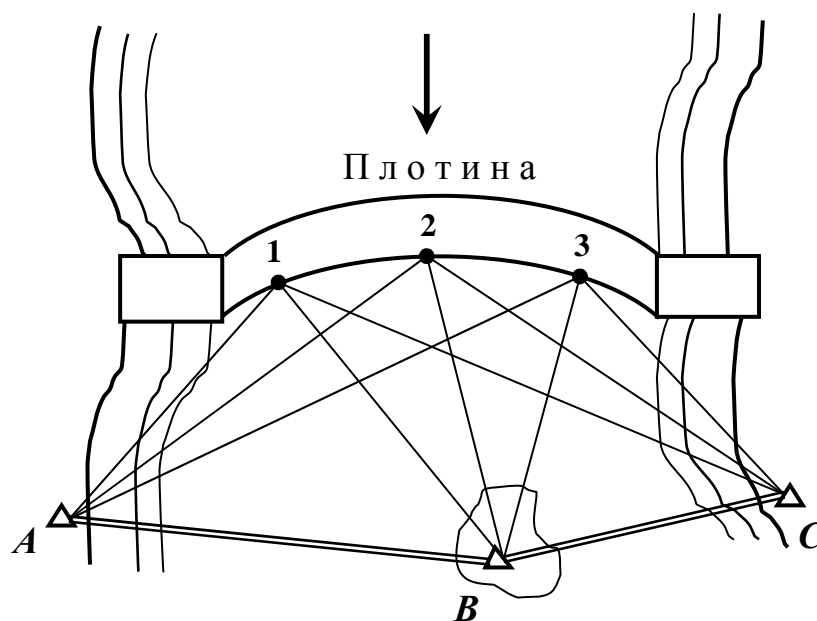


Г. А. Шеховцов

**ЕДИНЫЙ АЛГОРИТМ УРАВНИВАНИЯ,
ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК**

Монография



Нижний Новгород
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет"

Г. А. Шеховцов

Единый алгоритм уравнивания, оценки точности
и оптимизации геодезических засечек

Монография

Нижний Новгород
ННГАСУ
2017

ББК 26.1
Ш 54
УДК 528.42:518.5

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Мазуркин П. М. – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой природообустройства
Поволжского государственного технологического университета
Раскаткин Ю. Н. – канд. техн. наук, зам. директора ООО «Алгоритм»

Шеховцов Г.А. Единый алгоритм уравнивания, оценки точности и оптимизации геодезических засечек [Текст]: монография / Г.А. Шеховцов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ, 2017. –123 с.: ил. ISBN 978-5-528-00230-9

Даётся понятие о геометрической интерпретации ошибки положения точки на плоскости и в трёхмерном пространстве с использованием градиентов, линий крайних положений, квадратических полигонов, абсолютных и относительных окружностей средних квадратических ошибок. Рассмотрены теоретические основы и приведены примеры использования единого алгоритма уравнивания, оценки точности и оптимизации угловых, линейных и линейно-угловых геодезических засечек.

Книга рассчитана на работников геодезического производства и будет полезна как специалистам, выполняющим работы по наблюдению за деформациями и смещениями инженерных сооружений, так и студентам технических вузов.

Табл. 46, ил. 46, библиограф. назв. 114.

ББК 26.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

При строительстве и эксплуатации инженерных сооружений геодезические засечки являются наиболее распространённым методом определения положения точек в двумерном или трёхмерном пространстве. При этом необходимую информацию получают в процессе различных геодезических измерений, среди которых широкое распространение получили угловые, линейные, полярные, комбинированные, линейно-угловые и другие виды засечек, которые подразделяются на простые (однократные) и многократные. Простые засечки содержат только необходимые измерения. Многократные засечки представляют собой либо совокупность однократных засечек, либо содержат избыточные измерения, что в обоих случаях предусматривает уравнивательные вычисления. Исследованию и оценке точности засечек посвящено большое количество работ, результаты которых обладают различной, как правило, незначительной семантометрической информацией.

Под семантометрической информацией будем понимать значение (смысл) результатов обработки полученной информации и выдачи этих результатов в цифровой, графической или иной форме в метрической или другой системе единиц.

Известны различные формулы решения и оценки точности засечек: Делабра, Гаусса, Ансермета, Пранис-Праневича, приведенным в работе [5], Закирова [16], Капетановича [18], Хаймова [48], Ключина [20], Кнейсля [31, стр. 567], «вспомогательных символов» Хаусбрандта (Геодезия и картография, 1956, №10) и др. По этим формулам можно вычислить только средние квадратические ошибки (СКО) m_x и m_y определяемого пункта по осям координат и радиальную ошибку $M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$.

Наиболее полной оценкой точности положения точки на плоскости или в трёхмерном пространстве считаются ковариационные матрицы ошибок координат этой точки (1):

$$K_{XY} = \begin{pmatrix} m_x^2 & m_x m_y r_{XY} \\ m_x m_y r_{XY} & m_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x^2 & m_{XY} \\ m_{XY} & m_y^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$K_{XYZ} = \begin{pmatrix} m_x^2 & m_x m_y r_{XY} & m_x m_z r_{XZ} \\ m_x m_y r_{XY} & m_y^2 & m_y m_z r_{YZ} \\ m_x m_z r_{XZ} & m_y m_z r_{YZ} & m_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x^2 & m_{XY} & m_{XZ} \\ m_{XY} & m_y^2 & m_{YZ} \\ m_{XZ} & m_{YZ} & m_z^2 \end{pmatrix},$$

где m_x, m_y, m_z – СКО пункта по осям координат, коэффициенты корреляции между которыми r_{XY}, r_{XZ}, r_{YZ} ; m_{XY}, m_{XZ}, m_{YZ} – кофакторы (корреляционные моменты).

Однако сама по себе такая матрица является лишь средством хранения в цифровой форме данных, которые служат источником получения некоторых скалярных оценок. Такая форма представления точности положения геодезических пунктов недостаточно наглядна.

Развитие графических способов математической обработки геодезических построений, переводящих информацию ЭВМ на язык геометрических образов, всегда являлось актуальной задачей. Убедительным доказательством обусловленности этого процесса служат принадлежащие А. И. Мазмишвили (1957) слова: «... мера точности уравновешенных величин в любой форме имеет определённое геометрическое содержание». В связи с этим графическое решение задачи должно геометрически интерпретировать процесс математической обработки с целью получения наглядной формы сопровождения вычислительных операций и математических доказательств или иллюстрации получаемых результатов. Такое сочетание аналитических расчётов с их графическими образами служит надёжным звеном, связывающим две важнейшие черты математики – абстрактность и приложимость. Причём теоретические разработки должны базироваться на общей теории, которая, как отмечает М.М. Машимов, «... позволяет по одной и той же методике обосновывать математическую модель каждой частной задачи».

Одним из перспективных путей решения поставленной задачи было и остаётся использование градиентов и линий положения. Об этом впервые было доложено В. В. Каврайским в 1921 г. на 2-м Всероссийском маркшейдерском съезде и опубликовано в работе [17]. В дальнейшем теоретические вопросы и приложения градиентов и линий положения в геодезии нашли своё отражение в работах Н.Г. Келля [19], Ю.А. Гордеева [14], А. И. Мазмишвили [27], Ф. Ф. Павлова [35], О. С. Разумова [38], А. И. Кобылина [23], К. А. Проворова [37], Г. Е. Сомова [42], S. A. Veress [112] и целом ряде других работ. В нашей работе [69] показано новое положительное свойство инверсионной фигуры, которую формируют градиенты направлений, углов и расстояний геодезического построения. Она является наглядной формой сопровождения процесса составления матрицы A коэффициентов исходных уравнений ошибок.

Следует сказать, что практически все скалярные оценки точности положения точки представляют собой радиусы-векторы, площади и другие характеристики различных геометрических фигур. Среди таких фигур, как простой круг, круг Моора [85], эллипс ошибок, подера эллипса и др., наибольшей семантометрической информацией обладает предложенная нами [59] окружность СКО с внешним или внутренним эксцентриситетом (иначе – окружность стандартов).

Некоторые семантические особенности такой окружности для простых (однократных) засечек, построенной с помощью вспомогательных исходных элементов, приведены в работах [56, 63]. Так, с помощью ок-

ружности стандартов можно продемонстрировать: геометрический смысл элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях ковариационной матрицы; СКО точки одновременно по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям и коэффициент корреляции между ними; собственные значения ковариационной матрицы; число обусловленности матрицы, её след, определитель, кофактор. Кроме того, окружность стандартов даёт наглядные доказательства: неравенства Коши-Буняковского; подобия матриц; инвариантности определителя относительно осей координат; корреляционной независимости полуосей эллипса ошибок [69]; наглядно представить m -, l -, k -, M -нормы матрицы и показать их связь с характеристиками точности положения пункта по Ф. Гельмерту, Р. Веркмейстеру, К. Фридриху и с условиями A -, D -, E -, J -оптимизации геодезических построений и др.

Предлагаемые читателю теоретические основы единого алгоритма оценки точности любых геодезических засечек заключаются в определении периметра квадратического полигона, замыкающей такого полигона и её ориентировки относительно координатных осей. В результате можно, во-первых, определить как полуоси эллипса ошибок и его ориентировку, так и радиус и эксцентриситет абсолютной окружности СКО, характеризующей точность положения отдельного пункта сети. Во-вторых, можно найти практически любые известные в геодезии на данный момент скалярные оценки точности геодезических засечек с любой комбинацией угловых и линейных равноточных или неравноточных измерений, производя одновременно геометрическую интерпретацию как вычислительных операций, так и получаемых результатов. Наконец, можно определить угловые и линейные параметры относительной окружности СКО, характеризующей точность взаимного расположения в двумерном или трёхмерном пространстве любых двух пунктов сети.

Показано, как модуль и ориентировка замыкающей квадратического полигона дают однозначное решение по определению параметров дополнительных угловых, линейных или линейно-угловых измерений, приводящих к изотропному по точности положению определяемого пункта, чем обеспечивается E -оптимизация засечек.

Описана методика уравнивания локальных геодезических построений способом весового среднего. Его сущность заключается в том, что, например, многократная засечка рассматривается как совокупность однократных, из всех возможных комбинаций которых (из всех частных решений) вычисляются координаты определяемого пункта и находят их арифметическую среднюю с учётом весов частных решений. Для правильного определения весов предлагается использовать свойства окружности СКО.

Рассмотрены вычисление параметров относительных окружностей СКО и оценка точности многократных геодезических засечек с учётом

ошибок исходных данных путём квадратического сложения геометрических критериев оценки точности.

Разделы книги иллюстрируются числовыми примерами.

Упомянутый в книге богатый ретроспективный материал призван, во-первых, акцентировать внимание на авторстве теоретических разработок и, во-вторых, помочь в ориентировании исследователей в широком спектре отечественных и зарубежных публикаций по данной теме. С целью освобождения читателя от поиска работ, часть из которых стала библиографической редкостью, в монографию включена глава, содержащая основные сведения о градиентах, линиях крайних положений, квадратическом полигоне и окружности СКО. Кроме того, приведены некоторые сведения из теории математической обработки геодезических измерений для того, чтобы читателю, даже не имеющему специальной теоретической подготовки в этой области, облегчить практическое использование методик, приведенных в данной работе.

Глава 1. ПОНЯТИЕ О ГРАДИЕНТАХ, ЛИНИЯХ КРАЙНИХ ПОЛОЖЕНИЙ, КВАДРАТИЧЕСКОМ ПОЛИГОНЕ И ОКРУЖНОСТИ СКО

1.1. Градиенты измеренных величин

Обстоятельный анализ работ, посвящённых градиентам и линиям положения в геодезии, выполнен Г. Е. Сомовым [42] с детальным изложением соответствующих теоретических предпосылок. Опуская эти предпосылки, остановимся лишь на формулировках используемых в дальнейшем понятий и их геометрической интерпретации.

Под модулем градиента (в дальнейшем просто градиент) понимается вектор определённой длины, показывающий направление наискорейшего изменения некоторой величины. К таким величинам относятся измеренные горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \beta_2', \beta_3$, направления $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, углы между направлениями β_4, β_5 , измеренные по схеме на рис. 1, *а* или рис. 1, *б* и расстояния S_1, S_2, S_3 .

Градиенты q_1, q_2, q_2', q_3 , горизонтальных углов $\beta_1, \beta_2, \beta_2', \beta_3$ и направлений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вычисляются по формулам:

$$q_1 = \frac{\rho}{S_1}, \quad q_2 = q_2' = \frac{\rho}{S_2}, \quad q_3 = \frac{\rho}{S_3}, \quad (2)$$

где $\rho = 206265''$, а размерность S зависит от конкретных условий задачи.

При измерении углов и направлений градиенты будут перпендикулярны этим направлениям. Чтобы не вычерчивать дополнительно направление векторов градиентов, условились их поворачивать по ходу часовой стрелки на 90° так, чтобы они совпали с направлением сторон Т-1, Т-2, Т-3, как это показано на рис. 2.

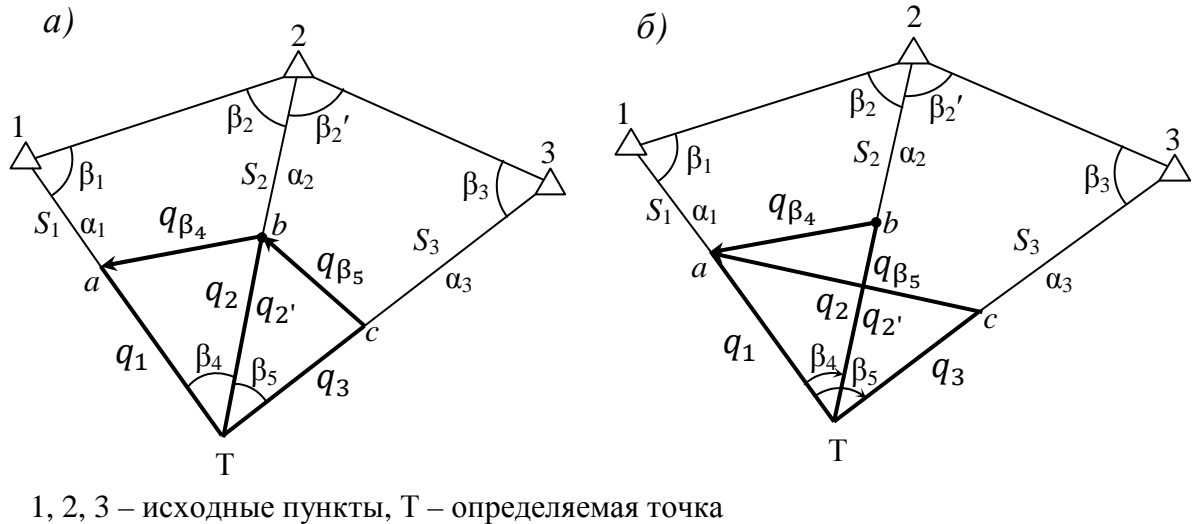


Рис. 1. Схемы к определению понятия градиентов

Наглядное представление о градиентах q_{β_4} и q_{β_5} углов β_4 и β_5 (рис. 1, а, б) можно получить, если на сторонах этих углов отложить градиенты направлений q_1, q_2, q_2', q_3 и полученные точки a, b и c соединить как показано на рис. 1 и 2. Отрезок ab будет равен градиенту q_{β_4} с дирекционным углом α'_4 , а отрезок bc или ac будет равен градиенту q_{β_5} с дирекционным углом α'_5 .

В результате таких построений получают так называемую инверсионную фигуру Т-а-б-с. Указанное правило справедливо, если при построении инверсионной фигуры градиенты направлений откладывают в сторону исходных пунктов. Если градиенты направлений откладывают на продолжении сторон измеряемого угла, как это делается в работе [24], то его градиент будет направлен от того направления, от которого этот угол измеряется. В обоих случаях должны получить один и тот же дирекционный угол этого градиента.

Значения перечисленных градиентов и их дирекционные углы можно определить графически. Причём при вставке одиночного пункта Т в качестве дирекционных углов могут фигурировать их прямые или обратные значения. Это не оказывает влияния в дальнейшем на правильность построения квадратичского полигона и оценки точности засечки. Однако это недопустимо при совместной вставке нескольких пунктов, поскольку от значений дирекционных углов градиентов будут зависеть знаки коэффициентов исходных уравнений ошибок и, следовательно, знаки внедиагональ-

ных компонентов матрицы N коэффициентов системы нормальных уравнений. Например, в работе [6, стр. 156] и в работе [30, стр. 98] знаки перед одними и теми же коэффициентами исходных уравнений ошибок различны.

При совместной вставке нескольких пунктов будем придерживаться следующих правил:

1. Для измеренных углов β_1 и β_2' (правые по отношению к сторонам 1-2 и 2-3) дирекционные углы градиентов направлений q_1 и q_2' будут $\alpha_{1-Т}$ и $\alpha_{2-Т}$. Для измеренных углов β_2 и β_3 (левые по отношению к сторонам 2-1 и 3-2) дирекционные углы градиентов направлений q_2 и q_3 будут $\alpha_{Т-2}$ и $\alpha_{Т-3}$.

2. Для измеренных углов β_4 и β_5 направление градиента q_{β_4} и q_{β_5} принимают в сторону того направления, от которого этот угол измеряется, то есть α_{b-a} и α_{c-b} (рис. 1, а) или α_{b-a} и α_{c-a} (рис. 1, б).

3. Если измерены непосредственно дирекционные углы α_1 , α_2 и α_3 , то дирекционные углы градиентов направлений q_1 , q_2 и q_3 будут $\alpha_{1-Т}$, $\alpha_{2-Т}$ и $\alpha_{3-Т}$.

4. Дирекционные углы градиентов непосредственно измеренных длин сторон равны $\alpha_{1-Т}$, $\alpha_{2-Т}$ и $\alpha_{3-Т}$.

Градиенты q_{β} и их дирекционные углы α' можно также вычислить по известным формулам. Так, в соответствии с рис. 1, а имеем:

$$q_{\beta_4} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2\cos\beta_4} = \rho \frac{S_{1-2}}{S_1S_2}, \quad (3)$$

$$q_{\beta_5} = \sqrt{q_2'^2 + q_3^2 - 2q_2'q_3\cos\beta_5} = \rho \frac{S_{2-3}}{S_2S_3},$$

где S_{1-2} , S_{2-3} – расстояния между исходными пунктами 1 и 2, 2 и 3, а в случае рис. 1, б в вычислениях q_{β_5} участвует расстояние S_{1-3} .

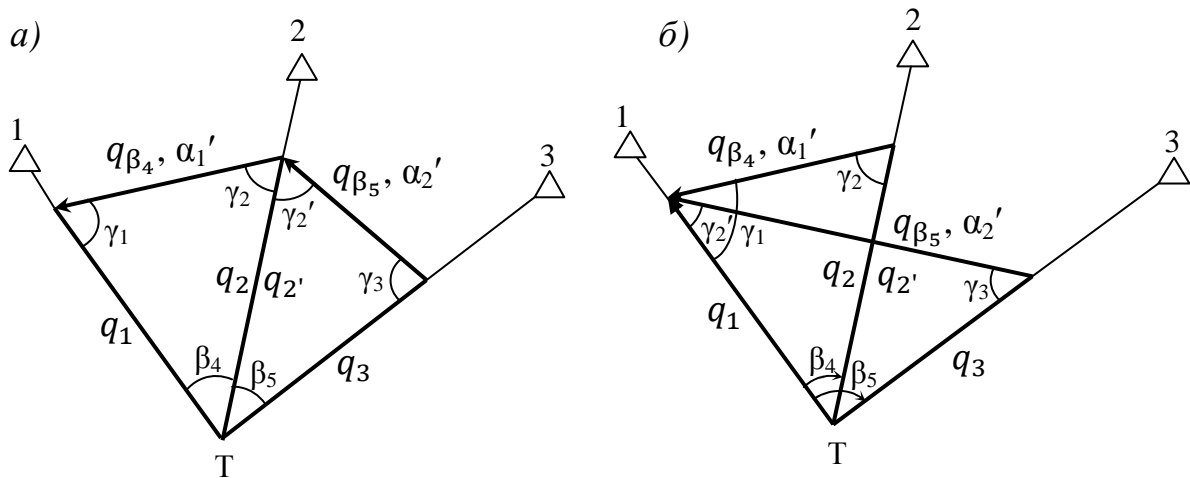


Рис. 2. Схемы к определению градиентов углов и их ориентирования

В соответствии со схемами на рис. 2, а, б дирекционные углы α_1' и α_2' градиентов q_{β_4} и q_{β_5} равны:

$$\begin{aligned}\alpha_1' &= \alpha_{1-T} - \gamma_1 + 180^\circ = \alpha_{2-T} + \gamma_2, & \alpha_2' &= \alpha_{2-T} - \gamma_2' + 180^\circ = \alpha_{3-T} + \gamma_3, \\ \alpha_1' &= \alpha_{1-T} - \gamma_1 + 180^\circ = \alpha_{2-T} + \gamma_2, & \alpha_2' &= \alpha_{1-T} - \gamma_2' + 180^\circ = \alpha_{3-T} + \gamma_3.\end{aligned}\quad (4)$$

Вообще говоря, при определении координат одиночной точки Т, в формулах (4) слагаемое 180° можно опустить, поскольку, как отмечалось выше, не имеет значения какой дирекционный угол (прямой или обратный) будет использоваться в дальнейшем.

В свою очередь, входящие в формулы (4) углы γ могут быть найдены по теореме косинусов. Так, для схемы на рис. 2, а получим:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \arccos \frac{q_1^2 - q_2^2 + q_{\beta_4}^2}{2q_1q_{\beta_4}}, & \gamma_2 &= \arccos \frac{q_2^2 - q_1^2 + q_{\beta_4}^2}{2q_2q_{\beta_4}}, \\ \gamma_{2'} &= \arccos \frac{q_2'^2 - q_3^2 + q_{\beta_5}^2}{2q_2'q_{\beta_5}}, & \gamma_3 &= \arccos \frac{q_3^2 - q_2'^2 + q_{\beta_5}^2}{2q_3q_{\beta_5}}.\end{aligned}\quad (5)$$

Для схемы на рис. 2, б углы γ будут равны:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \arccos \frac{q_1^2 - q_2^2 + q_{\beta_4}^2}{2q_1q_{\beta_4}}, & \gamma_2 &= \arccos \frac{q_2^2 - q_1^2 + q_{\beta_4}^2}{2q_2q_{\beta_4}}, \\ \gamma_{2'} &= \arccos \frac{q_1^2 - q_3^2 + q_{\beta_5}^2}{2q_1q_{\beta_5}}, & \gamma_3 &= \arccos \frac{q_3^2 - q_1^2 + q_{\beta_5}^2}{2q_3q_{\beta_5}}.\end{aligned}\quad (6)$$

В общем виде формулы (3), (4), (5) и (6) могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}q_{\beta} &= \rho \frac{S_{i-(i+1)}}{S_i S_{i+1}}, & \alpha_i' &= \alpha_i - \gamma_i = \alpha_{i+1} + \gamma_{i+1}, \\ \gamma_i &= \arccos \frac{q_i^2 - q_{i+1}^2 + q_{\beta_i}^2}{2q_i q_{\beta_i}}, & \gamma_{i+1} &= \arccos \frac{q_{i+1}^2 - q_i^2 + q_{\beta_i}^2}{2q_{i+1} q_{\beta_i}}.\end{aligned}\quad (7)$$

Что касается градиентов измеренных расстояний, то их величина равняется единице, а направление совпадает с направлением измеряемых линий.

В геодезической литературе инверсионная фигура T - a - b - c (рис. 1) служит лишь в качестве иллюстрации величины и направления градиентов углов и площадей так называемых инверсионных треугольников [24, 35, 37, 42]. Новым положительным свойством этой фигуры будем считать её использование в виде наглядной формы сопровождения процесса формирования матрицы A коэффициентов a и b исходных уравнений ошибок [69], поскольку величина и знак этих коэффициентов зависят от модуля и дирекционного угла градиентов. Отметим, что в технологической цепочке последовательного перехода от матрицы A к матрице коэффициентов системы нормальных уравнений $N = A^T A$, затем к матрице весовых коэффициентов $Q = N^{-1}$ и, наконец, к ковариационной матрице ошибок координат $K_{X,Y} = \mu^2 Q$ формирование исходной матрицы A является наиболее ответственной задачей.

При определении положения одиночной точки T на плоскости матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

в которой количество столбцов равно двум, а количество строк соответствует числу измеренных величин. Так, при линейных измерениях $a_i = \cos \alpha_i$, $b_i = \sin \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а в случае угловых измерений $a_j = -q_j \sin \alpha_j$, $b_j = q_j \cos \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, t$) или $a_k = -q_{\beta_k} \sin \alpha_k$, $b_k = q_{\beta_k} \cos \alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, l$).

При линейно-угловых измерениях вначале необходимо установить веса угловых $p_{\beta,\alpha}$ и линейных p_S измерений. Если принять $p_S = 1$, то все компоненты матрицы A , относящиеся к линейным измерениям, останутся без изменения, а компоненты этой матрицы, относящиеся к угловым измерениям, необходимо умножить на $\sqrt{p_{\beta,\alpha}}$. Если принять $p_{\beta,\alpha} = 1$, тогда умножить на $\sqrt{p_S}$ следует компоненты матрицы A , относящиеся к линейным измерениям. Подробнее о выборе весов сказано в разделе 1.3.

1.2. Линии крайних положений

Под линиями крайних положений определяемой точки будем понимать прямые, перпендикулярные к градиентам и отстоящие от этой точки на расстояниях, зависящих от модулей этих градиентов и от СКО угловых $m_{\beta,\alpha}$ или линейных m_S измерений. Геометрический смысл линий крайних положений при прямой угловой и линейной засечках показан на рис. 3, 4.

Поскольку при угловых измерениях β_1 и β_2 направление градиентов перпендикулярно сторонам 1- T и 2- T засечки, то линии крайних положений ab и dc , ad и bc будут параллельны этим сторонам и отстоять от них на расстояниях l_1 и l_2 , которые вычисляются по формулам:

$$l_1 = \frac{m_{\beta_1} S_1}{\rho}, \quad l_2 = \frac{m_{\beta_2} S_2}{\rho}, \quad (9)$$

где m_{β_1}, m_{β_2} – СКО измерения горизонтальных углов β_1 и β_2 ; S_1, S_2 – длины сторон 1-Т и 2-Т засечки.

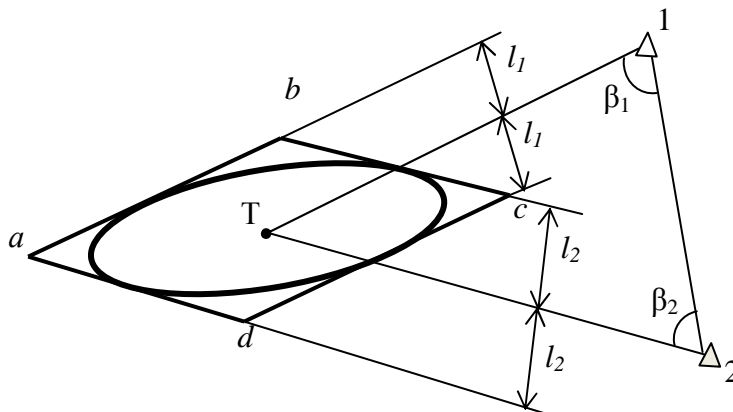


Рис. 3. Прямая угловая засечка с линиями крайних положений и фигурой погрешностей

Линии крайних положений формируют так называемую фигуру погрешностей $abcd$, внутри которой здесь и далее должен располагаться вписанный в неё эллипс СКО, являющийся геометрической интерпретацией ошибки положения точки Т.

Аналогичным образом можно построить фигуру погрешностей азимутальной засечки с измеренными дирекционными углами α_1 и α_2 , подставив в формулы (9) соответствующие СКО m_{α_1} и m_{α_2} .

При линейных измерениях S_1 и S_2 направление градиентов совпадает с направлением сторон 1-Т и 2-Т засечки, поэтому линии крайних положений ab и dc , ad и bc будут перпендикулярны этим сторонам и отстоять от них на расстояниях l_1 и l_2 , которые равны:

$$l_1 = m_{S_1}, \quad l_2 = m_{S_2}, \quad (10)$$

где m_{S_1}, m_{S_2} – СКО измерения длин S_1, S_2 сторон 1-Т и 2-Т засечки.

В случае обратной угловой засечки линии крайних положений параллельны градиентам углов q_{β_1}, q_{β_2} и отстоят от точки Т на расстояниях l_1 и l_2 :

$$l_1 = \frac{m_{\beta_1}}{q_{\beta_1}}, \quad l_2 = \frac{m_{\beta_2}}{q_{\beta_2}}, \quad (11)$$

где m_{β_1}, m_{β_2} – СКО измерения углов β_1 и β_2 .

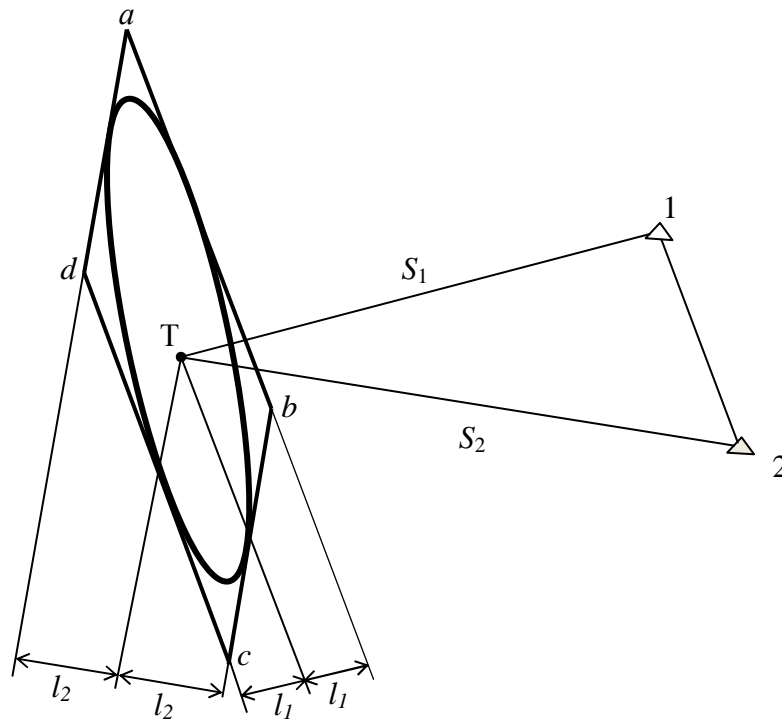


Рис. 4. Линейная засечка с линиями крайних положений и фигурой погрешностей

Если, например, в точках 1, 2, 3 (рис. 5, *a*) будут измерены горизонтальные углы на точку T , то получим многократную комбинированную засечку. В этом случае для построения фигуры погрешностей следует на рис. 5, *a* нанести линии крайних положений, соответствующие градиентам измеренных углов.

