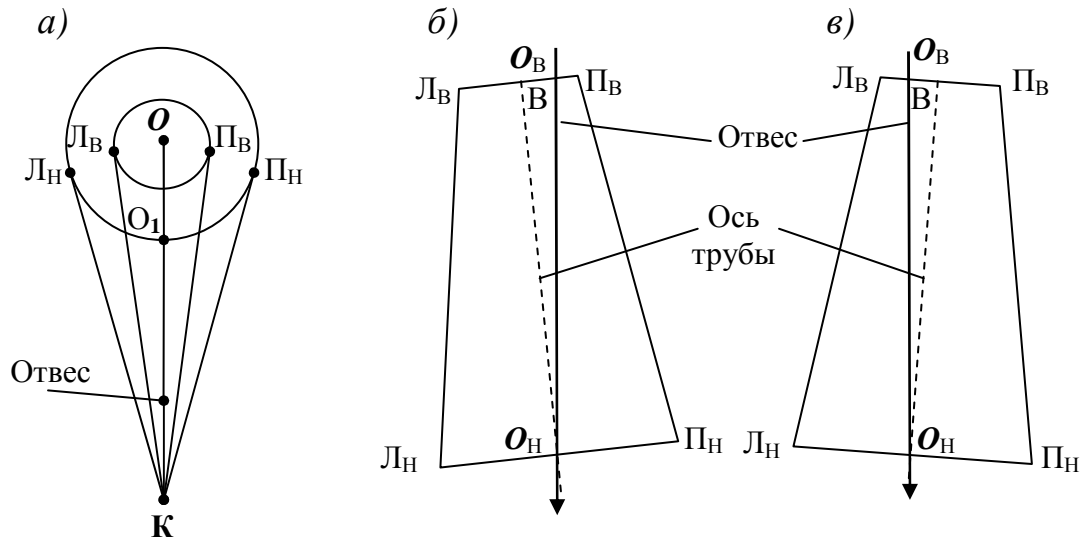


Рис. 97. Схемы к производству мониторинга крена дымовой трубы

Фотографируют отвес на фоне исследуемого объекта и производят обработку снимка по описанной выше методике. В результате получают в пикселях расстояния  $L_B$ ,  $P_B$  и  $L_H$ ,  $P_H$  от отвеса до верхних и нижних краёв трубы (рис. 97, б, в). Вычисляют в пикселях расстояние от отвеса до оси трубы поверху:

$$B = -(L_B + P_B)/2, \quad (102)$$

причём в этих выражениях необходимо учитывать знаки  $L_B$  и  $P_B$ .

Крен трубы  $K$  в пикселях равен величине  $B$ . В метрической системе единиц крен будет равен:

$$K = B\delta_B, \quad (103)$$

где  $\delta_B$  – размер одного пикселя для верхнего сечения трубы, мм/пкс.

Для контроля можно проверить расположение отвеса относительно центра нижнего сечения по формуле:

$$(L_H + P_H)/2 - O_H = C, \quad (104)$$

где  $C$  – смещение отвеса относительно центра нижнего сечения, пкс, которое теоретически должно быть равно нулю.

Если подсчитанная по формуле (104) величина  $C$  не равна нулю и оказалась со знаком плюс, то отвес смещён в левую сторону от центра нижнего сечения, со знаком минус – в правую. В этом случае к отсчёту  $O_B$  необходимо прибавить поправку  $C$  с учётом её знака и вычислить правильную величину  $B$ .

Такой мониторинг крена высоких сооружений башенного типа с помощью фотографического способа может осуществляться дискретно или непрерывно. Методика дискретного мониторинга заключается в периодическом расположении в постоянных точках фотокамеры и отвеса и фотографировании объекта с последующей обработкой снимка. Сравнение результатов, полученных в разных циклах, позволит судить о стабильном положении сооружения или нет. Методика непрерывного мониторинга может осуществляться с использованием стационарно установленных видеокамеры и отвеса. Так можно получать информацию о пространственном положении трубы на любом её уровне по высоте. В этом заключается одно из основных достоинств фотографического способа.

Обратим внимание, что в формуле (103) участвует величина  $\delta_B$  – размер одного пикселя для верхнего сечения трубы, мм/пкс, который можно определить по формулам (94) и (95). В формуле (95) присутствует поправочный коэффициент  $c$ , величина которого зависит от  $n$  – числа укладываний радиуса трубы поверху в расстоянии **К-О**.

Для определения аналитической зависимости  $c$  от  $n$  были использованы данные, формирующие кривую на рис. 86. Выбор такой зависимости был осуществлён с использованием метода наименьших квадратов, причём в качестве базовой была выбрана функция  $c = -A/n+1$ , а для нахождения коэффициента  $A$  следующее соотношение:

$$A = \frac{[c_i/n_i]}{[1/n_i^2]}, \quad (105)$$

по которому, после соответствующих подстановок, получим для коэффициента  $A$  величину 0,126494, которая может использоваться для определения  $c$  по значениям  $n$  для любого сооружения круглой формы.

Анализ формулы (95) позволяет констатировать [93], что точность определения хорды Л-П на рис. 85 в основном зависит от точности определения поправочного коэффициента  $c$  к радиусу сооружения  $R$ , то есть:

$$m_{Л-П} = 2\sqrt{c^2 m_R^2 + R^2 m_c^2}. \quad (106)$$

В свою очередь СКО  $m_c$  можно определить по формуле:

$$m_c = \frac{1}{n^3 \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} m_n, \quad (107)$$

характер изменения которой при принятых значениях  $m_n$  равных 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 иллюстрируется графиками на рис. 98.

На основании этих графиков можно констатировать, что при  $n$  равном 7 и более значения ошибки  $m_c$  практически равны нулю. Поэтому формулу (106) можно представить в сокращенном виде:

$$m_{Л-П} = 2cm_R . \quad (108)$$

В то же время увеличение расстояния фотографирования может отрицательно сказаться на точности измерения на снимке хорды Л-П, то есть на точности определения количества пикселей Л и П. А это, в свою очередь, влияет на точность определения размера одного пикселя  $\delta$ .

Согласно формулы (94) СКО  $m_{\delta_B}$  определения размера одного пикселя поверху будет равна:

$$m_{\delta_B} = \frac{1}{(Л_B + П_B)} \sqrt{4m_R^2 + \delta_B^2 m_{(Л_B + П_B)}^2} , \quad (109)$$

где  $m_R$ ,  $m_{(Л-П)_B}$  и  $m_{(Л_B + П_B)}$  — соответственно средние квадратические ошибки определения радиуса и хорды (Л-П) в мм и её же в пикселях.

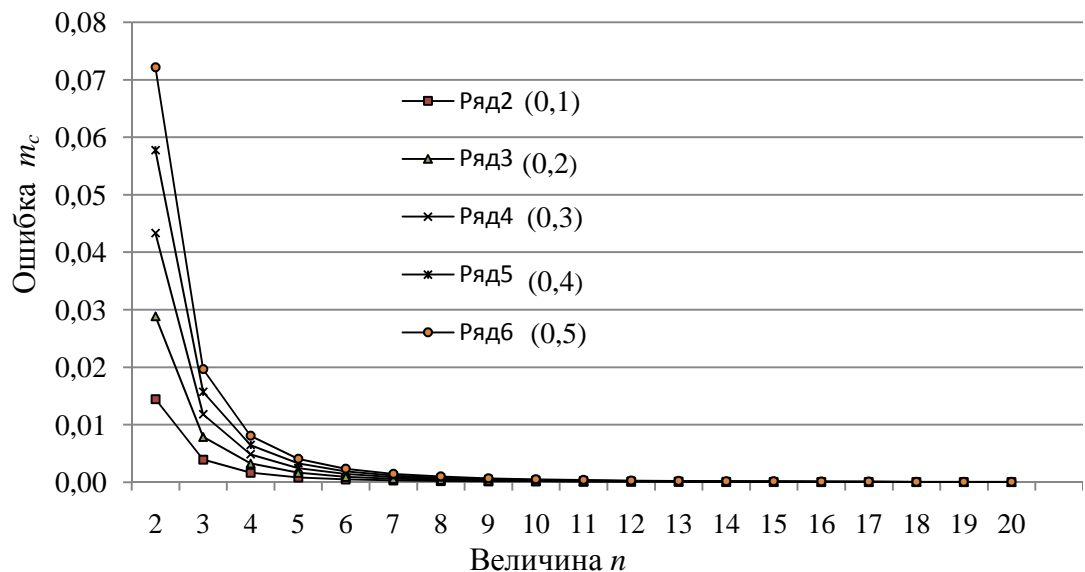


Рис. 98. Графики зависимости ошибки  $m_c$  от величины  $n$

На рис. 99 представлены подсчитанные по формуле (108) графики зависимости ошибки  $m_{Л-П}$  от  $c$  и  $m_R$ . Анализ этих графиков позволяет констатировать, что начиная с  $n$  равном 7 и более значения ошибки  $m_{Л-П}$  практически равны удвоенной ошибке  $m_R$ , то есть  $m_{Л-П} = 2m_R$ .

С учётом того, что отсчёты Л, О, П можно брать с точностью до 1 пикселя, формула (109) примет вид:

$$m_{\delta_B} = \frac{1}{(L_B + \Pi_B)} \sqrt{4m_R^2 + 2\delta_B^2}. \quad (110)$$

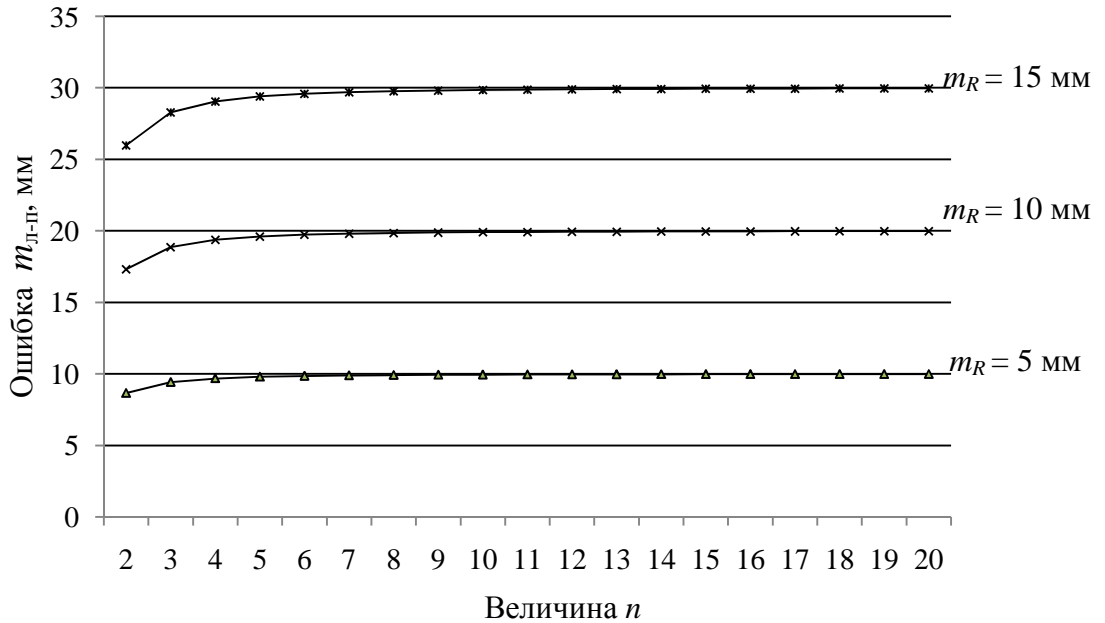


Рис. 99. Графики зависимости ошибки  $m_{Л-П}$  от  $s$  и  $m_R$

Проведённые нами исследования трёх фотокамер (рис. 100) показывают, что  $\delta$  зависит только от расстояния до объекта съёмки и для рассмотренных фотокамер может находиться в пределах от 1-2 до 8-15 мм в диапазоне 3-30 м.

В работах [81, 82] приведены результаты калибровки цифровой фотокамеры *Nikon COOLPIX S9100*, на основании которых составлена таблица для базиса равного 3 м, что в нашем случае соответствует радиусу трубы 1,5 м поверху.

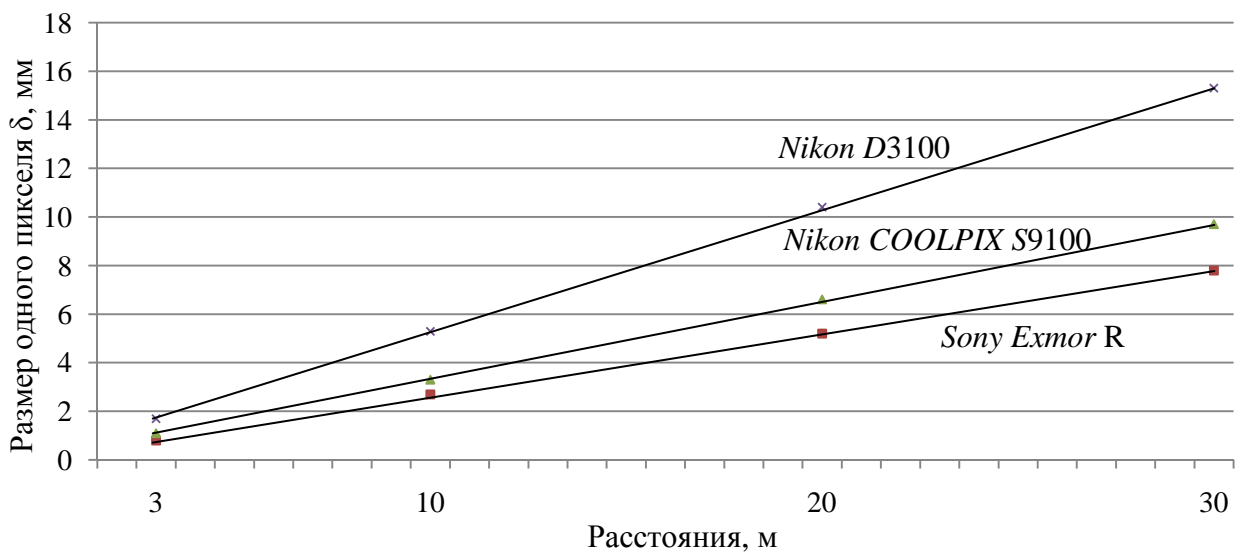




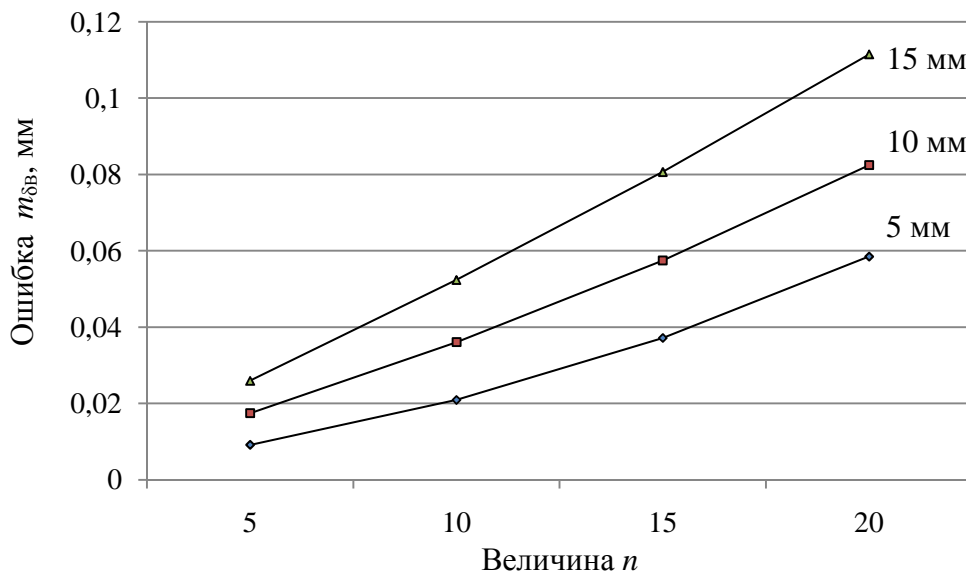
Рис. 100. Графики зависимости размера пикселя от расстояния съёмки для различных фотокамер

Т а б л и ц а 47

**Некоторые результаты калибровки фотокамеры  
Nikon COOLPIX S9100**

$n$	5	10	15	20
$(L_B+P_B)$ , пкс	1163	589	395	298
$\delta_B$	2,6	5,1	7,6	10,1

Используя данные табл. 47 были подсчитаны по формуле (110) СКО  $m_{\delta_B}$  для  $n = 5, 10, 15, 20$  и  $m_R = 5, 10, 15$  мм. Полученные результаты иллюстрируются графиками на рис. 101. На основании этих графиков можно констатировать, что даже при  $n = 20$  ошибка  $m_{\delta_B}$  составит всего 0,058, 0,082, 0,112 при различных значениях  $m_R$ .

Рис. 101. Графики зависимости ошибки  $m_{\delta_B}$  от  $n$  и  $m_R$ 

Следует отметить, что приведенным вариантом методики мониторинга крена не ограничиваются схемы его исполнения. Они могут быть самые различные. Во-вторых, вообще можно ограничиться только измерениями  $L_B$ ,  $P_B$  и  $L_H$ ,  $P_H$  и определить величину крена в относительной мере. Для этого следует найти количество пикселей  $H$ , приходящихся на всю высоту трубы, и вычислить крен в относительной мере  $V/H$ , который согласно СП 22.13330.2011 «Основания зданий и сооружений» не должен превышать 0,005 для труб высотой  $< 100$  м и  $1/2H$  – для труб большей высоты.

В нашей работе [82] проведено сравнение результатов калибровки цифровой камеры Nikon COOLPIX S9100 по горизонтальному и верти-

кальному базисам. В частности установлено, что размеры одного пикселя, зависящие от расстояния между фотокамерой и объектом, оказались совершенно одинаковыми как для горизонтального, так и для вертикального базиса, что подтверждает правомерность вычисления относительной величины крена В/Н в пикселях. Пример таких вычислений приведен выше (см. рис. 83).

#### 1.4.8. Фотографический способ продолженного отвеса

Непременным условием использования в качестве вертикальной референтной прямой нити свободно висящего перед объективом фотокамеры шнурового отвеса, сфотографированного на фоне исследуемого сооружения, является его распространение на всю высоту сооружения (рис. 102, *а*).

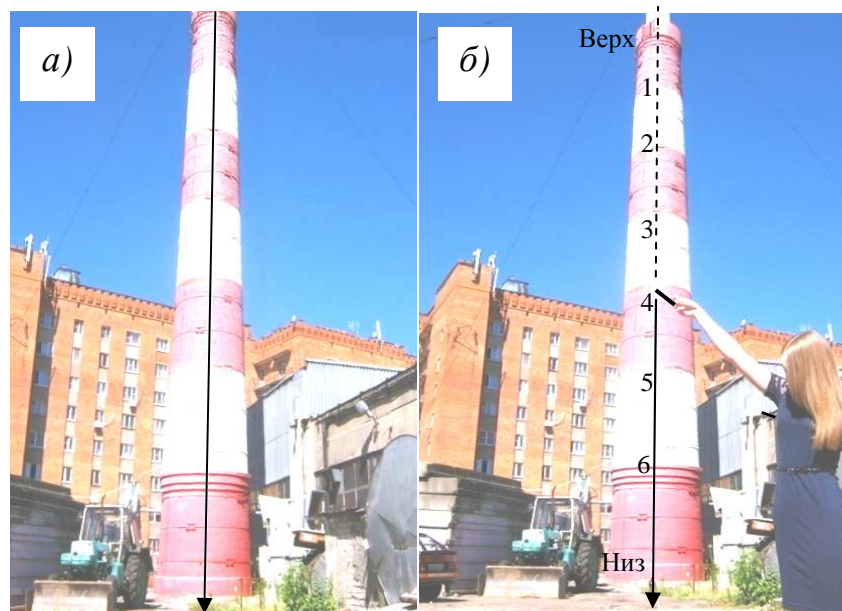


Рис. 102. Фотография трубы с отвесом (*а*) и полной референтной прямой (*б*)

Кроме того, для максимального исключения влияния дисторсии объектива на получаемые результаты, необходимо стремиться к тому, чтобы отвес располагался по оси сооружения и как можно дальше от фотокамеры. Однако выполнение второго условия об увеличении расстояния от отвеса до фотокамеры может привести к тому, что отвес не будет распространяться на всю высоту сооружения, а только на некоторую его часть (рис. 102, *б*).

В этом случае необходимо на снимке наложить на нить отвеса линию (пунктирная на рис. 102, *б*) и продлить её на всю высоту трубы. Опыт показывает, что операцию по совмещению этих двух линий можно производить с достаточно высокой степенью точности. После этого, по изложенной в предыдущих разделах монографии методике, можно получить максимум ин-

формации о пространственном положении трубы на любом её уровне по высоте.

Вообще говоря, обработку снимка можно производить по-разному, используя, различные программы редактирования фотографических изображений. А можно просто вывести снимок на бумажный носитель, провести на нём полную референтную прямую и определять крен и искривления ствола с помощью обычного циркуля-измерителя и масштабной линейки.

Проведенные нами экспериментальные исследования с использованием фотокамеры *Panasonic DMC-TZ25* заключались в фотографировании дымовой трубы (рис. 102, б) с последующим продолжением проекции отвеса на всю высоту трубы. Затем эта фотография была обработана в системе *Paint*.

В табл. 48 представлены результаты определения общего и шести частных кренов в пикселях.

Т а б л и ц а 48

### Результаты определения крена по продолженному отвесу

Сечения	Отсчёты по курсору, пкс			Расстояния по сечениям, пкс			Крен, пкс К=В-Н
	Л	О	П	Лв,с,н	Пв,с,н	Вв,с,Н	
Верх	857	915	997	58	-82	12	14
1	847	911	997	64	-86	11	13
2	828	907	1004	79	-97	9	11
3	809	902	1010	93	-108	7,5	9,5
4	794	899	1015	105	-116	5,5	7,5
5	764	890	1025	126	-135	4,5	6,5
6	733	882	1034	149	-152	1,5	3,5
Низ	701	875	1045	174	-170	-2	0

В процессе экспериментальных исследований была также опробована программа *Plumb-bob*. Её сущность заключается в том, что в процессе фотографирования сооружения на смартфон или планшет, снабженные этой программой, на снимке всегда есть изображение вертикальной линии.

Такая фотография трубы, выполненная на планшет, представлена на рис. 103, а.

Дальнейшая задача заключается в продолжении этой вертикальной линии на всю высоту трубы. Её можно решать двояко. Во-первых, можно на рис. 103, а измерить положение этой линии относительно левого и правого краев трубы и перенести эти размеры на фотографию всей трубы (рис. 103, б) с учётом разности масштабов обоих снимков.

Нами был опробован второй путь, который заключался в том, что фотографию части трубы (рис. 103, а) накладывали на фотографию всей трубы

(рис. 103, б), добиваясь совмещения всех одноименных контуров сооружения на обеих фотографиях.



Рис. 103. Фотография трубы с *Plumb-bob* (а) и полной референтной прямой (б)

Фотография на рис. 103, б была также обработана в системе *Paint*. В табл. 49 представлены результаты определения общего и шести частных кренов в пикселях.

По данным табл. 48 и 49 построены графики, характеризующие частные и общий крен трубы (рис. 104). На основании этих графиков можно констатировать, что обе кривые являются конгруэнтными, а их несовпадение (расхождение составило в среднем 3 пкс) можно объяснить в первую очередь

неточностью совмещения фотографии на рис. 103, а с фотографией на рис. 103, б.

Т а б л и ц а 49

### Результаты определения крена по про программе *Plumb-bob*

Сечения	Отсчёты по курсору, пкс			Расстояния по сечениям, пкс			Крен, пкс
	Л	О	П	Лв,с,н	Пв,с,н	Вв,с,Н	К=В-Н
Верх	361	427	515	66	-88	11	10
1	356	426	518	70	-92	11	10
2	338	425	529	87	-104	8,5	7,5
3	321	424	540	103	-116	6,5	5,5
4	304	422	551	118	-129	5,5	4,5
5	281	422	571	141	-149	4	3
6	238	421	607	183	-186	1,5	0,5
Низ	228	420	614	192	-194	1	0

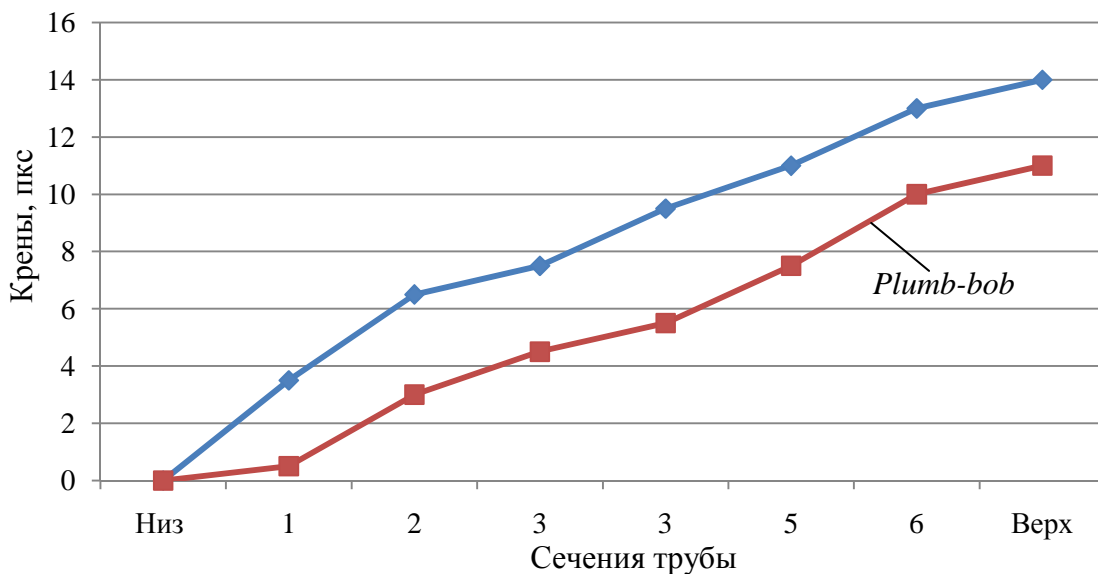


Рис. 104. Частные и общий крен трубы

#### 1.4.9. Фотографический способ определения крена куста труб

В настоящее время широкое распространение получили металлические трубы постоянного диаметра, расположенные в ряд (рис. 105) или в виде четырёхугольника (рис. 106).

Обработка в системе *Paint* фотографии на рис. 105 заключалась в определении расстояний от отвеса до оси каждой трубы. Для этого подводили курсор к левому, правому краю каждой трубы и отвесу на уровне верхнего 1,

средних 2, 3, 4, 5 и нижнего 6 сечений, беря соответствующие отсчёты  $L_i$ ,  $\Pi_i$ ,  $O_i$  в пикселях.

Вычисляли в пикселях расстояния от отвеса до оси каждой трубы на уровне каждого сечения как разности:

$$S_i = [O_i - (L_i + \Pi_i)/2].$$

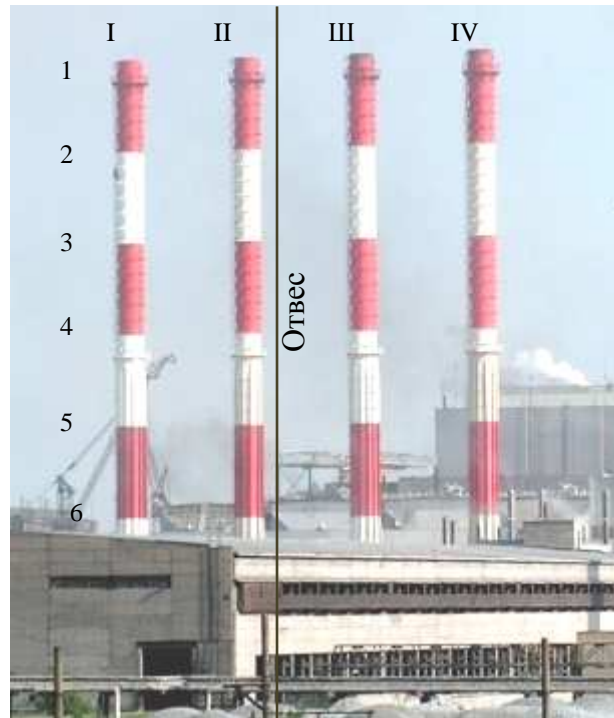


Рис. 105. Фотография отвеса на фоне куста дымовых труб

При расположении труб I и II слева от отвеса (рис. 105) все  $S_i$  будут положительными, а для труб III и IV – отрицательными.

Общий и промежуточные крены трубы  $K_i$  в пикселях будут равны разности  $K_{1,2,3,4,5} = S_{1,2,3,4,5} - S_6$  (с учётом их знака). Если эта разность положительна, то крен трубы влево, если она отрицательная – вправо. В метрической системе единиц крен будет равен  $K_{мм} = K_{пкс} \delta$ , где  $\delta$  – размер одного пикселя, мм/пкс, который будет равен частному от деления известного диаметра трубы на разность  $(\Pi_i - L_i)$ .