Наконец, если в комбинированной засечке измерены ещё и длины сторон, то будем иметь дело с многократной линейно-угловой засечкой. Для построения её фигуры погрешностей необходимо использовать и линии крайних положений, соответствующие градиентам измеренных расстояний. Причём все построения выполняются в одном выбранном масштабе.

Обратим внимание, что некоторые линии крайних положений могут не участвовать в формировании фигуры погрешностей. Это даёт возможность расположить все линии в приоритетный ряд по мере возрастания или убывания их значимости. А поскольку каждая линия соответствует определённому угловому или линейному измерению, то получим такой приоритетный ряд для всех рассматриваемых измерений.

Наибольшей значимостью (наибольшим вкладом в заданную точностную функцию) обладают линии, формирующие фигуру погрешностей.

По мере удаления линий крайних положений от фигуры погрешностей их приоритет уменьшается.

Наименьшей оптимальной комбинацией будет являться производство тех угловых, линейных или линейно-угловых измерений, линии крайних положений которых образуют фигуру погрешностей. Если эта комбинация не удовлетворяет (или, наоборот, превосходит) требования условия-ограничения, то к ней следует добавить (или исключить) измерения в соответствии с приоритетным рядом [68].

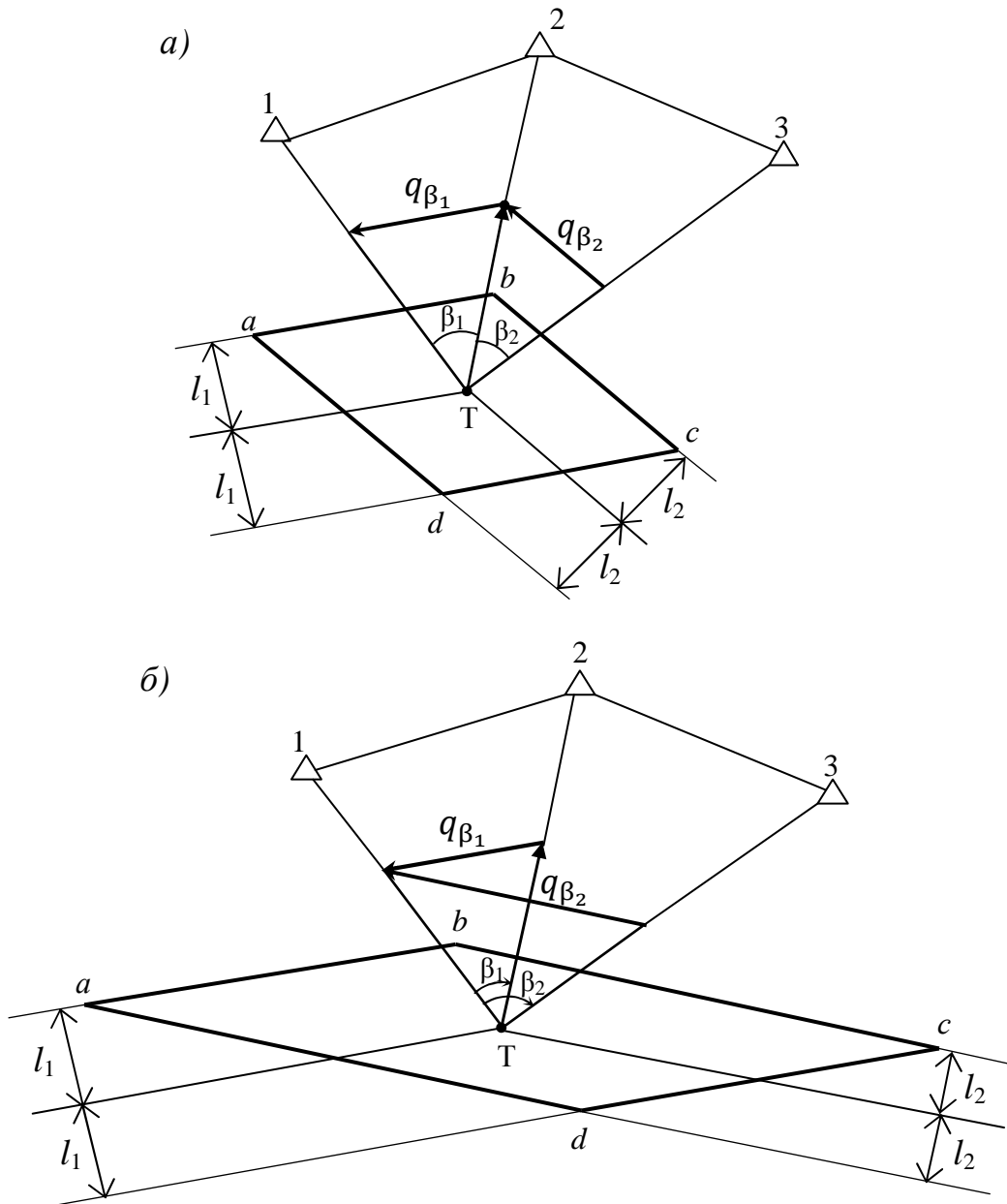


Рис. 5. Обратная угловая засечка с линиями крайних положений и фигурами погрешностей при измерении углов β_1 и β_2 по схеме (а) или (б) по-

Подобный подход позволяет однозначно и просто по сравнению с работой [29] производить разделение произведенных измерений на необходимые и избыточные.

1.3. Квадратический полигон

Известно, что решение многих задач осуществляется без труда, если область плоскости, для которой поставлена задача, имеет простой вид. В теории математической обработки геодезических измерений примером отображения простейшей области на данную является отображение прямого угла на полуплоскость. Такой подход, использованный в работах [19, 35, 22, 42, 113] при построении так называемого квадратического полигона, получил своё дальнейшее развитие в наших работах, обобщением которых явилась монография [69].

В таком полигоне Т-1-2-...-(n-1)-n стороны a_i , связанные с квадратами градиентов расстояний, направлений или углов, расположены под дирекционными углами $2\alpha_i$ в случае угловых измерений (рис. 6, а) и $(2\alpha_i + 180^\circ)$ при линейных измерениях (рис. 6, б).

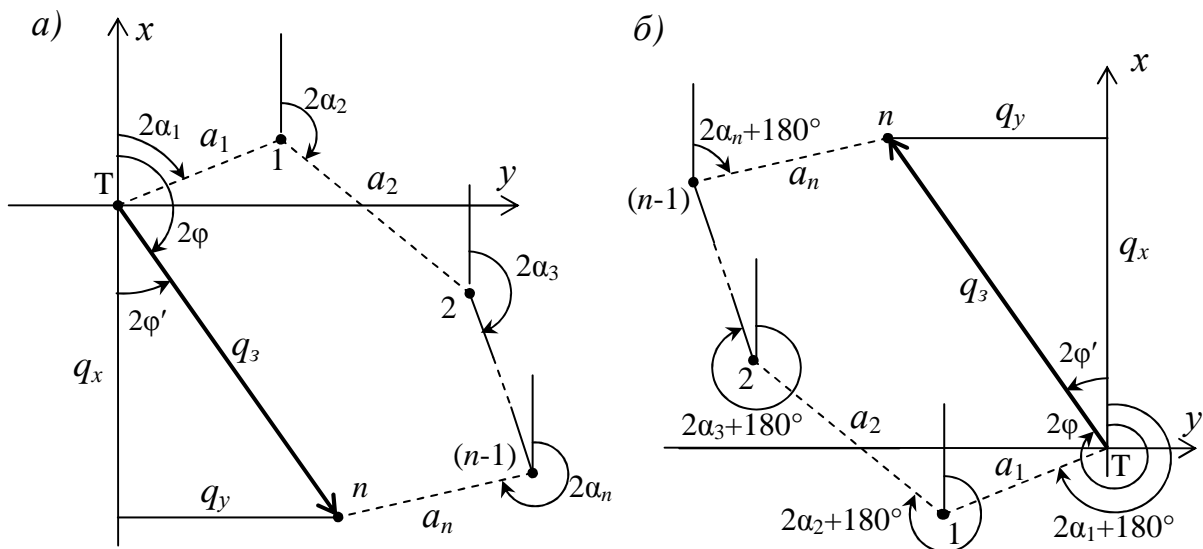


Рис. 6. Квадратические полигоны при угловых (а) и линейных (б) измерениях

Периметр полигона П равен сумме $[a_i]$ его сторон. Прямая Т- $n = q_3$ является замыкающей полигона, направление которой в соответствии с правилами аналитической геометрии всегда следует принимать от начальной Т к конечной точке n полигона.

Проекции замыкающей на координатные оси равны q_x и q_y , а угол $2\phi'$ является её румбом, название которого может быть СВ (если имеем $+q_x$ и $+q_y$), ЮВ ($-q_x$ и $+q_y$), ЮЗ ($-q_x$ и $-q_y$) или СЗ ($+q_x$ и $-q_y$). Дирекционный угол

замыкающей 2φ зависит от величины и названия румба $2\varphi'$. Напомним, что если румб имеет название СВ, то $2\varphi = 2\varphi'$, если ЮВ, то $2\varphi = 180^\circ - 2\varphi'$, если ЮЗ, то $2\varphi = 180^\circ + 2\varphi'$, если СЗ, то $2\varphi = 360^\circ - 2\varphi'$.

В работе [58] было установлено, что стороны квадратического полигона a_i (рис. 6) зависят от вида геодезического построения. Так, в случае линейных измерений $a_i = p_{S_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а в случае угловых измерений $a_j = p_{\alpha_j} q_{\alpha_j}^2$ ($j = 1, 2, \dots, t$) или $a_k = p_{\beta_k} q_{\beta_k}^2$ ($k = 1, 2, \dots, f$).

В общем случае линейно-угловых измерений периметр полигона будет равен [69]:

$$P = [p_s] + [p_\alpha q_\alpha^2] + [p_\beta q_\beta^2]. \quad (12)$$

Формула (12) является универсальной, поскольку применима к засечкам с любой комбинацией угловых и линейных равноточных или неравноточных измерений. Она позволяет просто и наглядно учесть все наблюдаемые связи определяемой точки с исходными пунктами. Причём, в зависимости от вида засечки, в формуле (12) может участвовать лишь часть слагаемых. Так, например, при прямой угловой или азимутальной засечке в этой формуле исчезнут первый и третий члены, при комбинированной засечке исчезнет первый член, при обратной угловой засечке исчезнут первый и второй члены. В случае линейной засечки исчезнут второй и третий члены. В линейно-угловой засечке обязательно будет присутствовать первый член, а наличие второго и третьего будет зависеть от того, какие угловые измерения имели место.

Для построения квадратического полигона вначале необходимо установить веса линейных p_s и угловых $p_{\alpha,\beta}$ измерений. Если принять $p_s = 1$, то $p_{\alpha,\beta} = \mu^2 / m_{\alpha,\beta}^2$, а если принять $p_{\alpha,\beta} = 1$, тогда $p_s = \mu^2 / m_s^2$, где μ является СКО измерения, вес которого равен 1 (ошибка единицы веса).

При выборе весов $p_{\alpha,\beta}$ угловых и p_s линейных измерений, размерности μ и $m_{\alpha,\beta,s}$ должны соответствовать размерности градиентов направлений q_α и углов q_β . Так, если эти градиенты имеют размерность с/см, то μ и $m_{\alpha,\beta}$ (при $p_{\alpha,\beta} = 1$) должны быть выражены в секундах, а m_s – в сантиметрах. При $p_s = 1$ размерности μ и m_s выражают в сантиметрах, а $m_{\alpha,\beta}$ – в секундах.

Считается, что оптимальным соотношением ошибок угловых и линейных измерений является равенство $\frac{m_{\alpha,\beta}}{\rho} : \frac{m_s}{S} = 1$. Нижний предел этого соотношения не должен быть меньше 0,3, поскольку линейные измерения в этом случае не повысят точность определения элементов сети. При соотношении 3 и более одновременное измерение углов и длин сторон также нецелесообразно, так как при этом точность элементов трилатерации и линейно-угловой сети становится практически одинаковой.

При линейно-угловых измерениях квадратический полигон можно построить двумя способами, описанными в работе [64]. Первый способ заключается в том, что вначале строят полигон по p_s и соответствующим им углам $(2\alpha + 180^\circ)$, а затем продолжают его построение по $p_\alpha q_\alpha^2$ и $p_\beta q_\beta^2$ и соответствующим им углам 2α . Второй способ предусматривает упрощение операции построения за счёт использования разностей $(p_s - p_\alpha q_\alpha^2)$ и $(p_s - p_\beta q_\beta^2)$. Если в скобках будут положительные величины, то используют соответствующие им углы $(2\alpha + 180^\circ)$, если отрицательные, то используют соответствующие им углы 2α . Однако эта методика нуждается в уточнении, поскольку определяемые по этим разностям значение и ориентировка замыкающей несколько отличаются от таковых, найденных при первом способе построения квадратического полигона.

Замыкающую полигона q_3 в случае угловых (рис. 6, а) измерений и румб $2\phi'$ вычисляют по формулам:

$$(q_3)^2 = (q_y)^2 + (q_x)^2 = [a \sin 2\alpha]^2 + [a \cos 2\alpha]^2, \quad (13)$$

$$2\phi' = \text{arc tg} \frac{q_y}{q_x} = \text{arc tg} \frac{[a \sin 2\alpha]}{[a \cos 2\alpha]},$$

а при линейных измерениях (рис. 6, б) в формулах (13) необходимо углы 2α поменять на $(2\alpha + 180^\circ)$.

При линейно-угловых измерениях знак каждой разности $(p_s - p_\alpha q_\alpha^2)$ и $(p_s - p_\beta q_\beta^2)$, как отмечено выше, укажет на соответствующий ей удвоенный дирекционный угол, который следует использовать в формулах (13). Обратим внимание на формирование этих разностей. Допустим, что в треугольнике 1-2-Г (рис. 1, а) измерены $S_1, S_2, \beta_1, \beta_2, \beta_4$, то получим разности $(p_{S_1} - p_{\alpha_1} q_{\alpha_1}^2), (p_{S_2} - p_{\alpha_2} q_{\alpha_2}^2), (0 - p_{\beta_4} q_{\beta_4}^2)$. Однако при этом периметр полигона должен вычисляться по формуле (12).

Значения периметра Π и замыкающей q_3 можно использовать для определения полуосей A и B эллипса ошибок или его подеры, которые можно вычислить по формулам:

$$A^2 = \frac{2\mu^2}{\Pi - q_3}, \quad B^2 = \frac{2\mu^2}{\Pi + q_3}, \quad (14)$$

где μ – ошибка единицы веса.

Периметр полигона и его замыкающая играют важную роль при оптимизации засечек. Например:

1. Если две какие-либо засечки имеют одинаковые значения периметра, а также одинаковые значения и ориентировку замыкающей, то такие засечки будут эквивалентны, если их СКО μ равны между собой. В

данном случае конфигурация полигона (число сторон и их ориентировка) не влияют на размеры и ориентировку эллипса ошибок или другого геометрического критерия оценки точности.

2. Если замыкающая полигона равна нулю, то эллипс ошибок и его подера вырождаются в круг радиуса R :

$$A = B = R = \mu \sqrt{\frac{2}{\Pi}}. \quad (15)$$

3. Если направленные погрешности a_i ($i=1, 2, \dots, n$) равновелики по модулю и равномерно распределены по азимуту ($\alpha_{i+1} - \alpha_i = 360^\circ/n$ или $180^\circ/n$), то эллипс ошибок и его подера вырождаются в круг радиуса R :

$$A = B = R = \mu \sqrt{\frac{2}{na}}. \quad (16)$$

Через периметр и замыкающую квадратического полигона можно также выразить предложенные различными авторами скалярные оценки точности:

- широко используемая на практике радиальная ошибка без учёта корреляции $M = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ является корнем квадратным из следа матрицы (1):

$$M = 2m_\alpha \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi^2 - q_3^2}}, \quad (17)$$

которая применяется для характеристики точности положения точки по Ф. Гельмерту [85], а условие $M = \min$ является условием A -оптимизации геодезических засечек [13, 33].

- площадь F_M круга радиуса M , равная $F_M = \pi(A^2 + B^2)$:

$$F_M = 4\pi m_\alpha^2 \frac{\Pi}{\Pi^2 - q_3^2}, \quad (18)$$

служит для характеристики нахождения в нём определяемой точки [3]. Эта вероятность зависит от соотношения полуосей $K = B/A$ и изменяется в пределах 0,68-0,62.

- предложенная нами [56, 65] радиальная ошибка с учётом корреляции M_K :

$$M_K = 2m_\alpha \sqrt{\frac{\Pi + q_3 |\sin 2\varphi|}{\Pi^2 - q_3^2}}, \quad (19)$$

которая, в отличие от M , учитывает одновременно форму эллипса СКО и его ориентировку с целью более объективной оценки точности положения

точки Т одним числом, а значение $\sin 2\varphi$ в формуле (19) необходимо брать по модулю. Вероятность нахождения определяемой точки в круге радиуса M_K изменяется в пределах 0,84-0,63 [65].

- среднегеометрическая ошибка $M_W = \sqrt{AB}$, квадрат которой равен определителю матрицы (1):

$$M_W = m_\alpha \sqrt[4]{\frac{4}{\Pi^2 - q_3^2}}, \quad (20)$$

которая применяется для характеристики точности положения точки по П. Веркмейстеру, а условие $M_W = \min$ является условием *D*-оптимизации геодезических засечек.

- общая (полная) средняя ошибка точки по К. Фридриху $M_F = A$ [69], квадрат которой равен максимальному сингулярному числу матрицы (1), а условие $M_F = \min$ соответствует условию *E*-оптимизации засечек;

- средняя радиальная ошибка $M_C = M/\sqrt{2}$ [90, 95];

- Гауссова средняя ошибка $M_G = 0,5(A + B)$ [114], равная радиусу *R* окружности стандартов с внутренним эксцентриситетом;

- ошибка, равная $0,846M$ или $1,25M$ [13];

- число обусловленности $cond = A^2/B^2$ ковариационной матрицы (1) размерностью 2×2 :

$$cond = \frac{\Pi + q_3}{\Pi - q_3}, \quad (21)$$

а условие $cond = \min$ используется для *I*-оптимизации геодезических засечек.

Через периметр и замыкающую квадратического полигона можно получить такие параметры различных геометрических критериев, как их площади. Так, площадь эллипса ошибок $F_\Theta = \pi AB$ будет равна:

$$F_\Theta = 2\pi m_\alpha^2 \sqrt{\frac{1}{\Pi^2 - q_3^2}}, \quad (22)$$

а условие $F_\Theta = \min$ служит условием *D*-оптимизации геодезических засечек. Кроме того, площадь эллипса используется для характеристики вероятности нахождения внутри его определяемой точки Т. При нормированном множителе $t = 1; 2; 3; 4$ такая вероятность равна соответственно 0,393; 0,865; 0,989; 0,99966. При $t = 1,1774\dots$ вероятность нахождения Т внутри и вне такого эллипса одинакова и равна 0,5. В работе [109] А. Тарци-Хонрок рекомендует применять эллипс Меле с полуосями $A\sqrt{2}$ и $B\sqrt{2}$ с вероятностью попадания в него 0,63-0,68.

Площадь подеры $F_\Pi = \pi(A^2 + B^2)/2$:

$$F_\Pi = 2\pi m_\alpha^2 \frac{\Pi}{\Pi^2 - q_3^2}, \quad (23)$$

также является одним из критериев оценки точности [95].

1.4. Окружность СКО

1.4.1. Двумерное пространство

Критический анализ традиционных геометрических критериев оценки точности показал, что они обладают малой информативностью в отношении ковариационной матрицы $K_{X,Y}$ (1). Так, радиальная ошибка M (17) и эллипс ошибок не позволяют в явном виде проиллюстрировать ни один из элементов этой матрицы. Круг Моора даёт геометрическое представление только о дисперсиях и кофакторе матрицы, а подера эллипса – лишь о величинах и направлениях СКО, формирующих этот кофактор. Ни один из этих критериев не обладает возможностью геометрически интерпретировать одновременно все три сомножителя кофактора, а именно величины и направления СКО и коэффициент корреляции между ними. Сказанное в полной мере справедливо как для условий двумерного, так и трёхмерного пространства при использовании традиционных геометрических критериев в качестве плоских сечений эллипсоида или подероида.

В работе [69] дано теоретическое обоснование окружности СКО в качестве нового наиболее информативного геометрического критерия. Эта окружность характеризуется радиусом $R = 0,5(A + B)$, внутренним эксцентриситетом $e = 0,5(A - B)$, где A и B – полуоси эллипса ошибок и удвоенным дирекционным углом 2φ большой полуоси A . В цитируемой работе приведены различные способы определения параметров окружности СКО и её ориентирования относительно координатных осей.

Так, при вставке одиночного пункта параметры окружности СКО можно вычислить непосредственно по компонентам матрицы N коэффициентов системы нормальных уравнений:

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$R^2, e^2 = \frac{\mu^2}{4} \left(\frac{[aa] + [bb] \pm 2\sqrt{[aa][bb] - [ab]^2}}{[aa][bb] - [ab]^2} \right) = \frac{\mu^2}{4} \left(\frac{spN \pm 2\sqrt{detN}}{detN} \right),$$

где A^T – транспонированная по отношению к A матрица; spN и $detN$ – соответственно след и определитель матрицы N ; здесь и далее знак «плюс» перед радикалом соответствует окружности СКО_{внт} с внутренним эксцентриситетом, знак «минус» – окружности СКО_{внш} с внешним эксцентриситетом.

Для ориентирования окружности СКО относительно координатных осей вычисляют:

$$2\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-[ab]}{[bb]-[aa]}, \quad (25)$$

придерживаясь следующих правил, изложенных нами в работах [50, 51]:

1. Если $[ab]$ – величина отрицательная, то при положительном значении дроби (25) непосредственно получают 2φ . При отрицательном значении дроби необходимо к вычисленному по формуле (25) отрицательному значению 2φ прибавить 180° .

2. Если $[ab]$ – величина положительная, то при положительном значении дроби необходимо к полученному по формуле (25) значению 2φ прибавить 180° , а при отрицательном значении дроби – прибавить 360° к вычисленному по формуле (25) отрицательному значению 2φ .

Параметры окружности СКО можно вычислить непосредственно по компонентам матрицы Q весовых коэффициентов:

$$Q = N^{-1} = \frac{1}{\det N} \begin{pmatrix} \{bb\} - [ab] & \\ -[ab] & [aa] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xe} & Q_{yy} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$R^2, e^2 = \frac{\mu^2}{4} (Q_{xx} + Q_{yy} \pm 2\sqrt{Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2}) = \frac{\mu^2}{4} (spQ \pm 2\sqrt{\det Q}),$$

а для ориентирования окружности СКО требуется вычислить:

$$2\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}, \quad (27)$$

причём правила вычисления 2φ по этой формуле соответствуют правилам вычисления дирекционного угла по величине и названию румба.

Получить необходимые данные для построения окружности СКО можно, используя непосредственно компоненты матрицы (1). Для этого достаточно вычислить только угол 1Т2 (рис. 7) по приведенной в работе [69] формуле:

$$(1Т2) = 180^\circ - \operatorname{arcsin} \frac{m_{xy}}{m_x m_y}. \quad (28)$$

Теперь, отложив на сторонах этого угла величины m_x и m_y и поделив отрезок 1-2 пополам, находят центр O окружности СКО, причём сразу ориентированную относительно координатных осей.

Обращаем внимание, что если полученная величина угла $< 180^\circ$, то окружность СКО имеет левый эксцентриситет (рис. 7, а, з). При этом угле $> 180^\circ$ – правый эксцентриситет (рис. 7, б, в).

В работе [69] на примерах прямой угловой, азимутальной, обратной угловой, комбинированной, линейной, линейно-угловой засечек показан порядок определения элементов окружностей СКО с помощью матриц N и Q . Приведены пять различных способов ориентирования этих окружностей.

Остановимся подробнее на определении элементов окружностей СКО путём построения квадратического полигона. По величине его периметра Π и замыкающей q_3 , можно вычислить элементы окружности СКО_{ВНТ} с внутренним эксцентриситетом, подставив в соотношения $R = 0,5(A + B)$, $e = 0,5(A - B)$ значения полуосей A и B эллипса ошибок из формул (14):

$$R^2 = m_a^2 \left(\frac{\Pi + \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad e^2 = m_a^2 \left(\frac{\Pi - \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad (29)$$

а для окружности СКО_{ВНШ} с внешним эксцентриситетом необходимо в формулах (29) поменять местами знаки перед радикалами. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только окружности СКО_{ВНТ} (просто окружности СКО).

Для построения окружности СКО достаточно отложить от точки T по направлению замыкающей (рис. 6) величину $TO = e$ (рис. 7). Точка O является центром этой окружности радиуса R , причём сразу ориентированной относительно координатных осей.

При этом можем получить окружность СКО с левым (рис. 7, а, г) или правым (рис. 7, б, в) эксцентриситетом. Отметим, что теперь в символах периметра и замыкающей полигона можно записать следствия теорем Аполлония Пергского (III век до н. э.), являющиеся инвариантами окружности СКО:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 = 2(R^2 + e^2) &= 4\mu^2 \frac{\Pi}{\Pi^2 - q_3^2}, \quad A^2 - B^2 = 4Re = 4\mu^2 \frac{q_3}{\Pi^2 - q_3^2}, \\ (A + B)^2 = 4R^2 &= 4\mu^2 \left(\frac{\Pi + \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad (A - B)^2 = 4e^2 = 4\mu^2 \left(\frac{\Pi - \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad (30) \\ AB = R^2 - e^2 &= 2\mu^2 \frac{1}{\sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}. \end{aligned}$$

Проведя через центр окружности O диаметр 1-2 параллельно оси x , получаем СКО точки T по осям координат $T-1 = m_x$ и $T-2 = m_y$.

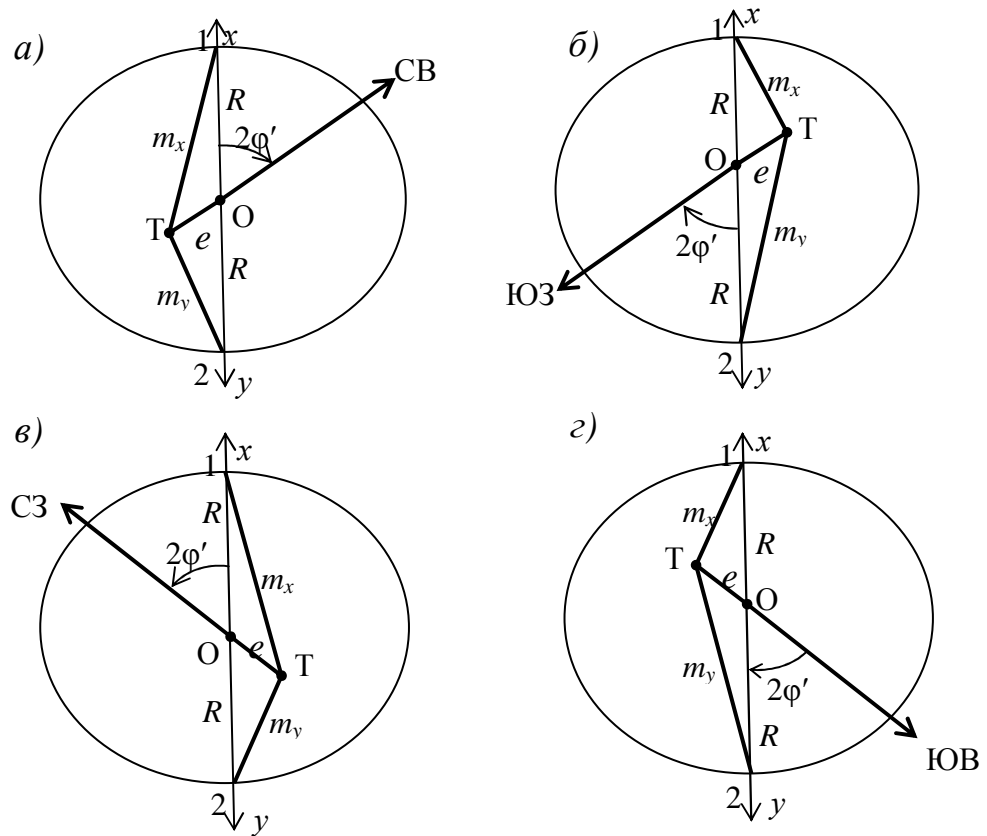


Рис. 7. Окружности СКО с левым и правым эксцентриситетами и СКО m_x и m_y

Отметим, что в треугольниках Т-О-1 и Т-О-2 смежные углы при точке О равны $2\varphi'$ и $(180^\circ - 2\varphi')$. С учётом того, что $\cos(180^\circ - 2\varphi') = -\cos 2\varphi'$, можно по теореме косинусов выразить СКО m_x и m_y следующим образом:

$$m_x^2 = R^2 + e^2 \pm 2Re \cos 2\varphi', \quad m_y^2 = R^2 + e^2 \mp 2Re \cos 2\varphi'. \quad (31)$$

причём в формуле для m_x знак «плюс» соответствует положению замыкающей в первой (СВ) и четвёртой (СЗ) четвертях, а знак «минус» – во второй (ЮВ) и третьей (ЮЗ). В формуле для m_y наоборот – знак «плюс» соответствует положению замыкающей во второй (ЮВ) и третьей (ЮЗ) четвертях, а знак «минус» – в первой (СВ) и четвёртой (СЗ).

С учётом выражений (30) формулы (31) примут вид:

$$m_x^2 = \frac{2\mu^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi \pm q_3 \cos 2\varphi') = \frac{2\mu^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi \pm q_x), \quad (32)$$

$$m_y^2 = \frac{2\mu^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi \mp q_3 \cos 2\varphi') = \frac{2\mu^2}{\Pi^2 - q_3^2} (\Pi \mp q_x).$$

Для определения СКО точки Т по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям α и $\alpha+90^\circ$ (рис. 8) необходимо провести диаметр 3-4 под углом 2α к оси x и получить Т-3 = m_1 по направлению α и Т-4 = m_2 по перпендикулярному направлению $\alpha+90^\circ$.

Из треугольников Т-О-3 и Т-О-4 можно по аналогии с формулами (32) выразить по теореме косинусов СКО m_1 и m_2 с той разницей, что в треугольниках Т-О-3 и Т-О-4 углы ТО3 и ТО4 равны соответственно $(2\varphi - 2\alpha)$ и $180^\circ - (2\varphi - 2\alpha)$:

$$m_1^2 = \frac{2\mu^2}{\Pi^2 - q_3^2} [\Pi \pm q_3 \cos(2\varphi - 2\alpha)], \quad (33)$$

$$m_2^2 = \frac{2\mu^2}{\Pi^2 - q_3^2} [\Pi \mp q_3 \cos(2\varphi - 2\alpha)].$$

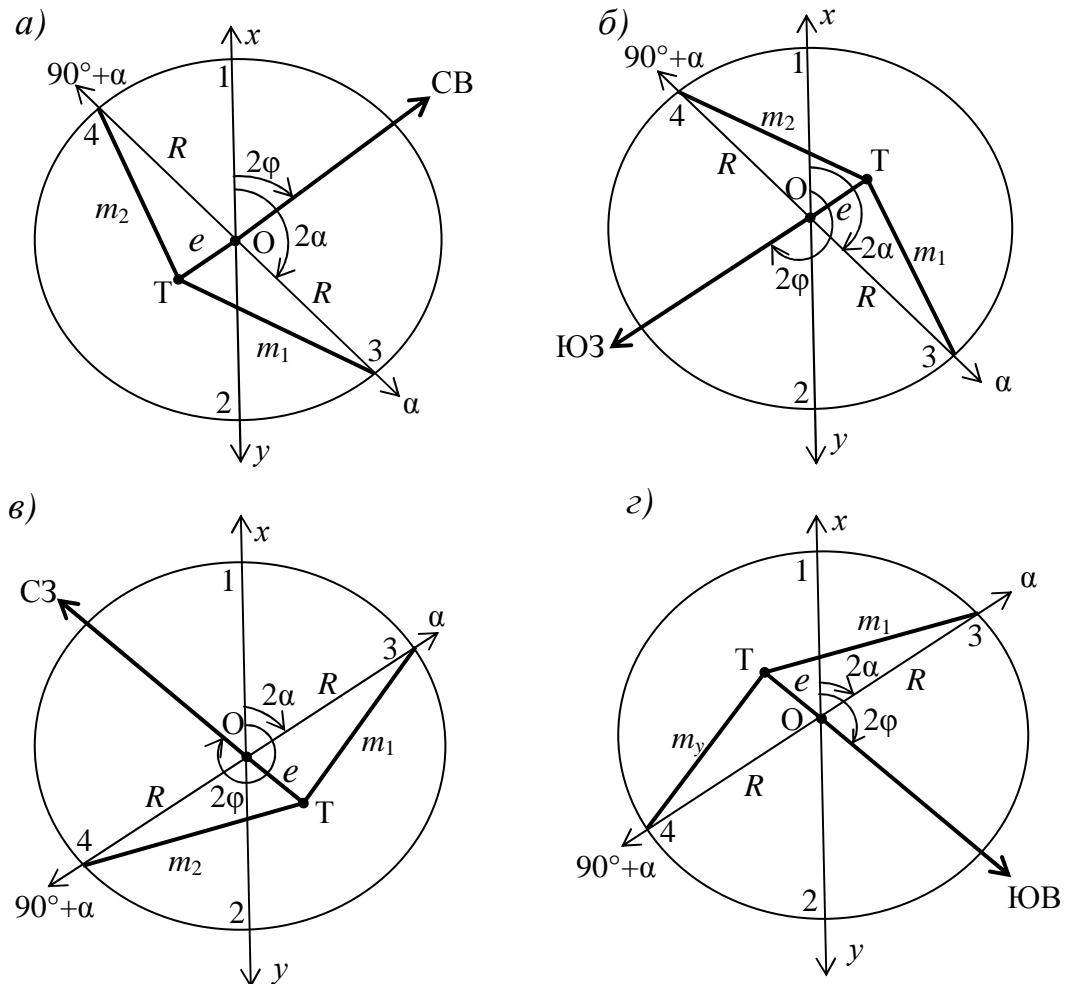


Рис.8. Окружности СКО с левым и правым эксцентриситетами и СКО m_1 и m_2

Разность $(2\varphi - 2\alpha)$ может быть как с «плюсом», так и с «минусом» (рис. 8, а), но в дальнейшем определяется косинус этой разности, а как известно $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Если эта разность получилась больше 180°

(рис. 8, в), то из неё следует вычесть 180° , поскольку углы ГОЗ и ТО4 должны в сумме составлять 180° .

Следует различать окружности стандартов с левым и правым эксцентриситетами. Левый эксцентриситет соответствует положению точки T слева по отношению к оси x (рис. 7, 8, а, з). В этом случае коэффициенты корреляции r_{xy} , $r_{1,2}$ равны синусу «правого» угла $1T2$, $3T4$. Поскольку эти углы меньше 180° , то коэффициенты корреляции положительные. Правый эксцентриситет соответствует положению точки T справа по отношению к оси x (рис. 7, 8, б, в). В этом случае коэффициенты корреляции r_{xy} , $r_{1,2}$ также равны синусу «правого» угла $1T2$, $3T4$. Поскольку эти углы больше 180° , то коэффициенты корреляции отрицательные. Выраженные в работе [69] формулы в символах R и e для коэффициентов r_{xy} , $r_{1,2}$ примут в символах Π и q_3 следующий вид:

$$r_{x,y} = \frac{2R\sin 2\varphi}{m_x m_y} = \frac{q_3 \sin 2\varphi}{\sqrt{\Pi^2 - q_x^2}}, \quad (34)$$

$$r_{1,2} = \frac{2R\sin 2\alpha}{m_1 m_2} = \frac{q_3 \sin 2\alpha}{\sqrt{\Pi^2 - [q_3 \cos(2\varphi - 2\alpha)]^2}}.$$

В работе [60] приведены результаты статистического моделирования с использованием окружности СКО, которые позволили констатировать:

1. Коэффициент корреляции существенно зависит от угла 2φ , причём он положителен, если 2φ находится в пределах $0-180^\circ$, и отрицателен, если $2\varphi > 180^\circ$.

2. Если $2\varphi = 90$ или 270° , то коэффициент корреляции будет иметь максимальное по модулю значение для данной окружности СКО. В случае $2\varphi = 0$ или 180° значения СКО m_x и m_y совпадают с большой и малой полуосями эллипса ошибок, а коэффициент корреляции равен нулю, что подтверждает известное положение о некоррелированности полуосей эллипса.

3. При изменениях 2φ от 0 до 180° коэффициент корреляции принимает два одинаковых положительных значения для углов $2\varphi_i$ и $(180^\circ - 2\varphi_i)$. При значении 2φ от 180° до 360° коэффициент корреляции приобретает два одинаковых отрицательных значения для углов $2\varphi_j$ и $180^\circ + (360^\circ - 2\varphi_j)$.

Точка T (рис. 9) делит диаметр 5-6 на отрезки $T-5 = A = R + e$ и $T-6 = B = R - e$ равные большой и малой полуосям эллипса СКО, которые соответствуют максимальной и минимальной СКО точки T и которые могут быть вычислены через периметр и замыкающую полигона по формулам (14).

Площади большого $F_R = \pi(A + B)^2/4$ и малого $F_e = \pi(A - B)^2/4$ кругов будут равны:

$$F_R = \pi m_\alpha^2 \left(\frac{\Pi + \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad F_e = \pi m_\alpha^2 \left(\frac{\Pi - \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad (35)$$

а условие $F_e = 0$ соответствует условию E -оптимизации геодезических засечек. Обратим внимание, что площадь кругового (заштрихованного) кольца $F_{R-e} = \pi AB$ равна площади эллипса, площади круга радиуса M_W и половине площади эллипса Меле.

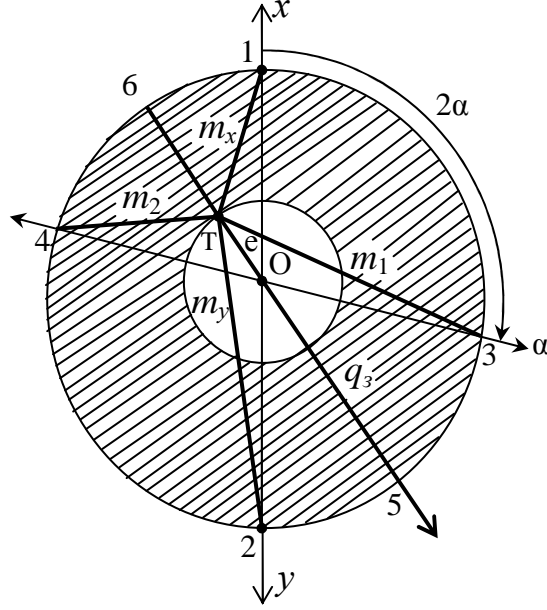


Рис. 9. Окружности СКО с внутренним (большая) и внешним (малая) эксцентриситетами

В свою очередь сумма площадей большого и малого кругов $F_{R+e} = \pi(A^2 + B^2)/2$ равна площади подеры или круга радиуса $M/\sqrt{2}$.

Таким образом, A -оптимальной будет считаться засечка, в которой $F_{R+e} = \min$; D -оптимальной – если $F_{R-e} = \min$; E -оптимальной $q_3 = 0$, следовательно $e = 0$ и $F_e = 0$; I -оптимальной – если $(\Pi + q_3)/(\Pi - q_3) = \min$.

Наконец, длины окружностей радиуса R и e являются функцией следа и определителя матрицы (1): $2\pi(R, e) = \pi \sqrt{spK_{XY} \pm 2\sqrt{\det K_{XY}}}$.

При различных вариантах засечки одного и того же пункта будут получены различные матрицы (1). Сравнение этих вариантов между собой может осуществляться как с использованием приведенных выше критериев оценки точности, так и с использованием различных норм этой матрицы. Так, m -норма матрицы (иначе ∞ -норма, первая норма) равна максимальной по модулю сумме строки, l -норма – максимальной по модулю сумме столбца, K -норма (евклидова или сферическая норма) – корню квад-

ратному из суммы квадратов всех компонентов матрицы и M -норма – удвоенному максимальному значению квадрата стороны треугольника 1-Г-2. При $m_y > m_x$ (см. рис. 9) имеем следующие выражения:

$$(m\text{-норма})^2 = (l\text{-норма})^2 = m_y^2 + m_x m_y r_{xy} ,$$

$$(K\text{-норма})^2 = \sqrt{(m_x^2)^2 + 2(m_x m_y r_{xy})^2 + (m_y^2)^2} , \quad (36)$$

$$(M\text{-норма})^2 = 2m_y^2 ,$$

составляющие которых в символах периметра и замыкающей полигона определяются по формулам (32) и (34).

Таким образом, базируясь лишь на значениях периметра и замыкающей квадратического полигона, можно определить практически любые известные в геодезии на данный момент скалярные оценки точности геодезических засечек с любой комбинацией угловых и линейных равноточных или неравноточных измерений.

1.4.2. Абсолютные и относительные окружности СКО

Под абсолютными подразумеваются окружности СКО (окружности первого рода), характеризующие точность положения отдельных точек относительно исходных пунктов. К ним, например, относятся окружности СКО, относящиеся к засечкам, определяющим положение одной точки. При совместном определении нескольких точек речь может идти как об абсолютных, так и об относительных окружностях СКО (окружностях второго рода). Эти окружности предназначены для характеристики точности взаимного расположения различных точек плановой сети.

Матрицы A , N и Q плановой сети имеют вид (37), (38), (39). Рассмотрим процесс формирования этих матриц и определения параметров абсолютных и относительных окружностей СКО на примере триангуляционной сети, который взят из работы [8]. Характеристика сети по измеренным углам (рис. 10, а) представлена в табл. 1.

Пусть в такой сети измерены горизонтальные углы $\beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ с СКО $m_\beta = 3''$. Для иллюстрации процесса определения градиентов углов β_1, β'_1 и β_2, β'_2 были построены по градиентам направлений две инверсионные фигуры (жирные линии на рис. 10, а). Обратим внимание, что здесь и далее при выборе градиентов для одной определяемой точки, например T_1 , все другие пункты, в том числе и точка T_2 , рассматриваются как исходные. Напомним, что значения дирекционных углов градиентов направлений и градиентов углов выбирают в соответствии с изложенными в разделе 1.1. правилами. При построении инверсионных фигур градиенты направлений откладывались от определяемых точек T_1 и T_2 в сторону ис-

ходных пунктов 1, 2, 3, поэтому направления градиентов углов q_{β_1} , $q_{\beta_1'}$ и q_{β_2} , $q_{\beta_2'}$ показаны стрелками в сторону направлений, от которых эти углы измерялись.

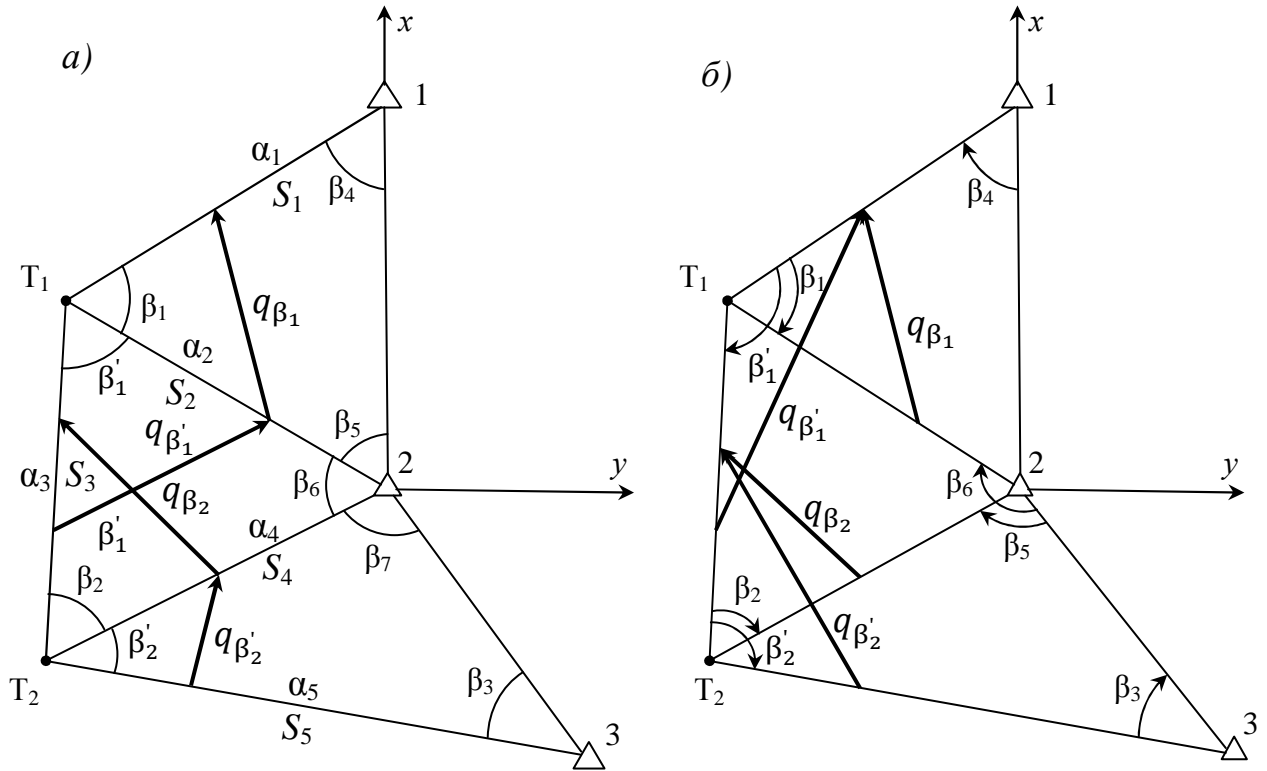


Рис. 10. Схема сети и инверсионные фигуры

При измерении углов β_4 и β_7 направления 1- T_1 и 2- T_2 на определяемые точки являются правыми относительно 1-2 и 2-3, значит направление градиентов принимается от исходного пункта к определяемому.

При измерении угла β_5 направление 2- T_1 на определяемую точку является левым относительно 2-1, поэтому направление градиента взято от определяемой точки к исходному пункту.

При измерении угла β_6 направление 2- T_1 является правым относительно 2- T_2 , поэтому дирекционный угол градиента направления для точки T_1 будет α_{2-T_1} , а направление 2- T_2 является левым относительно 2- T_1 , поэтому дирекционный угол градиента направления для точки T_2 будет α_{T_2-2} .

Наконец, при измерении углов β_1' и β_2 направление T_1 - T_2 является правым относительно T_1 -2 и левым относительно T_2 -2, поэтому дирекционный угол градиентов направлений для точек T_1 и T_2 будет один и тот же $\alpha_{T_1-T_2}$. Градиенты и их дирекционные углы приведены в табл. 1 (графы 4, 5).

Характеристика триангуляционной сети по измеренным углам

Измер. углы	Направления	S_i , м	q_i, q_{β_i} , сек/см	α , °	Матрица A			
					a	b	c	d
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Определяемая точка T_1								
β_1	–	–	1,34	344	0,369	1,288		
β_5	$T_1 - 2$	1526	1,35	114	1,233	-0,549		
β_4	$1 - T_1$	1832	1,13	229	0,853	-0,741		
β_2	$T_1 - T_2$	1524	1,35	184	0,094	-1,347		
β_6	$2 - T_1$	1526	1,35	294	1,233	0,549		
β'_1	–	–	1,54	59	-1,320	0,793		
Определяемая точка T_2								
β_2	–	–	1,19	308			0,938	0,733
β_6	$T_2 - 2$	1738	1,19	59			-1,020	0,613
β'_1	$T_1 - T_2$	1524	1,35	184			0,094	-1,347
β_3	$T_2 - 3$	3046	0,68	102			-0,665	-0,141
β_7	$2 - T_2$	1738	1,19	239			1,020	-0,613
β'_2	–	–	0,84	25			-0,355	0,761

Характеристика триангуляционной сети по измеренным направлениям (рис. 10, б) представлена в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Характеристика триангуляционной сети по направлениям

Измер. углы	Направления	S_i , м	q_i, q_{β_i} , сек/см	α , °	Матрица A			
					a	b	c	d
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Определяемая точка T_1								
β_1	–	–	1,34	344	0,369	1,288		
β_6	$2 - T_1$	1526	1,35	294	1,233	0,549		
β_4	$1 - T_1$	1832	1,13	229	0,853	-0,741		
β'_1	–	–	2,28	24	-0,927	2,083		
β_2	$T_1 - T_2$	1524	1,35	184	0,094	-1,347		
Определяемая точка T_2								
β'_1	$T_1 - T_2$	1524	1,35	184			0,094	-1,347
β_2	–	–	1,19	308			0,938	0,733
β'_2	–	–	1,60	338			0,599	1,483
β_3	$T_2 - 3$	3046	0,68	102			-0,665	-0,141
β_5	$2 - T_2$	1738	1,19	239			1,020	-0,613

По сравнению с рассмотренной триангуляцией с измеренными углами здесь изменятся только величина и направление градиентов углов β'_1 и

β_2' . Все остальные величины и дирекционных углы градиентов останутся без изменения (табл. 2).

По значениям градиентов и их дирекционным углам вычисляют коэффициенты a, b, c, d (графы 6, 7, 8,) и формируют матрицу A (37). Для схем на рис. 10 коэффициенты a, b относятся к точке T_1 , а коэффициенты c, d – к точке T_2 .

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Затем вычисляют матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений (38):

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \dots \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & \dots \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & \dots \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Далее, путём обращения матрицы (38) одним из способов, описанных в работе [8], вычисляют матрицу весовых коэффициентов (39):

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} & Q_{x_1x_2} & Q_{x_1y_2} & \dots \\ Q_{x_1y_1} & Q_{y_1y_1} & Q_{y_1x_2} & Q_{y_1y_2} & \dots \\ Q_{x_1x_2} & Q_{y_1x_2} & Q_{x_2x_2} & Q_{x_2y_2} & \dots \\ Q_{x_1y_2} & Q_{y_1y_2} & Q_{x_2y_2} & Q_{y_2y_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (39)$$

умножив которую на СКО единицы веса μ^2 , получают корреляционную матрицу K_{XY} ошибок координат.

Теперь достаточно в матрице (38) или в матрице (39) выделить подматрицы 2-го порядка,

$$N_{11} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix}, \quad N_{22} = \begin{pmatrix} [cc] & [cd] \\ [cd] & [dd] \end{pmatrix}, \dots \quad (40)$$

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} \\ Q_{x_1y_1} & Q_{y_1y_1} \end{pmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{x_2x_2} & Q_{x_2y_2} \\ Q_{x_2y_2} & Q_{y_2y_2} \end{pmatrix}, \dots$$

расположенные на диагонали (обозначены жирным шрифтом), соответствующие определяемым точкам T_1, T_2, \dots , и по формулам (24) – (27) получить необходимые данные для построения окружностей СКО, характеризующих точность положения точек T_1, T_2, \dots относительно исходных пунктов.

Аналогичным образом, выделив в ковариационной матрице K_{XY} подматрицы 2-го порядка (41), характеризующие обобщённую дисперсию положения определяемых точек T_1, T_2, \dots относительно исходных пунктов, можно всего лишь по одной формуле (28) получить необходимые данные для построения окружностей СКО.

$$K_{X_1Y_1} = \begin{pmatrix} m_{X_1}^2 & m_{X_1Y_1} \\ m_{X_1Y_1} & m_{Y_1}^2 \end{pmatrix}, \quad K_{X_2Y_2} = \begin{pmatrix} m_{X_2}^2 & m_{X_2Y_2} \\ m_{X_2Y_2} & m_{Y_2}^2 \end{pmatrix}, \dots \quad (41)$$

В рассматриваемых примерах положение исходных пунктов 1, 2, 3 (рис. 10) принято безошибочным. В этом случае абсолютные окружности СКО, характеризующие точность положения точек T_1 и T_2 , будут одновременно и относительными окружностями СКО, характеризующими точность взаимного положения точки T_1 и исходных пунктов 1, 2 или точки T_2 и исходных пунктов 2, 3.

В работе [9] отмечается, что оценку точности элементов сети, вычисленных по координатам её пунктов, нужно производить с учётом корреляционной зависимости r_{xy} погрешностей определения координат m_x и m_y . Так, например, СКО расстояния m_S и СКО дирекционного угла m_α некоторой стороны сети (α, S) предлагается определять по формулам:

$$m_S = \sqrt{m_x^2 \cos^2 \alpha + m_y^2 \sin^2 \alpha + 2r_{xy} \sin \alpha \cos \alpha m_x m_y}, \quad (42)$$

$$m_\alpha = \frac{\rho}{S} \sqrt{m_y^2 \cos^2 \alpha + m_x^2 \sin^2 \alpha - 2r_{xy} \sin \alpha \cos \alpha m_x m_y}.$$

В нашей работе [61] доказано, что определяемые оценки m_S и m_α с помощью окружности СКО сразу учитывают коэффициент корреляции r_{xy} , что является очередным достоинством этого геометрического критерия.

Действительно, если на окружности СКО, относящейся к точке T_1 , провести (по примеру рис. 8) диаметры 3-4 под удвоенными дирекционными углами $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$, то можно сразу определить СКО m_S точки T_1 как по направлениям сторон T_1-1 и T_1-2 , так и СКО m' по перпендикулярным к ним направлениям и коэффициенты корреляции между этими СКО. Аналогичным образом можно определить СКО точки T_2 по направлениям сторон T_2-2 и T_2-3 , так и по перпендикулярным к ним направлениям. Что касается направления T_1-T_2 , то здесь пока можно говорить только о СКО точки T_1 относительно точки T_2 и наоборот.

В общем виде формулы для вычисления СКО m_S и m_α расстояний и дирекционных углов по элементам R, e и 2φ окружности СКО выглядят следующим образом [64]:

$$m_{S_i} = \sqrt{e^2 + R^2 + 2eR\cos(2\varphi - 2\alpha_i)} , \quad (43)$$

$$m_{\alpha_i} = \frac{m_i}{S_i} \rho = \frac{\rho}{S_i} \sqrt{e^2 + R^2 - 2eR\cos(2\varphi - 2\alpha_i)} .$$

Следует сказать, что процесс формирования матриц N и Q с целью определения элементов абсолютных окружностей СКО представляет довольно сложную задачу. Однако этот процесс можно полностью исключить, если использовать для определения элементов окружностей СКО теорию квадратического полигона, изложенную в разделе 1.3. По этой теории достаточно по компонентам матрицы A (37) вычислить по формулам (12), (13) периметр, величину и ориентировку замыкающей полигона, а по формулам (29) элементы окружности СКО.

В заключение отметим, что если схема на рис. 10 представляет азимутальную сеть, в которой измерены дирекционные углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, то в формировании матрицы A принимают участие градиенты направлений q , дирекционные углы которых α_i совпадают с направлением сторон от исходного пункта к определяемому. Так, для точки T_1 эти направления 1- T_1 , 2- T_1 , T_2 - T_1 , а для точки T_2 это T_1 - T_2 , 2- T_2 , 3- T_2 .

Если схема на рис. 10 представляет сеть трилатерации, в которой измерены длины сторон S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , то градиенты расстояний равны единице, а их дирекционные углы соответствуют направлениям от исходного пункта к определяемому. То есть, как и в предыдущем случае, для точки T_1 эти направления 1- T_1 , 2- T_1 , T_2 - T_1 , а для точки T_2 это T_1 - T_2 , 2- T_2 , 3- T_2 .

В линейно-угловой сети в формировании матрицы A будут принимать участие градиенты расстояний, градиенты направлений и углов. Причём, если в такой сети $p_S = 1$ и $p_S \neq p_{\alpha,\beta}$, то элементы строк матрицы A , относящиеся к угловым измерениям, необходимо умножить на $\sqrt{p_{\alpha,\beta}}$. Если $p_{\alpha,\beta} = 1$ и $p_{\alpha,\beta} \neq p_S$, то элементы строк матрицы A , относящиеся к линейным измерениям, необходимо умножить на $\sqrt{p_S}$.

Для характеристики точности взаимного положения точек T_1 и T_2 (рис. 10) необходимо построить соответствующую им относительную окружность СКО. Пусть погрешность положения этих точек T_1 и T_2 характеризуется абсолютными окружностями СКО с элементами $R_1, e_1, 2\varphi_1$ и $R_2, e_2, 2\varphi_2$. Для вычисления параметров относительной окружности СКО применим методику выполнения математических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) с геометрическими критериями оценки точности.

Теоретические основы такой методики были изложены Ф.Ф. Павловым в работе [34]. Одной из таких операций является квадратическое сложение геометрических критериев. Эту операцию рассмотрим на

числовом примере, который взят из работы [34]. В этом примере координаты точки Т определены из полигонометрического хода, ошибка положения исходного пункта которого характеризуется подерой с элементами $A_1 = 30$ мм, $B_1 = 15$ мм, $\varphi_1 = 32^\circ$ (чему соответствуют $R_1 = 22,5$ мм, $e = 7,5$ мм нашей окружности СКО). В свою очередь ошибка положения точки Т в результате проложения полигонометрического хода характеризуется подерой с элементами $A_2 = 22$ мм, $B_2 = 10$ мм, $\varphi_2 = 62^\circ$ (чему соответствуют $R_1 = 16$ мм, $e = 6$ мм). Требуется найти элементы результирующего геометрического критерия, характеризующего ошибку положения точки Т в результате совместного влияния ошибок исходного пункта и полигонометрического хода. Для этого следует квадратически сложить эти два критерия.

Сущность такого сложения [34] заключается в построении квадратического полигона. В качестве сторон полигона предлагается использовать разности $(A_i^2 - B_i^2)$ большой и малой полуосей подер, откладываемые под удвоенными дирекционными углами $2\varphi_1 = 0^\circ$, $2\varphi'_2 = 2\varphi_2 - 2\varphi_1$ их больших полуосей (рис. 11).

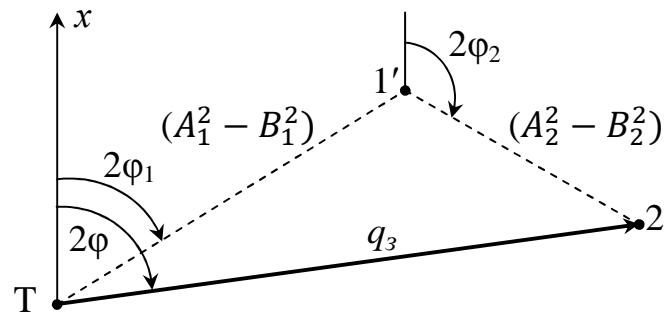


Рис. 11. Квадратический полигон при сложении геометрических критериев

Вообще говоря, периметр и замыкающая такого полигона не изменятся при любой ориентации его начальной стороны Т-1'. Поэтому построение полигона, в отличие от [34], непосредственно по удвоенным дирекционным углам $2\varphi_i$ (рис. 6) позволяет исключить лишние операции по вычислению дирекционных углов $2\varphi'_i$ последующих сторон и сразу получить удвоенный дирекционный угол 2φ замыкающей.