Результаты обработки полученных данных, с учётом того, что отсчёты  $O_i$  на всех сечениях оказались равными 146 пкс, представлены в табл. 50.

Согласно табл. 50, полученные значения общего крена труб составили 1-2 пкс, что, вообще говоря, соответствует точности взятия отсчётов  $L_i$ ,  $\Pi_i$ ,  $O_i$ .



Фотографирование куста труб (рис. 106), расположенных в виде четырёхугольника, следует производить с четырёх сторон. В этом случае крен каждой трубы можно определить в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Т а б л и ц а 50

### Результаты определения крена куста труб

Сечения	Труба I			Труба II			Труба III			Труба IV		
	Л	П	К	Л	П	К	Л	П	К	Л	П	К
1	53	66	1	112	124	1,5	169	181	2	228	241	1,5
2	53	66	1	112	124	1,5	168	181	2,5	228	241	1,5
3	53	66	1	113	125	0,5	168	182	2	228	242	1
4	53	67	0,5	113	125	0,5	169	182	1,5	228	242	1
5	53	68	0	112	125	1	169	184	0,5	228	243	0,5
6	53	68	0	113	126	0	170	184	0	229	243	0



Рис. 106. Фотография четырёхугольного куста дымовых труб

#### 1.4.10. Ступенчатый способ определения крена

В том случае, когда всё башенное сооружение можно наблюдать только с близкого расстояния и нельзя использовать непосредственный вариант на

рис. 107, а, следует применять ступенчатый способ, предусматривающий фотографирование такого сооружения с одной точки по частям: низ (рис. 107, б), верх (рис. 107, г) и (при необходимости) середина (рис. 107, в).

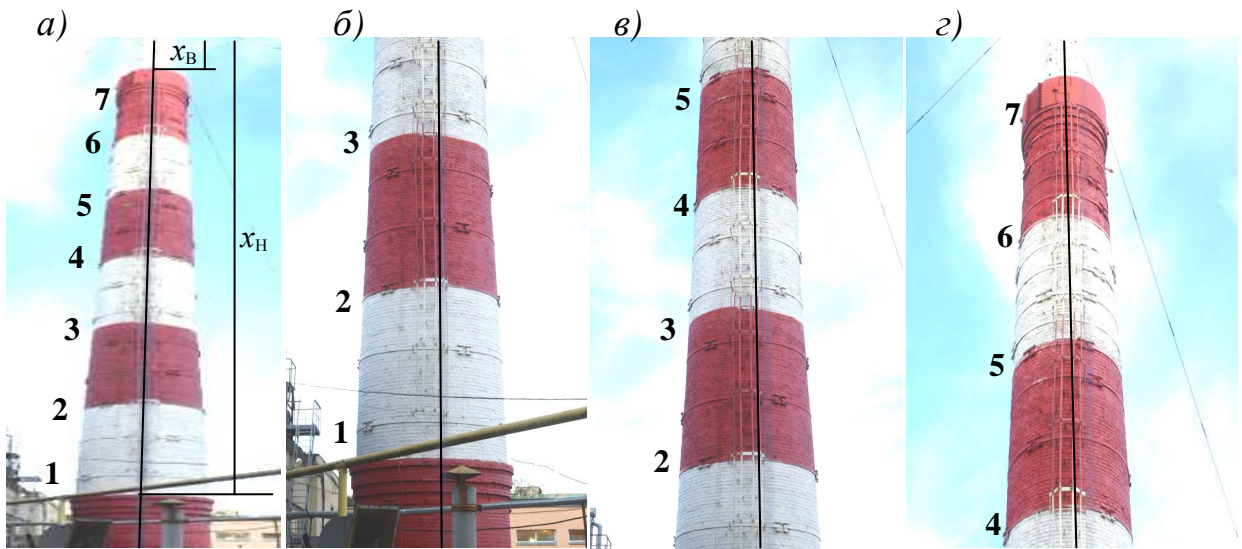


Рис. 107. Непосредственный (а) и ступенчатый (б, в, г) способы определения крена

Все фотографии (рис. 107, б, в, г) выполненные «с руки» камерой *Nikon S9100* имеют одинаковые размеры 3000x4000 пкс, то есть они соизмеримы между собой. При обработке фотографий, открытых в *Paint*, курсор подвели к левому краю, отвесу и правому краю каждого сечения и брали отсчёты Л, О и П в пикселях. Результаты вычислений крена по изложенной в разделе 1.4.5. методике представлены в табл. 51.

Обращаем внимание, что если отвес располагается справа от оси трубы (как на рис. 107), то в графе 7 расстояние от отвеса до оси вычисляется по формуле  $B(H) = - (Л_B + П_B)/2$ . При вычислении крена К (графа 8) за Н принимается значение для нижнего сечения 1 (низ).

Как следует из табл. 51 расхождения между непосредственным и ступенчатым способами находятся, вообще говоря, в пределах точности взятия отсчётов Л, О и П в пикселях. Если для непосредственного способа возможно применение фотографирования «с руки», то ступенчатый способ требует стабилизации положения камеры во время фотографирования. Для этого предлагается устройство (рис. 108), позволяющее производить «горизонтирование» камеры с помощью цилиндрического уровня и её перевод через зенит для исключения коллимационной ошибки, как при работе с теодолитом.

Как отмечалось выше, при непосредственном способе (рис. 107, а) можно характеризовать величину крена в относительной мере, для чего следует определить высоту трубы  $H = x_H - x_B$  в пикселях. В нашем примере  $H = 362$  пкс, поэтому  $1/H = 2,5/362 = 1/145$ . При необходимости эту характеристику можно экстраполировать на всю высоту трубы до подошвы фундамента.



**Результаты вычислений крена в пикселях непосредственным  
и ступенчатым способами**

Сечения	Л	О	П	Лв= О-Л	Пв=О-П	В, Н	К=В-Н
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Непосредственный способ</b>							
7(верх)	204	224	240	20	-16	-2	-2,5
6	203	223	241	20	-18	-1	-1,5
5	200	222	243	22	-21	-0,5	-1
4	197	220	244	23	-24	0,5	0
3	193	220	247	27	-27	0	-0,5
2	189	219	249	30	-30	0	-0,5
1(низ)	183	217	252	34	-35	0,5	0
<b>Ступенчатый способ</b>							
7 (верх)	1424	1811	1984	387	-173	-107	-4,5
6	1418	1814	2011	396	-197	-99,5	3
5	1366	1830	2084	464	-254	-105	-2,5
4	1315	1838	2152	523	-314	-104,5	-2
3	1056	1631	1997	575	-366	-104,5	-2
2	999	1638	2067	639	-429	-105	-2,5
1 (низ)	951	1651	2146	700	-495	-102,5	0

Для определения величины крена в метрической системе единиц по формуле (92) необходимо знать  $\delta_{\text{в}}$  и  $\delta_{\text{н}}$  – размер одного пикселя соответственно для верхнего и нижнего сечения трубы, мм/пкс, о чём говорится в разделе 1.4.5.

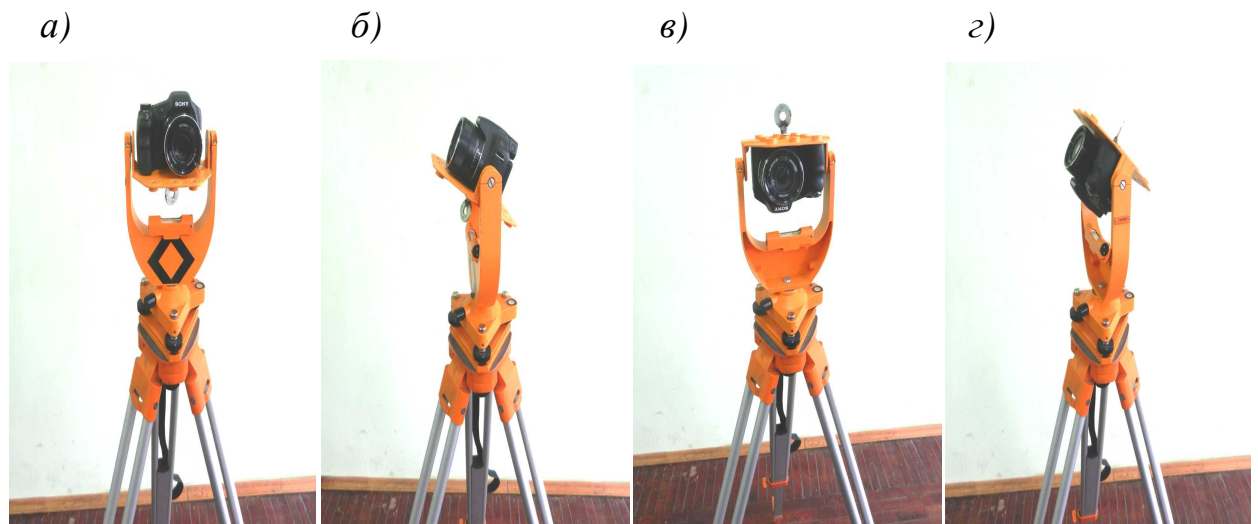


Рис. 108. Положение устройства (а, б) до и (в, г) после перевода камеры через зенит

В дополнение к сказанному обратимся к работам [81, 82], в которых для фотокамеры *Nikon COOLPIX S9100* получены два совершенно одинаковых графика зависимости размера одного пикселя от расстояния  $d$  фотографирования горизонтального и вертикального базисов различных размеров  $b_i$ .

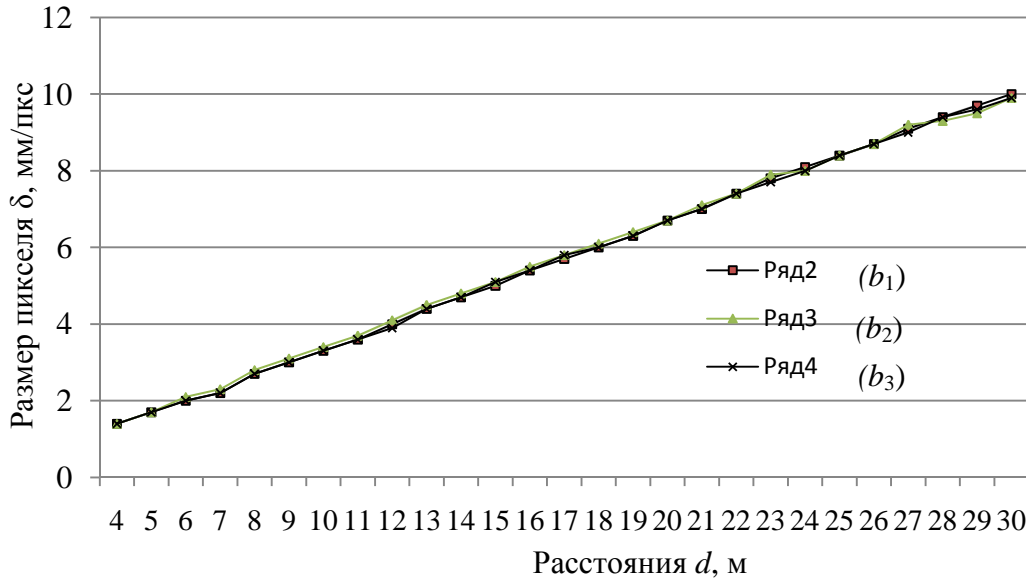


Рис. 109. График зависимости размера пикселя  $\delta$  от расстояния  $d$  до базиса

Проведённые исследования показали, что размер одного пикселя зависит только от расстояния  $d$  и не зависит от величины и положения базиса  $b$ . Эта зависимость иллюстрируется графиком на рис. 109, и может быть выражена равенством:

$$\delta_i = \delta_n + \frac{(d_i - d_n)(\delta_k - \delta_n)}{(d_k - d_n)}, \quad (111)$$

где  $\delta_i$  – размер пикселя на расстоянии  $d_i$ ;  $\delta_n$  – размер пикселя на расстоянии  $d_n = 4$  м;  $\delta_k$  – размер пикселя на расстоянии  $d_k = 30$  м.

К аналогичному выводу можно прийти, если определить размеры одного пикселя на разной высоте сооружения (рис. 110).

Результаты измерения на разных этажах ширины лоджий в пикселях и сравнение с шириной лоджии в мм представлены в виде графика на рис. 111. На этом графике также прослеживается зависимость размера одного пикселя только от наклонного расстояния, которая также может быть выражена равенством (111).

Поскольку переменные величины  $d$  и  $\delta$  прямо пропорциональны, то на практике можно ограничиться тщательным определением  $\delta_n$  и  $\delta_k$ , а размер одного пикселя  $\delta_i$  для любого расстояния  $d_i$  может быть найден по формуле (111). Тогда достаточно измерить расстояния до нижнего и верхнего

(при необходимости до средних) сечений трубы и по формуле (111) вычислить участвующие в выражении (92)  $\delta_B$  и  $\delta_H$ .



Рис. 110. Фотография 24-этажного дома

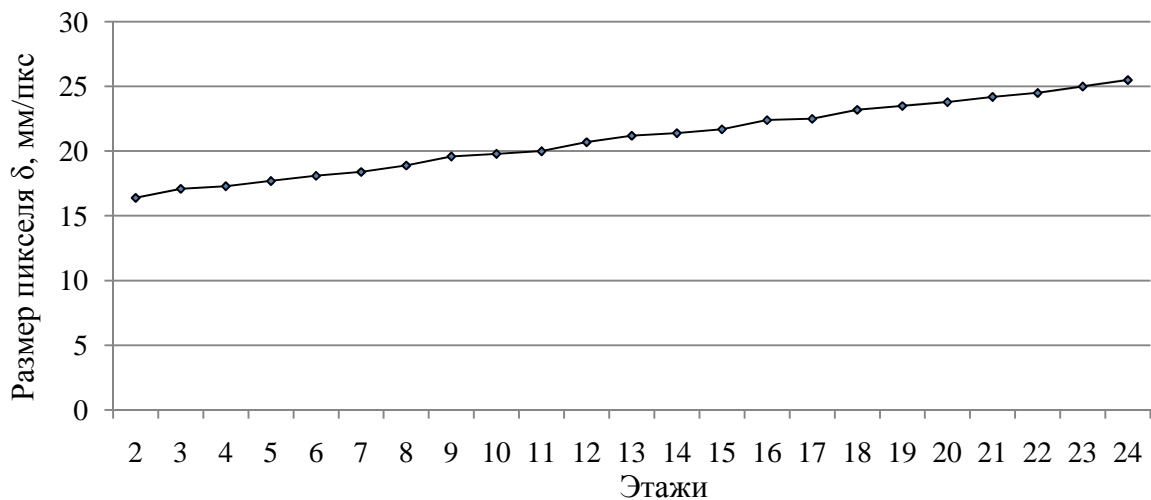


Рис. 111. График зависимости размера пикселя  $\delta$  от наклонного расстояния

## Глава 2. ОДНОСТОРОННИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРЕНА

Одним из основных недостатков рассмотренных выше многосторонних способов определения крена высоких сооружений является необходимость производства наблюдений как минимум с двух различных направлений, что в условиях плотной застройки бывает весьма проблематично. В этом отношении существенным преимуществом перед ними обладают односторонние,

предусматривающие определение полного крена с одного любого направления.

Наличие электронных тахеометров безотражательного типа позволило нам разработать два способа, названных «односторонним линейно-угловым» и «односторонним координатным», позволяющим с одной точки стояния прибора определять крен в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

### **2.1. Способ направления с одного пункта**

Этот способ [73, 74, 94, 113] предусматривает установку визирных марок на цокольном и верхнем сечениях сооружения в створе направления с пункта наблюдения на центр каждого из них. Определяют горизонтальное проложение между пунктом наблюдения и центром цокольного сечения, а также измеряют зенитное расстояние направления на нижнюю марку. В дальнейшем, в каждом цикле на пункте наблюдения измеряют малый горизонтальный угол между направлениями на цокольную и верхние марки и зенитное расстояние направления на верхнюю марку. В результате получают составляющие приращения крена по осям условной системы координат.

В цитируемых источниках отмечается, что точность указанного способа в значительной степени зависит от величины расстояния от пункта наблюдения до оси цокольного сечения, что сказывается на точности измерения зенитных расстояний, оказывающей в свою очередь влияние на точность определения высоты верхней марки относительно оси вращения зрительной трубы инструмента.

### **2.2. Односторонний линейно-угловой способ определения крена**

Под односторонним линейно-угловым способом будем понимать определение крена высокого сооружения в двух взаимно перпендикулярных направлениях путём выполнения линейных и угловых измерений с одной точки стояния прибора (электронного тахеометра).

В разделе 1.3. монографии описан линейный способ определения крена дымовой трубы по направлению тахеометр-труба. Если совместить этот линейный способ с одновременным определением произвольных направлений (или магнитных азимутов) на образующие трубы, то дополнительно можно определить крен трубы в перпендикулярном направлении [148].

Методика выполнения одностороннего линейно-углового способа определения крена высоких сооружений башенного типа круглой формы заключается в следующем (рис. 112).

Устанавливают тахеометр в точке Т, расположенной в месте, с которого видно всё тело трубы и на расстоянии, позволяющем визировать на её низ и верх. Измеряют направления (например, магнитные азимуты  $A_L$  и  $A_P$ ) на

точки Л и П образующей трубы нижнего и верхнего (при необходимости и промежуточных) наблюдаемых её сечений. Вычисляют угол  $\beta = A_{\text{П}} - A_{\text{Л}}$ , вычисляют средний азимут  $A = (A_{\text{П}} + A_{\text{Л}}):2$  и, установив его на горизонтальном круге тахеометра, измеряют горизонтальное проложение  $D$  и превышение  $h$  для каждого наблюдаемого сечения. По значениям  $D$  и  $\beta$  находят по формуле (20) радиусы трубы каждого сечения. Сравнивая полученные суммы  $(D + R)$  с суммой для нижнего сечения  $(D_{\text{Н}} + R_{\text{Н}})$ , находят по формулам (17) частные и общий крен трубы в линейной мере по направлению Т–О.

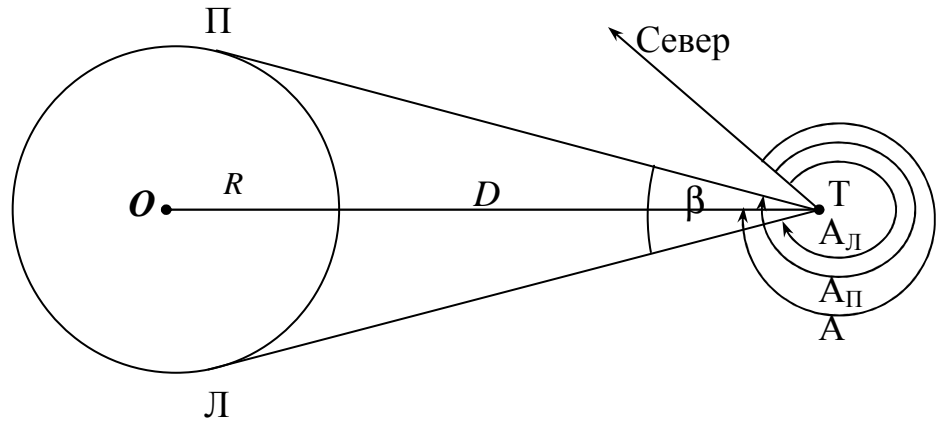


Рис. 112. Схема определения крена дымовой трубы линейно-угловым способом

Разности  $\Delta$  средних направлений на верхний и промежуточные центры трубы с направлением на нижний центр трубы, равные:

$$\Delta_{\text{В}} = A_{\text{В}} - A_{\text{Н}}, \quad (112)$$

$$\Delta_i = A_i - A_{\text{Н}},$$

характеризуют частные и общий крен трубы в угловой мере в перпендикулярном Т–О направлении, причем их знак плюс означает крен вправо, а знак минус – влево. По формуле (70) вычисляют частные и общий крен трубы в линейной мере по направлению перпендикулярному Т–О.

Полученные значения кренов экстраполируют на всю высоту трубы (до дна её фундамента) и вычисляют полное значение крена  $K_{\text{П}}$ :

$$K_{\text{П}} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \quad (113)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  – экстраполированные значения кренов верха трубы соответственно по направлению Т–О и по перпендикулярному к Т–О направлению.

Как показано в разделе 1.4.3. монографии, для наглядного представления о пространственном положении наблюдаемого сооружения даёт геометрическая интерпретация полученных результатов с помощью разработанных нами программ «План» и «Профиль».

Вообще говоря, схему, характеризующую величины и направления общих  $K_1$  и  $K_2$  и полного  $K_{\Pi}$  кренов верха трубы можно построить в крупном масштабе следующим образом (рис. 113).

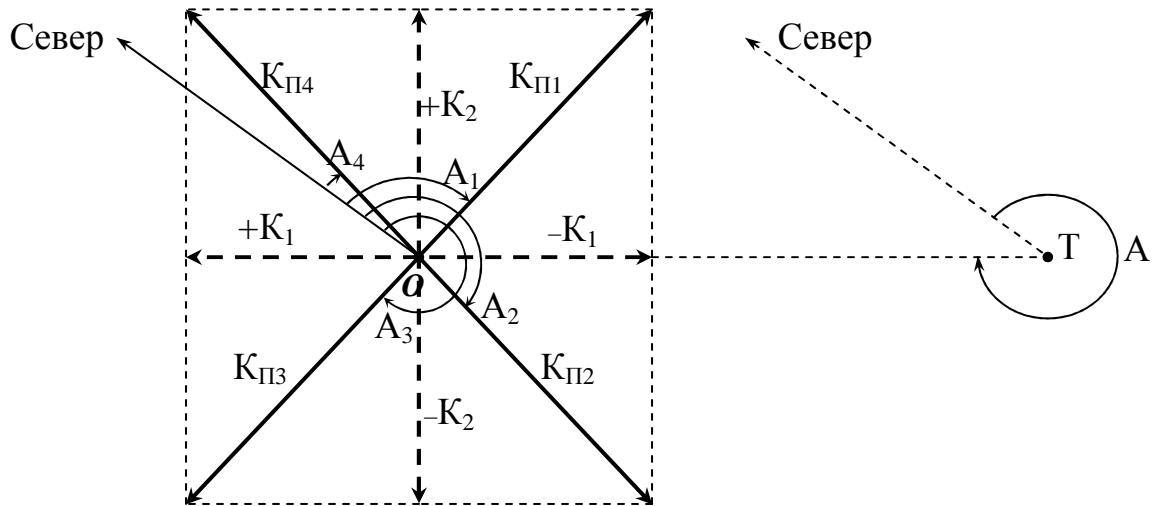


Рис. 113. Схема графического способа определения полного  $K_{\Pi}$  крена и его направления

Откладывают от точки  $O$  по направлению  $O-T$  величину  $-K_1$  или по направлению  $T-O$  величину  $+K_1$ . Откладывают от точки  $O$  по перпендикулярному к  $O-T$  направлению вправо  $+K_2$  или влево  $-K_2$ . Диагональю построенного на сторонах  $K_1$  и  $K_2$  прямоугольника будет полный крен  $K_{\Pi}$  с соответствующим магнитным азимутом  $A_{1,2,3,4}$ .

Было выполнено знаковое моделирование линейно-углового способа, где в качестве модели фигурировала произвольная схема расположения пяти сечений башенного сооружения: нижнего с центром 1 радиуса 25 мм, промежуточных с центрами 2 – радиуса 20 мм, 3 – радиуса 15 мм, 4 – радиуса 10 мм и верхнего с центром 5 радиуса 10 мм (рис. 114).

Методика моделирования заключалась в измерении от произвольной точки  $T$  с помощью тахеографа расстояний  $D$  (графа 2 табл. 52) и условных азимутов  $A_{\text{Л}}$  и  $A_{\text{П}}$  (графы 3, 4), разность которых равна углу  $\beta$ . На рис. 114 эти измерения показаны только для нижнего сечения.

По формуле (20) были подсчитаны радиусы окружностей (графа 6), которые оказались практически равными их истинным значениям. Вычисленные по формулам (17) продольные крены  $K_1$  (графа 7) и по формулам (112) и (70) поперечные крены совпали с их значениями, измеренными непосредственно.

Была разработана программа (Microsoft Excel), реализующая процесс вычислений. В ней достаточно ввести в компьютер горизонтальные проложения  $D$  и условные или истинные азимуты  $A_{Л}$  и  $A_{П}$ . Направление полных кренов  $K_{П}$  относительно осей нижнего сечения определяется по знакам продольных  $K_1$  и поперечных кренов  $K_2$  (рис. 113). По значениям  $h_i$  и вычисленным значениям  $K_1$  и  $K_2$  могут быть построены графики по специально разработанной для этой цели программе «Профиль».

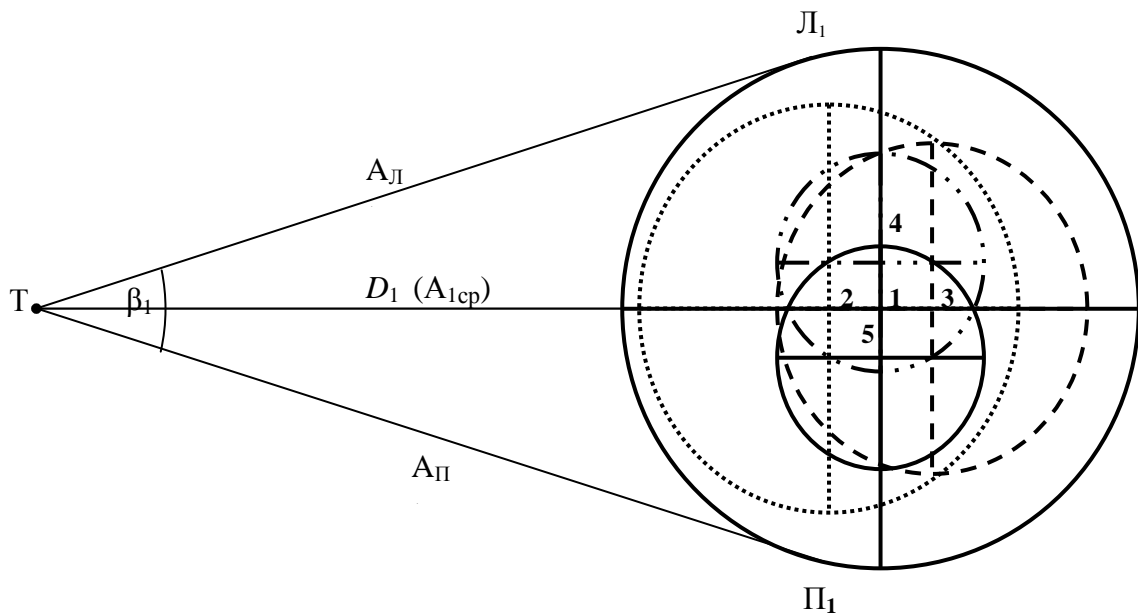


Рис. 114. Схема определения линейно-угловых величин для нижнего, промежуточных и верхнего сечений трубы

Т а б л и ц а 52

### Результаты моделирования линейно-углового способа

Сечения	$D$ , мм	$A_{Л}$ , °	$A_{П}$ , °	$\beta/2$ , °	$R_{выч}$ , мм	$K_1$ , мм	$K_2$ , мм
1	2	3	4	5	6	7	8
1	325,5	0,0	8,2	4,1	25,06	0,00	0,00
2	326,5	0,8	7,4	3,3	19,94	-4,12	0,00
3	339,4	1,9	6,8	2,45	15,16	+4,00	0,00
4	340,4	1,8	5,1	1,65	10,09	-0,07	-4,02
5	340,4	3,1	6,4	1,65	10,09	-0,07	+4,02

Проведенные исследования показали, что односторонний линейно-угловой способ может с успехом применяться для определения радиусов и кренов сооружений башенного типа круглой формы. Он отличается высокой производительностью и имеет соответствующее программное обеспечение.

Линейно-угловой способ можно трансформировать в координатный, если по расстоянию  $D + R$  и азимуту  $A$  (рис. 112) вычислить координаты центра  $O$  наблюдаемого сечения [65].

В работе [79] показано прикладное значение линейно-углового способа для геодезической выверки колонн по вертикали. Способ позволяет исключить возникающие при этом трудности, а именно необходимость подъёма работника к оголовку колонны для обозначения её верхней осевой риски или для удерживания линейки или рейки на уровне оголовка колонны. При его выполнении отпадает необходимость задействования мостового крана или выхода работника на крановый путь.

Методика использования линейно-углового способа поясняется рис. 115.

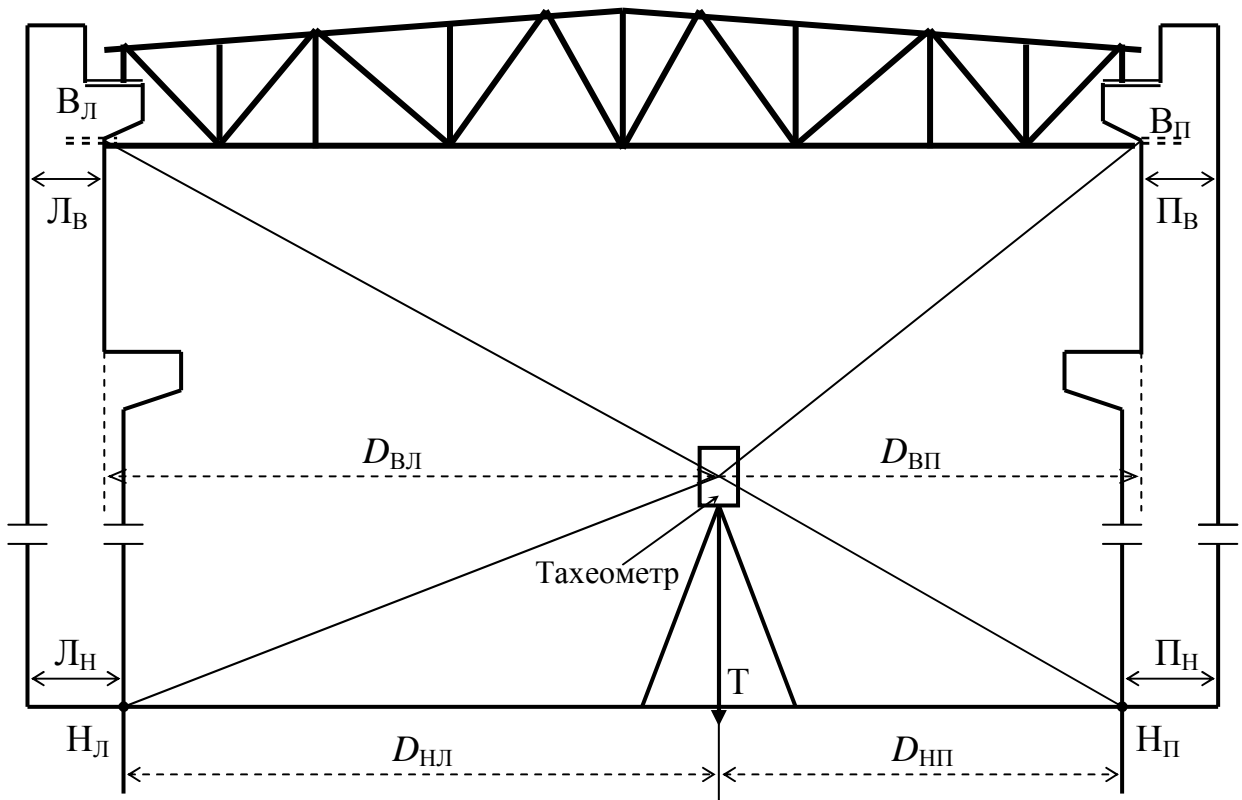


Рис. 115. Схема определения вертикальности колонн путём линейных измерений

Тахеометр устанавливают на полу цеха в произвольной точке  $T$ , расположенной между колоннами. Наводят последовательно перекрестие сетки или лазерное пятно прибора на низ  $H_L$  и верх  $B_L$  левой колонны, на верх  $B_P$  и низ  $H_P$  правой колонны, получая на каждую наблюдаемую точку горизонтальное проложение  $D$ . По разностям полученных горизонтальных проложений от точки  $T$  до верха  $D_{ВЛ}$  и низа  $D_{НЛ}$  левой колонны и до верха  $D_{ВП}$  и низа  $D_{НП}$  правой колонны вычисляют крен  $K_L$  и  $K_P$  каждой колонны в пролёте:

$$K_L = (D_{ВЛ} + Л_В) - (D_{НЛ} + Л_Н), \quad (114)$$

$$K_P = (D_{ВП} + П_В) - (D_{НП} + П_Н),$$



где  $L_B, L_H, P_B, P_H$  – ширина колонны поверху и понизу, а по знаку разности судят о крене колонны влево или вправо.

Определение крена колонны в ряду предусматривает только угловые измерения. С точки Т (рис. 115) визируют при положении вертикального круга КЛ на верхние и нижние грани колонны, беря последовательно отсчёты по горизонтальному кругу. Затем действия повторяют при другом положении вертикального круга КП и выводят средние отсчёты  $L_B, P_B$  и  $L_H, P_H$  (рис. 116, а).

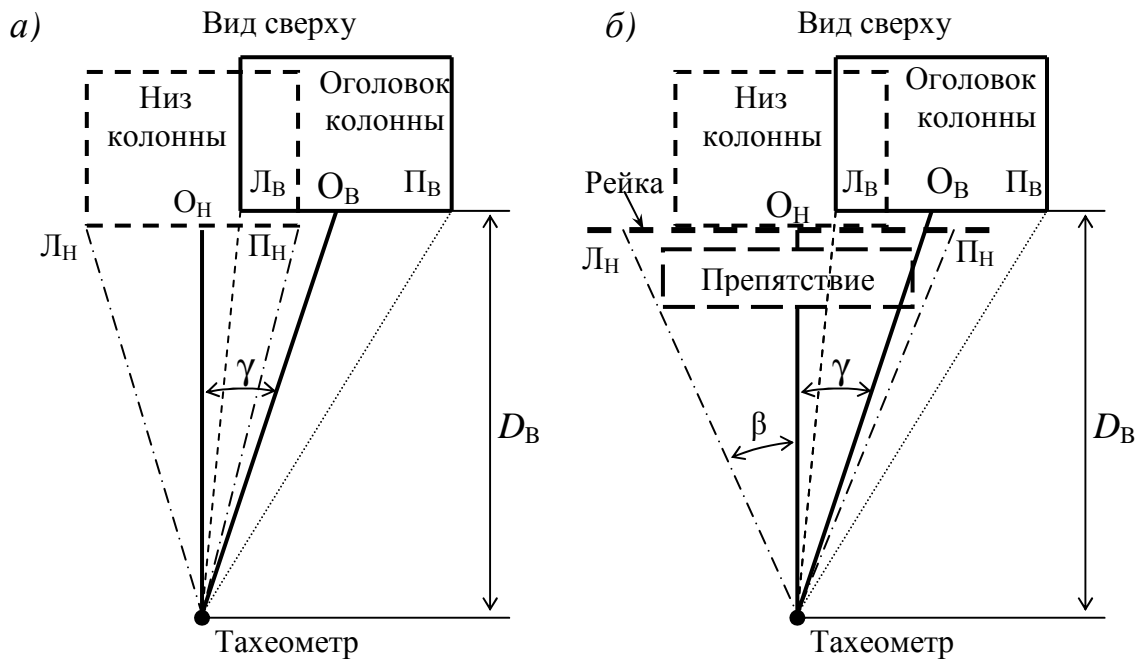


Рис. 116. Схема определения вертикальности колонн путём угловых измерений

По ним вычисляют отсчёты  $O_B = 0,5(L_B + P_B)$  и  $O_H = 0,5(L_H + P_H)$  на воображаемые верхнюю и нижнюю осевые риски колонны. Разность этих отсчетов  $\gamma = O_B - O_H$  соответствует крену колонны в угловой мере. Причём, знак этой разницы «плюс» означает крен колонны вправо, знак «минус» – влево. Зная расстояние  $D_B$  от тахеометра до колонны, вычисляют крен  $K$  в линейной мере по формуле

$$K = D_B \gamma'' / \rho'', \quad \rho'' = 206265'' . \quad (115)$$

Если низ колонны закрыт и не просматривается, то для определения горизонтального проложения  $D_H$  визируют на любой видимый отсчёт по вертикально установленной у колонны рейке. А для определения направления  $O_H$  на нижнюю осевую риску используют горизонтальную рейку, закреплённую внизу колонны (рис. 116, б). Теперь вместо наблюдения нижних граней

колонны визируют на видимые левый  $L_H$  и правый  $P_H$  отсчёты рейки, равноудаленные от оси колонны или от её боковых граней.

Если нет возможности приложить рейку непосредственно к передней грани колонны, то используют две рейки. Их прикладывают горизонтально нулевыми делениями к нижним боковым граням колонны и визируют на одноимённые видимые деления реек. Определение направления  $O_B$  на воображаемую верхнюю осевую риску осуществляется по изложенной выше методике. Величину крена вычисляют по формуле (115).

Вообще говоря, для определения направления  $O_H$ , если низ колонны закрыт, можно приложить рейку нулём к нижней осевой риску или к одной из боковых граней колонны. Визируя при двух положениях вертикального круга тахеометра на видимый отсчёт рейки (например, левый), выводят средний отсчёт по горизонтальному кругу  $L_H$ . Зная длину отрезка  $O_H L_H$  и расстояние  $D_B$  от теодолита до колонны (рис. 116, б), вычисляют:

$$\operatorname{tg}\beta = O_H L_H / D_B, \quad (116)$$

по значению которого находят угол  $\beta$ .

Направление  $O_H$  на закрытую нижнюю осевую риску при левостороннем расположении рейки находят как сумму  $O_H = L_H + \beta$ . При правостороннем расположении рейки его определяют как разность  $O_H = P_H - \beta$ . Величину крена вычисляют по формуле (115).

Обратим внимание на то (рис. 115), что суммы  $(D_{НЛ} + D_{НП})$  и  $(D_{ВЛ} + D_{ВП})$  представляют собой расстояния между колоннами понизу и на уровне их оголовка. Этот принцип может быть использован при определении недоступных расстояний между различными точками, объектами и т. п.

В работе [142] изложена методика линейных измерений для контроля вертикальности фасада (по отношению к расположению тахеометра) сооружения. Для контроля вертикальности стен сооружения одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях необходимо поступать следующим образом (рис. 117).

Устанавливают тахеометр в точке 1 перед одной из стен примерно в створе со стеной ей перпендикулярной. Визируют на крайнюю нижнюю точку стены Н, измеряют  $D_H$ ,  $-h_H$  и устанавливают на горизонтальном круге отсчёт  $0^0 00' 00''$ . Визируют последовательно на крайние промежуточные  $i$  и верхнюю В точки стены, измеряя  $D_i$ ,  $h_i$ ,  $D_B$ ,  $h_B$  и беря отсчёты по горизонтальному кругу  $\gamma_i$ ,  $\gamma_B$ .

Равенство горизонтальных проложений  $D_H = D_i = D_B$  укажет на вертикальное положение фасадной части стены. В противном случае по значениям  $D$  и  $h$  можно построить профиль (рис. 117, а), наглядно иллюстрирующий пространственное положение строительной конструкции.

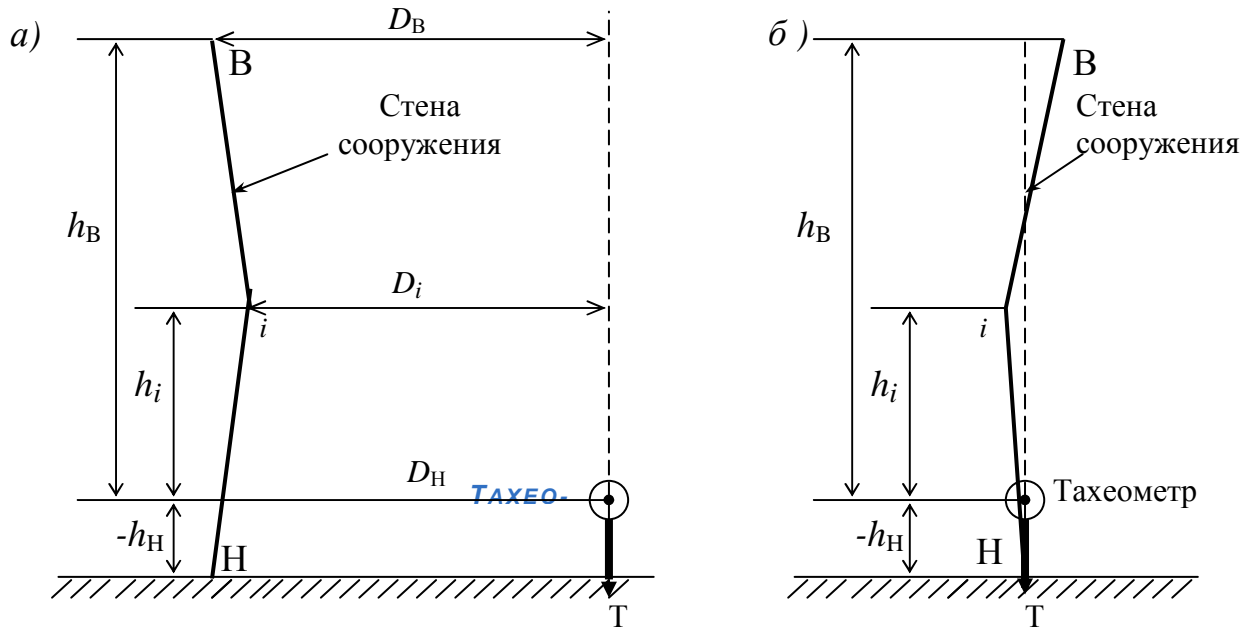


Рис. 117. Схема определения вертикальности стен путём линейно-угловых измерений

Отсчёты  $\gamma$  по горизонтальному кругу тахеометра будут характеризовать отклонения в градусной мере наблюдаемых точек от вертикали по направлению перпендикулярному первоначальному. При этом, если  $\gamma$  больше  $0^0$ , то наблюдаемая точка отклоняется от вертикали вправо, а если  $\gamma$  меньше  $360^0$  – влево. Переход от градусной меры к линейным значениям отклонений осуществляется по формуле (115). Результаты наблюдений для наглядности удобно представлять в виде профиля (рис. 117, б).

### 2.3. Односторонний координатный способ определения крена

Способность современных электронных тахеометров выдавать на экран дисплея пространственные координаты наблюдаемых точек позволяет реализовать односторонний способ определения крена. Такой способ [138, 139] может применяться для определения крена сооружений башенного типа любой формы: круглой, четырёхугольной и треугольной.

#### 2.3.1. Определение крена сооружения круглой формы

При этом может быть два решения координатного способа. Первое решение [143] по определению крена сооружения круглой формы, частично напоминающее **способ направления с одного пункта**, описанный в работе [94], предусматривает определение координат средней точки верхнего сечения в условной системе, в которой начало координат совпадает с центром нижнего цокольного сечения, а ось абсцисс перпендикулярна направлению

«пункт наблюдения – центр цокольного сечения». Его сущность заключается в следующем (рис. 118).

С опорной точки 1 определяют тахеометром условные координаты  $\Delta X$  и  $Y_4$  точки 4 в системе координат  $XO_H Y$ . Вычисляют  $\Delta Y = Y_4 - Y_{4пр}$  и по значениям  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  находят крен  $K$  и его направление.

Однако описанный выше способ [116] и возможные варианты его модификации в своей основе имеют один существенный недостаток. Он заключается в том, что практически невозможно расположить наблюдаемые точки  $H, \dots, i, \dots, B$  (рис. 17) одновременно по направлению координатной оси и на диаметре трубы, совпадающим с направлением этой оси. Поэтому односторонний способ определения крена электронным тахеометром [134] можно выполнить следующим образом (рис. 118).

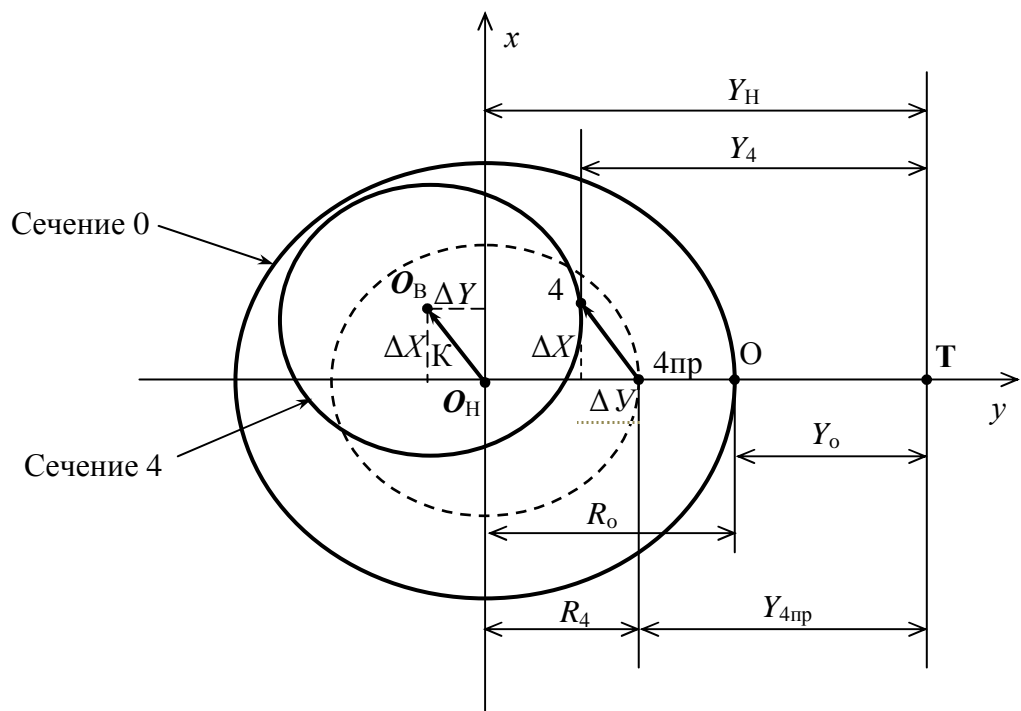


Рис. 118. Схема одностороннего способа определения крена электронным тахеометром

В опорной точке  $T$  расположенной на расстоянии  $1,5-3,0H$  от трубы в месте, с которого виден её верх и низ, устанавливают тахеометр. Визируя и снимая отсчёты по горизонтальному кругу на левую и правую образующие трубы в её нижнем сечении, находят средний отсчёт, по которому на трубе отмечают точку  $O$ . На уровне этой точки измеряют периметр трубы  $2\pi R_0$  и вычисляют её радиус  $R_0$ . Измеряют расстояние  $T-O = Y_0$ , прибавив к которому  $R_0$  получают координаты нижнего  $O_H$  центра трубы  $X = 0, Y = Y_H$ . Находят проектные координаты точки  $4_{пр}$ , а именно  $X_{4пр} = 0, Y_{4пр} = Y_H - R_4$ . Визируя и снимая отсчёты по горизонтальному кругу на левую и правую образующие трубы в её верхнем сечении 4, находят средний отсчёт, соответ-

вующий направлению на центр  $O_B$  этого сечения и устанавливают его на горизонтальном круге.

По этому направлению измеряют горизонтальное проложение  $1-a = D$  (рис. 119), а затем координаты  $\Delta X_{\text{изм}}$  и  $Y_{\text{изм}}$  точки  $a$  в системе координат  $XO_H Y$ . По этим данным вычисляют  $\Delta Y_{\text{изм}} = Y_{\text{изм}} - Y_{4\text{пр}}$  и определяют  $\Delta X$  по формуле:

$$\Delta X = \Delta X_{\text{изм}} \left(1 + \frac{R_4}{D}\right). \quad (117)$$

Приняв  $\Delta Y \approx \Delta Y_{\text{изм}}$ , вычисляют путём решения обратной геодезической задачи величину  $K$  крена и его направление. Аналогичным образом можно определить частные крены при наблюдениях любого сечения трубы, радиус которого участвует в определении  $1_{\text{пр}}, 2_{\text{пр}}, 3_{\text{пр}}, \dots$  По этой методике можно вообще обойтись без предусмотренной в работе [116] предварительной маркировки точек  $H, \dots, i, \dots, B$ .

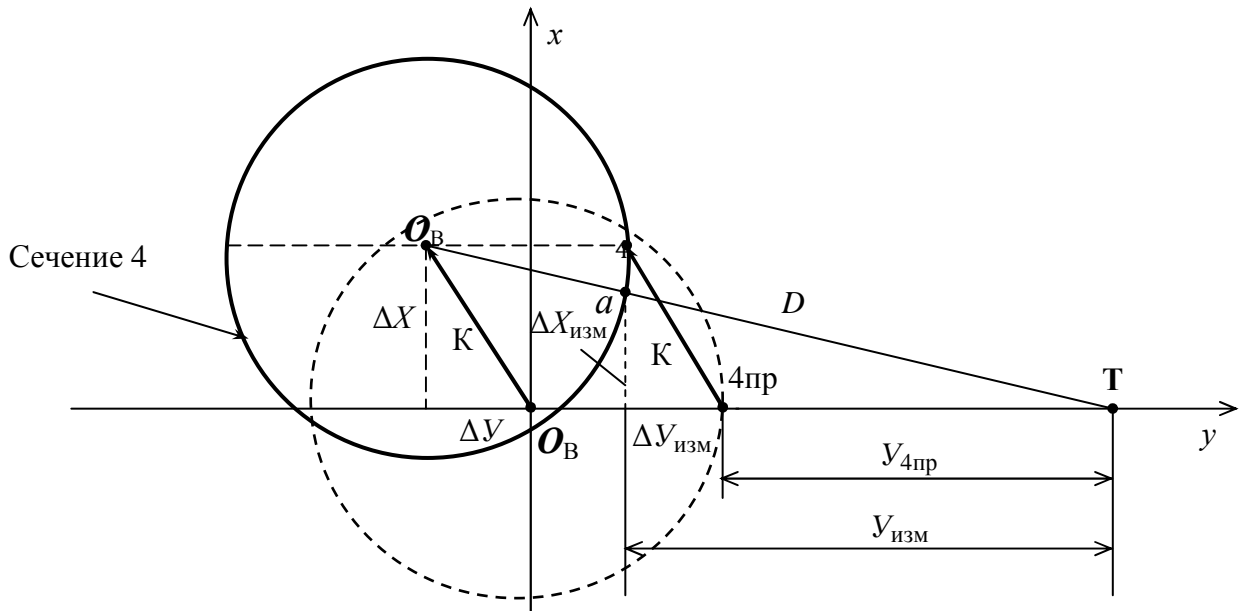


Рис. 119. Схема практического выполнения одностороннего способа определения крена электронным тахеометром

Однако следует отметить, что в рассмотренных выше способах координат необходимо знать фактические радиусы каждого наблюдаемого сечения трубы, от точности которых в значительной степени будет зависеть точность получаемых результатов.

Для исключения недостатков, присущих рассмотренным выше способам, нами разработан более совершенный вариант одностороннего координатного способа определения крена высоких сооружений башенного типа. Его сущность поясняется рис. 120,  $a$  и заключается в том, что с одной точки стояния электронного тахеометра безотражательного типа определяют пря-

моугольные координаты любых, как минимум трёх точек 1, 2, 3 нижнего, промежуточных и верхнего наблюдаемых сечений.

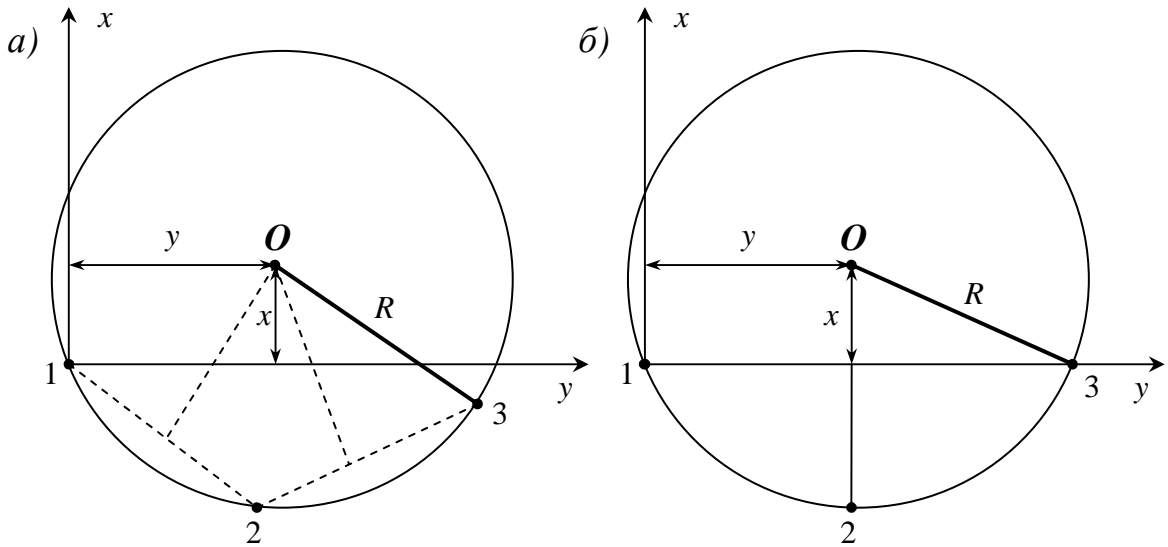


Рис. 120. Схема одностороннего координатного способа (а) и её частный случай (б)

По координатам этих точек можно вычислить по формулам (51) и (54) координаты  $x$  и  $y$  центров  $O$  наблюдаемых сечений и их радиус  $R$ . По координатам центров сечений можно найти частные и общий крен сооружения и его направление аналитически путём решения обратной геодезической задачи или графически.

Графическое решение заключается в определении положения центра  $O$  по трём точкам рассматриваемого сечения. Для этого достаточно нанести по прямоугольным координатам точки 1, 2 и 3 на план и в середине отрезков 1-2 и 2-3 восстановить перпендикуляры, в пересечении которых получим центр сечения  $O$  (см. пунктирные построения на рис. 120, а).

В общем виде точность такого одностороннего координатного способа определения крена сооружения зависит от точности координат  $x$  и  $y$  центров его наблюдаемых сечений, которая в свою очередь зависит от точности определения координат точек 1 ( $x_1, y_1$ ), 2 ( $x_2, y_2$ ) и 3 ( $x_3, y_3$ ).

Рассмотрим схему координатного способа (рис. 120, б), когда точка 3 лежит на оси  $y$ , а точка 2 – на перпендикуляре к этой оси, проходящем через центр  $O$  круга.

В этом случае координаты  $x_1 = 0, y_1 = 0, x_3 = 0, y_3 = 2y_2$ . Подставляя эти значения в формулы (54) получим, после соответствующих преобразований, координаты центра:

$$x = \frac{x_2^2 - y_2^2}{2x_2}, \quad y = y_2. \quad (118)$$

Найдём СКО  $m_x$  координаты  $x$ , используя формулу (118):

$$m_x^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 m_{x_2}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y_2} \right)^2 m_{y_2}^2, \quad (119)$$

где выражения в скобках представляют собой частные производные, а  $m_{x_2}$  и  $m_{y_2}$  – СКО измерения  $x_2$  и  $y_2$ .

Примем  $m_{x_2} = m_{y_2} = m$ , в результате чего, после соответствующих преобразований, получим:

$$m_x^2 = \left[ \frac{1}{4} + \frac{y_2^2}{2x_2^2} + \frac{y_2^2(y_2^2 + 4)}{4x_2^4} \right]^2 m^2. \quad (120)$$

Что касается СКО  $m_y$  координаты  $y$ , то согласно (118) она равна:

$$m_y = m \quad (121)$$

и практически не зависит от величины измеряемых координат, в то время как на ошибку определения  $x$  оказывает существенное влияние соотношение  $y_2$  и  $x_2$ .

Для исследования этого влияния были измерены на окружности радиуса  $R = 5,0$  (рис. 120, б) в условной системе  $x_1y_1$  и в условных единицах прямоугольные координаты  $x_2$  и  $y_2$  с различным их соотношением  $y_2/x_2$ : 1,0; 1,11; 1,22; 1,53; 2,0; 2,33; 3,0.

Подсчитанные по формуле (120) СКО  $m_x$  оказались равными:  $1,02m$ ;  $1,14m$ ;  $1,29m$ ;  $1,75m$ ;  $2,69m$ ;  $3,58m$ ;  $5,83m$ . Как видим, при  $y_2/x_2 = 1,0$  ошибка  $m_x = 1,02m$ , а при  $y_2/x_2 = 3,0$  ошибка  $m_x = 5,83m$ , то есть увеличилась почти в 6 раз. По приведенным данным построен график зависимости СКО  $m_x$  от соотношения  $y_2/x_2$  (рис. 121).

График наглядно иллюстрирует, что для повышения точности определения координат центра  $x$  и  $y$  необходимо стремиться к уменьшению соотношения  $y_2/x_2$ .

Кроме того, для повышения точности и надёжности получаемых результатов количество наблюдаемых точек можно увеличить. Так, для четырёх точек получим четыре значения координат центра, для пяти – десять значений и т. д.