В таком полигоне периметр Π , замыкающая q_3 и её ориентировка 2φ определяются по формулам (12), (13), которые будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= (A_1^2 + B_1^2) + (A_2^2 + B_2^2) = 1709 \text{ мм}^2, \\ q_3^2 &= [(A_1^2 - B_1^2)\sin 2\varphi_1 + (A_2^2 - B_2^2)\sin 2\varphi_1]^2 + \\ &+ [(A_1^2 - B_1^2)\cos 2\varphi_1 + (A_2^2 - B_2^2)\cos 2\varphi_1]^2 = 928 \text{ мм}^2. \end{aligned} \quad (44)$$

$$2\varphi = \operatorname{arctg} \frac{[(A_i^2 - B_i^2) \sin 2\varphi_i]}{[(A_i^2 - B_i^2) \cos 2\varphi_i]} = 84,9^\circ,$$

$$A = \sqrt{\frac{\Pi + q_3}{2}} = 36,3 \text{ мм}, \quad B = \sqrt{\frac{\Pi - q_3}{2}} = 19,8 \text{ мм}.$$

Обратим внимание, что согласно (30) $A^2 - B^2 = 4Re$, поэтому можно построить квадратический полигон по значениям $4R_1e_1 = 675 \text{ мм}^2$ под углом $2\varphi_1$ и $4R_2e_2 = 384 \text{ мм}^2$ под углом $2\varphi_2$. В этом случае периметр Π , замыкающая q_3 и её ориентировка 2φ , а также радиус R и эксцентриситет e результирующей (относительной) окружности СКО определяются по формулам [69]:

$$\Pi = 2(R_1^2 + e_1^2) + 2(R_2^2 + e_2^2) = 1709 \text{ мм}^2,$$

$$q_3^2 = [4R_1e_1 \sin 2\varphi_1 + 4R_2e_2 \sin 2\varphi_1]^2 + [4R_1e_1 \cos 2\varphi_1 + 4R_2e_2 \cos 2\varphi_1]^2 = 928 \text{ мм}^2, \quad (45)$$

$$2\varphi = \operatorname{arctg} \frac{[4R_i e_i \sin 2\varphi_i]}{[4R_i e_i \cos 2\varphi_i]} = 84,9^\circ,$$

$$R^2, e^2 = 0,25(\Pi \pm \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}),$$

откуда $R = 28,0 \text{ мм}$, $e = 8,2 \text{ мм}$, $\varphi = 42,5^\circ$ (чему соответствуют $A = 36,2 \text{ мм}$, $B = 19,8 \text{ мм}$ – те же, что и в работе [34]).

Наконец, квадратический полигон, согласно упомянутым выше формулам (30), может быть построен непосредственно по значениям периметра и замыкающей, а именно $A_i^2 - B_i^2 = 4\mu^2 q_{3i} / (\Pi_i^2 - q_{3i}^2)$. В этом заключается очередное положительное качество периметра и замыкающей.

Матричная интерпретация квадратического сложения геометрических критериев, которым соответствуют матрицы Q_{11} и Q_{22} (40), заключается в нахождении матрицы Q , равной сумме последних, то есть:

$$Q = Q_{11} + Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} + Q_{x_2x_2} & Q_{x_1y_1} + Q_{x_2y_2} \\ Q_{x_1y_1} + Q_{x_2y_2} & Q_{y_1y_1} + Q_{y_2y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [Q_{xx}] & [Q_{xy}] \\ [Q_{xy}] & [Q_{yy}] \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Затем по формуле (28) достаточно вычислить угол:

$$\beta' = 180^\circ - \arcsin \frac{[Q_{xy}]}{\sqrt{[Q_{xx}][Q_{yy}]}}. \quad (47)$$

Отложив на сторонах этого угла значения СКО $m_x = \mu\sqrt{[Q_{xx}]}$ и $m_y = \mu\sqrt{[Q_{yy}]}$, находят обычным способом центр относительной окружности СКО сразу ориентированной относительно координатных осей, которая будет характеризовать точность взаимного положения точек T_1 и T_2 . Элементы R , e , 2φ этой окружности вычисляют по формулам (26), (27), подставляя в них соответствующие компоненты матрицы (46).

В свою очередь, если точность положения каждого исходного пункта также характеризуется соответствующей абсолютной окружностью СКО, то для определения точности взаимного расположения исходных или исходных и определяемых пунктов необходимо иметь соответствующие относительные окружности СКО.

В нашей работе [69] рассмотрены также примеры вычитания, умножения и деления геометрических критериев оценки точности с использованием элементов окружности СКО. Это позволяет проще по сравнению с [34] осуществлять аналитическое решение математических операций с геометрическими критериями

Отметим, что предложенные в работе [34] математические операции с геометрическими критериями основаны на предположении их корреляционной независимости. К подобному предположению прибегают с той целью, чтобы излишне не усложнять решение, например, такой задачи, как учёт ошибок исходных данных.

1.4.3. Трёхмерное пространство

Положение точки T в трёхмерном пространстве определяется её координатами x , y , z . Для этого выполняют угловые, линейные или линейно-угловые измерения. В настоящее время подобные измерения широко практикуются при использовании электронных тахеометров. Под угловыми измерениями в дальнейшем будем понимать измерение горизонтальных углов β , дирекционных углов α и углов наклона δ на определяемую точку. Под линейными – измерение наклонных расстояний S до определяемой точки.

Для трёхмерного пространства используют в качестве круговых критериев сферу радиуса M или её t -кратное увеличение, где M является корнем квадратным из следа матрицы (1), то есть:

$$M = \sqrt{spK_{XYZ}} = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2}. \quad (48)$$

Объём такой сферы служит для характеристики вероятности нахождения в ней определяемой точки. По данным работы [4] эта вероятность в

зависимости от соотношения полуосей эллипсоида СКО и $t = 1, 2, 3$ составляет соответственно 0,683-0,608, 0,954-0,992, 0,997-1.

Характеристика точности с помощью M совершенно не учитывает форму и ориентировку относительно координатных осей соответствующего эллипсоида СКО. Подтвердим сказанное простым примером. Пусть один вариант определения координат точки T даёт эллипс ошибок с полуосями $A = B = 3,6$ см, а другой вариант даёт $A = 5$ см, $B = 1$ см. Очевидно, что первый вариант предпочтителен. Однако, если сравнивать их по M , то придём к парадоксальному выводу о их равнозначности, поскольку и в первом и во втором случае получаем одну и ту же $M = 5,1$ см. Поэтому, по аналогии с [65] нами [67] предложены радиальные ошибки с учётом корреляции для более объективной сравнительной оценки точности положения точек, во-первых, в плоскостях $хоу$, $хоз$, $уоз$:

$$\begin{aligned} M_{K_1} &= \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + 2|m_{XY}|}, \\ M_{K_2} &= \sqrt{m_X^2 + m_Z^2 + 2|m_{XZ}|}, \\ M_{K_3} &= \sqrt{m_Y^2 + m_Z^2 + 2|m_{YZ}|}, \end{aligned} \quad (49)$$

и, во-вторых, в трёхмерном пространстве:

$$M_K = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2 + 2|m_{XY}| + 2|m_{XZ}| + 2|m_{YZ}|}. \quad (50)$$

Результаты статистического моделирования [53] показали, что отношение M_K/M может достигать 1,4 и более. Это даёт представление о том, какая информация теряется при использовании традиционной радиальной ошибки M и говорит в пользу применения M_K для более объективных сравнительных оценок точности.

Что касается эллипсоида и подероида, то о них можно прочесть в работах [74, 75, 76, 79, 101, 107], где показаны приёмы вычисления их полуосей, определение ориентировки в пространстве и ошибки положения пункта по заданному направлению. Но примеров использования таких геометрических критериев в качестве иллюстрации компонентов матрицы (1) в литературе не встречается.

Ряд исследователей используют объём эллипсоида для характеристики вероятности нахождения в нём определяемой точки. Например, в работе [79] показано, что при $t = 0,5; 1,0; 1,2; 1,5; 1,8; 2,0; 2,4; 2,5; 3,0$ определяемая точка находится внутри $t\sqrt{2}$ – кратного эллипсоида СКО с вероятностью соответственно 0,0537; 0,4276; 0,5895; 0,7877; 0,9096; 0,9540; 0,9908; 0,9941; 0,9995.

В работе [85] изложен принцип использования трёх кругов Моора для определения ошибки положения точки в трёхмерном пространстве по заданному направлению, а в работе [66] нами уточняются и расширяются теоретические предпосылки такой интерпретации.

Ошибку положения определяемой точки можно характеризовать окружностями СКО, построенными в плоскостях $хоу$, $хоз$ и $уоз$. Если известны полуоси эллипсоида, то можно получить окружности СКО, ориентированные относительно этих полуосей. Переход от системы полуосей эллипсоида к принятой системе прямоугольных координат даёт возможность иметь окружности СКО, непосредственно ориентированные относительно осей x , y , z . Определение параметров таких окружностей производится по компонентам обратной матрицы Q или ковариационной матрицы K_{xyz} .

При определении положения точки T полярной пространственной засечкой матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (51)$$

в которой количество столбцов равно трём, а количество строк соответствует числу измеренных величин. Если для определения координат точки T (рис. 12) измерены α , δ и S , то коэффициенты исходных уравнений ошибок a , b , c вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_\alpha &= -q \sin \alpha / \cos \delta, & b_\alpha &= q \cos \alpha / \cos \delta, & c_\alpha &= 0, \\ a_\delta &= q \cos \alpha \sin \delta, & b_\delta &= q \sin \alpha \sin \delta, & c_\delta &= -q \cos \delta, \\ a_S &= -\cos \alpha \cos \delta, & b_S &= \sin \alpha \cos \delta, & c_S &= \sin \delta, \end{aligned} \quad (52)$$

причём здесь градиент $q = \rho/S$, а S – наклонная длина стороны.

Прямая угловая пространственная засечка предусматривает измерение, как минимум, двух горизонтальных (или дирекционных) и одного вертикального угла или двух вертикальных и одного горизонтального (или дирекционного) угла. В этом случае в составлении матрицы A участвуют только коэффициенты, относящиеся к угловым измерениям.

Электронный тахеометр позволяет выдавать на экран монитора горизонтальное расстояние между исходным пунктом и определяемой точкой, поэтому формулы (52) для такой засечки примут вид:

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta} &= -q \sin \alpha, & b_{\alpha,\beta} &= q \cos \alpha, & c_{\alpha,\beta} &= 0, \\ a_\delta &= -q \cos \alpha \sin 2\delta/2, & b_\delta &= q \sin \alpha \sin 2\delta/2, & c_\delta &= -q \cos^2 \delta. \end{aligned} \quad (53)$$

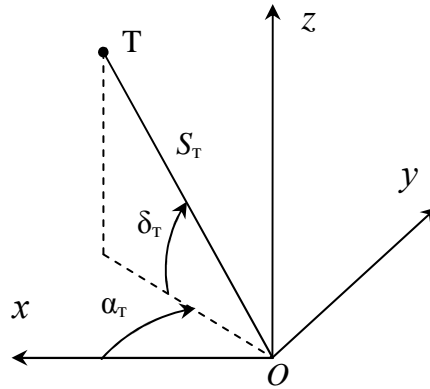


Рис. 12. Схема пространственной полярной засечки

При прямой засечке по вертикальным углам измеряют углы наклона на определяемую точку не менее чем с трёх исходных пунктов. Коэффициенты a_δ , b_δ , c_δ находят согласно (53).

В обратной угловой засечке измеряют на определяемой точке, как минимум, один горизонтальный угол и два угла наклона на два исходных пункта. Коэффициенты a_δ , b_δ , c_δ находят по формулам (53), определив предварительно по плану дирекционные углы и длины сторон засечки. Коэффициенты a_β и b_β находят аналогично обратной угловой засечке на плоскости.

Линейная засечка предусматривает измерение наклонных расстояний до определяемой точки не менее чем с трёх исходных пунктов. Здесь коэффициенты a_s , b_s , c_s вычисляют по формулам (52).

Матрица N коэффициентов системы нормальных уравнений имеет вид:

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{pmatrix}, \quad (54)$$

причём её можно получить различными способами.

Как отмечено выше, если при линейно-угловых измерениях принять $1p_s = 1$, то компоненты матрицы A (51), относящиеся к линейным измерениям, останутся без изменения, а компоненты этой матрицы, относящиеся к угловым измерениям, необходимо умножить на $\sqrt{p_{\beta,\alpha}}$. Если принять $p_{\beta,\alpha} = 1$, тогда умножить на $\sqrt{p_s}$ следует компоненты матрицы A , относящиеся к линейным измерениям.

Если вначале найти матрицы $N_{уг}$ и $N_{лин}$, относящиеся соответственно только к угловым и только к линейным измерениям, то матрицу N (54) можно получить одним из следующих путей:

$$\begin{aligned}
N &= N_{\text{уг}} + N_{\text{лин}} \quad (\text{при } p_S = p_{\beta,\alpha} = 1), \\
N &= N_{\text{лин}} + p_{\beta,\alpha} N_{\text{уг}} \quad (\text{при } p_S = 1, p_S \neq p_{\beta,\alpha}), \\
N &= N_{\text{уг}} + p_S N_{\text{лин}} \quad (\text{при } p_{\beta,\alpha} = 1, p_{\beta,\alpha} \neq p_S), \\
N &= p_{\beta,\alpha} N_{\text{уг}} + p_S N_{\text{лин}} \quad (\text{при } p_S \neq p_{\beta,\alpha} \neq 1).
\end{aligned} \tag{55}$$

Путём обращения матрицы N получают матрицу Q весовых коэффициентов:

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix}, \tag{56}$$

умножив компоненты которой на μ^2 , получают ковариационную матрицу ошибок координат (1).

Рассмотрим пример полярной пространственной засечки (рис. 10), в которой $S_T = 1000$ м, $\alpha_T = 135^\circ$, $\delta_T = 50^\circ$ измерены с СКО $m_S = 2$ см, $m_\alpha = m_\delta = 3''$. В соответствии с равенствами (52) составлена табл. 3 с коэффициентами a , b , c исходных уравнений ошибок, формирующих матрицу (51).

Т а б л и ц а 3

Характеристика и коэффициенты a , b , c пространственной засечки

Углы, расстояния	Направления	S , м	q , сек/см	α , градусы	δ , градусы	a	b	c
α	$O-T$	1000	2,06	135	-	-2,2690	-2,2690	-
δ	$O-T$	1000	2,06	-	50	-1,1173	1,1173	-1,3258
S	$O-T$	1000	1	135	50	-0,4545	0,4545	0,7660

На основании данных этой таблицы составлены две матрицы: $N_{\text{уг}}$ из коэффициентов, относящихся к угловым измерениям и $N_{\text{лин}}$ из коэффициентов, относящихся к линейным измерениям. Для этого, приняв $\mu = 2$ см ($p_S = 1$), получим $p_{\alpha,\delta} = \mu^2/m_{\alpha,\delta}^2 = 0,444$ (см/сек)². Матрица N (54) равна сумме $N_{\text{лин}} + p_{\alpha,\delta} N_{\text{уг}}$, откуда обратная матрица (56) будет равна:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,4710 & -0,2525 & -0,1641 \\ -0,2525 & 0,4710 & 0,1641 \\ -0,1641 & 0,1641 & 0,8054 \end{pmatrix}$$

По её компонентам определяем $m_x = \mu\sqrt{Q_{xx}} = 1,37$ см , $m_y = \mu\sqrt{Q_{yy}} = 1,37$ см , $m_z = \mu\sqrt{Q_{zz}} = 1,79$ см. Матрица Q , умноженная на $\mu^2 = 4$ см², даст ковариационную матрицу (1):

$$K_{XYZ} = \begin{pmatrix} 1,884 & -1,010 & -0,656 \\ -1,010 & 1,884 & 0,656 \\ -0,656 & 0,656 & 3,221 \end{pmatrix},$$

которая полностью совпадает с этой матрицей, найденной для данного примера по формулам:

$$m_x^2 = \cos^2\delta\cos^2\alpha\left(m_S^2 - \frac{2S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right) + \frac{S^2m_\alpha^2}{\rho^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\delta),$$

$$m_y^2 = \cos^2\delta\sin^2\alpha\left(m_S^2 - \frac{2S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right) + \frac{S^2m_\alpha^2}{\rho^2}(\sin^2\alpha + \cos^2\delta),$$

$$m_z^2 = m_S^2 - \cos^2\delta\left(m_S^2 - \frac{S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right), \quad (57)$$

$$m_{xy} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[\cos^2\delta\left(m_S^2 - \frac{2S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right) + \frac{S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right],$$

$$m_{xz} = \frac{1}{2}\sin 2\delta\cos\alpha\left(m_S^2 - \frac{2S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right),$$

$$m_{yz} = \frac{1}{2}\sin 2\delta\sin\alpha\left(m_S^2 - \frac{2S^2m_\alpha^2}{\rho^2}\right).$$

откуда получим те же значения СКО $m_x = \sqrt{1,884} = 1,37$ см , $m_y = \sqrt{1,884} = 1,37$ см , $m_z = \sqrt{3,222} = 1,79$ см.

Элементы окружностей СКО, характеризующих ошибку положения точки Т в плоскостях $хоу$, $хоз$, $уоз$ можно определять следующим образом.

Во-первых, можно в матрице N выделить блоки 2×2 :

$$\begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [aa] & [az] \\ [az] & [bz] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [bb] & [bz] \\ [bz] & [zz] \end{pmatrix}, \quad (58)$$

и по формулам (24) и (25) вычислить $R_{1,2,3}$, $e_{1,2,3}$ и $\phi_{1,2,3}$.

Если в матрице Q выделить блоки 2×2 :

$$\begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} \\ Q_{XY} & Q_{YY} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XZ} \\ Q_{XZ} & Q_{ZZ} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_{YY} & Q_{YZ} \\ Q_{YZ} & Q_{ZZ} \end{pmatrix}, \quad (59)$$

то по формулам (26) и (27) можно вычислить $R_{1,2,3}$, $e_{1,2,3}$ и $\varphi_{1,2,3}$ или угол 1Т2 (рис. 7) между соответствующими СКО m_x , m_y , m_z :

$$\beta_{XY,XZ,YZ} = 180^\circ - \arcsin \frac{Q_{xy,xz,yz}}{\sqrt{Q_{XX,XX,YY} Q_{YY,ZZ,ZZ}}}. \quad (60)$$

Наконец, по выделенным в матрице (1) блокам:

$$\begin{pmatrix} m_x^2 & m_{XY} \\ m_{XY} & m_Y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_x^2 & m_{XZ} \\ m_{XZ} & m_Z^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_Y^2 & m_{YZ} \\ m_{YZ} & m_Z^2 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

можно также вычислить угол 1Т2:

$$\beta_{XY,XZ,YZ} = 180^\circ - \arcsin \frac{m_{XY,XZ,YZ}}{m_{X,X,Y} m_{Y,Z,Z}}, \quad (62)$$

причём по формулам (60) и (62) должны получить один и тот же результат. При этом значения углов $< 180^\circ$ говорят о левом эксцентриситете окружностей СКО, если $> 180^\circ$ – о правом. В нашем примере $\beta_{XY} = 212,4^\circ$ (правый эксцентриситет), $\beta_{XZ} = 195,4^\circ$ (правый эксцентриситет), $\beta_{YZ} = 164,6^\circ$ (левый эксцентриситет).

Окружности СКО в плоскостях $хоу$, $хоz$, $уoz$ можно построить по значениям $R_{1,2,3}$, $e_{1,2,3}$ и $2\varphi_{1,2,3}$, при этом ориентирование первых двух окружностей осуществляется относительно оси x , а третьей относительно оси y . В нашем примере $R_1 = 1,32$ см, $e_1 = 0,38$ см, $2\varphi_1 = 270^\circ$, $R_2 = 1,57$ см, $e_2 = 0,30$ см, $2\varphi_2 = 224,5^\circ$, $R_3 = 1,57$ см, $e_3 = 0,30$ см, $2\varphi_3 = 135,5^\circ$.

Другой путь построения окружностей СКО в плоскостях $хоу$, $хоz$, $уoz$ предусматривает откладывание на сторонах угла 1Т2 равного β_{XY} , β_{XZ} , β_{YZ} отрезков соответственно m_x и m_y , m_x и m_z , m_y и m_z и найти центр искомой окружности.

По построенным окружностям СКО можно определить ошибки положения точки Т в плоскостях $хоу$, $хоz$ или $уoz$ по любым направлениям и коэффициент корреляции между ними по изложенным выше правилам.

Для получения окружностей СКО, ориентированных в системе осей эллипсоида СКО, необходимо вначале найти собственные значения матрицы (1) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Для этого необходимо решить известное характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 spK_{XYZ} + \lambda(detK_{XY} + detK_{XZ} + detK_{YZ}) - detK_{XYZ} = 0, \quad (63)$$

где spK_{XYZ} и $detK_{XYZ}$ – след и определитель матрицы (1); $detK_{XY}$, $detK_{XZ}$, $detK_{YZ}$ – определители соответствующих блоков (61) этой матрицы. В нашем примере $spK_{XYZ} = 6,989 \text{ см}^2$, $detK_{XYZ} = 7,397 \text{ см}^6$, $detK_{XY} = 2,529 \text{ см}^4$, $detK_{XZ} = 5,638 \text{ см}^4$, $detK_{YZ} = 5,638 \text{ см}^4$.

Существует ряд способов решения кубического уравнения (63), среди которых особого внимания заслуживают те, которые позволяют получить его корни $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. К ним относится способ, описанный в работе [101] и заключающийся в том, что вначале находят вспомогательные величины p , q и ν , используя $D = detK_{XY} + detK_{XZ} + detK_{YZ} = 13,805 \text{ см}^4$.

$$p = -\frac{sp^2K_{XYZ}}{3} + D = -2,477 \text{ см}^4,$$

$$q = -2\left(\frac{spK_{XYZ}}{3}\right)^3 + \frac{spK_{XYZ}D}{3} - detK_{XYZ} = -0,524 \text{ см}^6, \quad (64)$$

$$\nu = \arccos \frac{-q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = 69,6^\circ.$$

Затем вычисляют собственные значения матрицы (1):

$$\lambda_1 = \frac{spK_{XYZ}}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\nu}{3} = 4,00 \text{ см}^2,$$

$$\lambda_2 = \frac{spK_{XYZ}}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\nu}{3} + 60^\circ\right) = 2,11 \text{ см}^2, \quad (65)$$

$$\lambda_3 = \frac{spK_{XYZ}}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\nu}{3} - 60^\circ\right) = 0,874 \text{ см}^2,$$

откуда получаем полуоси эллипсоида СКО $A = \sqrt{\lambda_1} = 2,00 \text{ см}$, $B = \sqrt{\lambda_2} = 1,45 \text{ см}$, $C = \sqrt{\lambda_3} = 0,93 \text{ см}$. Контролем вычислений служит равенство $detK_{XYZ} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 4,00 \times 2,11 \times 0,874 = 7,377 \text{ см}^6$ (расхождение за счёт округлений).

Методика построения и применения окружностей СКО в системе осей эллипсоида изложена в работе [66] и заключается в следующем (рис. 13, а, б).

Откладывают от произвольной точки 1 отрезки $1-2 = C$, $1-3 = B$, $1-4 = A$ и проводят три окружности радиусами $R_1 = 0,5(A + B)$, $R_2 = 0,5(A + C)$, $R_3 = 0,5(B + C)$. Эти окружности располагаются в плоскостях ATB , ATC ,

BTC , где T является центром эллипсоида, и ими можно пользоваться для иллюстрации СКО точки T в этих плоскостях.

Для характеристики точности положения точки T по направлению, заданному углами α' и δ' , проводят из центра O_1 первой окружности (центры второй и третьей окружностей на рис. 13, б не показаны) прямую O_15 под углом $2\alpha'$. Имеем $1-5 = \rho$ радиус-вектор подеры с полуосями A и B , составляющий с большой полуосью A угол α' (рис. 13, а), перенеся который на горизонтальный диаметр $3-4$, получают точку $5'$, то есть отрезок $1-5 = 1-5'$.

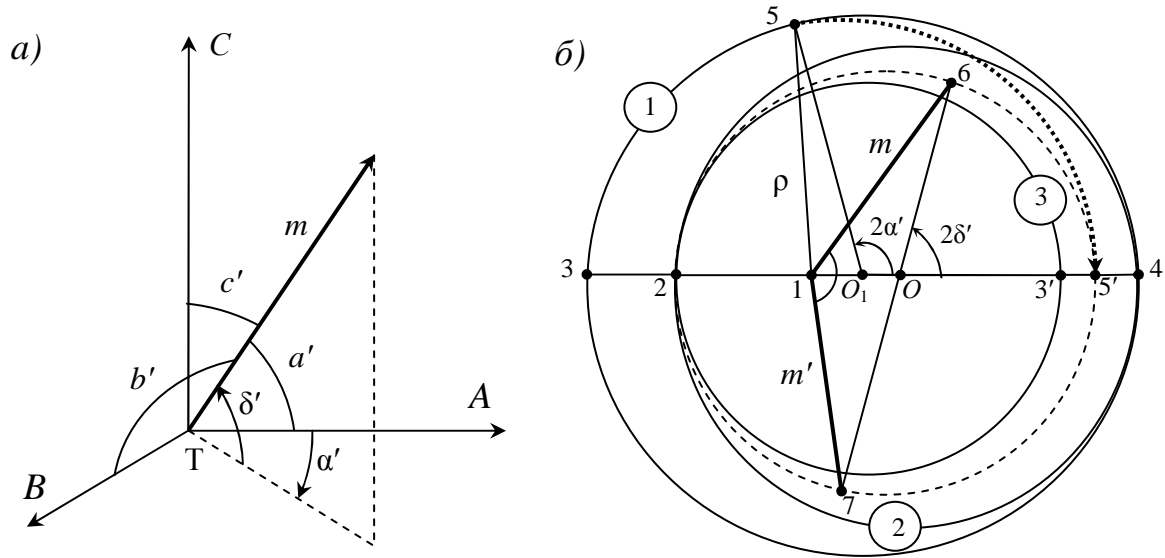


Рис. 13. Ориентирные углы (а) и окружности СКО в системе осей эллипсоида (б)

Поделив отрезок $2-5'$ пополам, находят положение центра O окружности СКО (пунктирная), лежащей в плоскости угла δ' . Проведя под углом $2\delta'$ диаметр $6-7$ этой окружности, получают СКО $1-6 = m$, $1-7 = m'$ по перпендикулярному в плоскости угла δ' направлению и коэффициент корреляции между ними $r = \sin(6-1-7)$. Обратим внимание на то, что если значение угла δ' отрицательное, то при построениях откладывают $2\delta'$ по ходу часовой стрелки.

Для характеристики точности положения точки T по любому направлению, заданному углами α и δ относительно осей xuz (рис. 14, б), необходимо осуществить переход от этих углов к углам α' и δ' в системе осей эллипсоида (рис. 13, а). После этого можно использовать изложенную выше методику построения окружностей СКО.

В данном случае необходимо знать углы a_x, a_y, a_z (рис. 14, а), v_x, v_y, v_z и c_x, c_y, c_z , которые составляют полуоси A, B, C эллипсоида с осями координат. Эти углы можно вычислить, если предварительно найти величины $a_{x,y,z}, b_{x,y,z}, c_{x,y,z}$, которые связаны с направляющим косинусами $\cos a_{x,y,z}, \cos b_{x,y,z}, \cos c_{x,y,z}$.

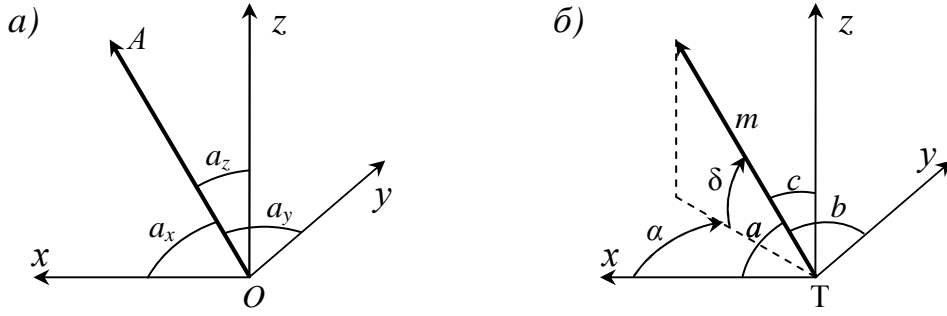


Рис. 14. Ориентирные углы в системе координат XYZ

Так, для полуоси A находят эти величины, подставив соответствующие компоненты ковариационной матрицы (1) и её собственное значение λ (65) в формулы

$$\begin{aligned} a_x &= m_{xy}m_{yz} - (m_y^2 - \lambda_1)m_{xz} = -2,051 \text{ см}^4, \\ a_y &= m_{xy}m_{xz} - (m_x^2 - \lambda_1)m_{yz} = 2,051 \text{ см}^4, \\ a_z &= (m_x^2 - \lambda_1)(m_y^2 - \lambda_1) - m_{xy}m_{xy} = 3,457 \text{ см}^4, \end{aligned} \quad (66)$$

$$d_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 4,513 \text{ см}^4.$$

Отсюда направляющие косинусы будут равны:

$$\cos a_x = a_x/d_a = -0,454, \quad \cos a_y = a_y/d_a = 0,454, \quad \cos a_z = a_z/d_a = 0,766, \quad (67)$$

откуда $a_x = 117^\circ$, $a_y = 63^\circ$, $a_z = 40^\circ$, а контролем вычислений служит равенство $\cos^2 a_x + \cos^2 a_y + \cos^2 a_z = 1$,

Для определения $b_{x,y,z}$, $c_{x,y,z}$ с целью последующего вычисления $\cos b_{x,y,z}$ и $\cos c_{x,y,z}$ следует в формулах (67) заменить λ_1 соответственно на λ_2 и λ_3 . Правильность вычисления направляющих косинусов можно проконтролировать, проверив соблюдение следующих соотношений [74]:

$$\begin{aligned} \cos a_x \cos b_x + \cos a_y \cos b_y + \cos a_z \cos b_z &= 0, \\ \cos a_x \cos c_x + \cos a_y \cos c_y + \cos a_z \cos c_z &= 0, \\ \cos b_x \cos c_x + \cos b_y \cos c_y + \cos b_z \cos c_z &= 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Однако при вычислениях по формулам (66) мы получили нулевое решение $c_x = c_y = c_z = 0$. Причём в литературе [82, 83, 85, 86, 109] и др. о

возможности такой ситуации не упоминается. В этом случае направляющие косинусы $\text{cosc}_{x,y,z}$ следует находить как алгебраические дополнения по отношению к этим компонентам матрицы (69):

$$\begin{pmatrix} \text{cosa}_x & \text{cosa}_y & \text{cosa}_z \\ \text{cosb}_x & \text{cosb}_y & \text{cosb}_z \\ \text{cosc}_x & \text{cosc}_y & \text{cosc}_z \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Алгебраические дополнения, равные определителю второго порядка (минору), взятому со своим знаком, получают путём вычёркивания в исходной матрице i -й строки (у нас $i = 3$) и j -го столбца (у нас $j = 1, 2, 3$), то есть:

$$\begin{aligned} \text{cosc}_x &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \text{cosa}_y & \text{cosa}_z \\ \text{cosb}_y & \text{cosb}_z \end{vmatrix}, \\ \text{cosc}_y &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \text{cosa}_x & \text{cosa}_z \\ \text{cosb}_x & \text{cosb}_z \end{vmatrix}, \\ \text{cosc}_z &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \text{cosa}_x & \text{cosa}_y \\ \text{cosb}_x & \text{cosb}_y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

Как показано выше (рис. 13, б), по значениям A , B , и C можно построить окружности СКО в системе осей эллипсоида. Для определения СКО точки T по любому направлению, заданному в системе xuz углами α и δ (рис. 14, б), необходимо перейти к углам α' и δ' (рис. 13, а), задающим это направление в системе осей ABC .