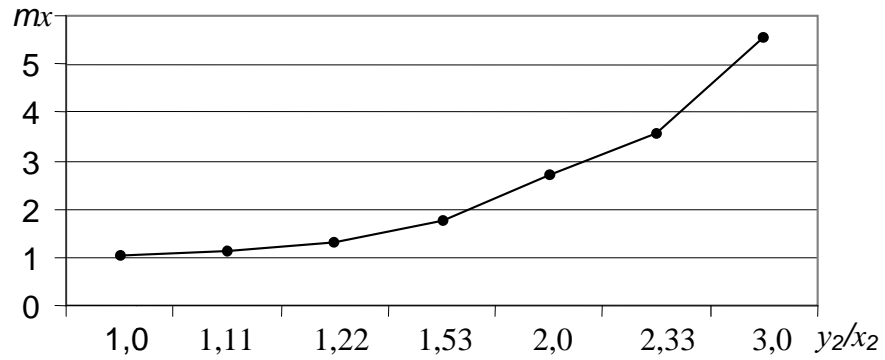


Рис. 121. График зависимости ошибки  $m_x$  от соотношения  $y_2/x_2$

В разделе 1.3.4. изложены некоторые результаты моделирования и оценки точности координатного способа. Ниже рассматривается другая методика оценки точности определения координат центра и радиуса сечений сооружений круглой формы и вычисления по ним крена этого сооружения.

Так, схему координатного способа определения центра  $O$  сечения можно рассматривать как многократную азимутальную или линейную засечку с точек 1, 2, 3, ... с известными координатами  $x_{1,2,3...}$ ,  $y_{1,2,3...}$ , дирекционными углами  $\alpha_{1,2,3...}$  и расстояниями  $R_{1,2,3...}$  (рис. 122, 123).



Рис. 122. Схема координатных измерений дымовой трубы



Как было показано в разделе 1.4.4. оценку точности засечек наиболее просто выполнять, используя методику геометрической интерпретации ошибки положения определяемой точки, изложенную в монографии [126]. Её сущность заключается в том, что погрешность положения этой точки наиболее полно характеризуется так называемой окружностью СКО.

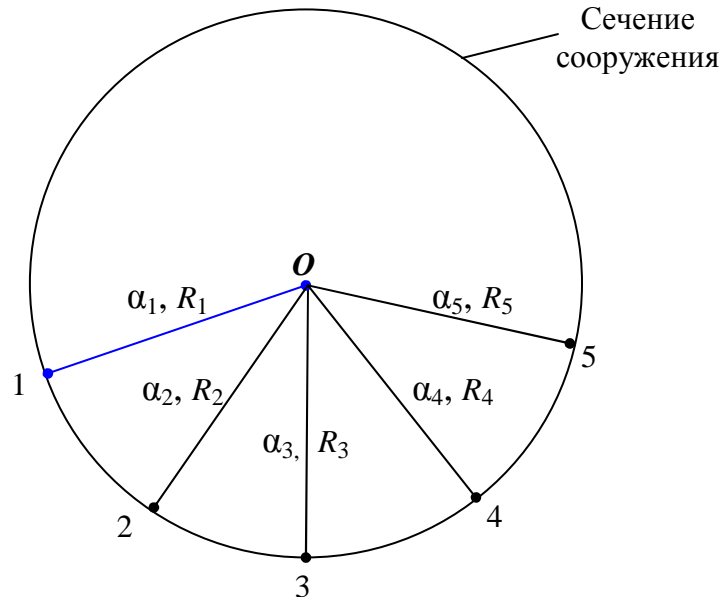


Рис. 123. Схема к оценке точности координатного способа

Рассмотрим применение предлагаемой методики при определении пространственного положения дымовой трубы высотой 30 м и радиусами: поверху 1,3 м, понизу 2,0 м. Результаты координатных измерений (рис. 122) и вычислений элементов засечек нижнего и верхнего сечений трубы при  $x_T = 100,000$  м,  $y_T = 100,000$  м и  $\alpha_{T-O} = 0^\circ$  приведены в табл. 53. Причём, дирекционные углы  $\alpha_i$  и длины сторон  $R_i$  засечек на рис. 123 найдены по измеренным координатам  $x_{1,2,3,\dots}$ ,  $y_{1,2,3,\dots}$  и вероятнейшим значениям координат  $x$  и  $y$  центра каждого наблюдаемого сечения путём решения обратных геодезических задач.

Обратим внимание, что для оценки точности засечек необходимо знать  $m_{\alpha,R}$  – СКО их дирекционных углов  $\alpha_i$  и длин сторон  $R_i$ . Так, в случае азимутальной засечки, если окружность на рис. 123 близка к идеальной, то в качестве СКО  $m_\alpha$  следует взять величину:

$$m_\alpha = \frac{m}{R} \rho'' = m q, \quad (122)$$

где  $m$  – СКО определения координат точек 1, 2, 3, ...;  $q$  – градиент направления (см. раздел 1.4.4. монографии).

### Результаты координатных измерений трубы и элементы засечек

Точки	Координаты точек, м		Координаты центра сечения и радиус, м			Элементы засечек			$\Delta$ , мм
	$x_i$	$y_i$	$x$	$y$	$R$	$\alpha_i, ^\circ$	$R_i$ , мм	$q_i$ , с/мм	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нижнее сечение трубы									
1	127,466	98,011	127.730	100.000	2.009	82,4	2006	102,8	-3
2	125,891	99,200				23,5	2006	102,8	-3
3	125,716	100,000				1,0	2014	102,4	+5
4	126,060	101,127				326,0	2015	102,4	+6
5	127,408	101,987				279,2	2013	102,5	+4
Верхнее сечение трубы									
14	127,535	98,738	127.750	100.024	1.304	80,5	1304	158,2	0
15	126,474	100,290				348,2	1303	158,3	-1
16	127,531	101,309				279,7	1304	158,2	0

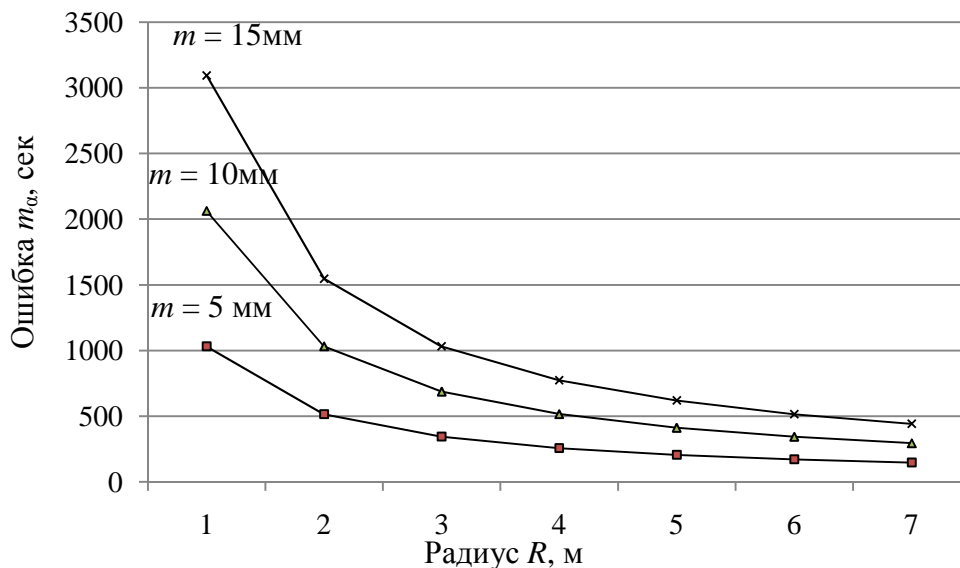


Рис. 124. Графики зависимости ошибки  $m_\alpha$  от величины радиуса  $R$

На рис. 124 показаны графики зависимости СКО  $m_\alpha$  в секундах от величины радиуса  $R$  при СКО определения координат  $m = 5; 10$  и  $15$  мм. Из этих графиков следует, что с увеличением радиуса влияние СКО определения координат  $m$  на СКО  $m_\alpha$  уменьшается.

В случае линейной засечки следует, после измерения прямоугольных координат  $x_{1,2,3...}$ ,  $y_{1,2,3...}$  точек наблюдаемого сечения и вычисления вероятнейшего значения как радиуса  $R$ , так и координат  $x$  и  $y$  центра этого сечения, находят также  $n$  значений радиусов  $R_i$ . Здесь  $n$  представляет собой

число сочетаний по три из количества точек, координаты которых измерены. Так при трёх точках  $n = 1$ , при четырёх –  $n = 4$ , при пяти –  $n = 10$  и т. д.

Затем, по принципу обработки ряда равноточных измерений, вычисляют вероятнейшие ошибки  $\Delta = R_i - R$  и по известной формуле Бесселя находят СКО  $m_R$ .

Исходные данные для оценки точности многократной азимутальной засечки (рис. 123) и результаты вычислений по приведенным выше формулам (см. раздел 1.4.4. монографии) по специально разработанной программе в Microsoft Excel приведены в табл. 54. Причём, при равноточных определениях угловых  $\alpha_i$  и линейных  $R_i$  величин периметр  $\Pi$  в случае азимутальной засечки будет равен  $[q_i^2]$ , а в случае линейной засечки  $\Pi = n$ .

Т а б л и ц а 54

**Исходные данные и характеристика полигона многократной азимутальной засечки**

Стороны	$2\alpha_i, ^\circ$	$R_i, \text{мм}$	$q_i^2, (\text{с/мм})^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	$\Pi, (\text{с/мм})^2$	$q_3, (\text{с/мм})^2$	$2\varphi', ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нижнее сечение трубы								
1-О	164,9	2006	10573	2760	-10206	52612	2610	56,4
2-О	47,0	2006	10573	7732	7211			
3-О	2,0	2014	10489	366	10483			
4-О	291,0	2915	10478	-9718	3920			
5-О	198,4	2013	10499	-3314	-9963			
Суммы столбцов 4,5,6			52612	-2174	1444	[4]	$\sqrt{[5]^2 + [6]^2}$	$\text{arc tg} \frac{[5]}{[6]}$
Верхнее сечение трубы								
14-О	161,0	1304	25020	8146	-23657	75999	27235	22,6
15-О	336,4	1303	25059	-10020	22968			
16-О	199,3	1304	25920	-8580	-24459			
Суммы столбцов 4,5,6			75999	-10454	-25148	[4]	$\sqrt{[5]^2 + [6]^2}$	$\text{arc tg} \frac{[5]}{[6]}$

Обращаем внимание, что угол  $2\varphi'$  является румбом (острым углом), а знаки  $q_y$  и  $q_x$  указывают на номер четверти прямоугольной системы координат, в которой он находится. В зависимости от этого вычисляют удвоенный дирекционный угол  $2\varphi$ .

Как следует из табл. 54 (графы 5 и 6), для нижнего сечения числитель  $q_y = [5] = -2174$  имеет знак минус, а знаменатель  $q_x = [6] = 1444$  имеет знак плюс, что соответствует четвёртой четверти прямоугольной системы координат, следовательно  $2\varphi = 360^\circ - 2\varphi' = 303,6^\circ$ . Для верхнего сечения числитель  $q_y = [5] = -10454$ , знаменатель  $q_x = [6] = -25148$ , то есть оба имеют знак минус, что соответствует третьей четверти, следовательно  $2\varphi = 180^\circ + 2\varphi' = 202,6^\circ$ .

Исходные данные и результаты вычислений элементов  $A$ ,  $B$ ,  $R_0$  и  $e$  окружности СКО для многократной азимутальной засечки по формулам (83, 84) и СКО  $m_x$  и  $m_y$  центра  $O$  по осям координат по формулам:

$$m_{x(\text{угл})}^2 = \frac{2m_\alpha^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi - q_3 \cos 2\varphi'),$$

$$m_{y(\text{угл})}^2 = \frac{2m_\alpha^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi + q_3 \cos 2\varphi'),$$
(123)

при принятом значении  $m_\alpha = 1000''$  приведены в табл. 55.

Т а б л и ц а 55

### Оценка точности многократной азимутальной засечки

Сечение	$\Pi$ , (с/мм) <sup>2</sup>	$q_3$ , (с/мм) <sup>2</sup>	Элементы окружности СКО, мм				СКО, мм	
			$A$	$B$	$R_0$	$e$	$m_x$	$m_y$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нижнее	52612	2610	6,3	6,0	6,2	0,2	6,0	6,1
Верхнее	75999	27235	6,4	4,4	5,4	1,0	4,5	4,5

Исходные данные для оценки точности многократной линейной засечки (рис. 123) и результаты вычислений по приведенным выше формулам (см. раздел 1.4.4. монографии) по специально разработанной программе в Microsoft Excel приведены в табл. 56.

Как следует из табл. 56 (графы 5 и 6), для нижнего сечения числитель  $q_y = [5] = +0,21577$  имеет знак плюс, а знаменатель  $q_x = [6] = -1,09017$  имеет знак минус, что соответствует второй четверти прямоугольной системы координат, следовательно  $2\varphi = 180^\circ - 2\varphi' = 168,8^\circ$ . Для верхнего сечения  $q_y = [5] = +0,40531$ ,  $q_x = [6] = +0,97257$ , то есть оба имеют знак плюс, что соответствует первой четверти, следовательно  $2\varphi = 2\varphi' = 22,62^\circ$ .

**Исходные данные и характеристика полигона многократной  
линейной засечки**

Стороны	$2\alpha_i+180^\circ$	$R_i$ , мм	$q_i^2$	$q_i^2 \sin(2\alpha+180)$	$q_i^2 \cos(2\alpha+180^\circ)$	$\Pi$	$q_3$	$2\varphi',^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нижнее сечение трубы								
1-О	344,9	2006	1	-0,26101	0,96534		0,3	11,2
2-О	227,0	2006	1	-0,73135	-0,68200			
3-О	4,0	2014	1	-0,03490	-0,99939			
4-О	112,0	2915	1	0,92738	-0,37412			
5-О	18,4	2013	1	0,31565	0,94888			
Суммы столбцов 4,5,6			5	0,21577	-1,09017	[4]	$\sqrt{[5]^2 + [6]^2}$	$\text{arc tg} \frac{[5]}{[6]}$
Верхнее сечение трубы								
14-О	341,0	1304	1	-0,32557	0,945519	3	1,1	22,62
15-О	156,4	1303	1	0,39987	-0,91657			
16-О	19,3	1304	1	0,33101	0,94363			
Суммы столбцов 4,5,6			3	0,40531	0,97257	[4]	$\sqrt{[5]^2 + [6]^2}$	$\text{arc tg} \frac{[5]}{[6]}$

Исходные данные и результаты вычислений элементов  $A$ ,  $B$ ,  $R_0$  и  $e$  окружности СКО для многократной линейной засечки по формулам (83, 84) и СКО  $m_x$  и  $m_y$  центра  $O$  по осям координат по формулам:

$$m_{x(\text{лин})}^2 = \frac{2m_R^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi + q_3 \cos 2\varphi'), \quad (124)$$

$$m_{y(\text{лин})}^2 = \frac{2m_R^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi - q_3 \cos 2\varphi'),$$

при принятом значении  $m_R = 5$  мм приведены в табл. 57. Причём, в результате обработки графы 10 табл. 53 для нижнего сечения трубы получено по формуле Бесселя среднее квадратическое значение ошибки определения радиуса 4,9 мм.

По координатам центров наблюдаемых сечений можно определить частные и общий крен сооружения. Так, например, зная координаты  $x_B, y_B$  и  $x_H, y_H$  центров верхнего и нижнего наблюдаемых сечений, можно вычислить частные  $K_X$  и  $K_Y$  крены по осям координат:  $K_X = x_B - x_H$ ,  $K_Y = y_B - y_H$ , определить по формуле (113) общий крен сооружения  $K$  и его направление  $r = \arctg(K_Y/K_X)$ .

Т а б л и ц а 57

### Оценка точности многократной линейной засечки

Сечение	П	$q_z$	Элементы окружности СКО, мм				СКО, мм	
			$A$	$B$	$R_0$	$e$	$m_x$	$m_y$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нижнее	5	0,3	3,2	3,1	3,2	0,1	3,1	3,2
Верхнее	3	1,1	5,1	3,5	4,3	0,8	3,6	3,6

Вообще говоря, схему координатного способа определения центра  $O$  сечения (рис. 123) можно рассматривать как комбинацию полярных засечек точек 1, 2, 3, 4, 5 и многократной азимутальной или линейной засечек точки  $O$ , дирекционные углы которых  $\alpha_i$  или расстояния  $R_i$ .

В этом случае, рассматривая точки 1...5 как исходные по отношению к точке  $O$ , можно произвести оценку точности засечки с учётом ошибок исходных данных по приведенной в работе [156] методике. Можно также произвести оценку точности по-другому путём квадратического сложения геометрических критериев полярных и угловых или линейных засечек [158].

### 2.3.2. Определение крена сооружения треугольной формы

Односторонний координатный способ определения крена башни треугольной формы в системе осей сооружения с использованием электронного тахеометра может осуществляться следующим образом [142].

Измерения координат  $x_{A,B,C}, y_{A,B,C}$  точек нижнего сечения башни и  $x_{a,b,c}, y_{a,b,c}$  точек верхнего сечения выполняют с помощью электронного тахеометра, установленного в точке  $T$  (рис. 125), расположенной на одной из осей сооружения. Контролем правильного положения точки стояния тахеометра является равенство горизонтальных углов  $BTA$  и  $ATC$ .

Приняв координаты  $x_T = 0$  и  $y_T = 0$ , а направление оси  $x$  совпадающим с направлением оси  $TO$ , выразим координаты нижнего ортоцентра  $O_H$  через результаты линейно-угловых измерений, которые в тахеометре преобразуются в координаты  $x_{A,B,C}, y_{A,B,C}$ :

$$x_o = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3}(D_A \cos 0^0 + D_B \cos \frac{\beta}{2} + D_C \cos \frac{\beta}{2}), \quad (125)$$

$$y_o = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3}(D_A \sin 0^0 + D_B \sin \frac{\beta}{2} + D_C \sin \frac{\beta}{2}),$$

где  $D_A, D_B, D_C$  – горизонтальные проложения, а  $\beta$  – горизонтальный угол.

Причём, полученную координату  $x_o$  можно проверить, сравнив её с суммой  $D_A + d$ , где  $d = s/\sqrt{3}$ .

Аналогичным образом по результатам угловых и линейных измерений могут быть найдены координаты верхнего ортоцентра  $O_B$ .

Добавим, что об организации и методике выполнения полевых работ с помощью электронного тахеометра можно прочесть в статье [19].

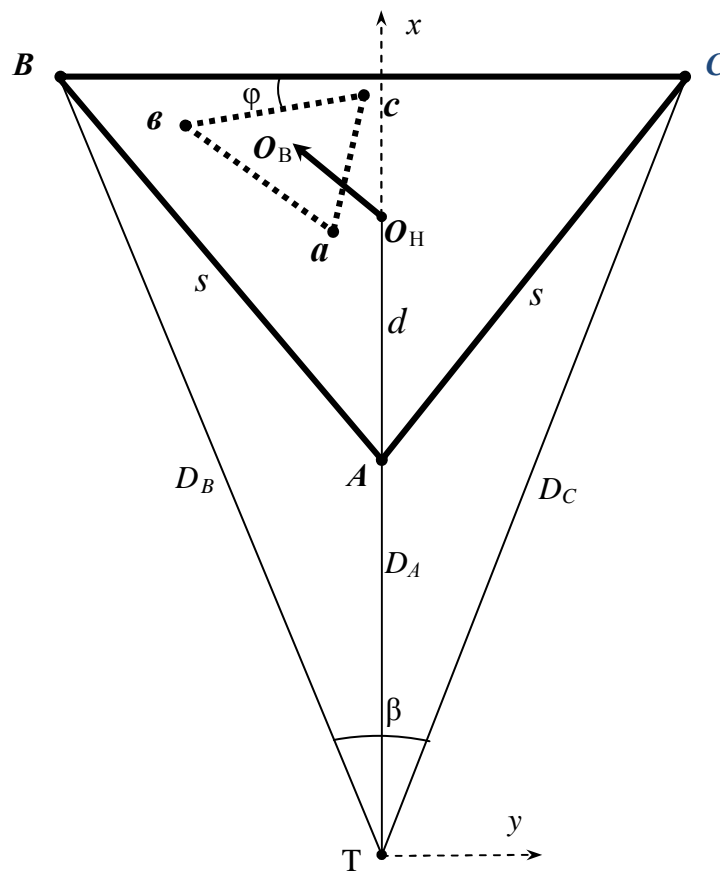


Рис. 125. Схема к определению координат ортоцентров верхнего и нижнего сечений башни

В результате исследования формул (125) с позиций теории ошибок, с использованием формулы ошибки функции общего вида с условием, что  $D_B = D_C$ , получены формулы для определения  $m_{x_o}$  и  $m_{y_o}$  средних квадратических ошибок координат  $x_o$  и  $y_o$  ортоцентра  $O_H$ :

$$m_{x_0}^2 = \frac{1}{9} \left[ (1 + 2\cos^2 \frac{\beta}{2}) m_D^2 + 2D_B^2 \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\rho^2} m_\beta^2 \right], \quad m_{y_0}^2 = \frac{2}{9} \left[ \sin^2 \frac{\beta}{2} m_D^2 + \frac{D_B^2 (1 - \sin^2 \frac{\beta}{2})}{\rho^2} m_\beta^2 \right], \quad (126)$$

а с учётом того, что  $\sin \beta/2 = s/2D_B$ , получим:

$$m_{x_0}^2 = \frac{m_D^2}{9} \left( 3 - \frac{s^2}{2D_B^2} \right) + \frac{s^2}{18\rho^2} m_\beta^2, \quad (127)$$

$$m_{y_0}^2 = \frac{s^2 m_D^2}{18D_B^2} + \frac{(2D_B^2 - s^2)}{18\rho^2} m_\beta^2,$$

где  $m_D$  и  $m_\beta$  – СКО соответственно линейных и угловых измерений;  $s$  – длина стороны равностороннего треугольника  $ABC$ ;  $\rho'' = 206265''$ .

Для стандартной башни указанных выше размеров были подсчитаны по формулам (127) ошибки  $m_{x_0}$  и  $m_{y_0}$  для  $s = 10,5$  и  $2,5$  м, приняв  $D_B$  от  $1,0H$  до  $3,0H$ ,  $m_D = 5$  мм,  $m_\beta = 2'', 5'', 15'', 30''$ . Результаты вычислений представлены в табл. 58, причём значения в числителе соответствуют ошибке  $m_{x_0}$ , а в знаменателе ошибке  $m_{y_0}$ .

Анализ данных этой таблицы позволяет констатировать, что при принятой выше схеме измерений точность определения координаты  $x_0$  зависит только от точности линейных измерений и практически не зависит от точности угловых измерений. В свою очередь точность определения координаты  $y_0$  зависит только от точности угловых измерений и не зависит от точности линейных измерений

Таблица 58

### Средние квадратические ошибки координат ортоцентра

$D_B, \text{ м}$	$s = 10,5 \text{ м}$				$s = 2,5 \text{ м}$			
	2"	5"	15"	30"	2"	5"	15"	30"
1,0H(70)	2,9/0,3	2,9/0,6	2,9/1,7	2,9/3,4	2,9/0,2	2,9/0,6	2,9/1,7	2,9/3,4
1,5H(105)	2,9/0,4	2,9/0,8	2,9/2,5	2,9/5,1	2,9/0,3	2,9/0,8	2,9/2,5	2,9/5,1
2,0H(140)	2,9/0,5	2,9/1,1	2,9/3,4	2,9/6,8	2,9/0,4	2,9/1,1	2,9/3,4	2,9/6,8
2,5H(175)	2,9/0,6	2,9/1,4	2,9/4,2	2,9/8,5	2,9/0,6	2,9/1,4	2,9/4,2	2,9/8,5
3,0H(210)	2,9/0,7	2,9/1,7	2,9/5,1	2,9/10,2	2,9/0,7	2,9/1,7	2,9/5,1	2,9/10,2

На основании сказанного можно для оценки точности определения координат ортоцентра по схеме на рис. 125 пользоваться упрощёнными формулами, которые дают те же результаты, что и строгие:



$$m_{x_0} = \frac{m_D}{\sqrt{3}}, \quad m_{y_0} = \frac{D_B}{\rho} m_\phi. \quad (128)$$

Для определения угла  $\phi$  скручивания башни по координатам  $x_{A,B,C}, y_{A,B,C}$  и  $x_{a,b,c}, y_{a,b,c}$  необходимо путём решения обратных геодезических задач найти дирекционные углы  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{ab}, \alpha_{BC}$  и  $\alpha_{bc}, \alpha_{AC}$  и  $\alpha_{ac}$ , разность которых будет равна углу скручивания.

Если в ранее приведенном выражении  $\sin\phi = (Y_K - q_3) : 2/3m$  (рис. 16) заменить координату  $Y_K$  на  $(y_{OB} - y_{OH})$ ,  $q_3$  на  $y_c$ , а  $m$  на  $(s\sqrt{3}):2$ , то угол скручивания башни вычисляются по формуле:

$$\sin\phi = \frac{(y_{OB} - y_{OH} - y_c)\sqrt{3}}{s}, \quad (129)$$

где  $s$  – сторона верхнего треугольника;  $y_{OB}, y_{OH}, y_c$  – координаты  $y$  соответственно нижнего, верхнего ортоцентров и верхней точки  $c$ .

Допустим, что для определения крена башни треугольной формы в произвольной системе  $xTy$  (рис. 126), развернутой относительно осей сооружения на некоторый угол, определены прямоугольные координаты нижних точек  $A$  и  $B$  ( $x_A, x_B, y_A, y_B$ ) и верхних точек  $a$  и  $b$  ( $x_a, x_b, y_a, y_b$ ) башни.

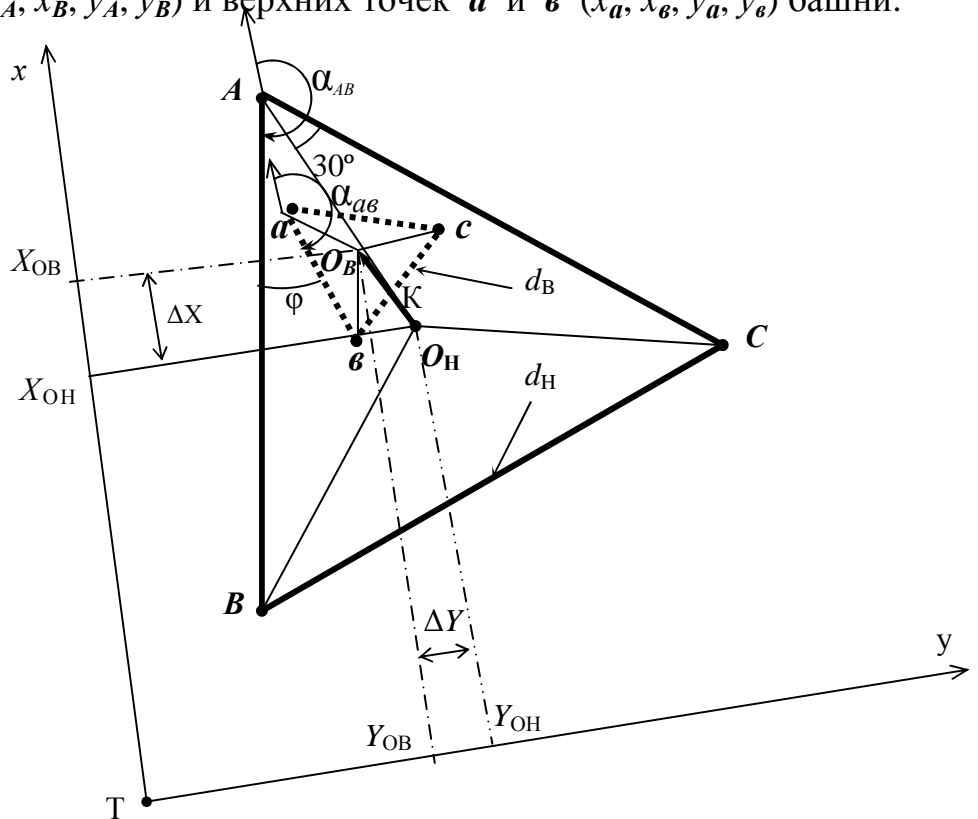


Рис. 126. Схема к определению крена башни треугольной формы в произвольной системе координат

Путём решения обратных геодезических задач находят дирекционные углы  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{ae}$ , разность которых будет равна углу скручивания  $\varphi = \alpha_{ae} - \alpha_{AB}$ , причём отрицательное значение этой разности означает скручивание влево (как на рис. 126), положительное – вправо.

Координаты центров  $O_H$  нижнего и  $O_B$  верхнего наблюдаемых сечений могут быть вычислены через медианы нижнего и верхнего треугольников:

$$\begin{aligned}x_{O_H} &= x_A + AO_H \cos(\alpha_{AB} - 30^\circ), \quad y_{O_H} = y_A + AO_H \sin(\alpha_{AB} - 30^\circ), \\x_{O_H} &= x_B + BO_H \cos(\alpha_{AB} - 120^\circ), \quad y_{O_H} = y_B + BO_H \sin(\alpha_{AB} - 120^\circ), \quad (130) \\x_{O_B} &= x_a + aO_B \cos(\alpha_{ae} - 30^\circ), \quad y_{O_B} = y_a + aO_B \sin(\alpha_{ae} - 30^\circ), \\x_{O_B} &= x_e + eO_B \cos(\alpha_{ae} - 120^\circ), \quad y_{O_B} = y_e + eO_B \sin(\alpha_{ae} - 120^\circ),\end{aligned}$$

где медианы  $AO_H = BO_H = CO_H = \frac{d_H \sqrt{3}}{2}$ ,  $aO_B = eO_B = cO_B = \frac{d_B \sqrt{3}}{2}$ , а  $d_H$  и  $d_B$  представляют собой длину сторон нижнего и верхнего треугольников.

Если в дополнение к точкам  $A, B$  и  $a, e$  измерены ещё и координаты точек  $C$  и  $c$ , то путём сравнения дирекционных углов сторон  $BC$  и  $ec$ ,  $AC$  и  $ac$  можно ещё дважды определить угол скручивания  $\varphi$ , а по аналогии с формулами (130) дополнительно вычислить координаты нижнего и верхнего центров через координаты точки  $C$ , или найти их как среднее арифметическое по формуле (78). Затем, путём решения обратной геодезической задачи, вычисляют величину и направление крена  $K$  башни.

### 2.3.3. Определение крена сооружения четырехугольной формы

Односторонний координатный способ определения крена башни четырехугольной формы с использованием электронного тахеометра может осуществляться следующим образом (рис. 127).

Выбирают для удобства условную систему прямоугольных координат, в которой ось абсцисс  $X$  параллельна одной из сторон башни  $BA$ , магнитный азимут которой определяют заранее.

Устанавливают тахеометр в некоторой точке  $T$ , расположенной на расстоянии  $1,5-3,0H$  от башни. Ориентируют визирную ось зрительной трубы по буссоли параллельно стороне  $BA$  и в режиме координатных измерений вводят исходные данные: координаты станции  $X_0 = 0, Y_0 = 0, H_0 = 0$ ; высоту инструмента  $Выс-И = 0$ ; высоту визирной цели  $Выс-Ц = 0$ ; дирекционный угол  $\Gamma У = 0^\circ$ . После этого измеряют прямоугольные координаты и высоту нижних точек  $A$  и  $B$  ( $x_A, x_B, y_A, y_B, h_A, h_B$ ) и верхних точек  $a$  и  $e$  ( $x_a, x_e, y_a, y_e, h_a, h_e$ ) относительно точки пересечения оси вращения тахеометра с

осью вращения трубы. При должной организации работ координаты  $y_A$  и  $y_B$  должны быть одинаковые, а разность координат  $x_A$  и  $x_B$  должна равняться длине стороны башни  $AB$ .

Вычисляют координаты центра  $O_H$  нижнего наблюдаемого сечения:

$$x_{O_H} = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_{O_H} = \frac{y_A + y_B}{2} + \frac{BC}{2}. \quad (131)$$

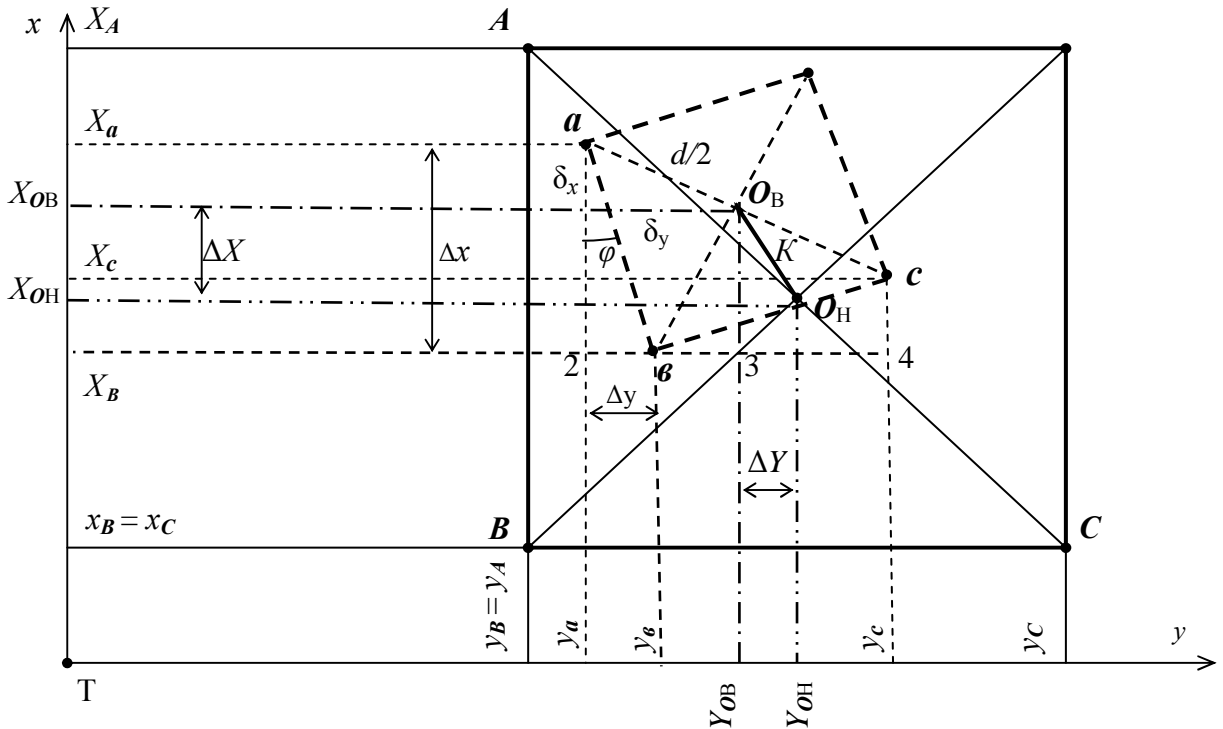


Рис. 127. Схема одностороннего способа определения электронным тахеометром крена башни квадратной формы

Если координаты  $y_a$  и  $y_b$  одинаковые, а разность координат  $x_a$  и  $x_b$  равняется длине стороны башни  $ab$ , то координаты центра  $O_B$  верхнего наблюдаемого сечения равны:

$$x_{O_B} = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_{O_B} = \frac{y_a + y_b}{2} + \frac{ac}{2}. \quad (132)$$

Если координаты  $y_a$  и  $y_b$  не равны между собой, то имеет место скручивание верха башни относительно её низа на угол  $\varphi$  (рис. 127), который можно определить из треугольника  $ab2$  по формулам:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}, \quad \sin\varphi = \frac{\Delta y}{ab}, \quad \cos\varphi = \frac{\Delta x}{ab}, \quad (133)$$

где  $\Delta x$  – всегда величина положительная, а  $\Delta y$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от направления скручивания.

На рис. 127 значение  $\Delta y$  имеет знак «минус». В этом случае координаты центра  $O_B$  верхнего наблюдаемого сечения равны:

$$x_{O_B} = x_a - \delta_x, \quad y_{O_B} = y_a + \delta_y, \quad (134)$$

где  $\delta_x$  и  $\delta_y$  представляют собой катеты прямоугольного треугольника  $1aO_B$ , в котором угол  $1-a-O_B = (45^\circ + \varphi)$ , поэтому:

$$\delta_x = \frac{d}{2} \cos(45^\circ + \varphi), \quad \delta_y = \frac{d}{2} \sin(45^\circ + \varphi), \quad (135)$$

а при положительном значении  $\Delta y$  необходимо в этой формуле использовать угол  $(45^\circ - \varphi)$ .

Если для контроля измерены еще и координаты точек  $C$  и  $c$ , то путём решения прямоугольного треугольника  $bc4$  можно определить вторично угол скручивания  $\varphi$ , а из решения прямоугольного треугольника  $3вO_B$  найти его катеты и вычислить координаты центра  $O_B$  верхнего наблюдаемого сечения как:  $x_{O_B} = x_в + O_B3$ ,  $y_{O_B} = y_в + в3$ . При отсутствии угла скручивания  $\varphi$  координаты центров нижнего и верхнего наблюдаемых сечений равны соответственно:

$$x_{OH} = 0,5(x_A + x_B), \quad y_{OH} = 0,5(y_B + y_C), \quad x_{OB} = 0,5(x_a + x_в), \quad y_{OB} = 0,5(y_в + y_c).$$

Наконец, если башенное сооружение имеет прямоугольную (не квадратную) форму, то в приведенной выше формуле (135) вместо  $45^\circ$  следует использовать угол  $\mathbf{в-a-c} = \arcsin \mathbf{bc/d} = \arccos \mathbf{ав/d}$ , где  $d$  – диагональ этого прямоугольника.

По координатам центров  $O_B$  верхнего и  $O_H$  нижнего наблюдаемых сечений вычисляют  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  и по их значениям находят крен  $K$  и его направление.

Вообще говоря, координатные измерения в рассмотренном одностороннем способе могут выполняться в любой произвольной системе  $xTy$  (рис. 128), развернутой относительно осей сооружения на некоторый угол  $\theta$ . Допустим, что в этой системе электронным тахеометром определены прямоугольные координаты нижних точек  $A$  и  $B$  ( $x_A, x_B, y_A, y_B$ ) и верхних точек  $a$  и  $в$  ( $x_a, x_в, y_a, y_в$ ).

Путём решения обратных геодезических задач находят дирекционные углы  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{ав}$ , разность которых будет равна углу скручивания  $\varphi = \alpha_{ав} - \alpha_{AB}$ , причём отрицательное значение этой разности означает скручивание влево (как на рис. 128), положительное – вправо.

Теперь координаты центров  $O_H$  нижнего и  $O_B$  верхнего наблюдаемых сечений можно вычислить следующим образом. Вначале находят координаты  $x_M = 0,5(x_A + x_B)$ ,  $y_M = 0,5(y_A + y_B)$ ,  $x_m = 0,5(x_a + x_b)$ ,  $y_m = 0,5(y_a + y_b)$  средних точек  $M$  и  $m$  сторон  $AB$  и  $ab$ , а затем вычисляют координаты центров:

$$x_{O_H} = x_M + MO_H \cos(\alpha_{AB} - 90^\circ), \quad y_{O_H} = y_M + MO_H \sin(\alpha_{AB} - 90^\circ),$$

$$x_{O_B} = x_m + mO_B \cos(\alpha_{ab} - 90^\circ), \quad y_{O_B} = y_m + mO_B \sin(\alpha_{ab} - 90^\circ), \quad (136)$$

где  $MO_H$  и  $mO_B$  – половина соответствующей стороны башни понизу и поверху.

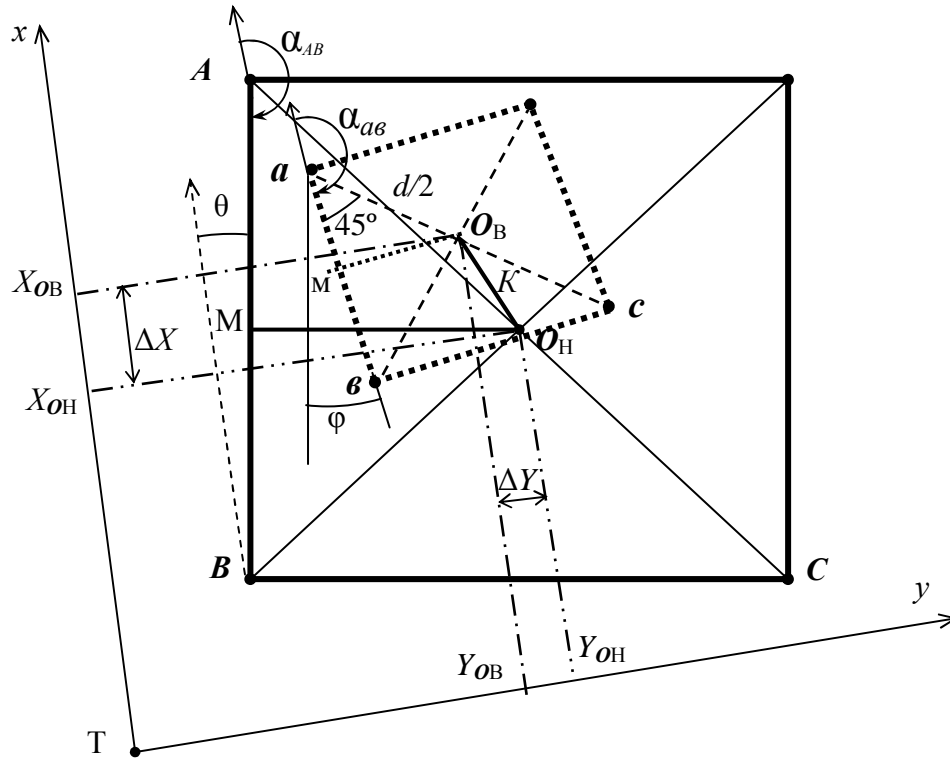


Рис. 128. Схема к определению крена башни квадратной формы в произвольной системе координат

Координаты центров могут быть вычислены через диагонали нижнего и верхнего четырехугольников. Если эти четырехугольники представляют собой квадраты, то формулы для координат центров имеют вид:

$$x_{O_H} = x_A + AO_H \cos(\alpha_{AB} - 45^\circ), \quad y_{O_H} = y_A + AO_H \sin(\alpha_{AB} - 45^\circ),$$

$$x_{O_B} = x_B + BO_B \cos(\alpha_{AB} - 135^\circ), \quad y_{O_B} = y_B + BO_B \sin(\alpha_{AB} - 135^\circ),$$

$$x_{O_B} = x_a + aO_B \cos(\alpha_{ae} - 45^\circ), \quad y_{O_B} = y_a + aO_B \sin(\alpha_{ae} - 45^\circ), \quad (137)$$

$$x_{O_B} = x_e + eO_B \cos(\alpha_{ae} - 135^\circ), \quad y_{O_B} = y_e + eO_B \sin(\alpha_{ae} - 135^\circ).$$

Для башенного сооружения прямоугольной (не квадратной) формы в формулах (137) вместо  $45^\circ$  следует использовать угол, подсчитанный, как показано выше.

Если в дополнение к точкам  $A, B$  и  $a, b$  измерены еще и координаты точек  $C$  и  $c$ , то путем сравнения дирекционных углов сторон  $BC$  и  $bc$ , можно вторично определить угол скручивания  $\varphi$ , а по аналогии с формулами (136) и (137) дополнительно вычислить координаты нижнего и верхнего центров через средние точки сторон  $BC$  и  $bc$ , или координаты точки  $C$ , или найти их как координаты средних точек диагоналей  $AC$  и  $ac$ , то есть  $x_{O_H} = 0,5(x_A + x_C)$ ,  $y_{O_H} = 0,5(y_A + y_C)$ ,  $x_{O_B} = 0,5(x_a + x_c)$ ,  $y_{O_B} = 0,5(y_a + y_c)$ .

### 2.3.4. Двухэтапный способ определения крена

Одним из существенных недостатков практически всех рассмотренных выше способов определения крена является их зависимость от застроенности территории, что затрудняет выбор точек стояния применяемого прибора для производства наблюдений. Для решения этой проблемы нами были разработаны односторонние способы, выполняемые с одной точки стояния прибора.

Однако, как отмечалось выше, на практике зачастую нижняя часть сооружения (рис. 129, а) бывает закрыта посторонними предметами. Вследствие этого наблюдатели ограничиваются определением крена только верхней видимой части сооружения с последующей экстраполяцией крена на всю высоту сооружения, что может отрицательно сказаться на точности получаемых результатов. Для решения этой проблемы предлагается использовать известные односторонние способы определения крена сооружения в два этапа.

Сущность такого двухэтапного одностороннего линейно-углового или координатного способа поясняется рис. 129, б и заключается в следующем. Из точки  $T_1$  производят измерения на верхнюю точку сооружения  $O_1$  или на верхнее сечение  $L_B П_B$ . Центр верхнего сечения  $O_1$  проектируют на нижнее сечение сооружения и отмечают точку  $O$ . На линии  $T_1-O$  закрепляют точку  $T_2$ , из которой видна нижняя часть сооружения. Из этой точки производят измерения нижнего сечения  $L_H П_H$ .

Предлагаемая методика была опробована на дымовой трубе двумя односторонними способами: координатным и линейно-угловым. Напомним, что односторонний способ предусматривает определение крена сооружения в двух взаимно перпендикулярных направлениях путём выполнения координатных, линейно-угловых или других измерений с одной точки стояния прибора.

Сущность координатного способа (рис. 130, б) заключается в том, что с одной точки стояния электронного тахеометра определяют прямоугольные координаты  $x_{1,2,3,\dots}$  и  $y_{1,2,3,\dots}$ , например, точек 1, 2, 3 верхнего сечения и 4, 5, 6, 7, 8 нижнего сечения трубы. По координатам этих точек вычисляют координаты  $x_0$  и  $y_0$  центров верхнего и нижнего наблюдаемых сечений и при необходимости их радиусы  $R$ .

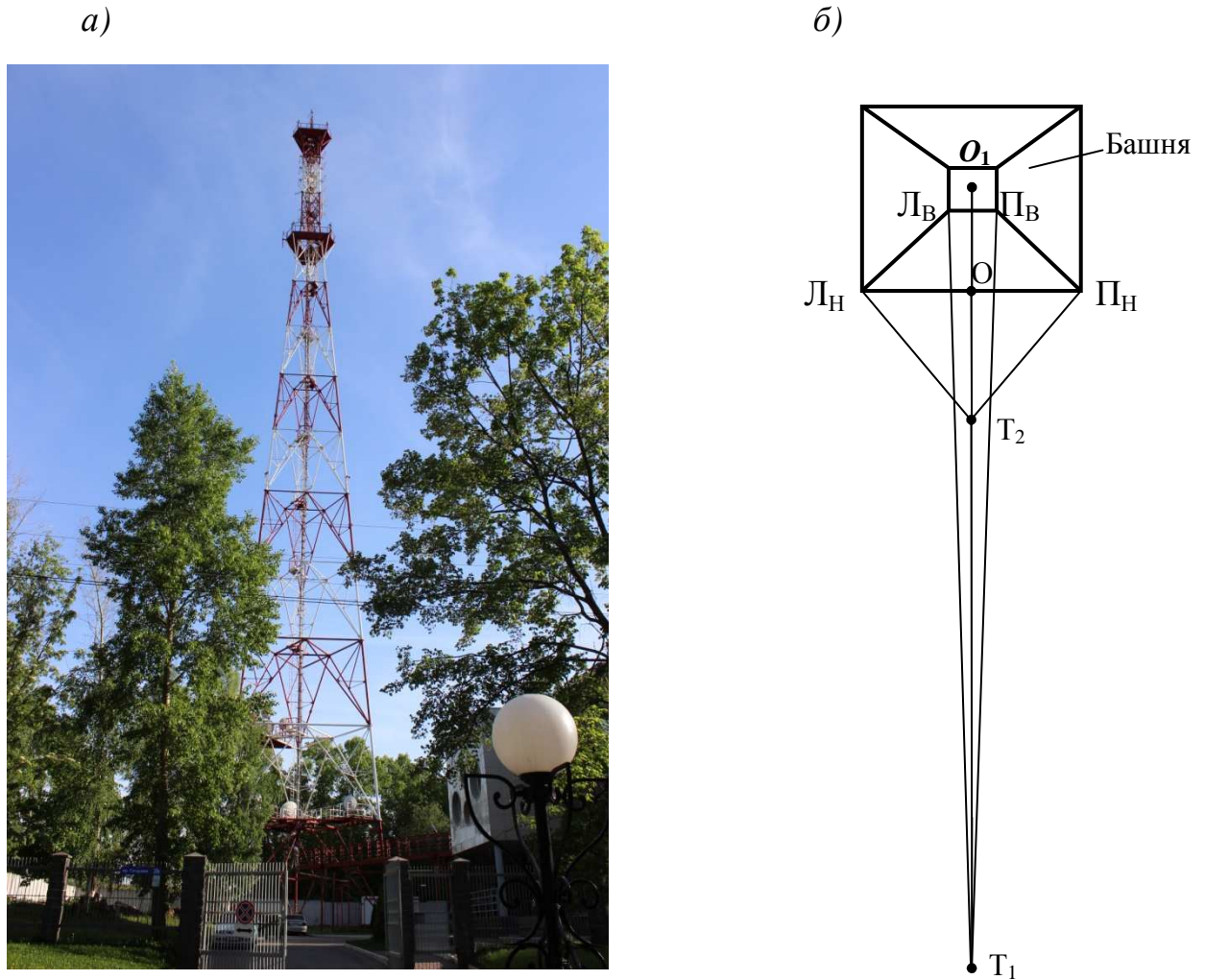


Рис. 129. Фотография телебашни из точки  $T_1$  (а) и схема выполнения двухэтапного способа (б)

Если количество точек равно 3, задача имеет единственное очевидное решение по приведенным в работе [150] формулам (51), которые после соответствующих преобразований примут вид:

$$x_0 = \frac{[(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)](y_1 - y_3) - [(x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2)](y_1 - y_2)}{4(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - 4(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)}, \quad (138)$$

$$y_0 = \frac{[(x_1^2 - x_3^2) + (y_1^2 - y_3^2)](x_1 - x_2) - [(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)](x_1 - x_3)}{4(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - 4(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)}.$$

Если число точек больше трёх, в этом случае (как показано в разделе 1.3.4.) перебирают все сочетания по 3 из имеющихся  $n$  точек. Так, для пяти точек нижнего сечения (рис. 130, б) таких сочетаний будет 10. Для каждой тройки точек вычисляют по формулам (138) координаты центра соответствующего им сечения  $x_i$  и  $y_i$  и находят вероятнейшие координаты центра нижнего сечения по строгому способу в виде MatLab или методом "средних по тройкам" [150].

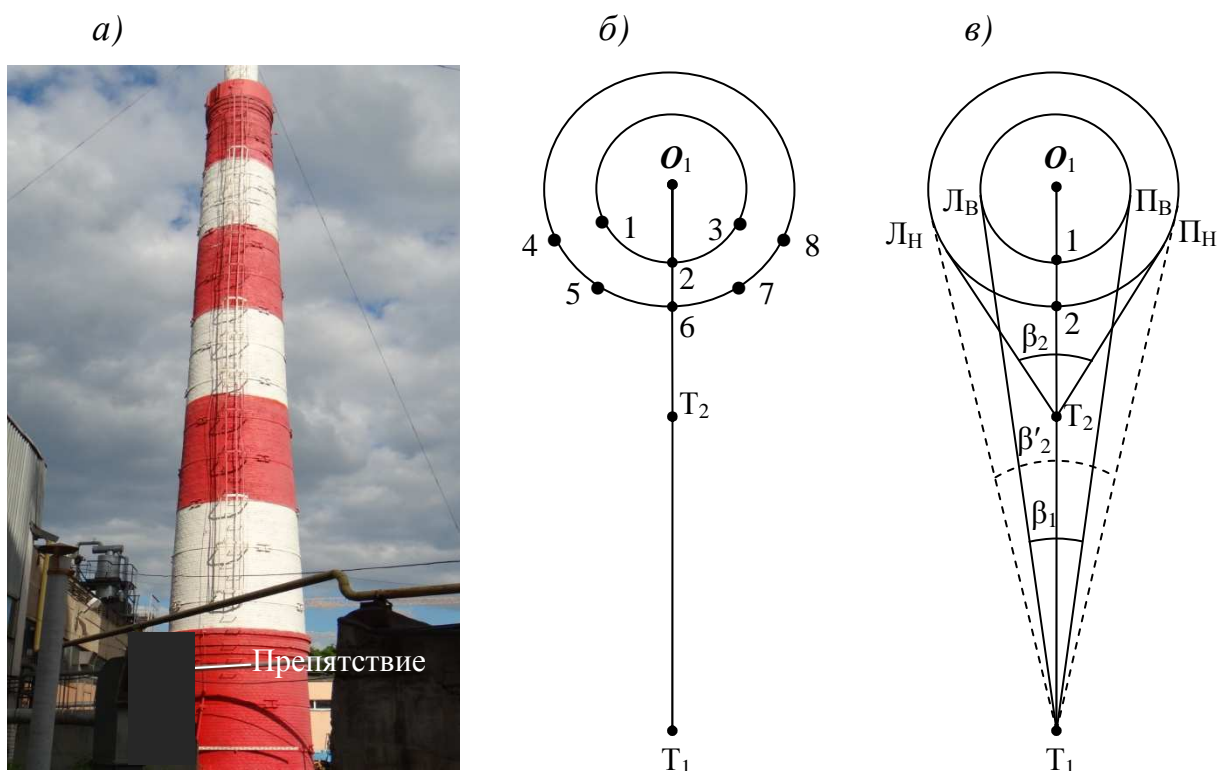


Рис. 130. Фотография дымовой трубы из точки  $T_1$  (а), координатный (б) и линейно-угловой (в) способы определения крена

По координатам центров верхнего  $x_{0В}$  и  $y_{0В}$  и нижнего  $x_{0Н}$  и  $y_{0Н}$  сечений находят частные  $\Delta x = x_{0В} - x_{0Н}$  и  $\Delta y = y_{0В} - y_{0Н}$  крены по осям координат, общий крен сооружения  $K = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  и его направление путём решения обратной геодезической задачи.

Поскольку нижняя часть трубы была закрыта (рис. 130, а), то координатный способ выполняли следующим образом. В точке  $T_1$  с условными координатами  $x = 1000,000$  м и  $y = 1000,000$  м, расположенной на расстоянии



25 м от оси трубы, был установлен электронный тахеометр *SET 530R/R3*. Направление  $T_1O_1$  было принято за направление оси  $x$  условной системы координат. В этой системе были определены условные координаты  $x$  и  $y$  точек 1, 2, 3 верхнего сечения трубы. Затем тахеометр был установлен в точке  $T_2$ , расположенной на линии  $T_1O_1$ , координаты которой составили  $x = 1019,295$  м и  $y = 1000,000$  м. Из этой точки были определены в принятой системе условные координаты  $x$  и  $y$  точек 4, 5, 6, 7, 8 нижнего сечения трубы. Результаты измерений представлены в табл. 59 (графы 3, 4).

Т а б л и ц а 59

### Результаты координатных измерений трубы

Сечение	Точки	Координаты, радиус, м				
		$x$	$y$	$x_0$	$y_0$	$R$
1	2	3	4	5	6	7
Верхнее	1	1024,854	998,724	1025,125	999,998	1,303
	2	1023,823	999,996			
	3	1024,866	1001,274			
Нижнее	4	1024,279	998,222	1025,158	1000,020	1,999
	5	1023,416	999,042			
	6	1023,164	999,874			
	7	1023,349	1000,870			
	8	1024,161	1001,749			

По разработанной в системе MatLab программе [150] были подсчитаны координаты центров сечений и их радиусы (графы 5, 6, 7 таблицы). На основании этих данных получены частные крены  $\Delta x = 1025,125 - 1025,158 = -0,033$  м,  $\Delta y = 999,998 - 1000,020 = -0,022$  м и общий крен  $K = 0,040$  м. Направление крена  $K$  определяется как  $\arcsin \Delta y / \Delta x = 33,7^\circ$  (юго-запад).

Односторонний линейно-угловой способ предусматривает определение крена путём выполнения линейных  $T_1-1$ ,  $T_1-2$  и угловых на образующие трубы  $\beta_1$ ,  $\beta'_2$  измерений с одной точки стояния  $T_1$  электронного тахеометра (рис. 130, в). Линейные измерения позволяют определить крен в направлении  $T_1O_1$ , угловые – в перпендикулярном  $T_1O_1$  направлении по изложенной в работе [148] методике.

В нашем случае, при закрытой нижней части трубы (рис. 130, а), линейно-угловой способ выполнялся в два этапа. Из точки  $T_1$  были измерены от условной оси  $x$  направления на точки  $L_B$  и  $P_B$  образующей трубы её верхнего сечения, а с использованием клавиши *SDh* тахеометра было измерено горизонтальное проложение  $D_B = T_1-1$ .

Т а б л и ц а 60

### Результаты линейно-угловых измерений трубы

Сечение	Точки	Направления	Углы $\beta$	$D$ , м	$R$ , м
1	2	3	4	5	6
Верхнее	Л <sub>В</sub>	357°04'01"	5°51'58"	23,842	1,285
	П <sub>В</sub>	2°55'59"			
Нижнее	Л <sub>Н</sub>	339°58'04"	39°56'38"	3,864	2,004
	П <sub>Н</sub>	19°54'42"			

Затем тахеометр был установлен в точке  $T_2$  и измерены направления на точки Л<sub>Н</sub> и П<sub>Н</sub> образующей трубы её нижнего сечения, а с использованием клавиши  $SDh$  было измерено горизонтальное проложение  $D_H = T_2-2$ . Результаты измерений представлены в табл. 60 (графы 3, 5).

По приведенным в работе [148] формулам были вычислены углы  $\beta$  (графа 4), радиусы трубы  $R$  каждого сечения (графа 6), найдены частные крены  $\Delta x = -0,033$  м,  $\Delta y = -0,027$  м и общий крен  $K = 0,043$  м. Направление крена  $K$  было определено как  $\arcsin \Delta y / \Delta x = 39,3^\circ$  (юго-запад).

Полученные координатным и линейно-угловым способами практически одинаковые результаты подтверждают состоятельность предложенного двухэтапного способа определения крена сооружений башенного типа в сложных для геодезических измерений условиях промышленных площадок.