Для этого вначале следует найти направляющие косинусы радиуса-вектора m в системе координат xuz (рис. 14, б):

$$\text{cosa} = \text{cos}\delta\text{cosa}, \quad \text{cosb} = \text{cos}\delta\text{sin}\alpha, \quad \text{cosc} = \text{sin}\delta. \quad (71)$$

Затем необходимо перейти к направляющим косинусам этого радиуса-вектора m в системе осей ABC (рис. 13, а):

$$\begin{pmatrix} \text{cosa}' \\ \text{cosb}' \\ \text{cosc}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cosa}_x & \text{cosa}_y & \text{cosa}_z \\ \text{cosb}_x & \text{cosb}_y & \text{cosb}_z \\ \text{cosc}_x & \text{cosc}_y & \text{cosc}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cosa} \\ \text{cosb} \\ \text{cosc} \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Наконец, исходя из соотношения $\text{cosa}' = \text{cosa}'\text{cos}\delta'$, получим:

$$\text{cosa}' = \text{cosa}'/\text{cos}\delta', \quad \delta' = (90^\circ - \alpha'). \quad (73)$$

Пусть в рассматриваемом примере требуется определить СКО точки Т по направлению, заданному в системе хуz углами $\alpha = 70^\circ$, $\delta = 60^\circ$. Согласно (72) вычисляем: $\cos a' = \cos a_x \cos \delta \cos a + \cos a_y \cos \delta \sin a + \cos a_z \sin \delta = 0,799$; $\cos c' = \cos c_x \cos \delta \cos a + \cos c_y \cos \delta \sin a + \cos c_z \sin \delta = -0,453$. Отсюда $c' = 116,9^\circ$, значит $\delta' = -26,9^\circ$, $\cos a' = 0,896$, следовательно $\alpha' = 26,4^\circ$.

Покажем сокращённый по сравнению с рис. 13 вариант построений при геометрической интерпретации ошибки положения точки Т по заданному направлению с помощью окружностей СКО.

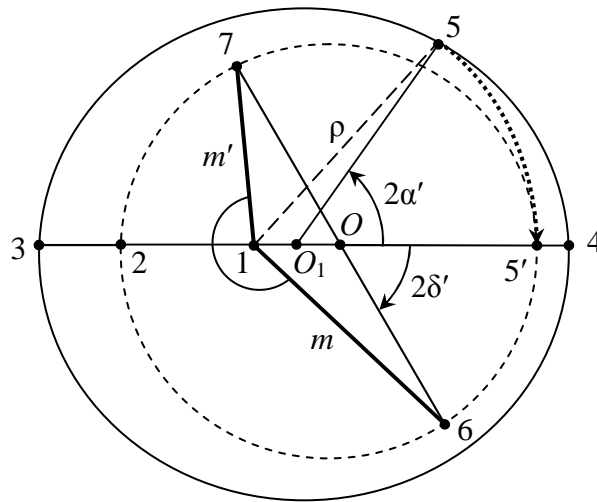


Рис. 15. Сокращённый вариант определения ошибки положения пункта в трёхмерном пространстве

Откладывают от точки 1 (рис. 15) отрезки $1-2 = C = 0,93$ см, $1-3 = B = 1,45$ см, $1-4 = A = 2,00$ см и проводят окружность радиусом $0,5(A + B) = 1,72$ см с центром O_1 . От этого центра O_1 проводят прямую под углом $2\alpha' = 52,8^\circ$ и получают отрезок $1-5 = \rho = 1,90$ см – СКО точки Т в плоскости АТВ.

Откладывают $1-5' = 1-5$ и, поделив отрезок $2-5'$ пополам, определяют положение центра O окружности СКО, расположенной в плоскости угла δ' . Проведя под углом $2\delta' = -53,8^\circ$ диаметр этой окружности $6-7$, получают $1-6 = m = 1,75$ см, $1-7 = m' = 1,20$ см (по перпендикулярному к m направлению в плоскости угла δ') и коэффициент корреляции между ними $r = \sin(\angle 6-1-7) = \sin 212,5^\circ = -0,537$.

Отметим, что СКО m точки Т по заданному направлению можно вычислить по известной формуле:

$$m^2 = A^2 \cos^2 a' + B^2 \cos^2 b' + C^2 \cos^2 c'. \quad (74)$$

Для вычисления СКО m' по формуле (74) необходимо найти соответствующие ему направляющие косинусы, что, как мы убедились выше,

представляет довольно трудоёмкий процесс, в том числе и по отношению к аналитическому определению коэффициента корреляции. Графическая интерпретация (рис. 13, 15) позволяет получать эти величины без каких-либо вычислений.

Глава 2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАСЕЧЕК

2.1. Вводные замечания

Известно большое число публикаций, посвящённых вопросам оптимизации геодезических систем в зависимости от различных критериев точности определения координат пунктов. Оптимальным считается вариант, наилучшим образом отвечающий заданным условиям-ограничениям. В качестве таких условий наиболее часто выступают условия *A*-, *D*-, *E*- и *I*-оптимизации (см. раздел 1.3.).

В работе [80] приведено описание восьми методов оптимизации и указаны способы учёта ограничений и области применения этих методов. Отмечается, что для большинства задач оптимизации процессов со многими переменными нет прямого единственного метода определения оптимума.

Применительно к геодезическим построениям различают в основном три вида оптимизации: 1-го, 2-го и 3-го порядка. К оптимизации 1-го порядка относятся вопросы, связанные с конфигурацией сети. Ко 2-му порядку относятся проблемы оптимизации весов измерений. Оптимизация 3-го порядка объединяет первые два. Кроме того, такие задачи могут решаться с дополнительными ограничениями экономического характера [45, 105].

Детальный обзор применяемых способов оптимизации весов в геодезических сетях приведен в диссертации [114]. Работа [91] посвящена оптимизации весов в сетях сгущения. В книге [45] рассматривается широкий круг вопросов оптимального проектирования геодезических сетей, затрагивающий, в частности, выбор оптимального положения точек при заданной программе наблюдений и разработку оптимальной программы наблюдений при заданном расположении точек. Из других работ остановимся вкратце на таких, где присутствуют элементы геометрической интерпретации процессов оптимизации или, на наш взгляд, эти процессы могут быть геометрически проиллюстрированы.

Так, в работе [10] предлагается графическое представление ковариационной матрицы ошибок координат пунктов сети в виде линий равных ковариаций. Расположение этих линий позволяет контролировать вычисления и оценку точности сети. В работе [81] используется симметричная ковариационная матрица 2×2 для оценки качества построения сети в целом, геометрической интерпретацией которой является эллипс. Этим эл-

липсом описывается обобщённое линейное искажение сети. В работе [94] оптимизируется конфигурация сети. Здесь в качестве критерия оптимальности выступает критериальная матрица *Baarda*, которая конструируется из исходной ковариационной матрицы координат пунктов сети путём изменения её элементов так, чтобы для заданных пунктов сети и приращений их координат получить как можно меньшие эллипс ошибок, приближающиеся к круговой форме.

Другая группа работ посвящена методике поиска оптимального местоположения определяемого пункта. Здесь отметим предложение [96], основанное на законах теоретической механики и работы [26, 44], в которых применён итерационный метод поиска, основанный на условии *A*-оптимизации. При этом в [26] радиальная ошибка выражается через координаты исходных пунктов и решение задачи ведётся методом приближений до тех пор, пока эта ошибка не будет меньше заданной величины. А в работе [44] минимизируется след весовой матрицы, при этом применён градиентный метод, причём проектируемый пункт перемещается до тех пор, пока изменения функции не станут меньше заданной величины.

По мнению многих авторов [1, 2, 45, 89, 93, 94, 102, 109, 112], *E*-оптимизация обладает рядом существенных преимуществ перед другими условиями-ограничениями, о чём подчёркивается в нашей работе [55]. Выполнение условия *E*-оптимизации приводит к нулевому эксцентриситету окружности СКО, а эллипс и подера трансформируются в круг радиуса *R*.

Одним из возможных способов *E*-оптимизации засечки является определение геометрических параметров дополнительных угловых, линейных или линейно-угловых измерений, приводящих к нулевому эксцентриситету окружности СКО. Однако из работ, посвящённых этой проблеме, можно отметить лишь [1, 96, 98], где рассматривается методика определения геометрических параметров только дополнительных угловых измерений для многократной прямой угловой, или для обратной угловой [2] засечек.

Целый ряд работ, посвящённых проектированию оптимальных программ наблюдений, основан на принципе последовательного исключения малоинформативных измерений из всех возможных. Итерационный процесс исключения продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие, накладываемое на целевую функцию, связанную со следом матрицы обратных весов или другими критериями оптимальности [47, 87]. Геометрической интерпретацией такого итерационного процесса можно считать описанный в работе [42] способ, основанный на построении инверсионной фигуры с учётом всех возможных связей определяемого пункта с исходными и с последующим упрощением этой фигуры за счёт направлений с малым весом.

В нашей работе [69] показано, как использование линий крайних положений определяемого пункта обеспечивает наглядность выбора опти-

мальной программы угловых, линейных или линейно-угловых измерений из всех возможных альтернатив и однозначность получаемых результатов.

В свою очередь модуль и ориентировка замыкающей квадратического полигона даёт однозначное решение по определению геометрических параметров дополнительных угловых, линейных или линейно-угловых измерений, приводящих к изотропному по точности положению определяемого пункта. В этом случае $A = B = R$ и $e = 0$. Матрицы N (24) и Q (26) диагональные, $[ab] = 0$, $Q_{xy} = 0$, $[aa] = [bb]$, $Q_{xx} = Q_{yy}$, поэтому формулы (24) и (26) примут вид:

$$R = \frac{\mu}{\sqrt{[aa]}} = \mu \sqrt{Q_{xx}}. \quad (75)$$

В то же время из выражения (29) следует, что если замыкающая q_3 квадратического полигона (см. рис. 6) равна нулю, это также свидетельствует о нулевом эксцентриситете окружности СКО, радиус которой равен (15). Поэтому, рассматривая замыкающую как сторону квадратического полигона, можно по её длине и обратной ориентировке $2\varphi + 180^\circ$, во-первых, определить требуемые геометрические параметры дополнительных измерений. Во-вторых, можно получить матрицу $N_{\text{доп}}$ таких измерений:

$$N_{\text{доп}} = q_3 \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Теперь матрица $N_{e=0}$ E -оптимальной засечки равна сумме исходной матрицы $N_{\text{исх}}$ и матрицы $N_{\text{доп}}$:

$$N_{e=0} = N_{\text{исх}} + N_{\text{доп}} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix} + N_{\text{доп}}. \quad (77)$$

Обратим внимание, что при таком подходе к решению задачи, найденный по формулам (63) или (15) радиус R должен быть равен B , подсчитанной по формуле (14) для исходной схемы. Подтверждение сказанному можно найти в нашей работе [55], в которой рассмотрены все виды засечек и приведены рабочие формулы для определения геометрических параметров дополнительных угловых, линейных и линейно-угловых измерений.

Так (рис. 16), дирекционный угол α_{j-T} стороны, которую следует включить в дополнительные угловые измерения, длину S_i этой стороны и радиус R полученной в результате этого окружности СКО нулевого эксцентриситета можно найти по формулам:

$$\alpha_{J-T} = \varphi + 90^\circ, \quad S_i = \rho \sqrt{\frac{p_{\beta, \alpha}}{q_3}}, \quad R = \mu \sqrt{\frac{2}{\Pi + q_3}}. \quad (78)$$

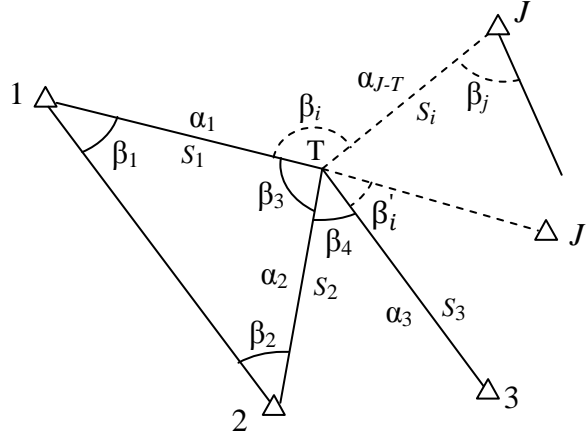


Рис. 16. Схема к определению параметров дополнительного угла

Формулы (78) справедливы в случае измерения угла β_j на исходном пункте J . Если дополнительный угол β_i измеряется на определяемой точке T , то градиент этого угла связан с замыкающей полигона выражением:

$$q_{\beta_i} = \sqrt{\frac{q_3}{p_\beta}}. \quad (79)$$

Если 1-Т является одной из сторон дополнительного угла β_i , то дирекционный угол α_{J-T} второй стороны этого угла и градиент направления $J-T$ можно вычислить по формулам:

$$\alpha_{J-T} = \operatorname{arctg} \frac{q_1 \sin \alpha_1 + q_{\beta_i} \sin (\varphi + 90^\circ)}{q_1 \cos \alpha_1 + q_{\beta_i} \cos (\varphi + 90^\circ)}, \quad (80)$$

$$q_i^2 = q_1^2 + q_{\beta_i}^2 + 2q_1 q_{\beta_i} \cos (\varphi + 90^\circ - \alpha_1).$$

Аналогичным образом могут быть найдены геометрические параметры дополнительного угла β'_i (вместо угла β_i), если за одну из сторон дополнительного угла на рис. 16 принять 3-Т.

В случае линейных измерений дирекционный угол дополнительной стороны, в отличие от (78), равен φ . Принимая $p_{S_i} = q_3$, находим необходимую точность измерения длины этой стороны:

$$m_{S_i} = \frac{\mu}{\sqrt{q_3}}. \quad (81)$$

Исходная линейно-угловая схема (рис. 16) может быть дополнена линейными, угловыми или линейно-угловыми измерениями. Это может быть измерение дополнительного угла β_i или дирекционного угла α_i стороны, параметры которой рассчитываются согласно формул (78). Если ограничиться только дополнительными линейными измерениями, то дирекционный угол дополнительной стороны должен быть равен φ , а точность её измерения должна удовлетворять условию (81). Если предусматриваются линейно-угловые дополнительные измерения, то, имея в виду соотношение $(p_{S_i} + p_{\beta,\alpha}q_i^2) = q_3$, получим выражение для градиента направления:

$$q_i = \sqrt{\frac{q_3 - p_{S_i}}{p_{\beta,\alpha}}}. \quad (82)$$

Задаваясь весами p_{S_i} и $p_{\beta,\alpha}$, вычисляют q_i и S_i дополнительной стороны, дирекционный угол которой зависит от знака разности $(p_{S_i} - q_3)$. Если она отрицательна, то дирекционный угол равен $(\varphi + 90^\circ)$, если положительна, то дирекционный угол равен φ . Эту сторону включают в угловые измерения (измеряют β_i или α_i). В дополнительные линейные измерения необходимо включать сторону с дирекционным углом φ , точность измерения которой должна соответствовать заданному значению p_{S_i} .

С учётом всего сказанного отметим новые, по сравнению с ранее отмеченными, положительные качества замыкающей квадратического полигона. Она, во-первых, позволяет получать однозначное решение по определению геометрических параметров дополнительных угловых, линейных или линейно-угловых измерений, приводящих к случаю изотропии. Во-вторых, величина и ориентировка замыкающей дают возможность геометрически интерпретировать процесс формирования матрицы $A_{e=0}$ путём добавления к исходной матрице A дополнительных коэффициентов уравнений ошибок a и b .

Так, для получения $A_{e=0}$ необходимо к матрице A добавить:

– строку коэффициентов $a_{yT} = -\sqrt{q_3} \cos\varphi$ $b_{yT} = -\sqrt{q_3} \sin\varphi$ при измерении дополнительного угла β_i или α_i , (рис. 16);

– строку коэффициентов $a_{л} = \sqrt{q_3} \cos\varphi$ и $b_{л} = \sqrt{q_3} \sin\varphi$ при измерении длины дополнительной стороны S_i ;

– две строки коэффициентов, одна из которых относится к дополнительным угловым измерениям β_i или α_i , то есть $a_{yT} = -\sqrt{q_3 - p_S} \cos\varphi$ и $b_{yT} = -\sqrt{q_3 - p_S} \sin\varphi$, а другая строка коэффициентов $a_{л} = \sqrt{p_S} \cos\varphi$ и $b_{л} = \sqrt{p_S} \sin\varphi$ относится к линейным измерениям длины дополнительной стороны S_i .

Следствием этих обобщений является выражение (76) для матрицы $N_{\text{доп}}$ дополнительных измерений, приводящих к нулевому эксцентриситету окружности СКО.

2.2. Полярная засечка

Практически все функциональные возможности современных электронных тахеометров базируются на элементарной полярной засечке на плоскости или в трёхмерном пространстве. О оценке точности последней подробно изложено в разделе 1.4.3. В полярной засечки на плоскости измеряют горизонтальное проложение D (используя, например, клавишу SDh прибора) и горизонтальный β или дирекционный угол α на определяемую точку T (рис. 17).

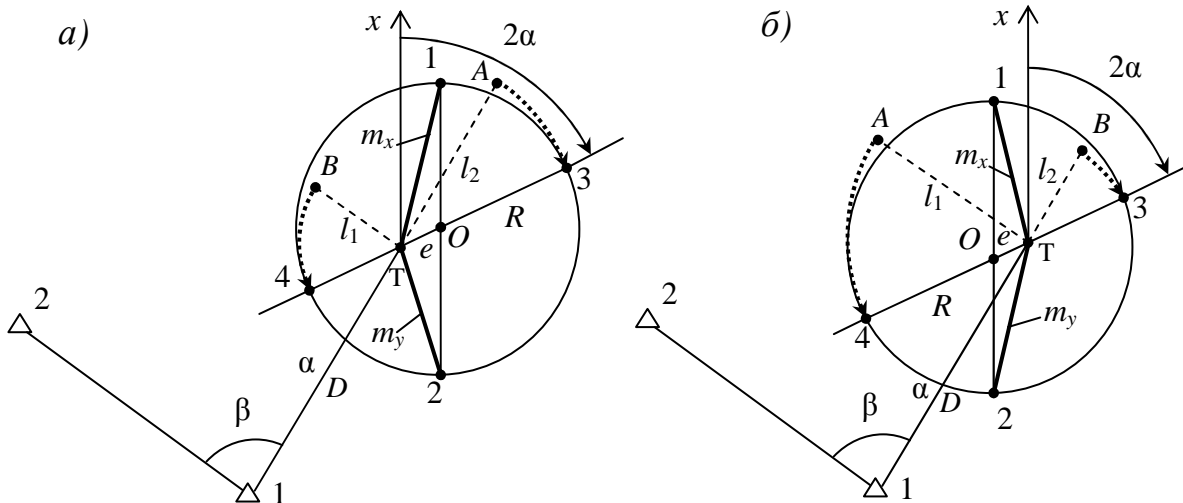


Рис. 17. Окружности СКО полярной засечки с левым (а) и правым (б) эксцентриситетами

Оценку точности такой засечки с использованием свойств окружности СКО можно выполнить, используя значения поперечного l_1 и продольного смещения l_2 точки T :

$$l_1 = \frac{m_{\beta,\alpha} D}{\rho}, \quad l_2 = m_D, \quad (83)$$

где $m_{\beta,\alpha}$ и m_D являются СКО угловых и линейных измерений.

Для построения окружности СКО достаточно провести через точку Т прямую под углом 2α к оси x и перенести на эту линию отрезки l_1 и l_2 (точки 3 и 4). Поделив отрезок 3-4 пополам, получают центр O искомой окружности радиуса $R = 0,5(l_1 + l_2)$ и эксцентриситета $e = 0,5(l_1 - l_2)$.

Если $l_1 < l_2$, то имеет место левый эксцентриситет (рис. 17, а), а $l_2 = A$, $l_1 = B$ большой и малой полуосям эллипса ошибок. Если $l_1 > l_2$, то имеем правый эксцентриситет (рис. 17, б), где $l_2 = B$, $l_1 = A$.

Проведя диаметр 1-2 окружности СКО, получаем СКО точки Т по осям координат m_x и m_y , которые можно вычислить по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} m_x^2 &= e^2 + R^2 \pm 2eR\cos 2\alpha, \\ m_y^2 &= e^2 + R^2 \mp 2eR\cos 2\alpha, \end{aligned} \quad (84)$$

где верхние знаки \pm и \mp соответствуют левому эксцентриситету с положительным коэффициентом корреляции r_{xy} , а нижние – правому с отрицательным r_{xy} .

При $l_1 = l_2$ эксцентриситет $e = 0$ и центр O окружности СКО совпадает с точкой Т. В этом случае получим E -оптимальную полярную засечку, когда $A = B = R = m_x = m_y$ и коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$.

Полярная пространственная засечка широко применяется, например, при геодезическом контроле пространственного положения подкрановых путей мостовых кранов [72]. Методика такого контроля заключается в использовании электронного тахеометра для определения координат x , y , z осевых точек подкрановых рельсов путём измерения на каждую точку значений α , δ и S (рис. 12) и вычисления ковариационных матриц (1).

Особый интерес представляет использование клавиши ОНР тахеометра (определение недоступного расстояния) для производства одновременного продольного и поперечного нивелирования подкрановых рельсов с определением ширины колеи и расстояния между соседними нивелируемыми точками.

Так, установив тахеометр в произвольной точке Т (рис. 18), можно определить ширину колеи $S_{0\cdot0'}$, поперечное превышение $h_{0\cdot0'}$, расстояние $S_{0\cdot1}$ и продольное превышение $h_{0\cdot1}$. А беря за начальную точку $0'$, можно определить расстояние $S_{0\cdot1'}$ и продольное превышение $h_{0\cdot1'}$. Затем, беря за начальную точку 1 , определяют $S_{1\cdot1'}$, $h_{1\cdot1'}$, $S_{1\cdot2}$ и $h_{1\cdot2}$, а беря за начальную точку $1'$, определяют $S_{1\cdot2'}$ и $h_{1\cdot2'}$ и т. д.

Полученные по компонентам этих матриц окружности СКО не только дают исчерпывающую информацию о погрешности положения

каждой съёмочной точки, но и позволяют определять точность взаимного расположения любых двух съёмочных точек.

Окружности СКО могут быть построены в любой плоскости трёхмерного пространства по приведенной в разделе 1.4.3. методике. По радиусам-векторам этих окружностей можно судить о СКО отметок головок рельсов и их отклонений от прямой линии. Сложив квадратически соответствующие окружности СКО любых двух точек, получают относительную окружность, характеризующую точность взаимного положения этих точек (СКО ширины колеи, СКО разности отметок головок рельсов в поперечном сечении подкранового пути или на соседних колоннах и др.).

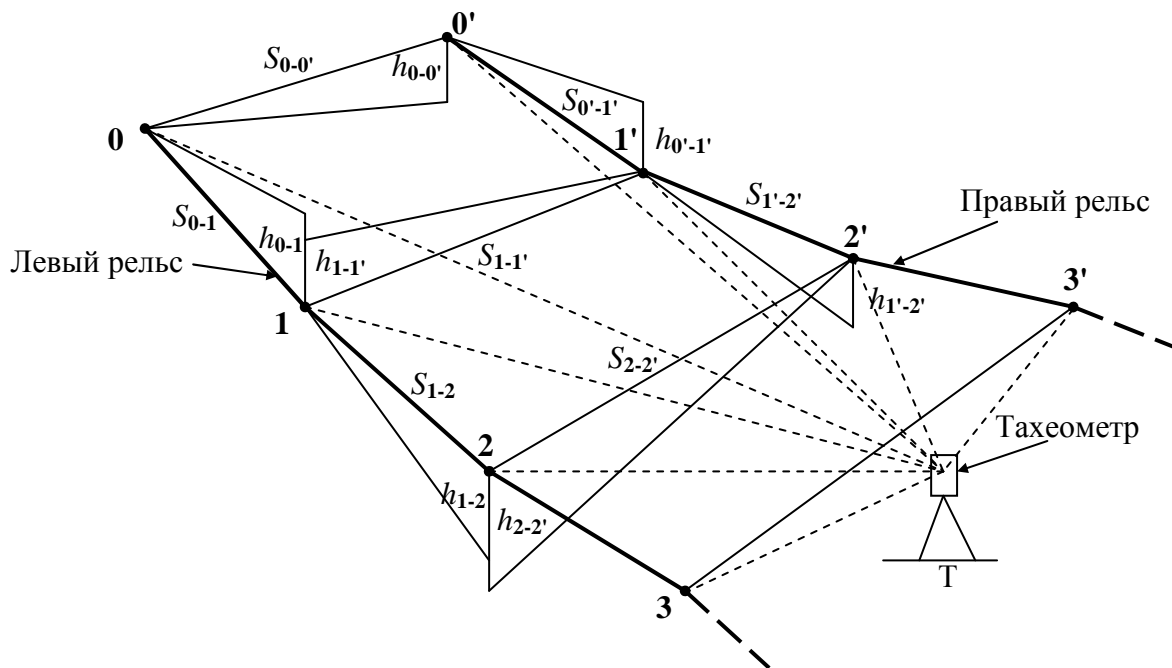


Рис. 18. Схема продольного и поперечного нивелирования подкрановых рельсов с одновременным определением ширины колеи

Аналогичным образом, действуя по схеме на рис. 18, можно определять одновременно разности отметок верха колонн сооружения и расстояния между колоннами в пролёте, в ряду и др.

Полярная пространственная засечка находит широкое применение при экспертизе промышленной безопасности зданий и сооружений [43, 72]. Один из вариантов использования полярной засечки поясняется на рис. 19 и предусматривает дискретное сканирование точек по вертикали.

Для этого устанавливают на полу цеха тахеометр в произвольной точке **Т**, расположенной под фермой. Наводят последовательно перекрестие сетки или лазерное пятно прибора на низ левой колонны **Н_Л**, точки 1, 2, 3,... и низ правой колонны **Н_П**, получая с помощью клавиши SDh прибора на каждую наблюдаемую точку горизонтальное проложение D_i и превышение h_i .

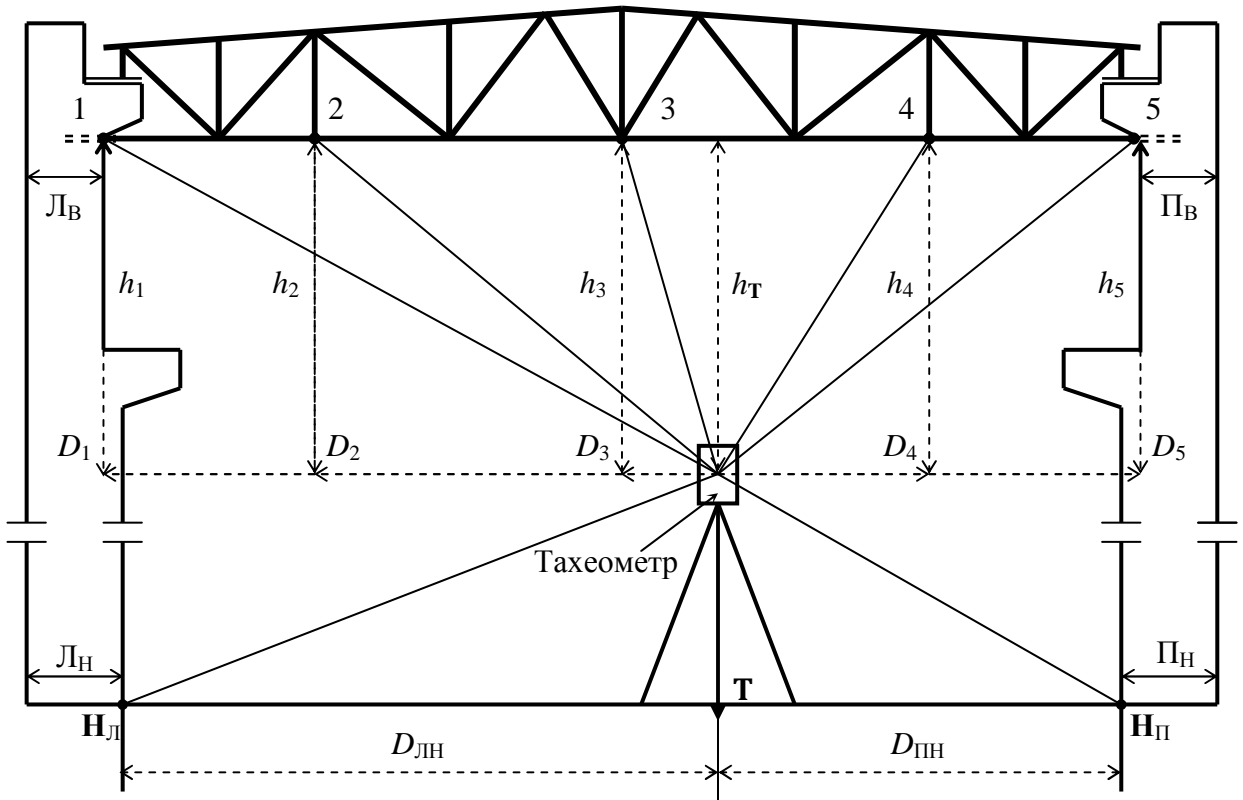


Рис. 19. Схема использования полярной засечки для сканирования точек в вертикальной плоскости

По полученным таким образом данным можно проверить вертикальность колонн, определить расстояние между ними в пролёте на уровне пола и их оголовка, найти стрелы прогиба ферм покрытия и др. Точность таких определений можно геометрически интерпретировать с помощью абсолютных и относительных окружностей СКО по методике, изложенной выше.