### 2.3.5. Определения крена способом вертикального проектирования

Такие приборы предназначены для формирования в пространстве отвесной визирной оси (приборы типа Зенит-ОЦП, ПОВП, ПВП-Т, ПВП-В, PZL) или отвесного лазерного луча (лазерные ОЦП типа ЛЗЦ-1, LL-132, AP-LO-KP3). К ним также можно отнести различные, в том числе и ротационные лазерные системы.

При благоприятных условиях наблюдений оптические приборы вертикального проектирования обеспечивают точность 1-2 мм на 100 м. Точность лазерных приборов составляет в среднем 15 мм на 300 м, а дальность проектирования может достигать 600 м и более.

Из современных приборов вертикального проектирования назовём оптический прибор FG-L100 и лазерный прибор LV1.

Рассмотрим методику контроля вертикальности сооружения башенного типа в процессе его монтажа и в период эксплуатации на примере стандартной башни высотой 72,5 м, имеющей в плане форму равностороннего треугольника со стороной 10,5 м понизу и 2,5 м поверху [48,135].

Перед началом монтажа такой башни необходимо закрепить на нулевом горизонте (отм. 0,0 м) опорную точку  $P$  так, чтобы она располагалась на одной из осей башни с возможностью переноса планового положения этой точки на все монтажные горизонты. Большое количество раскосов, распорок, шпренгелей, наличие фидерной лестницы с электрокабелями ограничивает область расположения опорной точки. Для установления этой области следует совместить все проектные поперечные сечения башни на различных монтажных горизонтах (рис. 131).

Такая же область чётко прослеживается на фотографии башни (рис. 132), выполненной с нулевого горизонта, на которой также видны все элементы пространственной конструкции, фидерная лестница, электрокабели и др.

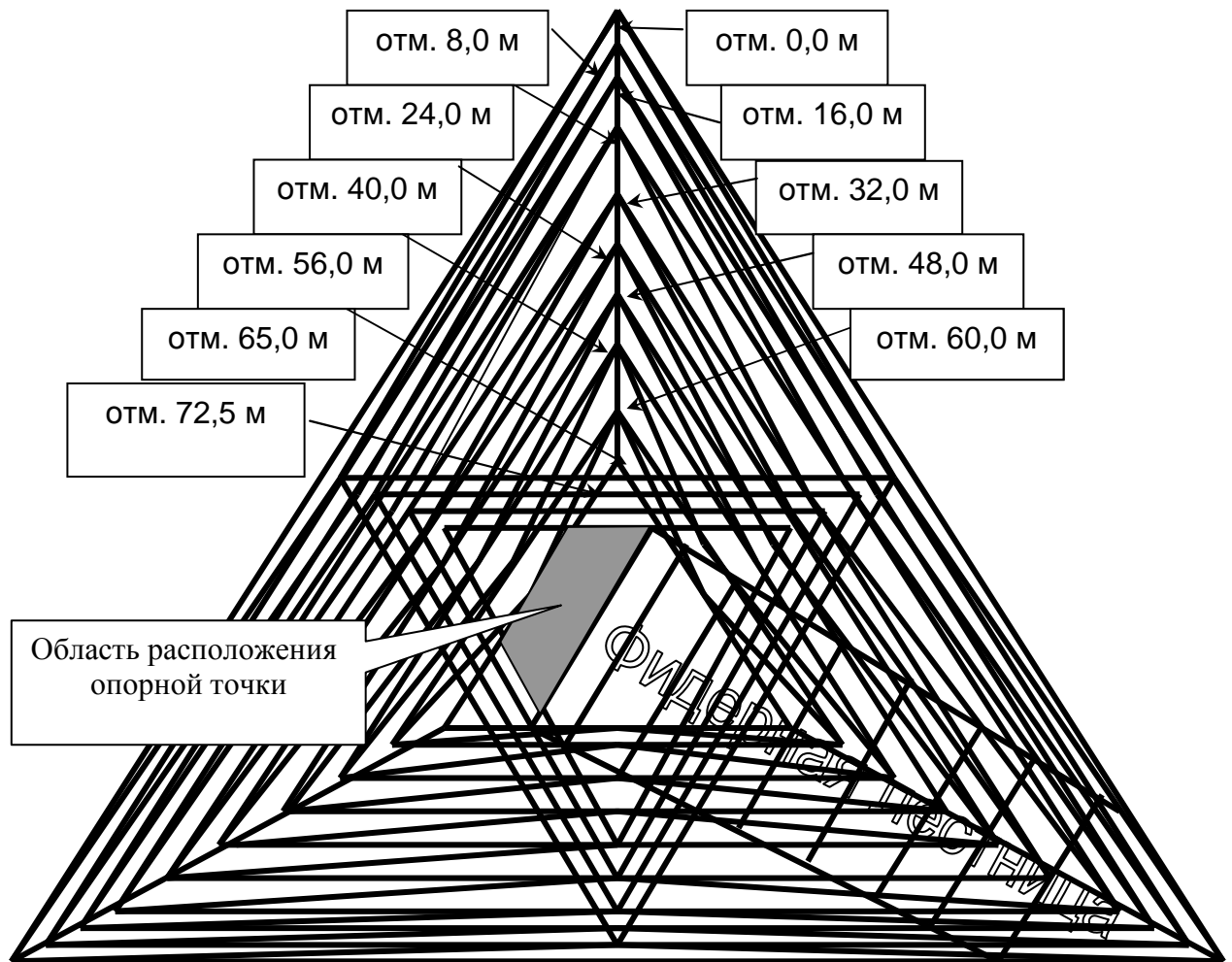


Рис. 131. Совмещённые проектные поперечные сечения башни

От этой точки измеряют расстояния  $P'1$ ,  $P'2$ ,  $P'3$  и сравнивают их с проектными значениями, которые для каждого монтажного горизонта могут быть вычислены по формулам:

$$P'1 = \frac{av}{2\sqrt{3}} - OP, \quad P'2 = P'3 = \frac{1}{2} \left( \frac{av}{\sqrt{3}} + OP \right), \quad (139)$$

где  $av = vs = ac$  – длина стороны треугольника на отдельном монтажном горизонте;  $OP$  – величина постоянная.

Точка 1 расположена посередине отрезка  $ab$ , а точки 2 и 3, до которых следует измерять расстояния от точки  $P'$ , находятся на одинаковом расстоянии от точки  $c$ , а именно:

$$c2 = c3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{av}{\sqrt{3}} + OP \right). \quad (140)$$



Рис. 132. Фотография башни (вид снизу)

Вместо расстояний  $P'1, P'2, P'3$  или в дополнение к ним могут быть измерены расстояния  $P'a, P'v, P'c$ , проектная величина которых вычисляется по формулам:

$$P'a = P'e = \sqrt{\frac{(ab)^2 - (ab)(OP)\sqrt{3}}{3} + (OP)^2}, \quad (141)$$

$$P'c = \frac{ab}{\sqrt{3}} + OP.$$

Вообще говоря, эти расстояния могут быть измерены и без отmarkания точки  $P'$  на монтажном горизонте. Для этого достаточно приложить последовательно горизонтально нивелирную рейку своей пяткой к точкам 1, 2, 3 или  $a, b, c$  и взять по ней отсчёты по вертикальному визирному лучу или лазерному пучку.

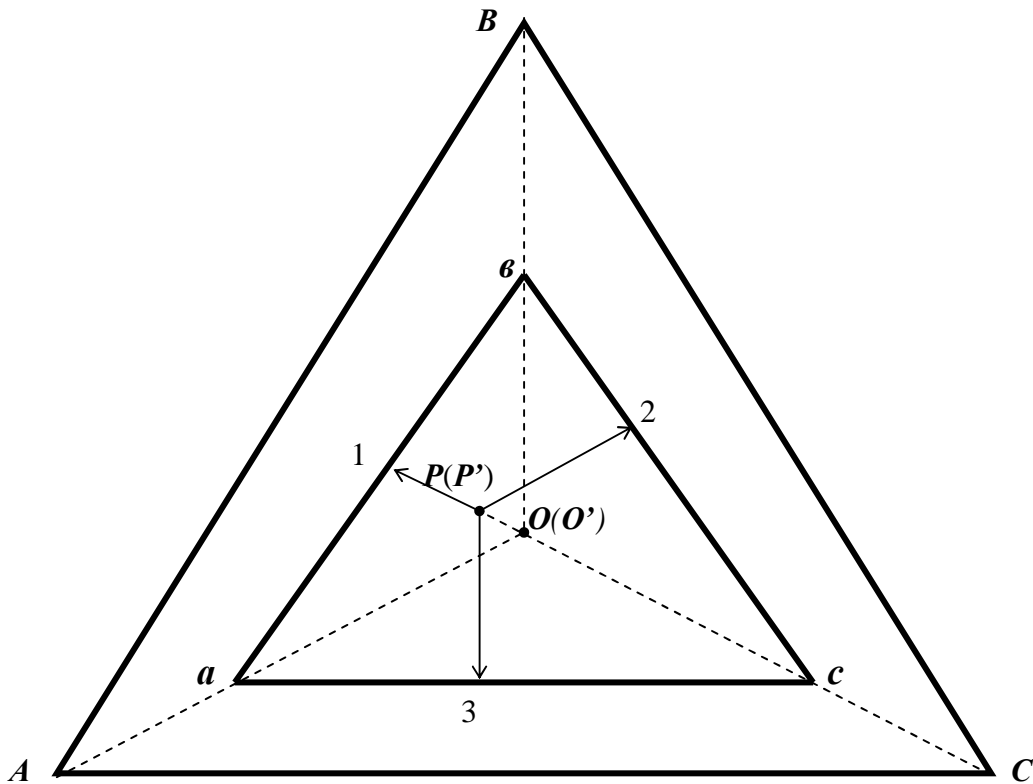


Рис. 133. Схема контроля вертикальности башни с помощью опорной точки  $P$

В табл. 61 содержатся подсчитанные по приведенным выше формулам проектные расстояния на каждом монтажном горизонте для  $OP = 500$  мм.

Т а б л и ц а 61

**Проектные расстояния на монтажных горизонтах**

Отметки,	Проектные расстояния, мм
----------	--------------------------

$M$	$av$	$P'1$	$P'2 = P'3$	$c2 = c3$	$P'a = P'v$	$P'c$
0,0	10500	2531	3281	5683	5828	6562
8,0	9433	2223	2973	5150	5214	5946
16,0	8367	1915	2665	4617	4601	5331
24,0	7300	1607	2357	4083	3988	4715
32,0	6233	1299	2049	3550	3377	4099
40,0	5167	992	1742	3017	2767	3483
48,0	4100	684	1434	2483	2161	2867
56,0	3033	376	1126	1950	1562	2251
60,0	2500	222	972	1683	1270	1943
65,0	2500	222	972	1683	1270	1943
72,5	2500	222	972	1683	1270	1943

Если измеренные расстояния  $P'1$ ,  $P'2$ ,  $P'3$  или  $P'a$ ,  $P'v$ ,  $P'c$  не соответствуют их проектным значениям, то имеет место крен башни, то есть ортоцентр  $O$  нижнего треугольника  $ABC$  и ортоцентр  $O'$  треугольника  $avc$  монтажного горизонта не находятся на одной вертикали (рис. 134).

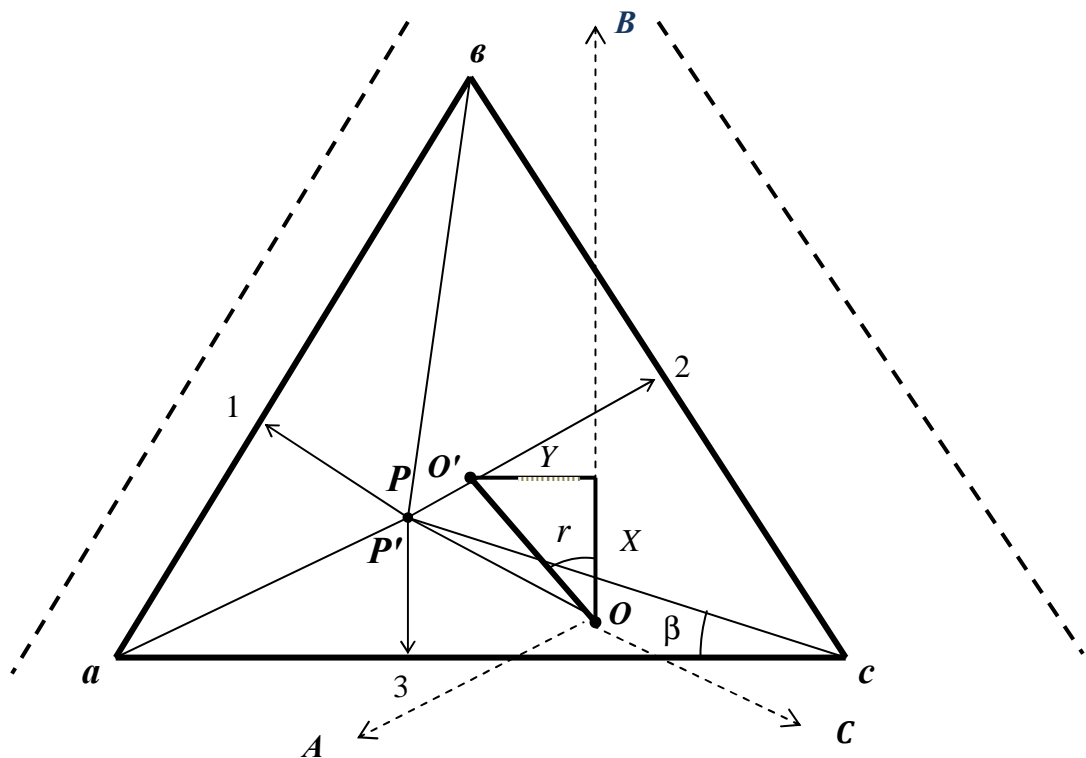


Рис. 134. Схема к определению величины и направления крена башни

Примем условную систему координат, в которой начало совпадает с ортоцентром  $O$ , а направление оси абсцисс  $X$  совпадает с осью башни  $OB$ .

Тогда величину крена  $OO'$  и румб  $r$ , характеризующий направление крена можно вычислить по формулам:

$$OO' = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad r = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} \quad (142)$$

В формулы (142) в качестве  $X$  и  $Y$  следует подставлять их значения, которые вычисляются следующим образом:

$$X = \frac{OP}{2} + \frac{av}{2\sqrt{3}} - P_3, \quad Y = P_3 \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} OP - \frac{av}{2}, \quad \beta = \arcsin \frac{P_3}{P_3}. \quad (143)$$

По формуле (142) определяют величину румба  $r$ , а знаки координат  $X$  и  $Y$  укажут направление крена относительно оси  $OB$ , принятой за ось  $X$ .

Следует сказать, что все предыдущие выкладки основывались на предположении, что скручивание верхней части сооружения относительно его основания отсутствует.

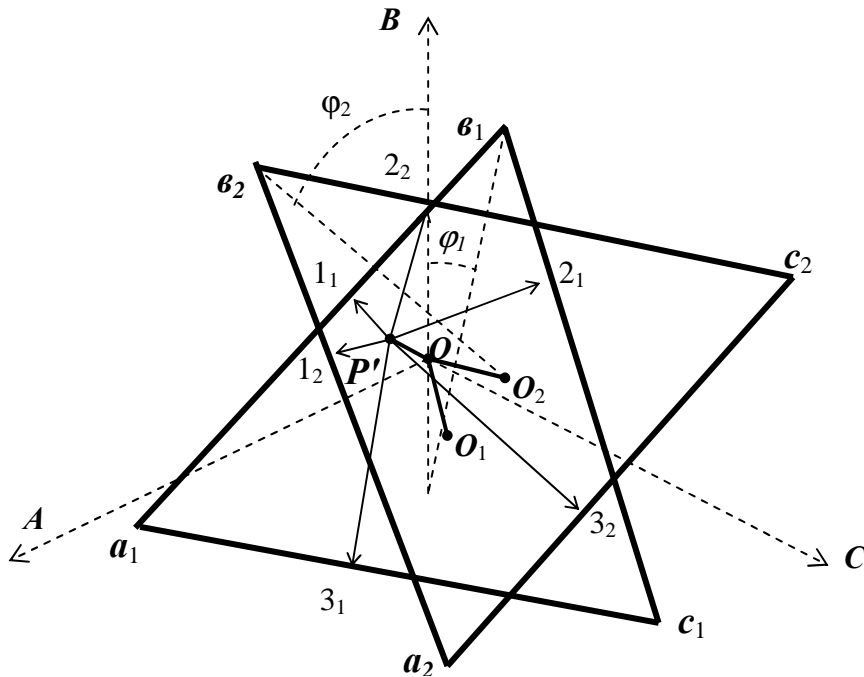


Рис. 135. Влияние угла скручивания на крен башни

На самом деле, равенство расстояний  $P'1, P'2, P'3$  или  $P'a, P'v, P'c$  (рис. 134) их проектным значениям не гарантирует отсутствия скручивания и крена башни. Это подтверждается рис. 135, где показаны два положения треугольника монтажного горизонта  $a_1b_1c_1$  и  $a_2b_2c_2$  с одинаковыми расстояниями  $P'1_1 = P'1_2, P'2_1 = P'2_2, P'3_1 = P'3_2$ , равными таковым на рис. 134,

но претерпевшие скручивание соответственно на угол  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В результате скручивания будет иметь место крен башни  $OO_1$  или  $OO_2$ .

Таким образом, если для сооружений высотой до 100 м с небольшим поперечным сечением круглой формы можно ограничиться одной опорной точкой, то для башен треугольной формы одной опорной точки будет достаточно лишь при условии отсутствия скручивания сооружения в процессе его монтажа. По окончании монтажа башни следует на верхнем горизонте закрепить визирной маркой проекцию  $P'$  опорной точки  $P$ . В дальнейшем мониторинг изменений крена башни может осуществляться наведением зенит-прибора на эту визирную марку путем перемещения его в горизонтальной плоскости. По изменению проекции  $P'$  визирной оси прибора на горизонтальной плоскости относительно опорной точки  $P$  можно судить о величине и направлении крена между циклами наблюдений.

Для одновременного определения величины крена башни, его направления и угла скручивания необходимо иметь, как минимум, две опорных точки  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 136). Для удобства их следует располагать на линии перпендикулярной оси  $OC$  на одинаковом расстоянии от этой оси. В этом случае, спроектировав опорные точки на монтажный горизонт, измеряют от их проекций  $P'_1$  и  $P'_2$  расстояния до точек 1,  $a$ , 4 и 2,  $b$ , 3. Равенство расстояний  $P'_1 1 = P'_2 2$  говорит об отсутствии скручивания сооружения, а равенство всех расстояний их проектным значениям означает отсутствие крена башни.

Проектные расстояния для отдельного монтажного горизонта можно вычислить по формулам:

$$P'_1 1 = P'_2 2 = \frac{ab}{2\sqrt{3}} - OP, \quad a 1 = b 2 = \frac{ab - P'_1 P'_2}{2},$$

$$P'_1 4 = P'_2 3 = \frac{ab}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} OP - \frac{\sqrt{3}}{4} P'_1 P'_2, \quad a 4 = b 3 = \frac{ab}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} OP - \frac{P'_1 P'_2}{4}, \quad (144)$$

$$P'_1 a = P'_2 b = \sqrt{\left(\frac{ab}{2} - \frac{P'_1 P'_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2\sqrt{3}} - OP\right)^2}.$$

Если измеряемые расстояния отличаются от их проектных значений, то имеет место скручивание и крен башни (рис. 137).

В этом случае угол скручивания  $\varphi$  равен:

$$\varphi = \arcsin \frac{P'_1 1 - P'_2 2}{P'_1 P'_2}, \quad (145)$$



а соотношение отрезков  $P_1'1$  и  $P_2'2$  укажет направление скручивания: влево или

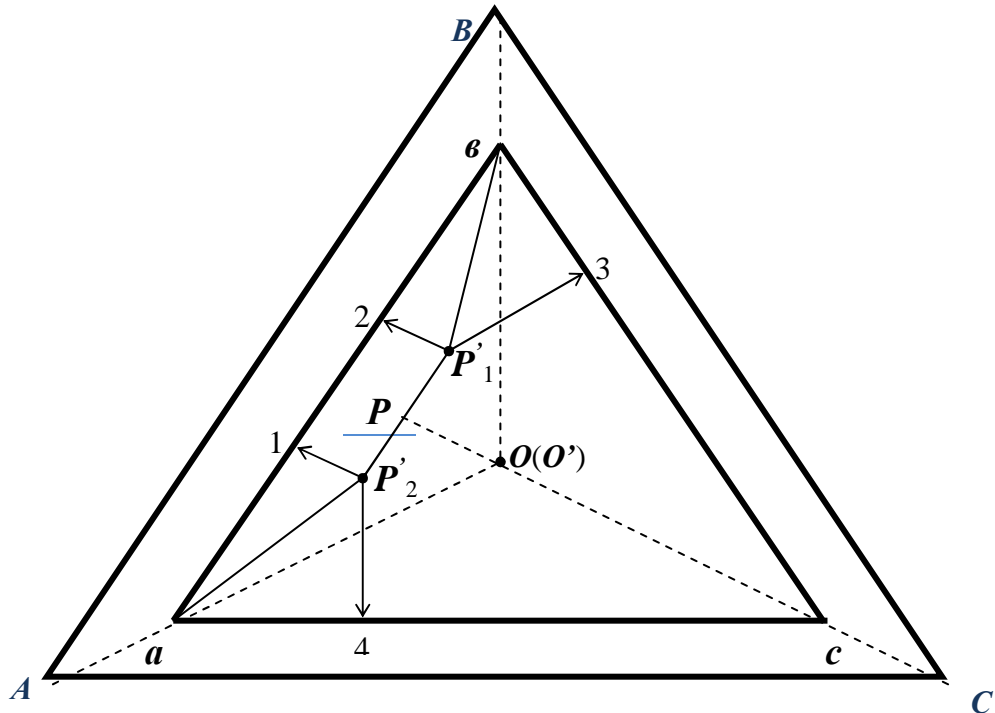


Рис. 136. Схема контроля вертикальности башни с помощью двух опорных точек  $P_1$  и  $P_2$

вправо относительно оси  $OB$ .

Величину крена и его направление можно определить по формулам (142), в которых в качестве  $X$  и  $Y$  фигурируют значения, вычисляемые следующим образом:

$$X = \frac{OP}{2} + \frac{a\epsilon}{\sqrt{3}} \cos(60^\circ - \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{4} P_1'P_2' - P_1'4 \cos \varphi - c4 \sin \varphi ,$$

$$Y = c4 \cos \varphi - \frac{a\epsilon}{\sqrt{3}} \sin(60^\circ - \varphi) - P_1'4 \sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} OP - \frac{P_1'P_2'}{4} , \quad (146)$$

$$c4 = a\epsilon - \sqrt{(P_1'a)^2 - (P_1'4)^2} .$$

Таким образом, наличие двух опорных точек позволяет получать полную информацию о пространственном положении башни. Причем методика измерений может предусматривать закрепление нескольких пар опорных точек с возможно большим расстоянием между ними для нижних ярусов, уменьшаясь до 1,5 м на верхней отметке башни.

Следует добавить, что точность выноса опорных точек на монтажные горизонты зависит не только от точности применяемых приборов вертикального проектирования. Здесь необходимо учитывать влияние солнечного на-

грева и ветровой нагрузки и, при необходимости, вводить соответствующие поправки. В ряде работ, например, [75, 76] приведены формулы для примерного расчёта величин этих поправок.

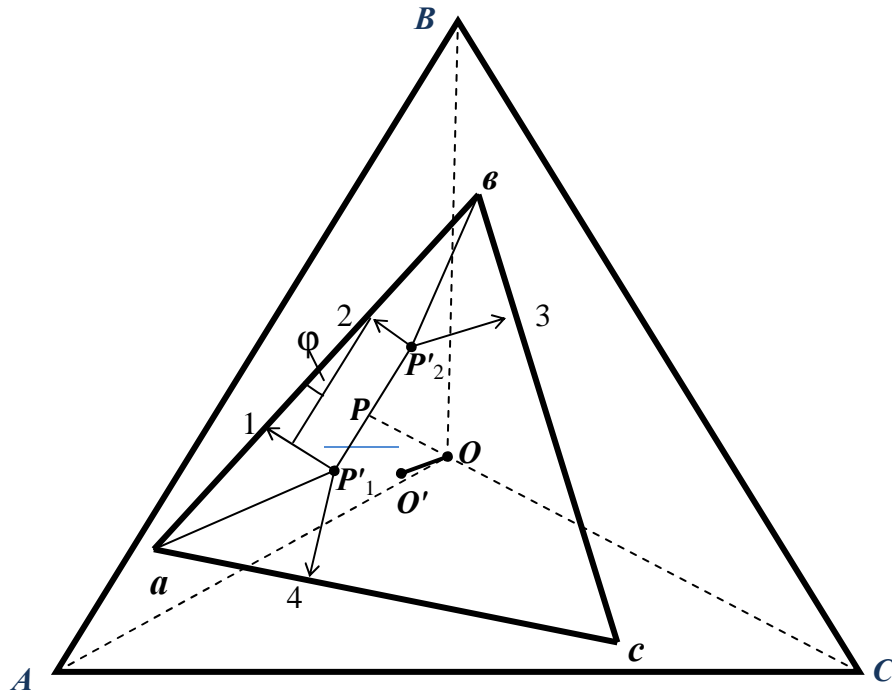


Рис. 137. Схема к определению угла скручивания, величины и направления крена

При проверке вертикальности сооружений высотой более 100 м может возникнуть вопрос о выборе способа вертикального проектирования – сквозного на всю высоту  $H$  сооружения или ступенчатого.

При непосредственном проектировании точки на высоту  $H$  средняя квадратическая ошибка определится из выражения:

$$m_1 = \sqrt{(m_{\text{ц}}^2 + m_{\text{ф}}^2) + H^2 \left( \frac{m_H^2 + m_B^2}{\rho^2} \right)}, \quad (147)$$

где  $m_{\text{ц}}$  – ошибка центрирования зенит-прибора;  $m_{\text{ф}}$  – ошибка фиксации проектируемой точки;  $m_H$  – ошибка приведения оси зенит-прибора в вертикальное положение;  $m_B$  – ошибка визирования.

При ступенчатом проектировании (при количестве ступеней проектирования  $n$ ) среднюю квадратическую ошибку можно выразить формулой:

$$m_2 = \sqrt{(m_{\text{ц}}^2 + m_{\text{ф}}^2)n + \frac{H^2}{n} \left( \frac{m_H^2 + m_B^2}{\rho^2} \right)}. \quad (148)$$

Для приборов типа *PZL* можно принять:  $m_{\text{ц}}^2 + m_{\text{ф}}^2 = 1 \text{ мм}^2$ ,  $m_H = 4''$ ,  $m_B = 2''$ . Подставив эти данные в формулу (148), определим  $m_2$  для различной высоты  $H$  сооружения. Результаты расчётов приведены на рис. 138.

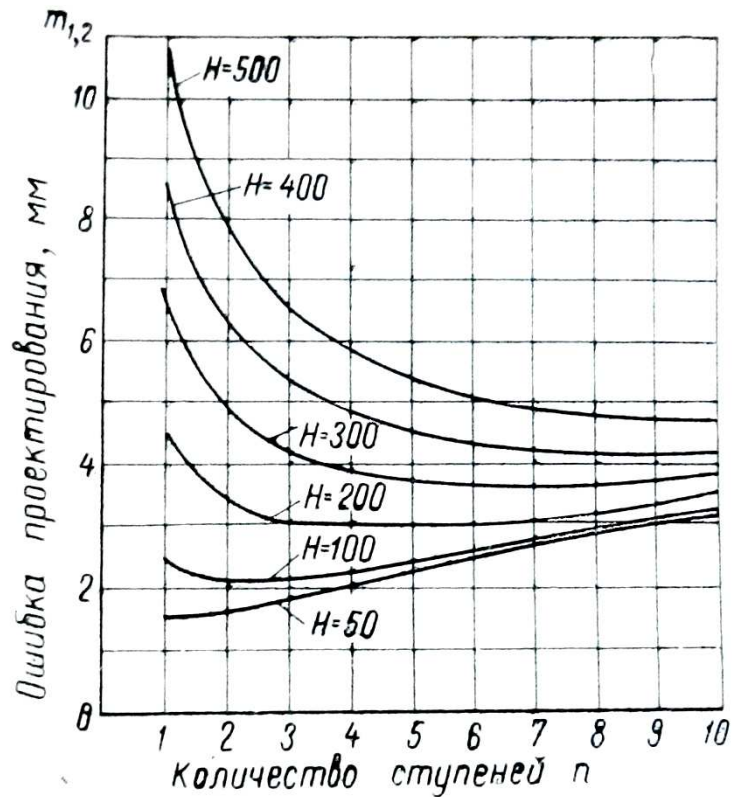


Рис. 138. Зависимость ошибки проектирования от  $n$  и  $H$

Из графиков на рис. 138 видно, что при высоте сооружения более 100 – 150 м ступенчатый способ даёт в 1,5 – 2 раза более точные результаты по сравнению с непосредственным.

Исследования формулы (148) на экстремум [59, 122] показывают, что ошибка  $m_2$  будет минимальной, когда количество ступеней равно:

$$n = \frac{H}{\rho} \sqrt{\frac{m_H^2 + m_B^2}{m_{\text{ц}}^2 + m_{\text{ф}}^2}} \quad (149)$$

Если при расчетах количества ступеней по формуле (149) получается  $n \leq 1$ , то проектирование рекомендуется производить сквозным методом. При  $1 < n < 2$  проектирование можно осуществлять как сквозным, так и ступенчатым способом. При  $n \geq 2$  рекомендуется применять только ступенчатый способ вертикального проектирования.

Практическим подтверждением наших выводов могут служить геодезические работы при возведении Останкинской телебашни в Москве высотой

536 м. (Останкинская телевизионная башня. М., Стройиздат, 1972), где для обеспечения вертикальности ствола башни был применён ступенчатый способ вертикального проектирования. Причём, при проектировании на высоту 357 м было принято 9 ступеней. Как видно из рис. 133, количество ступеней, дающее минимальную ошибку при проектировании на эту высоту, также равно 8 – 9.

При возведении сооружений высотой более 100 – 150 м атмосферные факторы делают невозможным осуществление вертикального проектирования непосредственно с исходного горизонта на всю высоту сооружения. В этом случае применим только способ ступенчатого проектирования, причём оптимальное число ступеней для каждого конкретного случая можно установить по формуле (149).

Если описанная выше методика контроля пространственного положения башенных сооружений треугольной и четырёхугольной формы применима как в период строительства, так и в период эксплуатации, то к сооружениям круглой формы (в частности дымовым трубам) она применима лишь в строительный период. Причём, для контроля вертикальности здесь достаточно одной опорной точки  $P$ , а две точки необходимы для определения кручения опалубки в процессе их возведения[52].

### 2.3.6. Определение составляющих вектора крена

В работе [1] в соответствии с требованиями Инструкции [34] рассматривается методика разложения вектора полного крена высотного сооружения башенного типа на его составляющие по осям симметрии этого сооружения. Графическое решение задачи «классическим» способом предлагается выполнять в любой САД-системе. Аналитические расчёты базируются на известной [143] методике определения координат геометрических центров нижнего и верхнего сечений сооружения. Для этого производится вычисление координат точек полигона, образованного центром нижнего сечения  $O$  и концами 1, 2, 3 векторов частных кренов  $K_1$ ,  $K_2$  и общего крена  $K$  (рис. 139).

Нами предлагается более простая методика геометрической интерпретации, исключая необходимость вычисления координат и позволяющая непосредственно определять составляющие вектора полного крена одновременно по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям с последующей оценкой точности получаемых результатов. Сущность методики поясняется рис. 139 и заключается в следующем.

Допустим, что с пунктов  $T_1$  и  $T_2$  способом прямой угловой или азимутальной засечки определены частные крены  $O-1 = K_1$  и  $O-2 = K_2$  башенного сооружения. «Классическим» способом перпендикуляров может быть найдено направление полного крена  $O-3$ , величину которого  $K$  можно найти графически или вычислить по общеизвестной формуле (71).



могут служить равенства:  $\delta_1 + \delta_2 = \gamma$ ,  $\alpha_{O-2} + \delta_1 = \alpha_{O-1} - \delta_2$ ,  $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ . В табл. 62 приведен пример вычислений по составленной в программе Excel системе, в которую достаточно ввести исходные данные  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $\alpha'$  и получить всю необходимую информацию. Причём, сравнение аналитических расчётов с результатами графических построений показали их полную сходимость.

Т а б л и ц а 62

**Исходные данные и результаты вычислений  
составляющих полного крена**

$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	Составляющие и полный крен, мм			$\delta_1, ^\circ$	$\delta_2, ^\circ$	$\alpha', ^\circ$	$\alpha_{O-3}, ^\circ$	$\delta'$	$K_{x'}$	$K_{y'}$
			$K_1$	$K_2$	$K$							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
210	150	60	55	40	56,9	45,3	14,7	40	105,3	65,3	23,8	51,7

Оценку точности любых геодезических засечек с одновременной геометрической интерпретацией получаемых результатов можно производить с помощью предложенной нами окружности стандартов, которая обладает наибольшей семантометрической насыщенностью по сравнению с другими геометрическими критериями [126]. Её элементами являются линейные и угловые величины, по которым она может быть построена и ориентирована относительно координатных осей. Определение этих элементов может осуществляться с помощью матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений, с помощью матрицы весовых коэффициентов, с помощью периметра и замыкающей квадратического полигона. В нашем случае однократной засечки окружность стандартов наиболее просто построить по углу засечки  $\gamma$  и значениям так называемых исходных элементов  $l_1$ ,  $l_2$ , вычисляемых по формулам:

$$l_1 = \frac{S_2 m_{\alpha_2}}{\rho \sin \gamma}, \quad l_2 = \frac{S_1 m_{\alpha_1}}{\rho \sin \gamma}, \quad (151)$$

где  $S_1$ ,  $S_2$  – длины сторон засечки, мм;  $m_{\alpha_{1,2}}$  – СКО дирекционных углов, принятые в дальнейших расчётах равными  $5''$ ;  $\rho'' = 206265''$ .

Методика построения окружности стандартов иллюстрируется на рис. 140 и заключается в следующем. Вначале строят в выбранном масштабе треугольник 1-*O*-2 со сторонами *O*-1 =  $l_1$  и *O*-2 =  $l_2$ , внутренний угол между которыми должен быть равен  $(90^\circ + \gamma)$ . Причём, если нумерация точек  $T_1$  и  $T_2$  идёт против часовой стрелки (как на рис. 139), то строят окружность с правым эксцентриситетом, если по часовой стрелке – то с левым. Проведя из

точки  $O_1$  как из центра окружность радиусом  $R = O_1-1 = O_1-2$ , получим окружность стандартов с внутренним правым эксцентриситетом  $e = O_1-O$ . Точка  $O$  делит диаметр этой окружности  $O_2-O_3$  на две части, одна из которых  $O-O_2 = A_0$ , другая  $O-O_3 = B_0$ , являющиеся соответственно большей и малой полуосями эллипса ошибок.

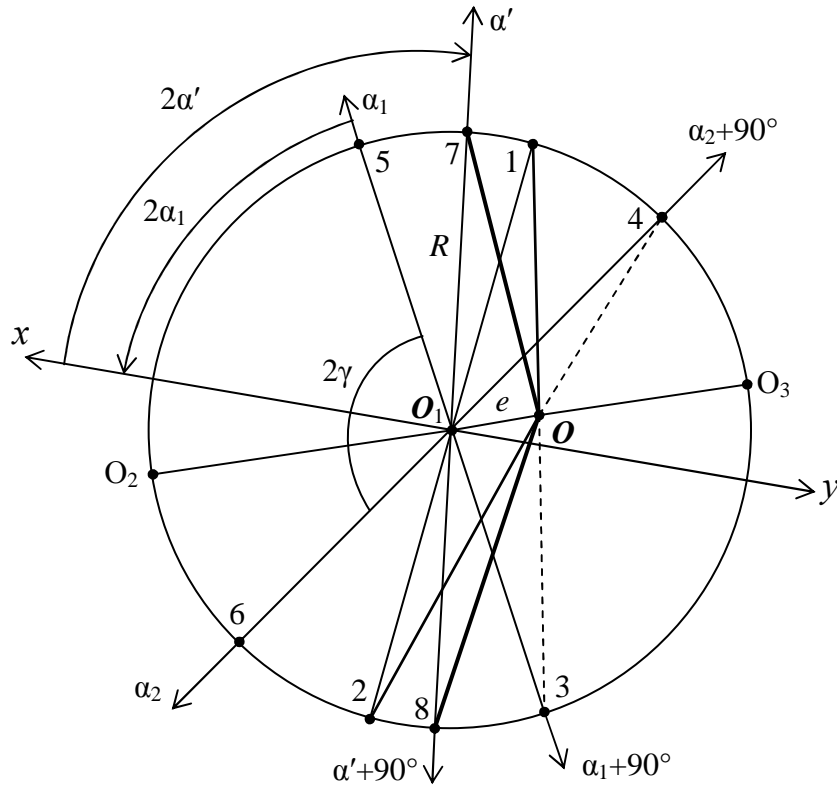


Рис. 140. Схема к построению и ориентированию окружности стандартов

Традиционный способ ориентирования таких геометрических критериев как эллипс или подера заключается в определении дирекционного угла  $\varphi_0$  большой полуоси  $A_0$ . В работе [126] приведены ещё пять различных способов ориентирования окружности стандартов относительно координатных осей. В нашем случае графический способ ориентирования заключается в следующем (рис. 140).

Находят на окружности точки 3 и 4 её пересечения с продолжениями отрезков  $1-O = l_1$  и  $2-O = l_2$  и проводят диаметры 3-5 и 4-6. В результате получают направления, соответствующие сторонам засечки с дирекционными углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , угол между которыми равен  $2\gamma$ . В свою очередь противоположные по отношению к  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  направления соответствуют направлениям, перпендикулярным к сторонам засечки, а их дирекционные углы равны

соответственно  $\alpha_1 + 90^\circ$  и  $\alpha_2 + 90^\circ$ . Отложив от направления  $\alpha_1$  против хода часовой стрелки угол  $2\alpha_1$ , получаем оси  $x$  и  $y$ .

Теперь по этой ориентированной окружности можно определить СКО как по осям координат, так и по двум любым взаимно перпендикулярным направлениям. Для этого достаточно (рис. 140, 141) отложить удвоенное значение дирекционного угла  $\alpha'$  заданного направления и провести диаметр 7-8. Тогда отрезок  $O-7 = m_1$  будет равен СКО по направлению  $\alpha'$ , а отрезок  $O-8 = m_2$  равен СКО по перпендикулярному направлению  $\alpha'+90^\circ$ .

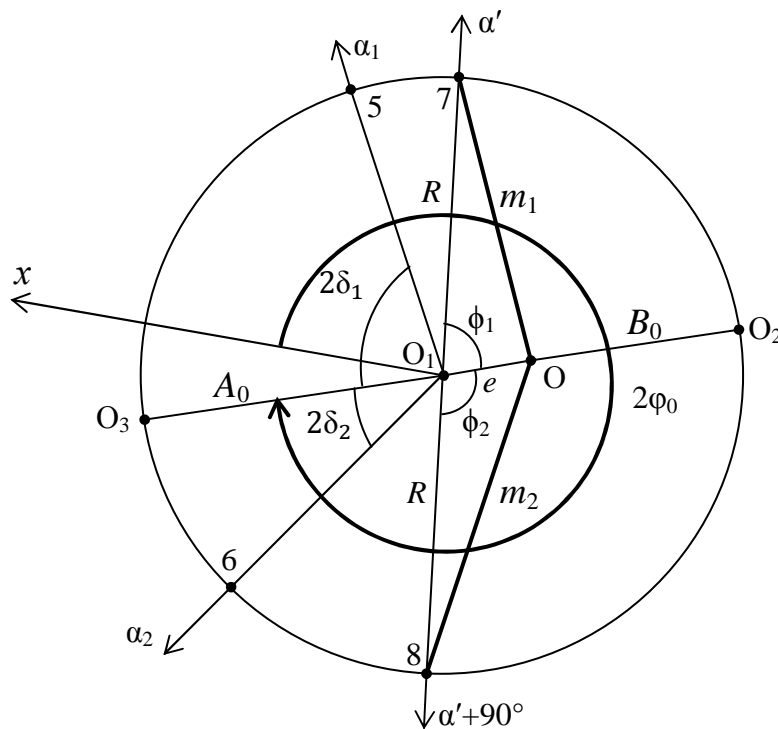


Рис. 141. Схема к определению СКО с помощью окружности стандартов

Аналитическое решение задачи заключается, во-первых, в определении радиуса  $R$  и эксцентриситета  $e$  по формулам:

$$R, e = 0,5\sqrt{l_1^2 + l_2^2 \pm 2l_1l_2\sin\gamma}, \quad (152)$$

где знак «плюс» соответствует радиусу  $R$ , а «минус» – эксцентриситету  $e$ .

Схема на рис. 141 наглядно демонстрирует, что  $A_0 = R + e$ ,  $B_0 = R - e$ , а углы  $2\phi_0$ ,  $2\delta_1$  и  $2\delta_2$  равны [126]:

$$2\phi_0 = 2\alpha_1 \mp 2\delta_1 = 2\alpha_2 \pm 2\delta_2,$$



$$2\delta_1 = \arctg \frac{l_2^2 \sin 2\gamma}{l_1^2 + l_2^2 \cos 2\gamma}, \quad 2\delta_2 = \arctg \frac{l_1^2 \sin 2\gamma}{l_2^2 + l_1^2 \cos 2\gamma}, \quad (153)$$

$$2\delta_1 + 2\delta_2 = 2\gamma,$$

причём следует иметь в виду, что верхние знаки соответствуют окружности СКО с правым эксцентриситетом, нижние – с левым. Если разность углов отрицательна (как на рис. 141), то к ней необходимо прибавить  $360^\circ$ . Если по формулам (153) получают отрицательное значение угла  $2\delta_1$  или  $2\delta_2$ , то к нему надо прибавить  $180^\circ$ .

В табл. 63 приведены результаты вычислений элементов окружности стандартов по составленной в программе Excel системе, в которую достаточно ввести исходные данные  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и получить всю необходимую информацию. Причём, сравнение аналитических расчётов с результатами графических построений показали их полную сходимость. Следует добавить, что в качестве углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  можно брать их прямые или обратные значения, поскольку в дальнейшем используются их удвоенные величины.

В общем виде СКО  $m_1$  и  $m_2$  по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям  $\alpha'$  и  $\alpha'+90^\circ$  (рис. 141) можно определить по известной теореме косинусов:

$$m_1^2 = e^2 + R^2 - 2eR \cos \phi_1, \quad m_2^2 = e^2 + R^2 - 2eR \cos \phi_2. \quad (154)$$

Т а б л и ц а 63

### Результаты вычислений линейных и угловых элементов окружности стандартов

$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	Длины сторон, м		Линейные элементы, мм				Угловые элементы, градус		
			$S_1$	$S_2$	$l_1$	$l_2$	$R$	$e$	$2\delta_1'$	$2\delta_2'$	$2\phi_0$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
210	150	60	300	250	7,0	8,4	7,4	2,1	77,3	42,7	342,6

В нашем примере (рис. 141) угол  $\phi_1 = 2\phi_0 - 180^\circ - 2\alpha' = 342,6^\circ - 180^\circ - 80^\circ = 82,6^\circ$ , а угол  $\phi_2 = 180^\circ - \phi_1 = 97,4^\circ$ . Подставляя в формулы (154) значения  $e$  и  $R$  из табл. 63, получим  $m_1 = 7,4$  мм,  $m_2 = 7,9$  мм, что полностью совпадает с результатами графических построений.

Современные технологии определения пространственного положения высоких сооружений башенного типа с использованием электронных тахеометров безотражательного типа позволяют определять непосредственно координаты точек  $O$  и  $3$  (геометрических центров нижнего и верхнего сечения сооружения) даже с одной точки стояния прибора  $T_1$  или  $T_2$  [143]. В этом случае геометрическая интерпретация составляющих полного крена ещё бо-

лее упрощается. Для этого достаточно по координатам нанести точки  $O$  и  $Z$  на чертёж и из середины полученного отрезка провести окружность, с помощью которой можно определить составляющие крена по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует сказать, что приведёнными в монографии методами контроля пространственного положения и формы сооружений башенного типа не исчерпываются возможности использования безотражательных дальномеров, электронных тахеометров, цифровых неметрических фотокамер, совместимых с компьютерной техникой. Например, использование цифровой фотограмметрии дает возможность помимо прочего контролировать вибрации любых инженерных объектов, учитывать динамические деформации, которые проявляются в виде колебаний или периодических движений, вести непрерывный мониторинг пространственного положения объектов и др.

Наряду с этим, необходимо развивать новые перспективные способы, которые основываются или будут основаны на новейших достижениях науки и техники: специальные следящие системы, лазерные интерферометры, электронные уровни, виброметры, тензометры и т.д.

К таким способам, в частности, определения крена можно отнести следующие:

**Спутниковые методы** предусматривают использование GPS-приемников при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений башенного типа. Для ведения мониторинга деформаций инженерных сооружений рассматриваются возможности применения систем ГЛОНАСС и GPS [26, 116, 162].

**Наземное лазерное сканирование** позволяет получать изображение сооружения и определять координаты любой его точки. Применение для этих целей НЛС поможет сократить не только затраты труда, но и получить бесконтактным способом информацию о большом числе точек сооружения в один физический момент, что имеет значение при определении динамических деформаций [16, 194].

**Программа Plumb-bob** предусматривает в процессе фотографирования на смартфон, планшет всегда получать на снимке изображение вертикальной линии. Эту линию можно использовать в качестве вертикальной референтной прямой, от которой оперативно производить все необходимые измерения.

**Использование беспилотных летательных аппаратов**, основанное на принципах аэрофотосъёмочных работ, а также дальнейшее совершенствование фотографических способов можно считать одним из перспективных направлений развития способов контроля вертикальности сооружений башенного типа.

**Применение видеоизмерительных систем**, основанное на компьютерной обработке видеоизображения контролируемого объекта [13, 14].

В заключение следует сказать, что при организации работ по контролю пространственного положения и формы строительных конструкций, необходимо, во-первых, руководствоваться требованиями обеспечения безопасно-

сти геодезических измерений. Во-вторых, эти требования должны учитываться при разработке новых методов, приборов и систем, обеспечивающих высокие технологии таких измерений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров, Б. Ф. О способах получения составляющих вектора крена при техническом обследовании антенно-мачтовых сооружений / Б. Ф. Азаров, П. П. Мурзинцев // Геодезия и картография. – 2016, – №9. – С. 13 – 17.
2. Анучин, Н. И. Определение изменений крена высотных сооружений с помощью приборов вертикального проектирования / Н. И. Анучин, В. П. Поляков, В.Ф. Шмидт // Воронежский лесотехнический ин-т. – Воронеж, 1988. – 9 с. (Рукопись деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 03.06.88, № 321-гд88).
3. Анучин, Н.И. Опыт определения отклонений оси гранбашен от вертикали / Н.И. Анучин, Л. П.Федорина, Л. И. Васильева // Воронежский лесотехнический ин-т. – Воронеж, 1988. – 4 с. (Рукопись деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 03.06.88, № 325-гд88)
4. Атакишиев, А.А. О планировании геодезических наблюдений за колебаниями башенных сооружений / А.А. Атакишиев // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1987. – № 46. – С. 3–6.
5. Баландин, В.Н. Вероятность нахождения определяемой точки в круге погрешностей / В. Н. Баландин // Геодезия и картография. – 1983. – № 5. – С. 14-15.
6. Бауск, Е.А. Оценка крена дымовых труб по результатам безреперного нивелирования / Е.А. Бауск, В.К. Капустин // Геод. работы при монтаже и эксплуат. технол. оборуд. Материалы Всес. науч.-техн. конф. Новосибирск, 1978. – М. – 1980. – С. 135 – 136.
7. Бикташев, М.Д. Башенные сооружения. Геодезический анализ осадки, крена и общей устойчивости положения / М.Д. Бикташев // Учебное пособие для студентов. – М. – Изд-во АСВ. – 2006 – 376 с.
8. Болтовский, В.Г. Определение кренов радиотелевизионных башен и мачт / В.Г. Болтовский // Томск. политехн. ин-т. – Томск, 1980. – 6 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 24.03.81, № 49-81 Деп).
9. Бондаренко, А. В. Анализ результатов определения крена дымовой трубы / А. В. Бондаренко // Геодезия и фотограмметрия. – Ростов н/Д, 1983. – С. 84 – 87.
10. Бондаренко, А.М. Определение крена высотного сооружения методом координат / А.М. Бондаренко, Р.В. Мищенко // Геодезия и картография. – 2012. – № 5. – С. 3–8.
11. Большаков, В.Д. Справочное руководство по инженерно-геодезическим работам / В. Д. Большаков, Г. П. Левчук, В. Е. Новак и др. – М.: Недра, –1980. – 781 с.
12. Буш, В.В. Геодезические работы при строительстве сооружений башенного типа / В.В. Буш, В.В. Калугин, А.И. Саар– М.: Недра. – 1985. – 216 с.

13. Буюкян, С. П. Видеоизмерение в инженерной геодезии / С.П. Буюкян // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2002. – № 6. – С. 27 – 34.
14. Буюкян, С.П. Видеоизмерительная система контроля координат рабочей точки антенны / С.П. Буюкян // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2003. – № 1. – С. 9 – 13.
15. Бызгу, Д.Г. Влияние нестворности установки теодолита на точность вертикального проектирования / Бызгу Д.Г. // Геодезия и картография. – 1985. – № 4. – С. 26–27.
16. Валиева, А.Р. Обоснование применения лазерного сканирования в оценке деформаций высотных конструкций / А.Р. Валиева // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 4. – С. 60– 64.
17. Вагин, В.А. Определение крена по результатам геометрического нивелирования / В.А. Вагин, Р. Мшреф // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1993. – № 3. – С. 22– 30.
18. Визиров, Ю.В. Наклонное проектирование при определении крена высокого сооружения / Ю.В. Визиров // Геодезия и картография. – 2006. – № 3. – С. 15 – 19.
19. Виноградов, А.В. Применение электронного тахеометра для обследования конструкций металлических башен сотовой связи / А.В. Виноградов, О.Н. Пушак // Геодезия и картография. – 2017. – №4. – С. 2 – 6.
20. Ганьшин, В.Н. Анализ способов определения крена промышленных дымовых труб / В.Н. Ганьшин, И.А. Шувалов // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Л., 1981. – С. 9 – 20. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп).
21. Ганьшин, В.Н. Оценка точности определения местоположения пункта одним числом / В.Н. Ганьшин, В. М. Лазарев // Геодезия и картография. – 1985. – № 8. – С. 43-45.
22. Герцвольф, В.Н. Методика определения оптимальной периодичности проверки вертикальности башен РРЛ / В.Н. Герцвольф // Исследования по прикладной геодезии и фотограмметрии. – М., 1986. – С. 65 – 69.
23. Головкин, Г.С. Опыт геодезического контроля радиотелевизионных башен и мачт в Кузбассе / Г.С. Головкин, А.Д. Трубочанинов, А.П. Дроздова // Кузбасский политехнический ин-т. – Кемерово, 1988. – 9 с. (Рукопись деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 09.03.88, № 301-гд 88).
24. Губенко, Е.Н. Влияние некоторых факторов на результаты геодезических наблюдений за кренами промышленных труб / Е.Н. Губенко, А.С. Ким, М.А. Красавцев // Геодезия и картография. – 1978. – № 6. – С. 34 – 39.
25. Губенко, Е.Н. Обобщение геодезических методов определения крена дымовых труб промышленных предприятий / Е.Н. Губенко, А.С. Ким, М.А. Красавцев // Геодезия и картография. – 1978. – № 10. – С. 39 – 49.
26. Демин, А.В. Улучшение способа мониторинга кренов и изгибов

промышленных объектов башенного типа с помощью спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS / А. В. Демин, Ш. Ш. Кавтарашвили // Материалы 9 Международной научной конференции, Красноярск, 10-12 нояб., 2005. – С. 71–72.

27. Желтко, Ч.Н. Измерения геометрии высоких стальных трёхгранных сооружений / Ч.Н. Желтко, Гура Д.А., Аветисян Г.Г. // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2010. – № 6. – С. 13– 19.

28. Зайцев, А.К. Геодезические методы исследования деформаций сооружений / А.К.Зайцев, С.В. Марфенко, Д.Ш. Михелев– М.: Недра. – 1991 – 272 с.

29. Зеленский, А.М. Об определении крена высоких сооружений башенного типа / А.М. Зеленский // Геодезия и картография. – 1974. – № 12. – С. 30 – 33.

30. Ивенин, Д.П. Экспериментальные исследования координатного способа определения крена промышленных дымовых труб / Д.П. Ивенин, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, О.В. Раскаткина // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, – 2016, – № 1, – С. 58-64.

31. Ивенин, Д.П. Экспериментальные исследования двухэтапного способа определения крена сооружений башенного типа / Д.П. Ивенин, Г.А. Шеховцов, О.В. Раскаткина // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, –2017, –№ 1, – С. 34-40.

32. Ивенин, Д. П. Экспериментальные исследования способов контроля пространственного положения строительных конструкций / Д.П. Ивенин, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, О.В. Раскаткина // Геодезия и картография. – 2017. – № 4. – С. 7-12.

33. Инструкция по эксплуатации металлических антенных опор радиоцентров и радиотелевизионных передающих станций. М., «Радио и связь», – 1983. – 43 с.

34. Инструкция по эксплуатации антенных сооружений радиорелейных линий связи. – М: Минсвязи СССР. 1981. – 29 с.

35. Кала, В.В. Определение крена труб видоизмененным способом горизонтальных углов / В.В. Кала // Геодезия и картография. – 1983. – № 6. – С. 41 – 42.

36. Каменная, Л. И. Определение деформаций башенных сооружений // Проблемы экологии в геодезии и картографии / Л.И. Каменная– М., 1992. – С. 61– 64.

37. Квасневский, В.А. Определение кренов сооружений по трем осадочным маркам / В.А. Квасневский // Геодезическое обеспечение строительства. – М., 1987. – С. 111– 113.

38. Кетков, Ю.Л. MatLab 7. Программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц // «БХВ – Петербург». Санкт – Петербург, 2005, –752 с.

39. Кислый, И.М. Определение центра инженерного сооружения цилиндрической или конусообразной формы / И.М. Кислый, В.С. Сова // Геодезия и картография. – 1969. – №12. – С. 29 – 31.

40. Концевой, С.В. Организация наблюдений за колебаниями Тульской телевизионной мачты / С.В. Концевой, Ю.В. Попов, В.Ф. Маршалко // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Тула, 1981.– С. 66 – 70. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп)

41. Ламбин, Н.Е. Метод фоторегистрации при определении крена высотных сооружений / Н.Е. Ламбин, П.И. Соловей // Геодезическое обеспечение строительства. – М., 1987. – С. 121– 124.

42. Ларченко, В.Г. Упрощенный способ геодезических наблюдений для оперативного контроля измерений крена дымовых труб / В.Г. Ларченко, О.И. Толсторебров // Проблемы экологии в геодезии и картографии. – М., 1992. – С. 55– 57.

43. Лобов, М.И. Влияние солнечной радиации на крен высотных сооружений башенного типа / М.И. Лобов // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Макеевск, 1981. – С. 2 – 8. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп).

44. Лобов, М.И. Разработка оптимального способа определения деформационных характеристик башенных сооружений / М.И. Лобов // Геодезическо-маркшейдерские работы в стр-ве. – М. – 1989. – С. 69-78.

45. Лобов, М.И. Комплексный подход к изучению деформаций сооружений башенного типа под влиянием внешних факторов / М.И. Лобов // Проблемы экологии в геодезии и картографии. – М., 1992. – С. 57– 61.

46. Луцешина, Г.В. Исследование точности определения кренов сооружений способом горизонтальных и вертикальных углов / Г.В. Луцешина, И.П. Наборщикова, И.А. Столбов // Пермский политехнический ин-т. – Пермь, 1990. – 17 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 04.04.90, № 1816 – В90).

47. Мамонов, В.Н. Некоторые результаты моделирования способа определения крена сооружений башенного типа треугольной формы / В. Н. Мамонов // «Промышленная безопасность-2008». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, –2008. –С. 117–127.

48. Мамонов, В. Н. Определение крена сооружений башенного типа треугольной формы с помощью приборов вертикального проектирования / В. Н. Мамонов, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2008». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, –2008. –С. 117–127.

49. Мамонов, В.Н. О точности определения крена сооружений башенного типа треугольной формы способом малых углов / В. Н. Мамонов, Г.А. Шеховцов // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, – 2014, – № 31, – С. 157-165.



50. Мангушев, А. А. О точности определения крена телебашни / А. А. Мангушев, С.Т. Заикин // Геодезия и картография. – 1981. – № 11. – С. 37 – 38.

51. Марфенко, С.В. Геодезические работы по наблюдению за деформациями сооружений: Учебное пособие / С.В. Марфенко // М.: Изд-во Московского государственного ун-та геодезии и картографии. 2004. – 35 с.

52. Марфенко, С.В. Геодезические работы при изысканиях и строительстве промышленных сооружений: Учебное пособие / С.В. Марфенко // М.: Изд-во Московского государственного ун-та геодезии и картографии. 2004. – 48 с.

53. Мархвида, В. Г. Определение осадок, горизонтальных смещений и кренов сооружений методом квазиснимков / В.Г. Мархвида // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1984. – № 1. – С. 84– 89.

54. Мошинский, И.Е. Совершенствование методики определения деформаций сооружений с использованием объективной призмной насадки / И.Е. Мошинский, Л.И. Каменная // Инженерная геодезия. – 1991. – № 34. – 72 – 75.