2.3. Прямая угловая засечка

В работе [72] изложены различные способы определения крена высоких сооружений башенного типа, в том числе и широко применяемый на практике способ прямой угловой засечки. Для решения таких засечек удобно использовать приведенные в работе [36] формулы. Их сущность заключается в том, что, зная координаты x_1 , x_2 и y_1 , y_2 концов базиса засечки 1-2 = b и дирекционные углы α_1 и α_2 с пунктов базиса 1 и 2 на определяемый пункт Т, можно вычислить координаты x_T и y_T :

$$x_T = F_2 \cos \alpha_1 - F_1 \cos \alpha_2, \quad y_T = F_2 \sin \alpha_1 - F_1 \sin \alpha_2, \quad (85)$$

$$F_i = (y_i \cos \alpha_i - x_i \sin \alpha_i) / \sin (\alpha_1 - \alpha_2), \quad i = 1, 2.$$

Методика использования прямой угловой засечки для определения крена высоких сооружений башенного типа заключается, как известно, в определении направлений на центры верхнего и нижнего его наблюдаемых сечений. В результате наблюдений вычисляют прямоугольные координаты центров верхнего и нижнего наблюдаемых сечений, частные крены по осям координат, полный крен и его направление.

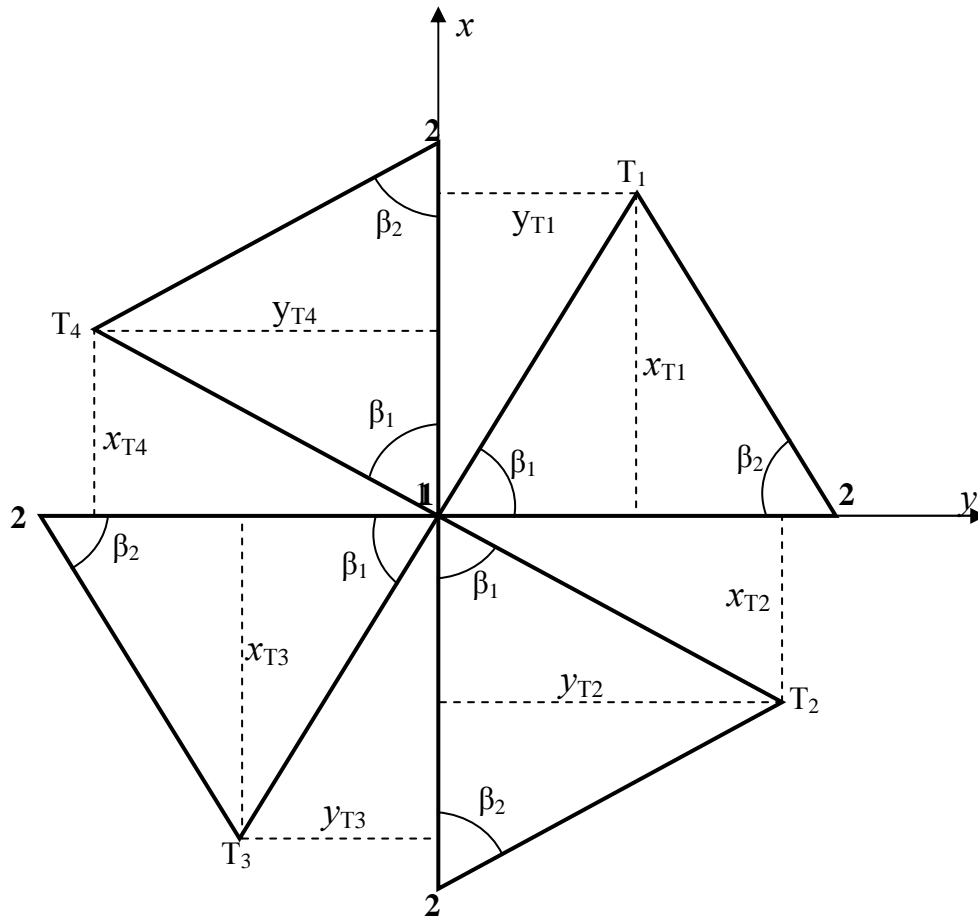


Рис. 20. Оптимальные варианты ориентирования базиса засечки

Наш многолетний опыт определения крена дымовых труб промышленных предприятий и ТЭЦ Нижегородской области показал, что ввиду застроенности их территории все работы производятся, как правило, в условной системе прямоугольных координат. В связи с этим, с целью максимального упрощения формул (85), предлагается за начало координат условной системы принимать точку 1 ($x_1 = 0, y_1 = 0$), а направление базиса 1-2 совмещать с положительным или отрицательным направлением осей x или y такой условной системы (рис. 20) [39].

В этом случае получим $F_1 = 0, F_2 = \frac{y_2 \cos \alpha_2 - x_2 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, x_T = F_2 \cos \alpha_1, y_T = F_2 \sin \alpha_1$, где в зависимости от варианта на рис. 20: $x_2 = 0, y_2 = b$; $x_2 = b, y_2 = 0$; $x_2 = 0, y_2 = b$; $x_2 = b, y_2 = 0$.

В соответствии с этим было выполнено знаковое моделирование, где в качестве засечки фигурировал равносторонний треугольник со стороной равной 150 м (рис. 20). Для этого на базе Microsoft Excel для любой координатной системы была разработана программа, в которой достаточно ввести в ПК значения координат точек базиса засечки и дирекционных углов двух сторон этой засечки, по которым программа вычисляет координаты точки Т. Полученные результаты моделирования представлены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Результаты моделирования однократных угловых засечек

Вариант	x_1	y_1	x_2	y_2	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	F1	F2	x	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T ₁	0	0	0	+150	30	330	0	150	129,904	75,000
T ₂	0	0	-150	0	120	60	0	150	-75,000	129,904
T ₃	0	0	0	-150	210	150	0	150	-129,904	-75,000
T ₄	0	0	+150	0	300	240	0	150	75,000	-129,904

Координаты точек T₁, T₂, T₃ и T₄ на рис. 20 были также определены графическим способом, которые полностью совпали с таковыми в табл. 4.

В соответствии с табл. 4 формулы (85) можно представить в виде:

$$x_{T_{1,3}} = \frac{b \cos \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)} = \pm 0,866 \times b, \quad y_{T_{1,3}} = \frac{b \cos \alpha_2 \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)} = \pm 0,5 \times b, \quad (86)$$

$$x_{T_{2,4}} = \frac{b \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)} = \mp 0,5 \times b, \quad y_{T_{2,4}} = \frac{b \sin \alpha_2 \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)} = \pm 0,866 \times b,$$

где верхние знаки перед коэффициентом b (плюс или минус) относятся к вариантам 1 и 2, а нижние – к вариантам 3 и 4.

Действительно, как следует из рис. 20, абсолютные значения $|x_{T_{1,3}}| = |y_{T_{2,4}}|$ равны между собой и являются высотами треугольников, которые равны по модулю половине базиса умноженного на $\text{tg}60^\circ$, а $|y_{T_{1,3}}| = |x_{T_{2,4}}|$ просто равны по модулю половине базиса.

Что касается определения дирекционных углов α_1 и α_2 , то для этого на местности необходимо измерить горизонтальные углы β_1 и β_2 . Тогда, применительно к рис. 20, дирекционные углы α_1 и α_2 могут быть вычислены по формулам, приведенным в табл. 5.

Причём если сооружение круглого сечения, то визирование рекомендуется выполнять по двум касательным (слева Л и справа П) к верхнему и нижнему сечению, получая два значения β_L и β_P . Средние значения $\beta = (\beta_L + \beta_P)/2$ из этих измерений принимают за направление соответственно на центр верхнего и нижнего наблюдаемого сечения.

Т а б л и ц а 5

Дирекционные углы засечки

Вариант	α_1	α_2
T ₁	$90^\circ - \beta_1$	$270^\circ + \beta_2$
T ₂	$180^\circ - \beta_1$	β_2
T ₃	$270^\circ - \beta_1$	$90^\circ + \beta_2$
T ₄	$360^\circ - \beta_1$	$180^\circ + \beta_2$

В случае, относящемся к рис. 20, средние квадратические ошибки (СКО) координат в зависимости от варианта будут равны:

$$m_{x_{1,3}} = 0,866m_b, \quad m_{y_{1,3}} = 0,5m_b, \quad (87)$$

$$m_{x_{2,4}} = 0,5m_b, \quad m_{y_{2,4}} = 0,866m_b,$$

где m_b – СКО определения базиса засечки.

Однако формулы (87) дают лишь приблизительную оценку точности, поскольку они не учитывают СКО угловых измерений. В общем случае, исследуя формулы (86) с позиций теории ошибок с использованием ошибки функции общего вида, можно получить формулы оценки точности координат точки Т, которые будут иметь сложный вид. Вместо этого используем описанную выше методику геометрической интерпретации ошибки положения точки Т.

Для этого на базе Microsoft Excel была разработана программа, в которой достаточно ввести в ПК значения дирекционных углов и длин сторон засечек, по которым программа вычисляет по формулам (13) и (14) большую полуось A , малую полуось B и румб φ' .

Исходные данные для однократных засечек на рис. 20 и результаты вычислений при принятом значении $m_{\beta,\alpha} = 10''$ приведены в табл. 6.

Т а б л и ц а 6

Исходные данные и характеристика однократных угловых засечек

Вариант	$2\alpha_i, ^\circ$	$s_i, \text{ м}$	$q_i, \text{ с/см}$	$q_i^2, \text{ с}^2/\text{см}^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	$q_3, \text{ с}^2/\text{см}^2$	$A, \text{ см}$	$B, \text{ см}$	$\varphi', ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T ₁	60	150	13,751	189,09	163,76	94,55	189,09	1,03	0,59	-0
	300	150	13,751	189,09	-163,76	94,55				
T ₂	240	150	13,751	189,09	-163,76	-94,55	189,09	1,03	0,59	-0
	120	150	13,751	189,09	163,76	-94,55				
T ₃	60	150	13,751	189,09	163,76	94,55	189,09	1,03	0,59	+0
	300	150	13,751	189,09	-163,76	94,55				
T ₄	240	150	13,751	189,09	-163,76	-94,55	189,09	1,03	0,59	-0
	120	150	13,751	189,09	163,76	-94,55				

Следует отметить, что если в качестве геометрического критерия применяется эллипс ошибок, то его большая полуось A всегда располагается внутри острого угла засечки $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$. Если угол засечки тупой, то A располагается внутри острого угла, являющегося дополнением γ до 180° . В то же время при определении румба φ' будем для всех четырёх вариантов на рис. 20 получать положительный или отрицательный нуль (графа 11 табл. 6). Наглядное представление о переходе от такого нуля к удвоенному дирекционному углу большой полуоси 2φ можно получить с помощью квадратического полигона $T-1'-2'$ со сторонами q_i^2 , дирекционные углы которых $2\alpha_i$ (рис. 21).

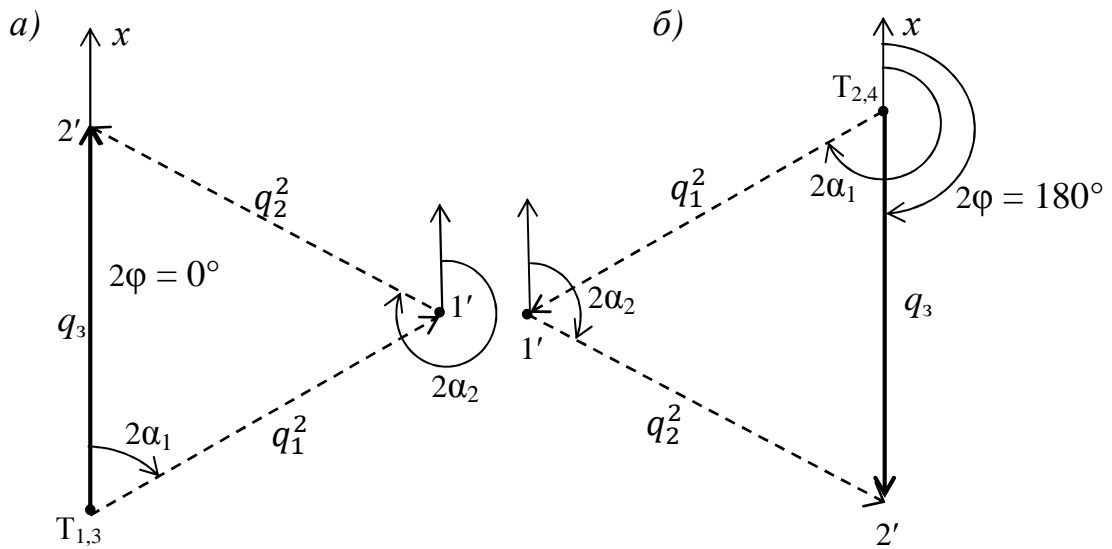


Рис. 21. Квадратические полигоны однократных засечек для вариантов 1,3 (а) и 2,4 (б)

По значениям периметра Π (12) и замыкающей q_3 полигона (13) можно вычислить радиус R и эксцентриситет e окружности СКО (29). Исходные данные для однократных засечек на рис. 20 и результаты вычислений по специально разработанной программе при принятом значении $m_{\beta,\alpha} = 10''$ приведены в табл. 7.

Т а б л и ц а 7

Оценка точности однократных угловых засечек

Вариант	Π , $\text{с}^2/\text{см}^2$	q_3 , $\text{с}^2/\text{см}^2$	A , см	B , см	R , см	e , см	m_x , см	m_y , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_{1,3}$	378,18	189,09	1,03	0,59	0,81	0,22	1,03	0,59
$T_{2,4}$	378,18	189,09	1,03	0,59	0,81	0,22	0,59	1,03

Для построения окружности СКО с внутренним эксцентриситетом достаточно отложить от точки Т по направлению замыкающей величину ТО, равную эксцентриситету e (рис. 22).

Точка О является центром этой окружности, причём сразу ориентированной относительно координатных осей, и она делит диаметр 1-2 на $T-1 = A$ и $T-2 = B$.

Проведя через центр окружности О диаметр 1-2 этой окружности (ось x), получаем СКО положения точки Т по осям координат m_x и m_y (графы 8, 9 табл. 7) как расстояния Т-1 и Т-2. В наших частных примерах (рис. 22) диаметр 1-2 совпадает непосредственно с осью x , поэтому для варианта 1, 3 СКО $m_x = A = R + e$, $m_y = B = R - e$, а для варианта 2, 4 наоборот: $m_x = B = R - e$, $m_y = A = R + e$.

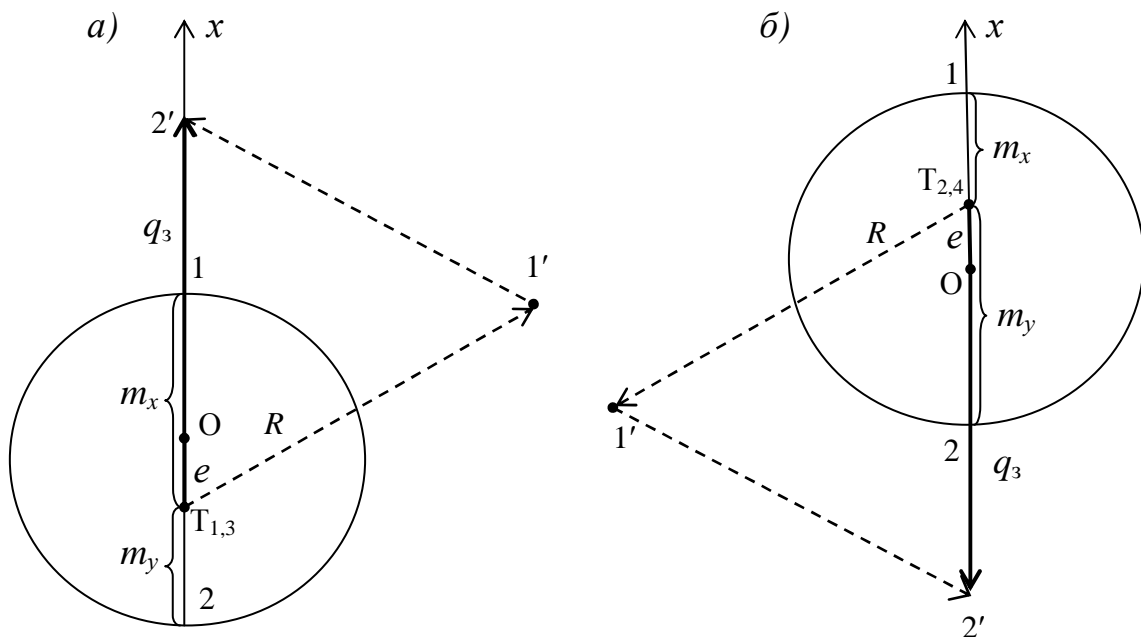


Рис. 22. Окружности СКО для вариантов 1,3 (а) и 2,4 (б)

Существует значительное количество работ, посвящённых вопросам A -, D -, E - и I -оптимизации геодезических сетей. В работах А.С. Чеботарёва (1949), М.Д. Герасименко (1986), Е. Графаренда (1968, 1971), А. Тарци-Хонроха (1969) и других авторов показано, что в случае прямой угловой однократной засечки можно получить три значения оптимального угла засечки в зависимости от заданного условия оптимизации. Так, для условий A -, D - и E -оптимизации эти углы составляют соответственно $109^{\circ}28'$, 120° и 90° .

Для рассматриваемого нами случая особый интерес представляет E -оптимальная конфигурация треугольника засечки, при которой эллипс и его подера трансформируются в круг, в котором $A = B = m_{\beta, \alpha} \sqrt{\frac{2}{\Pi}} = R = m_x = m_y$, а эксцентриситет e окружности СКО равен нулю.

Достичь этого можно, если согласно формул (14) замыкающая квадратического полигона будет равна нулю. При угле засечки 90° и равенстве её сторон полигон будет представлять из себя прямую из двух наложенных друг на друга отрезков q_i^2 одинаковой длины, но противоположной направленности. В этом случае точка $2'$ полигона $T-1'-2'$ совпадает с точкой T , следовательно $q_3 = 0$.

Для наблюдений за креном высоких сооружений соответствующими инструкциями рекомендуется иметь не менее трёх определённым образом расположенных вокруг него пунктов. На практике, при наблюдении за сооружениями башенного типа способом прямой угловой засечки в условиях плотной застройки, бывает трудно выбрать такое местоположение этих пунктов, которое обеспечивало бы одновременно ряд условий. К таким условиям относятся: видимость не менее $\frac{3}{4}$ высоты сооружения, выгодная геометрическая форма треугольников, взаимная видимость между соответствующими пунктами, расположение пунктов примерно на одинаковом удалении от сооружения на расстоянии порядка двух-трёх его высот и др.

Предположим, что местоположение дополнительной точки 5 (рис. 23) удовлетворяет перечисленным выше условиям, за исключением видимости между точками 2 и 5.

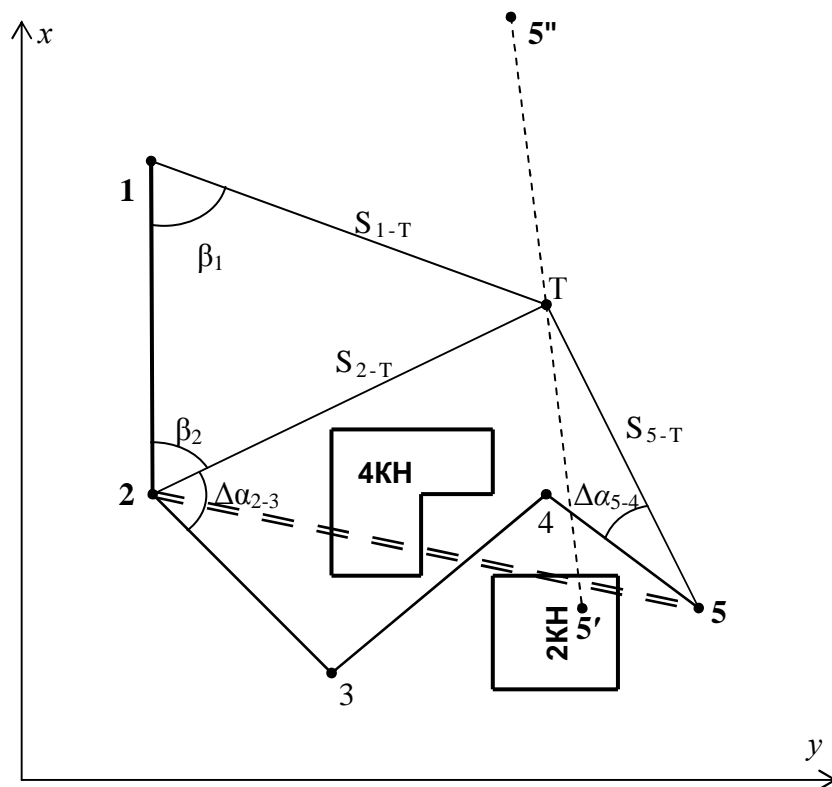


Рис. 23. Схема косвенного определения дирекционных углов засечки и оптимального расположения точки 5

В этом случае между этими точками можно проложить полигонометрический ход 2-3-4-5 и определить в принятой системе координаты точки 5. Теперь достаточно измерить горизонтальные углы $\Delta\alpha_{2-3}$ и $\Delta\alpha_{5-4}$ и вычислить дирекционные углы:

$$\alpha_{2-T} = \alpha_{2-3} - \Delta\alpha_{2-3}, \quad \alpha_{5-T} = \alpha_{5-4} + \Delta\alpha_{5-4}, \quad (88)$$

в результате чего можно по формулам (1) определить координаты точки Т не только из дополнительного треугольника 2-5-Т, но также из треугольника 1-5-Т.

Для схемы на рис. 23 было выполнено знаковое моделирование, в котором дирекционные углы α_{1-T} , α_{2-T} , α_{5-T} и координаты точек 1, 2, 5 были определены графически (в некоторых условных единицах). Результаты моделирования представлены в табл. 8.

Т а б л и ц а 8

Результаты моделирования многократной прямой угловой засечки

Засечка	x_1	y_1	x_2	y_2	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	F1	F2	x	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-2-Т	129,5	70,1	77,1	70,1	112	61	-188,292	-43,040	107,409	124,778
2-5-Т	77,1	70,1	59,6	148,1	61	334	-33,4939	159,457	107,410	124,781
1-5-Т	129,5	70,1	59,6	148,1	112	334	-218,687	237,978	107,407	124,783

Как следует из табл. 8, координаты точки Т, вычисленные из трёх треугольников по формулам (85), практически равны между собой и совпали с таковыми, определенными на рис. 23 графическим способом.

Исходные данные, где S_i определены графически со схемы на рис. 23 в некоторых условных единицах, и результаты вычислений по формулам (2), (13) и (14) для оценки точности многократной угловой засечки при принятом значении $m_{\beta,\alpha} = 10''$ приведены в табл. 9.

Т а б л и ц а 9

Исходные данные и характеристика многократной угловой засечки

Стороны	$2\alpha_i, ^\circ$	S_i	q_i	q_i^2	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	q_3	A	B	$2\varphi', ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-Т	224	60,1	34,3203	1177,88	-818,23	-847,30	1042,03	0,23	0,19	6,72 ЮЗ
2-Т	122	64,2	32,1285	1032,24	875,39	-547,00				
2-Т	122	64,2	32,1285	1032,24	875,39	-547,00				
5-Т	308	53,0	38,9179	1514,60	-1193,52	932,48				
Сумма столбцов 5, 6, 7				4718,73	-260,97	-1008,82				

При этом направление 2-Т в прямой угловой засечке должно участвовать в вычислениях дважды, поскольку его дирекционный угол определён дважды.

Как следует из табл. 9 (графы 6 и 7), числитель и знаменатель формулы (13) имеют оба знак минус, что соответствует третьей четверти прямоугольной системы координат, следовательно $2\varphi = 180^\circ + 2\varphi' = 186,72^\circ$. Графически получен тот же результат.

Исходные данные в условных единицах и результаты вычислений по формулам (29) элементов окружности СКО для многократной угловой засечки на рис. 23 при принятом значении $m_{\beta,\alpha} = 10''$ приведены в табл. 7. Полученные значения A и B в табл. 10 полностью совпадают со значениями A и B в табл. 9.

Т а б л и ц а 10

Оценка точности многократной угловой засечки

Засечка	П	q_3	A	B	R	e	m_x	m_y
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-2-5-Т	4718,73	1042,03	0,23	0,19	0,210	0,023	0,19	0,23

На рис. 24 представлен построенный в крупном масштабе квадратический полигон многократной засечки. Обращаем внимание, что при построении такого полигона для прямой угловой многократной засечки градиент q_2^2 участвует дважды, о чём было отмечено выше.

Для определения СКО по осям координат m_x и m_y следует провести через точку О диаметр 1-2 параллельно оси x (рис. 24,а), тогда отрезок Т-1 $= m_x = 0,19$, а Т-2 $= m_y = 0,23$.

Полученные графически СКО по осям координат практически не отличаются от таковых, вычисленных по формулам (32), а также от A и B , поскольку диаметр 1-2 расположен в непосредственной близости от оси x . Вычисленные по формулам (17) и (19) радиальные ошибки M без учёта корреляции и M_K с учётом корреляции составили соответственно 0,298 и 0,302.

Для определения ошибки положения точки Т по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям α и $\alpha+90^\circ$ (рис. 24,б) необходимо провести диаметр 1-2 под углом 2α к оси x и получить графически Т-1 $= m_1$ по направлению α и Т-2 $= m_2$ по перпендикулярному направлению $\alpha+90^\circ$ или вычислить их по формулам (33).

В нашем примере коэффициент $C = M_K/M$ составил 1,013. Его величина зависит от соотношения полуосей B/A и от дирекционного угла 2φ большой полуоси и может изменяться от 1 (при $2\varphi = 0; 180$ или 360°) до $\sqrt{2}$ (при $2\varphi = 90$ или 270°).

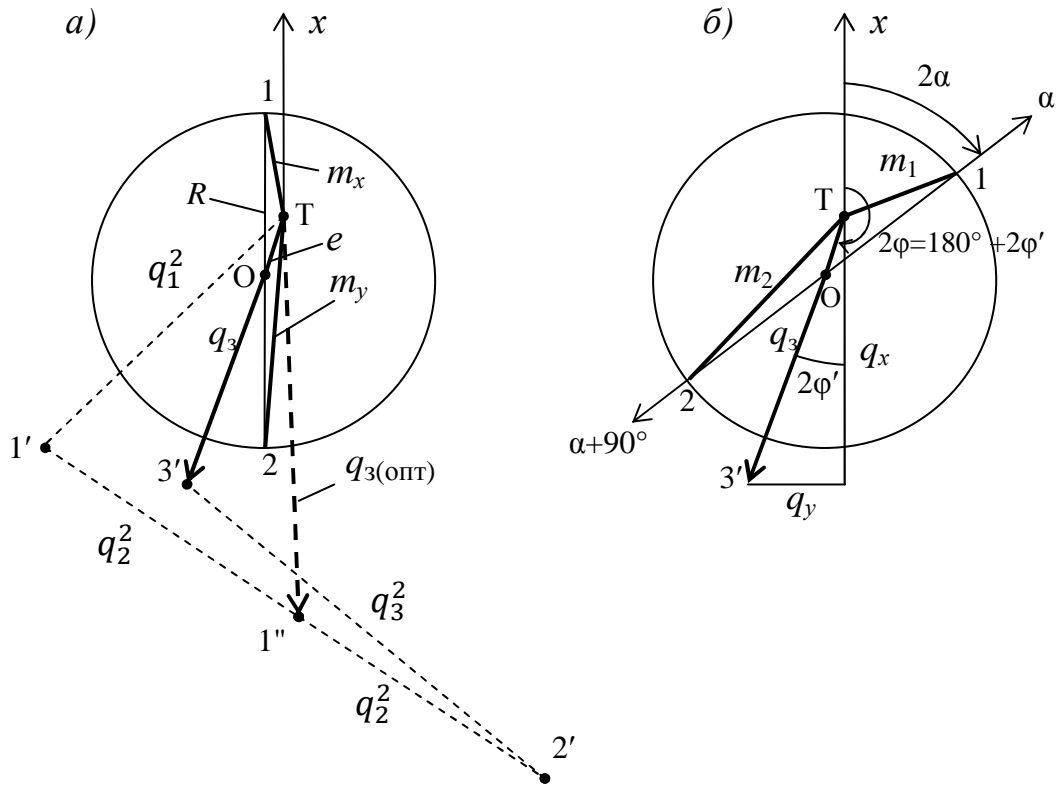


Рис. 24. Квадратический полигон (а) и окружность СКО (а, б) многократной засечки

Как отмечалось выше, E -оптимизация обладает рядом существенных преимуществ перед другими условиями-ограничениями. Её выполнение приводит к тому, что эллипс, подера, окружность СКО трансформируются в круг радиуса R . В результате такой изотропии ошибка определения пункта T по любому направлению будет одна и та же.

Т а б л и ц а 11

Оптимизация многократной угловой засечки

Стороны	$2\alpha_i, ^\circ$	S_i	q_i	q_i^2	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	q_3	A	B	$2\varphi', ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-Т	224	60,1	34,3203	1177,88	-818,23	-847,30	1395,47	0,50	0,24	-2,4 ЮВ
2-Т	122	64,2	32,1285	1032,24	875,39	-547,00				
Сумма столбцов 5, 6, 7				2210,12	57,16	-1394,30				
5-Т	357,6	55,2	37,3668	1396,28	-57,01	1395,12	0,81	0,235	0,235	+10,5
Сумма столбцов 5, 6, 7				3606,41	0,15	0,81				

Одним из возможных способов E -оптимизации является определение геометрических параметров дополнительных угловых измерений. Покажем решение этой задачи на примере рис. 23, заключающееся в

определении оптимального положения дополнительной к однократной угловой засечке 1-2-Т точки 5' или 5".

Для этого строим полигон Т-1'-1" для однократной засечки 1-2-Т (рис. 24, а), замыкающая которого $q_{з(опт)} = Т-1" = 1369,36$ условных единиц имеет направление $2\varphi = 180^\circ + 2\varphi' = 177,6^\circ$ ($2\varphi'$ см. графу 11 табл. 11).

Для того, чтобы замыкающая такого полигона обратилась в 0, следует к схеме простой засечки 1-2-Т добавить ещё одно направление, удвоенный дирекционный угол которого должен быть равен обратному удвоенному углу 2φ замыкающей, то есть $2\alpha_5 = 177,6^\circ + 180^\circ = 357,6^\circ$, а длина дополнительной стороны согласно формулы (2) должна быть равна $S = \rho/q_3 = 206265"/\sqrt{1369,36} = 55,2$ условных единиц. Подставив эти данные в табл. 11, получаем одинаковые значения A и B .

Отличие от нуля замыкающей полигона, равной 0,81 условных единиц (графа 8 табл. 11), объясняется погрешностями определения дирекционных углов и длин сторон засечки графическим способом, хотя такая её величина не оказала влияния на значение полуосей A и B .

Т а б л и ц а 12

Оценка точности многократной оптимальной засечки

Засечка	П,	q_3	A	B	R	e
1	2	3	4	5	6	7
1-2-5-Т	3606,41	0,81	0,235	0,235	0,235	0,000

В табл. 12 приведены исходные данные в условных единицах и результаты вычислений по формулам (14, 29) элементов окружности СКО для рассмотренной выше многократной оптимальной угловой засечки при принятом значении $m_{\beta,\alpha} = 10"$. Полученные значения A и B в табл. 12 полностью совпадают со значениями A и B в табл. 9, а $R = A = B$, $e = 0$.

Таким образом, если к простой засечке 1-2-Т добавить направление 5'-Т или 5"-Т (рис. 23) длиной 55,2 условных единиц, дирекционный угол которого должен быть равен $\alpha_5 = 357,6^\circ/2 = 178,8^\circ$ или $178,8^\circ + 180^\circ = 358,8^\circ$, то такая многократная засечка будет E -оптимальной. Добавим, что соответствующими руководящими документами допускается размещать опорные пункты на устойчивых зданиях и сооружениях, как в случае с точкой 5'.

Другим возможным способом E -оптимизации может явиться выбор соответствующего расположения опорных пунктов. Для этого на плане необходимо наметить возможные направления многократной засечки и определить их дирекционные углы. Затем на схеме провести из точки Т линии под двойными дирекционными углами. Варьируя расстояния

(квадраты градиентов), число и сочетание направлений, следует добиться замкнутого или близкого к нему квадратического полигона. По квадратам градиентов можно определить длины сторон такой засечки.

Следует особо подчеркнуть, что E -оптимальная сеть позволяет довольно просто решать вопрос о необходимой точности угловых измерений засечки. В каждом конкретном случае специалисту, производящему наблюдения, следует исходить из заданной наименьшей величины крена, которую необходимо фиксировать с требуемой степенью достоверности. Тогда, приняв радиус трансформированной в круг подеры, эллипса или окружности СКО равным K_{min} , можно на основании формул (14) определить требуемую точность угловых измерений по формуле:

$$m_{\beta,\alpha} = \frac{K_{min}\sqrt{[q^2]}}{2t}, \quad (89)$$

где t – нормированный множитель, зависящий от заданной вероятности p получения данных о крене сооружения (для $t = 1,6; 2,0; 2,5; 3,0$ вероятность $p = 0,890; 0,955; 0,988; 0,997$).

Таким образом, с заданной вероятностью p можно судить о крене сооружения, если его величина больше K_{min} . В противном случае нельзя судить о крене с заданной степенью вероятности, поскольку ошибка определения крена превышает его величину.

Отметим, что при выполнении очередного цикла наблюдений за креном, например, дымовой трубы, координаты её центров верхнего В и нижнего Н наблюдаемых сечений определяются с равной точностью. В этом случае элементы $A_H = A_B = A$, $B_H = B_B = B$, $\varphi_H = \varphi_B = \varphi$, $R_H = R_B = R$, $e_H = e_B = e$ их подер, эллипсов или окружностей СКО будут одинаковы. Поэтому для оценки точности определения крена достаточно произвести квадратическое сложение двух таких подер, эллипсов или окружностей СКО по упрощённой в отличие от описанной в работе [69] методике и определить $A_0, B_0, \varphi_0, R_0, e_0$ результирующей кривой по формулам:

$$A_0 = A\sqrt{2}, B_0 = B\sqrt{2}, R_0 = R\sqrt{2}, e_0 = e\sqrt{2}. \quad (90)$$

По такой окружности СКО, отложив от оси x удвоенный дирекционный угол крена, можно найти ошибку его определения по методике, показанной на рис. 24,б.

Способ прямых угловых засечек удобен для определения крена башен треугольной формы по следующей схеме (рис. 25). Разбивают рядом с сооружением базис 1-2 известной длины. Точки 1 и 2 располагают произвольно на расстоянии от башни не менее полутора – двух H (H –

высота башни) так, чтобы с них была обеспечена видимость на нижние ABC и верхние abc точки, а углы в треугольниках засечек находились в пределах $30-120^\circ$.

С точек 1 и 2 измеряют теодолитом горизонтальные углы β_{1C} , β_{1A} , β_{1B} и β_{2C} , β_{2B} , β_{2A} на нижние точки ABC и β_{1c} , β_{1a} , β_{1b} и β_{2c} , β_{2b} , β_{2a} на верхние точки abc (рис. 25).

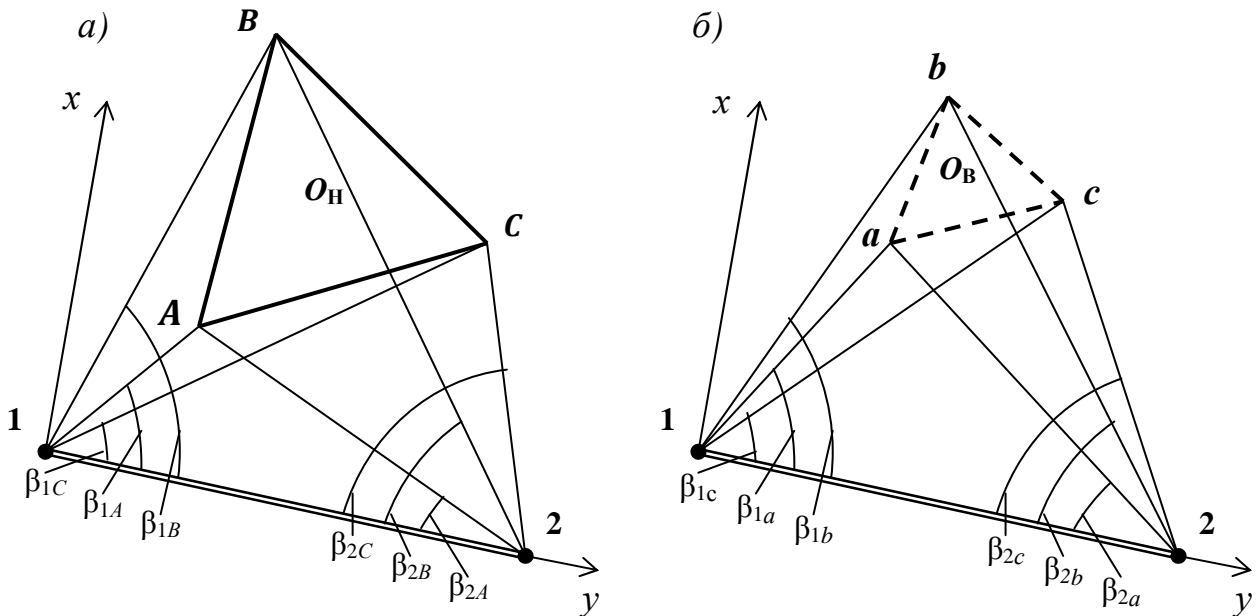


Рис. 25. Схемы к определению координат нижних (а) и верхних (б) точек башни

Дальнейшие вычисления ведут в условно выбранной системе прямоугольных координат, в которой направление оси x перпендикулярно базису 1-2, ось y совпадает с направлением базиса. Начало координат выбирают в точке 1 ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$), а точка 2 имеет координаты $x_2 = 0$, $y_2 = 1-2$. В этой системе путём решения прямых угловых засечек определяют координаты точек ABC и abc .

Если в равносторонних треугольниках ABC и abc координаты их вершин определены равноточно, то есть $m_{x_{A,B,C}} = m_x$, $m_{y_{A,B,C}} = m_y$, $m_{x_{a,b,c}} = m_x$, $m_{y_{a,b,c}} = m_y$, то координаты ортоцентров нижнего O_H и верхнего O_B наблюдаемых сечений находят как простую арифметическую середину:

$$\begin{aligned} x_{O_H} &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, & y_{O_H} &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \\ x_{O_B} &= \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, & y_{O_B} &= \frac{y_a + y_b + y_c}{3}, \end{aligned} \quad (91)$$

а СКО координат ортоцентров будут равны:

$$\begin{aligned} m_{X_{O_H}} &= \frac{m_X}{\sqrt{3}}, \quad m_{Y_{O_H}} = \frac{m_Y}{\sqrt{3}}, \\ m_{x_{O_B}} &= \frac{m_x}{\sqrt{3}}, \quad m_{y_{O_B}} = \frac{m_y}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (92)$$

По координатам ортоцентров O_H , O_B и вершин ABC , abc путём решения обратных геодезических задач определяют величину крена K , его направление и угол скручивания [70].

Если для каждой вершины ABC и abc определить параметры их окружностей СКО и ошибки координат, то в качестве координат ортоцентров нижнего O_H и верхнего O_B наблюдаемых сечений следует брать их весовые средние, а оценку точности положения ортоцентров производить путём квадратического сложения соответственно верхних окружностей СКО и нижних.

2.4. Обратная угловая засечка

Обратная угловая засечка (рис. 1) одного пункта по двум и более смежным углам $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ имеет широкое распространение на практике при строительстве высоких зданий и сооружений [22], мостовых опор, создании строительных сеток и др., и особенно при реализации так называемого принципа редуцирования. Её исследованию посвящено большое количество работ.

Однократная обратная угловая засечка предусматривает измерение на местности в точке T горизонтальных углов β_1 и β_2 по схеме рис. 1, *a* или рис. 1, *b* не менее чем на три исходных пункта 1, 2, 3 с известными координатами. По формулам Деламбра, Гаусса, Ансермета, Пранис-Праневича, приведенным в работе [5], Закирова [16], Капетановича [18], Хаимова [48], Ключина [20], Кнейсся [31, стр. 567], «вспомогательных символов» Хаусбрандта (Геодезия и картография, 1956, №10) и др. вычисляют координаты точки T . Существенным недостатком использования такой однократной засечки является бесконтрольность полученной в результате её решения координаты x определяемого пункта и её зависимость от так называемого «опасного круга».

В работах [5, 21 и др.] даются различные формулы оценки точности однократной обратной угловой засечки, по которым можно вычислить только СКО m_x и m_y определяемого пункта по осям координат.

В работе [5] отмечается, что наиболее часто решение обратной угловой засечки сводится к решению двух прямых азимутальных засечек 1Т2 и 2Т3 (рис. 1, *a*). Для этого достаточно по формулам Деламбра вычислить дирекционный угол α_1 или α_2 стороны 1-Т или 2-Т:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{(y_2 - y_1)\operatorname{ctg}\beta_1 + (y_1 - y_3)\operatorname{ctg}\beta_2 - (x_2 - x_3)}{(x_2 - x_1)\operatorname{ctg}\beta_1 + (x_1 - x_3)\operatorname{ctg}\beta_2 + (y_2 - y_3)}, \quad (93)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{(y_1 - y_2)\operatorname{ctg}\beta_1 + (y_3 - y_1)\operatorname{ctg}\beta_2 - (x_3 - x_1)}{(x_1 - x_2)\operatorname{ctg}\beta_1 + (x_3 - x_1)\operatorname{ctg}\beta_2 + (y_3 - y_1)}.$$

Зная дирекционный угол, например, α_2 и измеренные углы β_1 , β_2 , можно вычислить дирекционные углы α_1 и α_3 двух других сторон. Тогда решение обратной засечки можно свести не только к двум [5], но, если позволяет форма треугольников, то и к трём частным решениям однократных азимутальных засечек 12Т, 23Т и 13Т по формуле Гаусса. Подобный подход к решению обратной угловой засечки позволяет, во-первых, избежать зависимости этой засечки от «опасного круга» и, во-вторых, получать координаты x и y определяемой точки Т с контролем.

Покажем решение этой задачи на примере однократной обратной угловой засечки, который взят из работы [18]. Схема засечки показана на рис. 26, а исходные данные приведены в табл. 13. При этом частные решения однократных азимутальных засечек 12Т, 23Т и 13Т предлагается выполнять по приведенным выше формулам (85).

Т а б л и ц а 13

Исходные данные обратной угловой засечки

Координаты исходных пунктов, м						Измеренные углы	
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	β_1	β_2
4136,24	4667,88	5427,69	3549,89	2550,42	3626,80	88°47'20"	143°11'47"

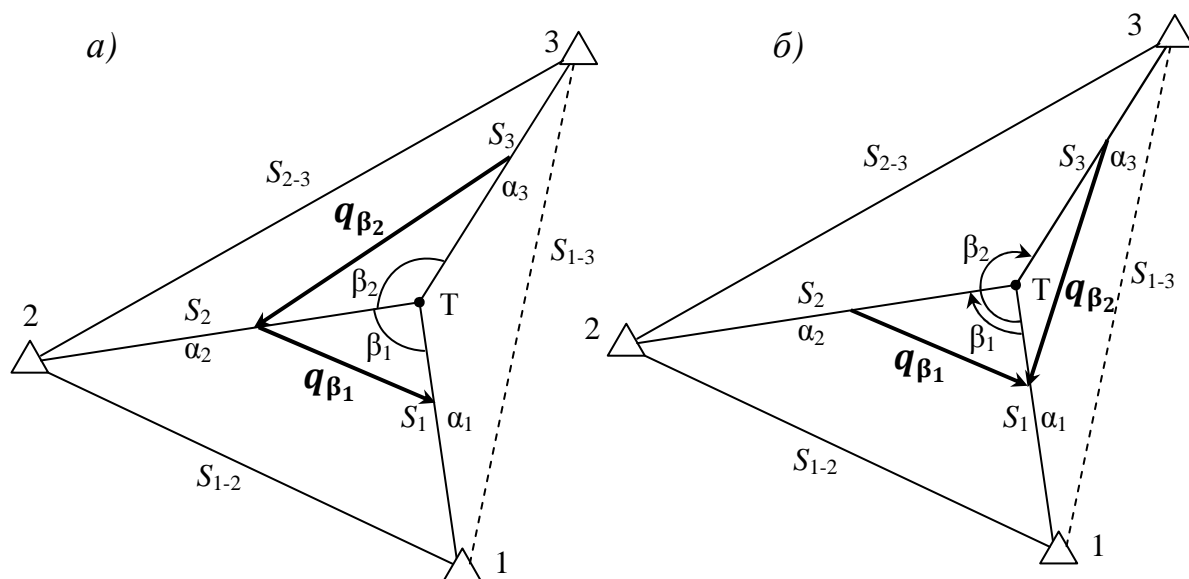


Рис. 26. Схема однократной обратной угловой засечки

По формуле (93) был вычислен дирекционный угол стороны 2-Т равный $70^{\circ},67756$ и определены дирекционные углы двух других сторон засечки 1-Т ($341^{\circ},88867$) и 3-Т ($213^{\circ},87394$).

По формулам (85) были подсчитаны координаты точки Т из трёх возможных вариантов однократных азимутальных засечек (рис. 26). Полученные три значения координат $x_{1,2,3}$, $y_{1,2,3}$ определяемого пункта Т представлены в табл. 14.

Т а б л и ц а 14

Результаты решения вариантов азимутальных засечек

Вариант	Координаты исходных пунктов отдельного варианта				Дирекционные углы		x, м	y, м
	x_1	y_1	x_2	y_2	α_1	α_2		
12Т	x_1	y_1	x_2	y_2	α_1	α_2	4927,577	3291,068
23Т	x_2	y_2	x_3	y_3	α_2	α_3	4927,577	3291,068
31Т	x_3	y_3	x_1	y_1	α_3	α_1	4927,577	3291,068

Как видим, решение азимутальных засечек во всех трёх вариантах дало абсолютно одинаковые результаты, что является контролем их вычислений.

В работе [15] приведены формулы, по которым, вообще говоря, можно произвести оценку точности обратной угловой засечки при любом количестве измеренных углов и любой схеме их измерения:

$$m_x^2 = \frac{[BB]}{[AA][BB]-[AB]^2} m_\beta^2, \quad (94)$$

$$m_y^2 = \frac{[AA]}{[AA][BB]-[AB]^2} m_\beta^2,$$

где m_x , m_y – (СКО) определяемой точки Т по осям координат; m_β – СКО измерения углов засечки.

Если углы засечки измеряются по схеме на рис. 26, а, то содержащиеся в квадратных скобках слагаемые определяют по формулам:

$$A_i = q_{i+1} \sin \alpha_{i+1} - q_i \sin \alpha_i, \quad (95)$$

$$B_i = q_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - q_i \cos \alpha_i,$$

а при измерении углов по схеме на рис. 26, б будем иметь:

$$A_i = q_{i+1} \sin \alpha_{i+1} - q_1 \sin \alpha_1, \quad (96)$$

$$B_i = q_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - q_1 \cos \alpha_1,$$

где $q_i = \rho/S_i$ (где $\rho = 206265''$) – градиент направления; α_i – дирекционный угол направления засечки; S_i – расстояние от точки Т до исходного пункта.

Т а б л и ц а 15

**Исходные данные и результаты оценки точности
обратной угловой засечки по коэффициентам A_i и B_i**

Сторона	$\alpha_i, ^\circ$	$S_i, \text{ м}$	$q_i, \text{ с/см}$	$q_i \sin \alpha_i$	$q_i \cos \alpha_i$	A_i	B_i	AA	BB	AB
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оценка точности по формулам (95)										
1-Т	342	833	2,476	-0,7692	2,3535					
2-Т	71	785	2,628	2,4803	0,8686	3,2495	-1,4849	10,5592	2,2049	-4,8252
3-Т	214	602	3,426	-1,9108	-2,8436	-4,3911	-3,7122	19,2818	13,7804	16,3006
Сумма столбцов 10, 11, 12								29,8410	15,9853	11,4754
Оценка точности по формулам (96)										
1-Т	342	833	2,476	-0,7692	2,3535					
2-Т	71	785	2,628	2,4803	0,8686	3,2495	-1,4849	10,5592	2,2049	-4,8252
3-Т	214	602	3,426	-1,9108	-2,8436	-1,1416	-5,1971	1,3032	27,0098	5,9330
Сумма столбцов 10, 11, 12								11,8624	29,2147	1,1078

Полученные графически исходные данные α_i, S_i и результаты оценки точности по формулам (95, 96) при $m_\alpha = 10''$ представлены в табл. 15.

Т а б л и ц а 16

**Исходные данные и результаты оценки точности
обратной угловой засечки по углам β_1 и β_2**

Измер. углы	$S_i, \text{ м}$	$S_{i-(i+1)}, \text{ м}$	$q_{\beta_i}, \text{ с/см}$	$\alpha'_i, ^\circ$	$\Pi/q_{3,2}, \text{ (с/см)}^2$	$A/B, \text{ см}$	$R/e, \text{ см}$	$m_x/m_y, \text{ см}$	$M/M_K, \text{ см}$	$\frac{2\phi'}{2\phi}, ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Углы измерены по схеме на рис. 26, а										
β_1	833	1132	3,571	114	<u>45,85</u>	<u>3,2</u>	<u>2,4</u>	<u>2,2</u>	<u>3,6</u>	<u>-61</u>
	785									
β_2	785	1318	5,753	229	21,19	1,7	0,6	1,8	3,4	<u>119</u>
	602									
Углы измерены по схеме на рис. 26, б										
β_1	833	1132	3,571	114	21,19	1,7	0,6	1,8	3,4	<u>7</u>
	785									
β_2	785	1294	5,648	191	21,19	1,7	0,6	1,8	3,4	<u>7</u>
	602									

Подставив данные табл. 15 в формулы (94), получаем для схемы на рис. 26, а СКО $m_x = 2,2$ см, $m_y = 2,9$ см, а для схемы на рис. 26, б СКО $m_x = 2,9$ см, $m_y = 1,8$ см (табл. 16).

Для сравнения в табл. 17 представлены результаты оценки точности засечки на рис. 26 по дирекционным углам α_1 , α_2 и α_3 .

Т а б л и ц а 17

**Исходные данные и результаты оценки точности
обратной угловой засечки по углам α_1 , α_2 и α_3**

Измер. углы	Сторона	$S_i, \text{м}$	$\alpha_i, ^\circ$	$q_i, \text{с/см}$	$\frac{\Pi/q_3}{2}, \text{с/см}^2$	$A/B, \text{см}$	$R/e, \text{см}$	$m_x/m_y, \text{см}$	$M/M_K, \text{см}$	$\frac{2\varphi'}{2\varphi}, ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
α_1	1-Т	833	342	2,476	$\frac{24,78}{12,22}$	$\frac{4,0}{2,3}$	$\frac{3,2}{0,8}$	$\frac{3,5}{3,0}$	$\frac{4,6}{5,6}$	$\frac{71}{\text{СВ}}$
α_2	2-Т	785	71	2,628		$\frac{4,0}{2,3}$	$\frac{3,2}{0,8}$	$\frac{3,5}{3,0}$	$\frac{4,6}{5,6}$	$\frac{71}{\text{СВ}}$
α_3	3-Т	602	214	3,426		$\frac{4,0}{2,3}$	$\frac{3,2}{0,8}$	$\frac{3,5}{3,0}$	$\frac{4,6}{5,6}$	$\frac{71}{\text{СВ}}$

Проиллюстрируем применение метода весового среднего и оценки точности азимутальной засечки на примере (рис. 26), где вместо углов β_1 и β_2 были бы измерены дирекционные углы α_1 , α_2 и α_3 . Здесь многократную азимутальную засечку будем рассматривать как совокупность трёх вариантов простых азимутальных засечек 1-2-Т, 2-3-Т и 3-1-Т, исходные данные которых приведены в табл. 18 (графы 1–4). При этом будем пользоваться градиентами направлений q_i , которые показаны на рис. 1.

По значениям S_i и α_i сторон засечки (рис. 26) находят градиенты направлений $q_i = \rho/S_i$ ($\rho'' = 206265''$) и их квадраты (графа 5), сумма которых (сумма столбцов 5) равна периметру $\Pi = [q_i^2]$ квадратичного полигона. Величины $q_y = [q_i^2 \sin 2\alpha_i]$ (сумма столбцов 6) и $q_x = [q_i^2 \cos 2\alpha_i]$ (сумма столбцов 7) представляют собой проекции замыкающей q_3 полигона на оси координат. По их значениям определяют $q_3 = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ (графа 8), её румб $2\varphi' = \text{arc tg } q_y/q_x$ и удвоенный дирекционный угол 2φ большой полуоси A (графа 11).

Теперь по величине периметра Π и замыкающей q_3 можно вычислить практически любую скалярную оценку точности засечки, в том числе и элементы наиболее информативного геометрического критерия – окружности СКО, характеризуемой радиусом R и внутренним эксцентриситетом e , которые вычисляют по формулам (29). Через R и e или Π и q_3 можно выразить ошибки определяемого пункта Т по осям координат или по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям и коэффициент корреляции между ними по формулам (31), (32), (33), (34).

Исходные данные и характеристика азимутальных засечек

Вариант	Сторона	$2\alpha_i, \circ$	$S_i, \text{м}$	$q_i^2, (\text{с/см})^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha_i$	$q_i^2 \cos 2\alpha_i$	$q_{3, (\text{с/см})}^2$	A, см	B, см	$\frac{2\varphi'}{2\varphi, \circ}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Однократные азимутальные засечки										
1-2-Т	1-Т	323,8	833	6,137	-3,63	4,95	0,82	4,0	3,8	$\frac{57}{\text{ЮВ}}$
	2-Т	141,4	785	6,906	4,31	-5,40				
Сумма столбцов 5, 6, 7				13,04	0,69	-0,45				
2-3-Т	2-Т	141,4	785	6,906	4,31	-5,40	15,21	7,6	2,4	$\frac{86}{\text{ЮВ}}$
	3-Т	67,8	602	11,74	10,87	4,44				
Сумма столбцов 5, 6, 7				18,64	15,18	-0,96				
3-1-Т	3-Т	67,8	602	11,74	10,87	4,44	11,86	5,8	2,6	$\frac{38}{\text{СВ}}$
	1-Т	323,8	833	6,137	-3,63	4,95				
Сумма столбцов 5, 6, 7				17,87	7,25	9,38				
Многократная азимутальная засечка										
1-2-3	1-Т	323,8	833	6,137	-3,63	4,95	12,22	4,0	2,3	$\frac{71}{\text{СВ}}$
	2-Т	141,4	785	6,906	4,31	-5,40				
	3-Т	67,8	602	11,74	10,87	4,44				
Сумма столбцов 5, 6, 7				24,78	11,56	3,99	71			

В табл. 19 с использованием данных табл. 18 приведены результаты оценки точности однократных азимутальных засечек и многократной азимутальной засечки.

По соответствующим формулам при $m_\alpha = 10''$ были вычислены радиус R , эксцентриситет e (графа 3) и по изложенной выше методике построены окружности СКО (рис. 24) для трёх частных решений 1, 2, 3 и результирующая 4, которая должна располагаться внутри фигуры, образованной всеми частными решениями.

По приведенным выше формулам найдены (и проверены графически по вычерченным окружностям СКО) средние квадратические ошибки m_{x_i} и m_{y_i} каждого частного решения (графа 6 табл. 19). На рис. 27 показаны СКО по осям координат только для второго частного решения m_{x_2} , m_{y_2} и для засечки в целом m_x , m_y .

При вычислении весов p_x и p_y (графа 7) в качестве константы c было выбрано число 8 с размерностью см^2 .

Наконец, в графах 8, 9 и 10 приведены значения коэффициента корреляции r_{xy} и радиальных ошибок без учёта корреляции M и с учётом корреляции M_k , вычисленные по формулам (17), (19), (35).

Оценка точности засечек с помощью элементов окружностей СКО

Вариант	$\Pi/q_3,$ $с^2/см^2$	$R/e,$ см	$2\varphi'/2\varphi,$ градусы	$A/B,$ см	$m_x/m_y,$ см	p_{x_i}/p_{y_i}	r_{xy}	$M,$ см	$M_K,$ см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Однократные азимутальные засечки									
1-2-Т	13,04	3,92	57	4,05	3,86	0,537	0,05	5,55	5,65
	0,82	0,12	123	3,80	3,92	0,521			
2-3-Т	18,64	5,03	86	7,64	5,50	0,264	0,82	8,01	10,79
	15,21	2,60	94	2,43	5,82	0,236			
3-1-Т	17,87	4,18	38	5,77	5,52	0,262	0,48	6,32	7,51
	11,86	1,59	38	2,59	3,09	0,838			
Множественная азимутальная засечка									
1-2-3	24,78	3,16	71	3,99	3,52	0,646	0,47	4,62	5,59
	12,22	0,83	71	2,32	2,99	0,895			

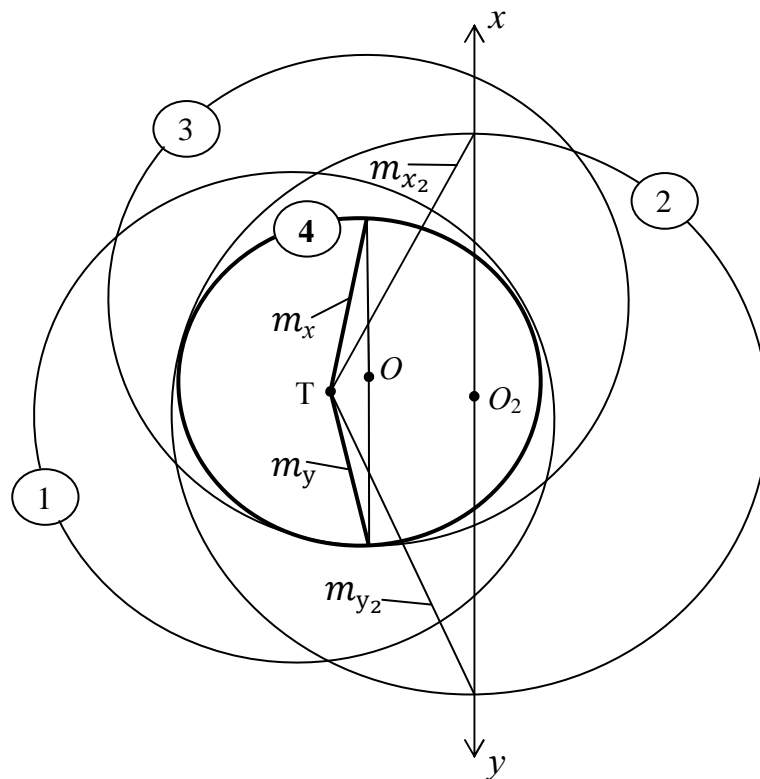


Рис. 27. Окружности СКО для однократных 1, 2, 3 и множественной 4 азимутальных засечек

По формулам (85) могут быть подсчитаны координаты точки Т из трёх возможных вариантов однократных азимутальных засечек (рис. 26).