55. Найденов, Д.А. Общность способов определения кренов башенных сооружений геодезическими методами / Д.А. Найденов // Геодезическое обеспечение строительства. – 1987. – С. 114 – 120.

56. Найденов, Д. А. Предрасчет точности геодезических измерений при определении кренов башенных сооружений / Д.А. Найденов // Разработка новых методов и средств геометрического обеспечения промышленного и гражданского строительства. Московский инженерно-строит. ин-т.– М., 1989.– С.16 – 30.

57. Нгуен Куанг Так. Учёт влияния внешних факторов при определении координат ствола башни гиперболической формы / Нгуен Куанг Так // Московский государственный университет геодезии и картографии. – М., 1996. – 7 с. (Рукопись деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 20.03.96, № 599-гд96).

58. Нестеренок, В.Ф. О точности упрощенных способов определения крена башенных сооружений / В.Ф. Нестеренок // Геодезия и картография. – 1977. – № 8. – С. 31-34.

59. Нестеренок, М.С. О точности определения крена сооружений башенного типа (высотой до 150 м) / М.С. Нестеренок, В.Н. Вексин // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Минск, 1981. – С. 21 – 23. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп).

60. Нестеренок, М.С. Особый случай определения оси симметрии дымовых труб / М.С. Нестеренок, В.Н. Вексин, В.Ф. Нестеренок // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Минск, 1981. – С. 46 – 57. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп).

61. Нестеренок, С.Ф. О некоторых подходах к оценке результатов измерения наклона башенных сооружений / С.Ф. Нестеренок // Геодезия и картография. – 1991. – № 6. – С. 17-20.

62. Нестеренок, В.Ф. О расчете температурных прогибов башен круглого сечения / В. Ф. Нестеренок // Геодезия и картография. – 1993. – № 10. – С. 16 – 20.

63. Никифоров, Б.И. Количественная оценка качества геодезических работ / Б.И. Никифоров // Геодезия и картография. – 1985. – № 6. – С. 22-24.

64.51. Николаев, А.Ф. Экономическая эффективность определения крена дымовых труб многократной прямой засечкой / А.Ф. Николаев // Геодезия и фотограмметрия. – Ростов н/Д, 1980. – С. 129-132.

65. Никонов, А.В. Современные способы определения кренов промышленных дымовых труб / А.В. Никонов, В.Г. Никонов // Геодезия и картография. – 2015. – № 4. – С. 13-21.

66. Нишанбаев, Н. Опыт определения деформации минарета / Н. Нишанбаев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2000. – № 2. – С. 46– 49.

67. Осоловский, В.П. О качестве работ по экспертизе промышленной безопасности и восстановлению работоспособного состояния дымовых и вентиляционных труб. Промышленная безопасность дымовых и вентиляционных промышленных труб / В.П. Осоловский // Сб. науч. тр. по материалам консультац.-метод. семинара, 19 июня 2008. – Уфа. БАЭ. 2008. – 126 с.

68. Павлов, Ф.Ф. Кривые средних ошибок / Ф.Ф. Павлов // Науч. тр. МГИ. – 1950, вып. 8. – С. 373-391.

69. Падве, В.А. Вариант решения прямой угловой засечки / В.А. Падве // Исследования по совершенствованию инженерно-геодезических работ: Межвуз. сб. – Новосибирск, 1985. – С. 78 – 80.

70. Падве, В.А. Вариация на тему прямой засечки / В.А. Падве // Геодезия и картография. – 1999, – № 9. – С. 47 – 48.

71. Пимшин, Ю.И. О принципах формирования и средствах реализации референтных прямых / Ю.И. Пимшин, Х.К. Ямбаев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1994, № 6, с. 3 – 10.

72. Правила безопасности при эксплуатации дымовых и вентиляционных промышленных труб (утверждено постановлением Госгортехнадзора РФ от 3.12.2001 г. № 56). – 15 с.

73. Радов, С.Г. Комбинированный способ определения крена инженерных сооружений башенного типа / С.Г. Радов, В.П. Стукальский, В.Г. Ларченко // Геодезия и картография. – 1977. – № 12.– С. 35–38.

74. Раинкин, В.Я. Определение деформаций сооружений башенного типа посредством измерения горизонтальных и вертикальных углов с одного опорного пункта / В.Я. Раинкин // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1972. – вып. 3. – С. 46– 49.

75. Раинкин, В. Я. Вынос центра башни на монтажный горизонт / В.Я. Раинкин // Геодезия и картография. – 1982. – №10.– С. 32–33.

76. Раинкин, В.Я. О выборе методики проектирования центра башни на монтажный горизонт в случае воздействия внешних факторов / В. Я. Раинкин // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1984. – вып. 1. – С. 27– 30.

77. Раинкин, В.Я. Определение изгиба башенных сооружений под воздействием солнечной радиации / В.Я. Раинкин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов, 1988. – № 48. – С. 74-77.

78. Раскаткин, Ю.Н. Определение радиуса сооружений круглой формы фотографическим способом / Ю.Н. Раскаткин, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2012». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2012. – С. 46–49.

79. Раскаткин, Ю.Н. Односторонний линейно-угловой способ определения крена высоких сооружений с помощью электронного тахеометра / Ю.Н. Раскаткин, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2013». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2013. – С. 58–66.

80. Раскаткин, Ю.Н. О косвенных способах определения радиуса сооружений круглой формы и некоторые результаты их моделирования / Ю.Н. Раскаткин, Г.А. Шеховцов, // Материалы междунар. науч.-практ. конф. Научное и образовательное пространство: перспективы развития. Чебоксары, 29 нояб. – 2015 г. ЦНС «Интерактив плюс», 2015. – С. 193-204.

81. Раскаткин, Ю.Н. О методике и результатах калибровки фотокамер с целью измерения расстояний / Ю.Н. Раскаткин, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Геодезия и картография. – 2016. – №2. – С. 46-53.

82. Раскаткина, О.В. Калибровка цифровой камеры по вертикальному базису с целью измерения расстояний / О.В. Раскаткина, Г.А. Шеховцов // Материалы VII междунар. науч.-практ. конф. Приоритетные направления развития науки и образования. Чебоксары, 04 дек. – 2015 г. ЦНС «Интерактив плюс», 2015. – № 4 (7). – С. 216-222.

83. Раскаткина, О. В. Результаты моделирования координатного способа определения центра и радиуса сечений сооружений круглой формы / О.В. Раскаткина, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, // Материалы VII междунар. науч.-практ. конф: Научные исследования: от теории к практике. Чебоксары, 13 март. – 2016 г. – № 1 (7). – С. 179-187.

84. Раскаткина, О.В. Современные методы определения параметров пространственного положения и формы строительных конструкций / О.В. Раскаткина, Ю.Н. Раскаткин // Материалы междунар. науч.-практ. конф: Наука и образование: векторы развития. Чебоксары, – 2016 г. – С. 179-187.

85. Раскаткина, О.В. О фотографическом способе нивелирования строительных конструкций / О. В. Раскаткина, Г. А. Шеховцов,

Р.П. Шеховцова, А. М. Анущенко // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, –2016, –№ 3, – С. 24-32.

86. Раскаткина, О.В. Варианты оптимизации прямой угловой засечки при определении крена сооружений башенного типа / О.В. Раскаткина // Сб. статей по материалам LXI междунар. науч.-практ. конф: Технические науки: от теории к практике. Новосибирск, август 2016 г. – № 8 (56). – С. 117-133.

87. Раскаткина, О.В. Методические и классификационные аспекты контроля пространственного положения сооружений башенного типа / О.В. Раскаткина // Третья междунар. науч.-практ. конф «Фундаментальные и прикладные исследования: новое слово в науке», г. Москва, 16 мая 2016 г. сб. науч. докл. – С. 58-77.

88. Раскаткина, О.В. Об определении положения и радиуса сечений сооружений круглой формы координатным способом / О.В. Раскаткина // Сб. трудов аспирантов, магистрантов и соискателей. Том 2. / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н.Новгород, – 2016, – С. 207-213.

89. Раскаткина, О.В. Об оптимизации фотографического способа контроля вертикальности промышленных дымовых труб / О.В. Раскаткина // Третья междунар. науч.-практ. конф «Фундаментальные и прикладные исследования: новое слово в науке», г. Москва, 16 мая 2016 г. сб. науч. докл. – С. 78-91.

90. Раскаткина, О.В. Варианты использования лазерно-зеркального устройства при экспертизе промышленной безопасности производственных объектов / О.В. Раскаткина, Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Интеграционные процессы в науке в современных условиях. Материалы международной научно-практической конференции. – Прага 24.03.16. Vydavatel « Osvicen i», Нефтекамск. РИО НИЦ « Мир науки », 2016. –Т. 2. – С. 40-52.

91. Раскаткина, О.В. О классификации способов определения ширины колеи мостовых кранов / О.В. Раскаткина, Ю.Н. Раскаткин // Тезисы докл. Науч.-пром. Форум «Великие реки –2016». – Н.Новгород: ННГАСУ,– 2016, – С. 105.

92. Раскаткина, О.В. Влияние местоположения отвеса на точность определения крена дымовой трубы фотографическим способом / О.В. Раскаткина // Геодезия и картография. – 2017. – №. 1. – С. 55-59.

93. Раскаткина, О.В. Теоретические основы фотографического способа мониторинга крена высоких сооружений башенного типа / О.В. Раскаткина // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ,–2017, –№ 2 , – С.53-62.

94. Руководство по определению кренов инженерных сооружений башенного типа геодезическими методами / Центр. н.-и. проект.-эксперим. ин-т организации, механизации и техн. помощи стр-ву Госстроя СССР. – М.: Стройиздат, – 1981. – 56 с.

95. Русков, А.М. Способы определения радиусов сооружения башенного типа / А.М. Русков, И.Ф. Болгов // Геодезические методы контроля в стр-ве. Куйбышев, – 1970. – С. 82–86.

96. Русков А.М. Приборы для измерения угла отклонения от вертикали / А. М. Русков // Промышленное и гражданское стр-во. – 1994. – № 2. – С. 19-20.

97. ПБ 03-246-98. Правила проведения экспертизы промышленной безопасности. Госгортехнадзор России. НТЦ «Промышленная безопасность». –М., 1999. –16 с.

98. РД 11-126-96. Методические рекомендации по организации и осуществлению контроля за обеспечением безопасной эксплуатации зданий и сооружений на подконтрольных металлургических и коксохимических производствах. Безопасность труда в промышленности. –М., –1997, –№5. С.45–49.

99. РД-22-01-97. Требования к проведению оценки безопасности эксплуатации производственных зданий и сооружений поднадзорных промышленных производств и объектов (обследование строительных конструкций специализированными организациями). ЦНИИПРОЕКТ-СТАЛЬКОНСТРУКЦИЯ им. Мельникова. –М., –1997. –23 с.

100. Сафронов, В.В. Выбор оптимального способа определения крена сооружений башенного типа / В.В. Сафронов // Геодезические методы контроля качества стр-ва. – Куйбышев, 1987. – С. 94-98.

101. Свистунов, М.К. К вопросу определения крена высоких сооружений башенного типа на застроенной территории / М.К. Свистунов, Н.В.Ростовцев // Геодезия и фотограмметрия в горном деле. – Свердловск, 1979. – № 6. – С. 78-83.

102. Свод правил СП 13-101-99 Правила надзора, обследования, проведения технического обслуживания и ремонта промышленных дымовых и вентиляционных труб. М: Госстрой России. 1999. – 22 с.

103. Сердюков, В.М. Фотограмметрия в инженерно-строительном деле / В.М. Сердюков //– М., Недра. – 1970. – 136 с.

104. Середович, В. А. Определение крена и деформаций дымовых труб средствами наземного лазерного сканирования / В. А. Середович, А. В. Иванов, А. В. Середович, А. В. Усиков // Сборник материалов 6 Международного научного конгресса, Новосибирск, 19–29 апр., 2010. Т. 1. Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия. Ч. 3. – Новосибирск, 2010. – С. 75–78.

105. Сказкин, И.И. Влияние ошибок базиса на определение величины крена сооружений башенного типа прямой угловой засечкой / И.И. Сказкин, В. Я. Шипулин // Известия ВУЗов. Строительство. – 1996. – № 4. – С. 117-118.

106. Соловей, П.И. Анализ допустимости рабочей формулы при определении крена с двух взаимно перпендикулярных направлений / П.И. Со-

ловей // Геодезические методы контроля качества стр-ва. – Куйбышев, 1987. – С. 113-118.

107. Соустин, В.Н. О методах определения радиуса и координат центра сооружений, имеющих в плане форму круга / В.Н. Соустин // Геодезия и картография. – 1970. – № 12. – С. 40 – 43.

108. Староверов, В.С. Обоснование мест наблюдений отклонений от вертикали сооружений башенного типа / В.С. Староверов, А.И. Егоров, С.И. Гордышев // Проблемы внедрения новой техники и технологий в топографо-геодезическое производство. Всесоюзное астрономо-геодезическое общество при АН СССР. – М., 1990. – С. 52-55.

109. Староверов, В. С. Обоснование выбора мест и расчет точности наблюдений за деформациями инженерных сооружений (на примере сооружений башенного типа) / В.С. Староверов, А.И. Егоров // Инженерная геодезия. – 1991. – № 34. – С. 87-91.

110. Стебнев, В.И. О наблюдениях за кренами дымовых труб Казанской ТЭЦ-1 / В.И. Стебнев // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Казань, 1981. – С. 30-34. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп).

111. Стебнев, В. И. Использование УМК 10/1318 для определения кренов и прогибов высотных сооружений башенного типа / В.И. Стебнев // Труды Казанской гор. астрон. обсерв. – 1989. – № 52. – С. 133-139.

112. Столбов, И.А. Об определении кренов сооружений / И.А. Столбов // Геодезия и картография. – 1988. – № 3. – С. 35 – 36.

113. Стукальский, В.П. Определение крена инженерных сооружений башенного типа с одного опорного пункта / В.П. Стукальский, С.Г. Радов, В.Г. Ларченко // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Коммунарск, 1981. – С. 35 – 45. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп).

114. Таск, Э.А. Об определении кренов сооружений геодезическими методами / Э.А. Таск // Геодезия и картография. – 1969. – №1. – С. 33 – 36.

115. Уставич, Г.А. О применении телевидения для наблюдений за деформациями сооружений / Г.А. Уставич // Геодезия и картография. – 1984. – № 7.–С. 18 – 23.

116. Уставич, Г. А. Определение крена сооружений башенного типа GPS-приемниками и тахеометрами / Г.А. Уставич // Геодезия и картография. – 2003. – № 9. – С. 15 – 18.

117. Уставич, Г.А. О применении неметрических цифровых камер для инженерно-геодезических измерений / Г.А. Уставич, Я.Г. Пошивайло // Геодезия и картография. – 2005. – №8. – С. 19–24.

118. Харитонов, Б.П. О точности определения кренов сооружений башенного типа способом горизонтальных направлений / Б.П. Харитонов, И.В. Лесных // Межвузовский сборник научных трудов Новосибирского ин-та

инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. – 1979. – 7/47. – С. 93-98.

119. Хасаев, Н.О. Учет влияния температурных деформаций при геодезическом обеспечении строительства и эксплуатации высотных сооружений башенного типа / Н.О. Хасаев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1988. – № 5. – С. 39-44.

120. Цегельник, Н. П. Наблюдения за осадками и кренами дымовых труб большой высоты / Н.П. Цегельник // Геодезические методы определения крена промышленных дымовых труб. – Новочеркасск, 1981. – С. 58-65. (Рукопись деп. в ЦНИИГАиК 1 окт. 1981 г., № 65-81 Деп)

121. Шеховцов, Г.А. Ступенчатый способ вертикального проектирования / Г.А. Шеховцов // Промышленное строительство. –1974, –№ 1. – С. 43–44.

122. Шеховцов, Г. А. Выбор способа вертикального проектирования / Г.А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. –1975, вып. 21. – С. 74–76.

123. Шеховцов, Г.А. О точности геодезических наблюдений за деформациями сооружений / Г.А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. –1975, вып. 22. – С. 88–93;

124. Шеховцов, Г.А. О необходимой точности геодезических наблюдений за деформациями сооружений / Г.А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1976. –№ 1. – С. 25–30.

125. Шеховцов, Г.А. Об оценке точности определения крена высоких сооружений / Г. А. Шеховцов, Б. А. Ильин // Промышленное строительство. –1983, –№ 2.– С. 27–28.

126. Шеховцов, Г.А. Оценка точности положения геодезических пунктов: монография / Г.А. Шеховцов //– М.: Недра, 1992. – 255 с.

127. Шеховцов, Г.А. Методические указания по производству специальных геодезических работ на промышленном предприятии / Г.А. Шеховцов // Н.Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный ун-т. –2002. – 36 с.

128. Шеховцов, Г.А. О непосредственных и дистанционных определениях геометрических параметров пространственного положения строительных конструкций / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Д.А. Евсеев // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. –2007. –№ 3. – С. 70–76.

129. Шеховцов Г. А. Теоретические основы определения крена и скручивания сооружений башенного типа треугольной формы / Г. А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, В. Н. Мамонов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2008. – № 3. – С. 39– 46.

130. Шеховцов Г. А. Влияние нестворности теодолита на ошибку определения крена сооружения башенного типа треугольной формы / Г. А. Шеховцов, В. Н. Мамонов // «Промышленная безопасность-2008». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, –2008. – С. 76–82.

131.103. Шеховцов, Г. А. Способы контроля пространственного положения сооружений башенного типа треугольной формы: монография / Г.А. Шеховцов, В. Н. Мамонов // Н. Новгород, Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2008. – 52 с.

132. Шеховцов, Г.А. О сокращенном способе контроля вертикальности телерадиобашен треугольной формы / Г. А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, В. Н. Мамонов // «Промышленная безопасность-2008». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2008. – С. 69–75.

133. Шеховцов, Г. А. Современные геодезические методы определения деформаций инженерных сооружений: монография / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова.– Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2009, –156 с.

134. Шеховцов, Г.А. Способы определения крена высоких сооружений башенного типа электронным тахеометром / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2010». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2010. – С. 118–126.

135. Шеховцов, Г. А. Контроль пространственного положения сооружений башенного типа треугольной формы с помощью приборов вертикального проектирования / Г.А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, В.Н. Мамонов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, –2010, –№ 4. с. 29–32.

136. Шеховцов, Г.А. Определение радиуса сооружений круглой формы электронным тахеометром / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2011». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2011. – С. 39–41.

137. Шеховцов, Г. А. Перспективы использования фотографического способа определения пространственного положения строительных конструкций инженерных сооружений / Г.А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин // «Промышленная безопасность-2012». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2012. – С. 35–38.

138. Шеховцов, Г.А. Теоретические основы одностороннего координатного способа определения крена сооружений башенного типа / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. –2012. – № 5. – С. 30–31.

139. Шеховцов, Г. А. Односторонний координатный способ определения крена высоких сооружений башенного типа круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин, // Приволжский научный журнал. Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2012, – № 4, – С. 172–178.

140. Шеховцов, Г.А. Теоретические основы одностороннего координатного способа определения крена сооружений башенного типа / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 5. – С. 30–31.



141. Шеховцов, Г. А. О точности определения радиуса сооружений круглой формы линейно – угловым способом / Г. А. Шеховцов, Ю.Н. Раскаткин // «Промышленная безопасность-2013». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2013. – С.54–57.

142. Шеховцов, Г.А. Геодезические работы при экспертизе промышленной безопасности зданий и сооружений: монография / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т. 2-е изд., перераб. и доп. – 2014, – 176 с.

143. Шеховцов, Г. А. Современные геодезические методы определения деформаций инженерных сооружений: монография / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2014, –255 с.

144. Шеховцов, Г.А. Новые способы формирования и использования вертикальных референтных прямых / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. –2014. – № 6. –С. 22-27.

145. Шеховцов, Г.А. Косвенные способы определения радиуса сооружений круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2010». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2014. – С. 26–36.

146. Шеховцов, Г. А. Результаты моделирования косвенных способов определения радиуса сооружений круглой формы / Г. А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова // «Промышленная безопасность-2010». Сб. статей. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2014. – С. 37–46.

147. Шеховцов, Г.А. Новые способы определения радиуса сооружений круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин, // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2015, – № 1, – С. 131-137.

148. Шеховцов, Г. А. Теоретические основы одностороннего линейно-углового способа определения крена сооружений башенного типа круглой формы и результаты его моделирования / Г. А. Шеховцов, Ю. Н. Раскаткин // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2014. – № 2. – С. 134–140.

149. Шеховцов Г.А. О точности определения крена сооружений башенного типа треугольной формы способом малых углов / Г. А. Шеховцов, В. Н. Мамонов // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2014, – № 3. – С.157–165.

150. Шеховцов, Г.А. Определение положения и радиуса сечений сооружений башенного типа круглой формы односторонним координатным способом / Г.А. Шеховцов, Ю.Н. Раскаткин, М.М. Шульц // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. –2015, – № 3. – С. 26-31.

151. Шеховцов, Г.А. Теоретические основы фотографического способа определения радиуса сооружений круглой формы / Г. А Шеховцов,

Р.П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, –2015, – № 3, – С. 198-205.

152. Шеховцов, Г.А. Калибровка цифровой фотокамеры с целью измерения расстояний / Г. А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, Е. В. Попов, Ю. Н. Раскаткин // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2015. – № 4. – С. 131-140.

153. Шеховцов, Г.А. Теоретические основы применения цифровых фотокамер для контроля пространственного положения строительных конструкций / Г. А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, Д. П. Ивенин, О.В. Раскаткина // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, –2016, – № 2, – С. 41-49.

154. Шеховцов, Г. А. Двухэтапный фотографический способ определения крена сооружений башенного типа / Г. А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Д.П. Ивенин, О.В. Раскаткина // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, –2016, –№ 4, – С. 14-20.

155. Шеховцов, Г.А. Линейный способ определения радиуса сооружений круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, О.В. Раскаткина // Геодезия и картография. – 2016. – № 11. – С. 11-15.

156. Шеховцов, Г.А. Единый алгоритм уравнивания, оценки точности и оптимизации геодезических засечек: монография / Г.А. Шеховцов.– Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т,– 2017.–123 с.

157. Шеховцов, Г.А. Контроль пространственного положения и формы строительных конструкций с помощью неметрических цифровых камер: монография / Г.А. Шеховцов, О.В. Раскаткина.– Н.Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т, – 2017. –118 с.

158. Шеховцов, Г.А. Варианты создания плановой разбивочной сети на монтажном горизонте при строительстве зданий повышенной этажности/ Г.А. Шеховцов // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2017. – № 4. – С. 23–30.

159. Шеховцов, Г.А. Применение азимутальной засечки при определении крена башенных сооружений круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, О.В. Раскаткина // Геодезия и картография. – 2017. – № 9. – С. 8–13.

160. Шеховцова, Р.П. Перспективы использования наземных лазерных сканеров в инженерно-геодезическом производстве / Р.П. Шеховцова, К.В. Перфильев // Тезисы докл. науч.-пром. форум «Великие реки – 2012». Т. 1. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2012. – С. 166–169.

161. Шпурре, Э.Ф. Геодезические способы определения наклона фабрично-заводских труб / Э.Ф. Шпурре // Учёные записки Бийского института // 1958, № 3. – С. 19-23.

162. Ямбаев, Х.К. О возможности использования спутниковых GPS/ГЛОНАСС измерений для контроля вертикальности при возведении высотных сооружений / Х. К. Ямбаев, В. И. Крылов // Изв. вузов. Геод. и аэрофотосъемка. – 2009. – № 4. – С. 36–40.

163. Baran Piotr, Grala Mirosław. Wyznaczenie wychulen budowli metoda wciec katowych // "Prz. geod." – 1980, 52, № 12. – C. 419–420.
164. Bruckner R., Mordek P., Lichtner W. Graphische Darstellung einer zweidimensionalen Leit reih // "Z. Vermessugsw." – 1979, 104, № 10. – C. 442–447.
165. Bujakiewicz A., Majde A., Prządka Z. Photogrammetric measurement of deformations of the industrial halls. "Int. Arch. Photogr. and Remote Sensing. Vol. 25. 15 Congr. Int. Soc. Photogramm. and Remote Sens., Rio de Janeiro, 1984. Pt A 5. Commiss. 5". S. 1., s. A., 136–140.
166. Fabiankowitsch Johannes, Kahmen Heribert, Matt Phillip. Evaluation of vibrational spectrum Of high slim towers with wind electrical turbines // VGI: Osterr. Z. Vermess. und Geoinf. – 2003. 91, № 1. – C. 77–84.
167. Grafarend E. Helmertsche Fusspunktcurve odor Mohrsher Kreis? // Allgemeine Vermessung-Nachrichten. – 1969. – 76. – № 6. – S. 239–250.
168. Homorodi L. A hibsellipszis es a ponthiba // Geodezia es Kartografia. – Budapest. – 1956. – № 4. – S. 321–325.
169. Köhr Julius. Über mittlere Punktfehler // Zeitschrift für Vermessungswesen. – 1969. – 94. – № 11. – S. 445–455.
170. Meixner Heinz Geodezujne pomiaru deformacji. "Prz. gorn.", – 1980, 36, –№ 11, 540–544, LXII, LXIII, LXIV, LXV.
171. Miller Z. Zastosowanie fotogrametrii do celow inzynierskich. "Prz. bud.", –1987, 59, – № 5, 200–203, 231–232.
172. Міщенко, Н.О. Визначення крену високих споруд зумовленого впливом однобічного сонячного нагрівання / Н.О. Міщенко // Инженерная геодезия. – 1993. – № 36. – 82 – 84.
173. Schaefer W. Photogrammetrische Beobachtung von Bauwerksverformungen. "Markscheidewesen", – 1985, 92, – № 4, 148–151.
174. Steuerung des Gleitprozessen beim Bau eines 160-m-Schornsteins unter Berücksichtigung der thermischen Deformation // "Vermessungstechnik" – 1985, 33, № 5. C. 168–170.
175. Schwarz Willfried Moderne Messverfahren in der Ingenieurgeodasie und ihr praktischer Einsatz.. Flächenmanag. Und Bodenordn. – 2002. 64, – № 2, 87– 97.
176. Tarczu-Hornoch A. Über den günstigsten Schnittwinkel und über die Genauigkeitsmasse beim einfachen Vorwärtseinschnitt // Acta geodaetica, geophysica et montanistica. Academiae sceintiarum hungaricae. – 1969. – 4. – № 3–4. – S. 455–467.
177. Zalanffy Laszlo. Ipari Kemenyek Es tornyok bemerese // Geod. es kartogr. – 1991. 43, № 2. – C. 80–85.
178. Wimmer H. Ein Beitrag zur Gewichtsoptimierung gtodatischer Netze // Veröff. Dtsch. Geod. Kommiss. Bauer. Akad. Wiss. – 1981. – № 269. – 114 s.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>Введение</b> .....	3
<b>Глава 1. Многосторонние способы определения крена</b> .....	8
1.1. Способ нивелирования .....	8
1.2. Способ вертикального проектирования.....	18
1.3. Линейный способ определения крена .....	25
1.3.1. Линейный способ определения радиуса .....	26
1.3.2. Линейно-угловой способ определения радиуса .....	35
1.3.3. Фотографический способ определения радиуса .....	40
1.3.4. Координатный способ определения положения центра и радиуса сечения.....	55
1.4. Угловые способы определения крена .....	74
1.4.1. Способ горизонтальных углов .....	74
1.4.2. Способ малых углов .....	76
1.4.3. Способ направлений .....	91
1.4.4. Способ координат (засечек).....	97
1.4.5. Фотографический способ определения крена .....	118
1.4.6. Двухэтапный фотографический способ определения крена ...	131
1.4.7. Фотографический способ мониторинга крена .....	135
1.4.8. Фотографический способ продолженного отвеса .....	141
1.4.9. Фотографический способ определения крена куста труб.....	144
1.4.10. Ступенчатый способ определения крена.....	146
<b>Глава 2. Односторонние способы определения крена</b> .....	150
2.1. Способ направления с одного пункта .....	151
2.2. Односторонний линейно-угловой способ определения крена ...	151
2.3. Односторонний координатный способ определения крена .....	158
2.3.1. Определение крена сооружения круглой формы .....	158
2.3.2. Определение крена сооружения треугольной формы.....	169
2.3.3. Определение крена сооружения четырехугольной формы .....	173
2.3.4. Двухэтапный способ определения крена .....	177
2.3.5. Определения крена способом вертикального проектирования	181
2.3.6. Определение составляющих вектора крена .....	191
<b>Заключение</b> .....	197
<b>Список литературы</b> .....	199

Шеховцов Геннадий Анатольевич

Контроль пространственного положения и формы  
высоких сооружений башенного типа

*Монография*

Подписано в печать      Формат 60x90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.  
Уч. изд. л.12,8. Усл. печ. л.13,4. Тираж 500 экз. Заказ №

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»  
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.  
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65  
<http://www.nngasu.ru>, [srec@nngasu.ru](mailto:srec@nngasu.ru)