По сокращённой формуле (107) можно вычислить весовые средние значения X и Y прямоугольных координат определяемой точки:

$$X = \frac{[xp_x]}{[p_x]}, \quad Y = \frac{[yp_y]}{[p_y]}. \quad (97)$$

Аналогичным образом производится уравнивание и оценка точности многократной прямой угловой засечки.

2.5. E-оптимизация засечек

Определение параметров дополнительных угловых, линейных и линейно-угловых измерений, приводящих к нулевому эксцентриситету окружности СКО, покажем на примерах засечек, которые взяты из нашей работы [69].

Определение параметров дополнительных угловых измерений. Пусть в комбинированной засечке, представленной на рис. 28, измерены горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ с СКО $m_\beta = 3''$. Характеристика засечки и результаты оценки её точности приведены в табл. 20.

Т а б л и ц а 20

Характеристика засечек

Измеренные углы	Направления	Расстояния S , м	Градиенты q, q_β , с/см	α, α', \circ	Периметр Π , с ² /см ²	Замыкающая q_3 , с ² /см ²	A/B , см	R/e , см	M/M_K , см	r_{xy} , $2\phi, \circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Комбинированная засечка ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$)										
β_1	T-1	1500	1,38	291	11,62	5,26	$\frac{1,68}{1,03}$	$\frac{1,36}{0,32}$	$\frac{1,97}{2,25}$	$\frac{0,339}{318}$
β_2	2-T	1200	1,72	13						
β_3	-	-	2,35	157						
β_4	-	-	1,12	80						
Линейная засечка (S_1, S_2, S_3)										
S_1	1-T	1800	1	141	3	1,27	$\frac{2,14}{1,37}$	$\frac{1,76}{0,39}$	$\frac{2,54}{3,01}$	$\frac{0,406}{107}$
S_2	2-T	1500	1	111						
S_3	3-T	1200	1	13						
Линейно-угловая засечка ($\beta_3, \beta_6, S_1, S_3, S_4$)										
β_3	3-T	1200	1,72	13	6,76	1,17	$\frac{1,20}{1,00}$	$\frac{1,10}{0,10}$	$\frac{1,56}{1,58}$	$\frac{0,020}{6,5^\circ}$
β_6	-	-	2,35	157						
S_1	1-T	1800	1	141						
S_3	3-T	1200	1	13						
S_4	4-T	1250	1	334						

Используя величину периметра Π , замыкающей q_3 и её обратную ориентировку $2\varphi + 180^\circ$, находим по формулам (78) при $p_\beta = 1$ дирекционный угол $\alpha_{J-T} = 249^\circ$ или 69° , $S_i = 899$ м, $R = 1,03$ см. Таким образом, измерение дополнительного угла β_j приведёт к нулевому эксцентриситету окружности СКО радиуса R , равного малой полуоси B эллипса (графа 8, табл. 20). Отметим, что к аналогичному результату приведёт непосредственное измерение дирекционного угла стороны $J-T$ длиной 899 м с СКО $m_\alpha = 3''$.

Достичь нулевого эксцентриситета можно также путём измерения на определяемом пункте дополнительного угла β_i с СКО $m_\beta = 3''$ (рис. 28).

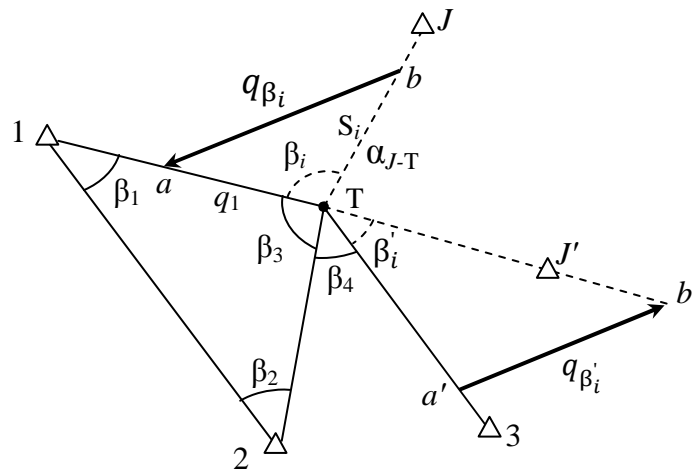


Рис. 28. Схема к определению параметров дополнительного угла

Поскольку в рассматриваемом примере $p_\beta = 1$, то вычисленный по формуле (79) q_{β_i} равен 2,29 с/см. Приняв 1-Т за одну из сторон дополнительного угла β_i , откладывают на ней $T-a = q_1 = 1,38$ с/см (графа 4).

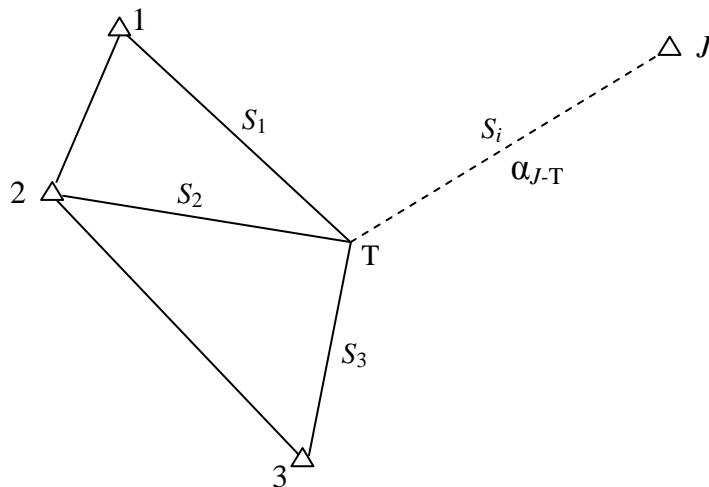


Рис. 29. Схема к определению параметров дополнительной стороны

Через полученную точку a проводят линию ab под дирекционным углом $(\varphi + 90^\circ) = 249^\circ$ или 69° длиной 2,29 с/см. Направление Т- J будет направлением второй стороны дополнительного угла β_i , а согласно формулы (80) Т- $b = 1,57$ с/см будет градиентом этого направления, дирекционный угол которого $\alpha_{J-T} = 213^\circ$. Длина этой дополнительной стороны S_i согласно (78) должна быть 1314 м.

Аналогичным образом могут быть найдены вместо угла β_i геометрические параметры дополнительного угла β'_i , если все построения выполнять относительно стороны 3-Т. В этом случае градиент направления J' -Т будет равен 2,94 с/см, следовательно, длина этой стороны должна быть 702 м, а её дирекционный угол 103° .

Определение параметров дополнительных линейных измерений. Для варианта линейной засечки (рис. 29) с измеренными длинами сторон S_1, S_2, S_3 с СКО $m_S = 2$ см покажем методику определения дирекционного угла дополнительной стороны и необходимую точность её измерения для получения нулевого эксцентриситета окружности СКО такой засечки. Характеристика засечки и результаты оценки её точности представлены в табл. 20.

Дирекционный угол дополнительной стороны будет равен $\alpha_{J-T} = \varphi = 53,5^\circ$ или $235,5^\circ$. Принимая $p_{S_i} = q_3 = 1,27$ с²/см², находим по формуле (81) необходимую точность измерения длины этой стороны $m_{S_i} = \mu/\sqrt{q_3} = 2/\sqrt{1,27} = 1,8$ см.

Определение параметров дополнительных линейно-угловых измерений. Пусть для варианта линейно-угловой засечки (рис. 30) с измеренными углами β_3, β_6 ($m_\beta = 3''$) и длинами сторон S_1, S_3, S_4 ($m_S = 2$ см) требуется определить геометрические параметры линейно-угловых измерений, приводящих к нулевому эксцентриситету окружность СКО такой засечки.

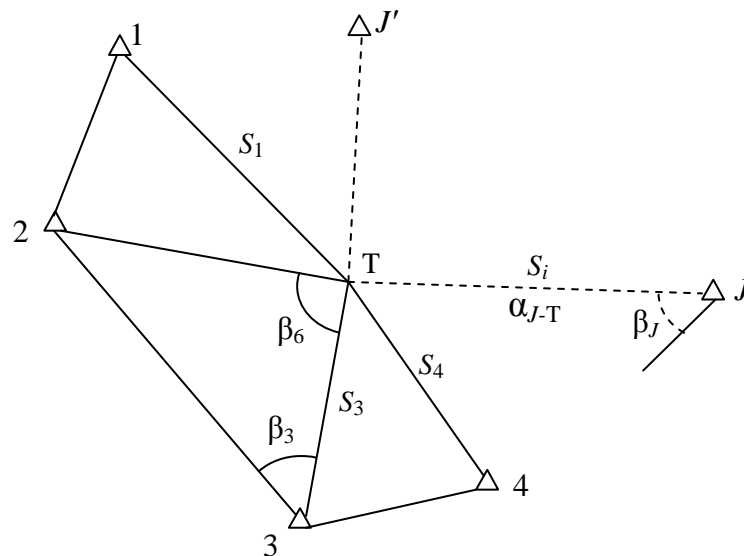


Рис. 30. Схема к определению параметров дополнительных линейно-угловых измерений

Характеристика засечки и результаты оценки её точности при $\mu = 2$ см, $p_S = 1$, $p_\beta = 0,444$ см²/с² представлены в табл. 20.

Во-первых, задача может быть решена путём включения в схему измерений дополнительного угла β_J или α_{J-T} , если согласно (78) $\alpha_{J-T} = 93,25^\circ$ (или $273,25^\circ$), а с учётом $p_\beta = 0,444$ см²/с² получим длину $J-T = 1271$ м, при $m_{\beta,\alpha} = 3''$.

Другой путь решения задачи предусматривает дополнительное измерение длины стороны $J'-T$, дирекционный угол которой должен быть равен $3,25^\circ$ или $183,25^\circ$, а точность её измерения на основании (81) должна составлять $1,85$ см.

В-третьих, если предусматриваются дополнительные угловые и линейные измерения, то при $p_S = 1$, $p_{\beta,\alpha} = 0,444$ см²/с² получим по формуле (82) $q_i = 0,62$ см/с, следовательно $S_i = 1279$ м. В нашем примере разность $(p_S - q_3)$ отрицательна, значит $\alpha_{J-T} = 93,25^\circ$ или $273,25^\circ$. Если бы эта разность имела знак плюс, то $\alpha_{J-T} = 3,25^\circ$ или $183,25^\circ$. Следовательно, дополнительные измерения угла β_J или α_{J-T} стороны $J-T$ длиной 1279 м и дополнительные измерения длины перпендикулярной стороны $J'-T$ приведут к нулевому эксцентриситету окружности СКО радиуса $R = B = 1,00$ см.

2.6. Оценка точности засечек с учетом ошибок исходных данных

Учёт ошибок исходных данных является одним из направлений, включающих потери информации при оценке точности положения определяемых точек. Отдавая должное обширным исследованиям в этой области отечественных и зарубежных авторов, остановимся лишь на геометрической интерпретации этого процесса. В качестве примера можно назвать работы [5, 12, 25], в которых приведены формулы для вычисления радиальных ошибок точки, определяемой засечками. Эти формулы справедливы только для некоторых однократных засечек, имея даже в этом случае довольно сложный вид. Формулы для многократных засечек ещё гораздо сложнее (см., например, формулы из работы [99] для прямой многократной засечки) при явном несоответствии затрат на их использование с объёмом получаемой по ним информации.

В работе [77] предложено ошибкой единицы веса считать СКО направления, которая складывается из ошибки измерения и ошибки направлений за счёт ошибок исходных данных. Здесь в качестве ошибки направлений берётся усреднённое значение, то есть все направления считаются равноточными, что редко соответствует действительности. Причём такой выбор ошибки единицы веса для некоторых, не рассмотренных в этой работе засечек неприемлем.

В работе [113] рассмотрены две простые засечки (линейно-угловая и прямая угловая) с целью сравнения ориентации и размеров эллипсов ошибок выносимых в натуру точек, с эллипсами исходных пунктов (погрешность разбивочных работ во внимание не принималась). В результате следует известный вывод о том, что элементы эллипса ошибок вынесенной точки зависят от геометрии засечки и от взаимной ориентации полуосей эллипсов ошибок исходных пунктов. Другие виды засечек, в том числе многократные, и случаи неравноточного измерения угловых и линейных величин в этой работе не рассмотрены.

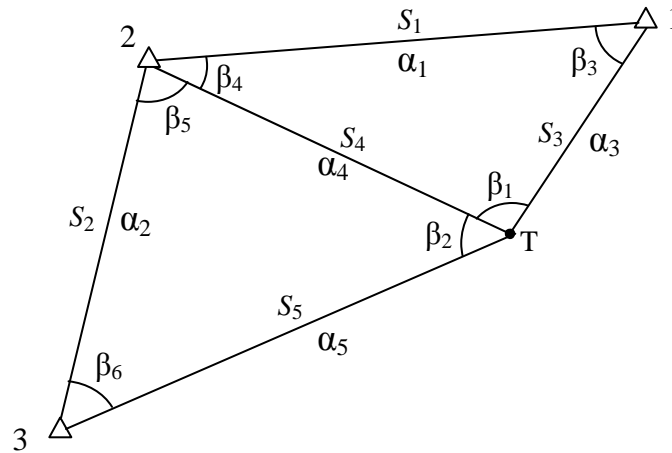


Рис. 31. Схема сети к учёту ошибок исходных данных

В нашей работе [53] на примере рис. 31 рассмотрены все виды многократных засечек и показана геометрическая интерпретация процесса определения весов угловых и линейных измерений с учётом ошибок исходных данных. Степень влияния исходных данных в этой работе была проиллюстрирована построенными подерами исходных пунктов и определяемой точки Т.

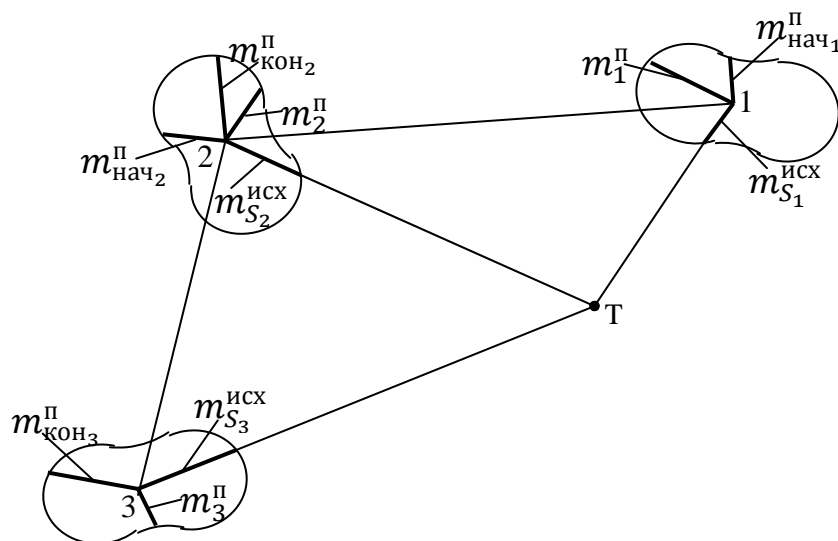


Рис. 32. Схема ошибок исходных данных

В работе [53] принято, что исходные пункты 1, 2, 3 независимы, а погрешность каждого из них характеризуется подерой среднего квадратического эллипса ошибок (рис. 32).

Горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ измерены с СКО 2", а длины сторон S_1, S_2, \dots, S_6 с относительной погрешностью 1:40000. Общая СКО элементов засечек будет равна:

$$m_{\alpha, \beta, S}^2 = (m_{\alpha, \beta, S}^{\text{исх}})^2 + (m_{\alpha, \beta, S}^{\text{изм}})^2, \quad (98)$$

где $m_{\alpha, \beta, S}^{\text{исх}}$ и $m_{\alpha, \beta, S}^{\text{изм}}$ – ошибки угловых и линейных элементов засечек соответственно в результате погрешности исходных пунктов и погрешности измерений.

В свою очередь, ошибки $m_{\alpha, \beta, S}^{\text{исх}}$ определяют по формулам:

$$m_{\alpha_i}^{\text{исх}} = \frac{\rho \sqrt{(m_{\text{нач}}^{\text{п}})^2 + (m_{\text{кон}}^{\text{п}})^2}}{S_i},$$

$$m_{\beta_i}^{\text{исх}} = \sqrt{(m_{\alpha_i}^{\text{исх}})^2 + (m_{\alpha_{i+1}}^{\text{исх}})^2}, \quad (99)$$

$$m_{S_i}^{\text{исх}} = \sqrt{m_{S_{\text{нач}}}^2 + m_{S_{\text{кон}}}^2},$$

где $m_{\text{нач}}^{\text{п}}$ и $m_{\text{кон}}^{\text{п}}$ – СКО соответственно начального и конечного пунктов в направлении, перпендикулярном линии длиной S_i их соединяющей; $m_{S_{\text{нач}}}$ и $m_{S_{\text{кон}}}$ – то же, но в направлении рассматриваемой линии (все они в работе [53] измерялись по подерам); $m_{\alpha_i}^{\text{исх}}$ и $m_{\alpha_{i+1}}^{\text{исх}}$ – СКО дирекционных углов, формирующих измеренный на определяемой точке Т горизонтальный угол β_i (на рис. 31 это углы β_1 и β_2).

Характеристика сети и результаты вычислений по формулам (99) приведены в табл. 21.

Методика оценки точности засечки заключается в следующем. Вначале по формуле (98) определяют СКО измеренных элементов засечки. Затем по формуле

$$p_{\alpha, \beta, S} = \frac{c^2}{m_{\alpha, \beta, S}^2}, \quad (100)$$

где c – константа, вычисляют их веса и в зависимости от вида засечки находят произведения $p_{\alpha_i} q_i^2$ и $p_{\beta_i} q_{\beta_i}^2$ или разности $(p_{S_i} - p_{\alpha_i} q_i^2)$ и

$(p_{S_i} - p_{\beta_i} q_{\beta_i}^2)$. Эти величины, участвуют в построении соответствующего квадратического полигона.

Т а б л и ц а 21

**Ошибки исходных данных, градиенты q_i, q_{β_i}
и их дирекционные углы α_i**

Направ- ления, углы	$S_i, \text{ м}$	$m_{S_i}^{\text{исх}},$ см	$m_{\text{нач}}^{\text{п}}$, см	$m_{\text{кон}}^{\text{п}}$, см	$m_{\alpha_i}^{\text{исх}},$ $m_{\beta_i}^{\text{исх}}, \text{ с}$	$q_i,$ $q_{\beta_i},$ с/см	q_i^2	$\alpha_i, ^\circ$	$2\alpha_i, ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-2	4600	-	4,1	5,9	3,2	-	-	-	-
2-3	3960	-	4,8	5,8	3,9	-	-	-	-
1-Г	2700	4,1	5,8	-	4,4	0,764	0,584	210	60
2-Г	4000	5,4	4,6	-	2,4	0,516	0,266	126	252
3-Г	4500	6,0	4,1	-	1,9	0,458	0,210	71	142
β_1	-	-	-	-	5,0	0,870	0,757	247	134
β_2	-	-	-	-	3,0	0,460	0,212	183	6

В цитируемой статье [53] периметр Π полигона, замыкающая q_3 и её дирекционный угол 2ϕ были найдены графически, а элементы подеры вычислялись по формулам, приведенным в нашей работе [52]:

$$k = \frac{\Pi + q_3}{\Pi - q_3}, M^2 = \frac{4\mu^2 \Pi}{(\Pi + q_3)(\Pi - q_3)}, B^2 = \frac{M^2}{1+k}, A^2 = kB^2, \quad (101)$$

где $M = \sqrt{A^2 + B^2}$; μ – СКО единицы веса; A и B большая и малая полуоси подеры.

Стандартизованная методика графической оценки точности с учётом ошибок исходных данных была продемонстрирована на примере различных засечек (рис. 31).

Прямая угловая засечка, в которой измерены горизонтальные углы $\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$. Определяемые по формуле (98) ошибки m_{α_i} будут складываться из ошибок дирекционных углов исходных сторон и ошибок m_{β_i} измерений углов β_i . По формуле (100), приняв $c = 3,8''$, вычисляют веса p_{α_i} , находят произведения $p_{\alpha_i} q_i^2$, периметр Π и замыкающую q_3 и её дирекционный угол 2ϕ (табл. 22). По формулам (101) при $\mu = 3,8''$ вычисляют B и A (табл. 24) и строят подеру, по которой определяют $m_x^{\text{ур}}, m_y^{\text{ур}}, m_s^{\text{ур}}, m_\alpha^{\text{ур}}$, причём для $m_\alpha^{\text{ур}}$ используют формулу (99), в которой $m_{\text{нач}}^{\text{п}} = 0$. Для сравнения здесь и далее перечисленные характеристики точности засечек были определены без учёта ошибок исходных данных, представленные в табл. 24.

Азимутальная засечка, в которой независимо измерены дирекционные углы $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ (рис. 31). В этом случае при вычислении m_{α_i} по формуле (98) следует в качестве $m_{\alpha}^{\text{исх}}$ брать величину, определяемую по формуле (99), в которой $m_{\text{кон}}^{\text{п}} = 0$. Затем, приняв $c = 2,8''$, подсчитывают веса и все перечисленные выше характеристики точности азимутальной засечки (табл. 22, 24).

Т а б л и ц а 22

Погрешности измеренных элементов угловых засечек

Направления, углы	Прямая угловая			Азимутальная			Обратная угловая			Комбинированная		
	m_{α}	p_{α}	$p_{\alpha}q^2$	m_{α}	p_{α}	$p_{\alpha}q^2$	m_{β}	p_{β}	$p_{\beta}q_{\beta}^2$	$m_{\alpha},$ m_{β}	$p_{\alpha},$ p_{β}	$p_{\alpha}q_{\alpha}^2,$ $p_{\beta}q_{\beta}^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1-Т	3,8	1,00	0,58	4,8	0,33	0,19	-	-	-	3,8	0,92	0,54
2-Т	3,8	1,00	0,27	3,1	0,78	0,21	-	-	-	3,8	0,92	0,24
2-Т	4,4	0,75	0,20	-	-	-	-	-	-	4,4	0,70	0,18
3-Т	4,4	0,75	0,16	2,8	1,00	0,21	-	-	-	4,4	0,70	0,15
β_1	-	-	-	-	-	-	5,4	0,46	0,35	5,4	0,46	0,35
β_2	-	-	-	-	-	-	3,6	1,00	0,21	3,6	1,00	0,21
2ф, q_3 , П	82°	0,16	1,21	142°	0,16	0,61	95°	0,27	0,56	91°	0,41	1,67

Обратная угловая засечка, в которой измерены горизонтальные углы β_1 и β_2 . Ошибки m_{β_i} вычисляют по формуле (98), причём $m_{\alpha}^{\text{исх}}$ определяют как и в предыдущем примере. Приняв $c = 3,6''$, подсчитывают веса и все перечисленные выше характеристики точности (табл. 22, 24).

Комбинированная засечка, в которой измерены горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$. Эту засечку можно рассматривать как комбинацию прямой и обратной угловой засечек. Поэтому ошибки m_{β_i} углов β_1 и β_2 вычисляют аналогично обратной угловой засечке, а ошибки m_{α_i} дирекционных углов направлений 1-Т, 2-Т, 3-Т – аналогично прямой угловой засечке. Все характеристики точности этой засечки при $c = 3,6''$ приведены в табл. 22, 24.

Линейная засечка, в которой измерены длины сторон S_1, S_2, S_3 . При вычислениях по формуле (98) в качестве $m_{S_i}^{\text{исх}}$ берут величину, подсчитываемую по формуле (99) при $m_{S_{\text{кон}}} = 0$. Все остальные вычисления выполняют при $c = 7,9$ см (табл. 23, 24).

Линейно-угловая засечка, в которой измерены горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ и длины сторон S_1, S_2, S_3 . Ошибки m_{S_i} определяют как и при линейной засечке, а m_{β_1}, m_{β_2} – при обратной угловой. Что касается ошибок m_{α_i} , то их подсчитывают так же, как и при прямой угловой засечке.

Т а б л и ц а 23

**Погрешности измеренных элементов линейной
и линейно-угловой засечек**

Направ- ления, углы	Линейная		Линейно-угловая					
	m_s	p_s	m_s	p_s	$m_\alpha,$ m_β	$p_\alpha,$ p_β	$p_\alpha q_\alpha^2,$ $p_\beta q_\beta^2$	$(p_s - p_\alpha q_\alpha^2),$ $(p_s - p_\beta q_\beta^2)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-Т	7,9	1,00	7,9	1,00	2,9	7,58	4,42	-3,42
2-Т	11,4	0,48	11,4	0,48	2,9	7,58	2,02	-1,53
2-Т	-	-	-	-	4,0	3,84	1,02	-1,02
3-Т	12,7	0,38	12,7	0,38	4,0	3,84	0,81	-0,42
β_1	-	-	-	-	5,4	2,16	1,63	-1,63
β_2	-	-	-	-	3,6	4,71	1,00	-1,00
2φ, q ₃ , Π	266°; 0,65	1,86						-9,02

Однако в этом случае в качестве $m_{\text{нач}}^{\text{п}}$ и $m_{\text{кон}}^{\text{п}}$ берут проекции соответствующих $m_{s_{\text{нач}}}$ и $m_{s_{\text{кон}}}$ на направления, перпендикулярные исходным сторонам. Тогда для стороны 1-2 $m_{\text{нач}}^{\text{п}} = 3,4$ см, $m_{\text{кон}}^{\text{п}} = 3,1$ см и $m_{\alpha_{1-2}}^{\text{исх}} = 2,1''$, для стороны 2-3 $m_{\text{нач}}^{\text{п}} = 4,8$ см, $m_{\text{кон}}^{\text{п}} = 4,8$ см и $m_{\alpha_{2-3}}^{\text{исх}} = 3,5''$.

Т а б л и ц а 24

Характеристика точности засечек

Засечки	M, см	A, см	B, см	$m_x^{\text{ур}},$ см	$m_y^{\text{ур}},$ см	$m_s^{\text{ур}},$ см			$m_\alpha^{\text{ур}},$ с		
						1-Т	2-Т	3-Т	1-Т	2-Т	3-Т
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Прямая угловая	7,0	5,3	4,6	5,0	4,9	5,3	4,6	5,1	3,5	2,7	2,2
	3,5	2,6	2,3	2,5	2,5	2,6	2,4	2,5	1,7	1,3	1,1
Азиму- тальная	7,3	5,9	4,5	4,6	5,8	5,4	5,0	5,9	4,0	2,8	2,1
	4,2	3,4	2,4	3,1	2,9	3,4	2,5	3,4	1,9	1,7	1,2
Обратн. угловая	11,1	9,6	5,6	7,6	8,1	9,2	5,8	9,1	4,6	4,8	2,9
	5,4	5,0	2,2	3,1	4,5	4,4	2,8	4,9	2,4	2,4	1,1
Комби- ниров.	5,8	4,6	3,5	4,0	4,4	4,5	3,5	4,4	2,7	2,3	1,7
	2,8	2,3	1,6	1,8	2,1	2,2	1,8	2,3	1,3	1,2	0,7
Линей- ная	12,3	10,2	7,0	8,6	8,9	7,2	10,1	7,8	7,7	3,7	4,4
	10,7	8,9	6,1	7,7	7,7	6,1	8,9	6,8	6,5	3,0	3,8
Линей- но-угл.	5,4	4,2	3,3	3,9	3,7	4,2	3,3	4,0	2,6	2,2	1,6
	2,9	2,4	1,7	1,8	2,1	2,3	1,8	2,3	1,3	1,2	0,7

П р и м е ч а н и е: В числителе указаны ошибки с учётом погрешности исходных данных, в знаменателе – без учёта погрешности исходных данных.

В соответствии с этим ошибки m_{α_i} несколько изменятся по сравнению с соответствующими ошибками прямой угловой и комбинированной засечек. Приняв $c = 7,9$ см, подсчитывают веса p_s, p_α, p_β , затем произведения $p_\alpha q^2, p_\beta q_\beta^2$ и разности $(p_s - p_\alpha q^2), (p_s - p_\beta q_\beta^2)$. Знак «минус» разностей означает, что ориентировка замыкающей противоположна её ориентировке при линейной засечке. Результаты оценки точности данной засечки представлены в табл. 23, 24.

Т а б л и ц а 25

Ошибки исходных данных

Сторо- ны	$A, \text{ см}$	$B, \text{ см}$	$\varphi_i, ^\circ$	$\alpha_i, ^\circ$	$\Theta_i, ^\circ$	$m_{S_i}^{\text{исх}},$ см	$m_i^{\text{п}},$ см
1	2	3	4	5	6	7	8
1-2	6	4	103	271	-168	5,9	4,1
2-1	6	4	162	91	71	4,3	5,8
2-3	6	4	162	196	-34	5,5	4,7
3-2	6	4	87	16	71	4,3	5,8
1-Г	6	4	103	210	73	4,2	5,9
2-Г	6	4	162	126	-144	5,4	4,8
3-Г	6	4	87	71	-164	5,9	4,2

Отличительной особенностью рассмотренных примеров является не только предложенная методика учёта погрешности исходных данных, но и определение элементов геометрических критериев при неравноточном измерении угловых и линейных величин засечек.

Следует сказать, что радиусы-векторы подеры $m_i^{\text{п}}$ и $m_{S_i}^{\text{исх}}$ (рис. 32) могут быть вычислены по формулам

$$(m_{S_i}^{\text{исх}})^2 = A^2 \cos^2 \theta_i + B^2 \sin^2 \theta_i, \quad (102)$$

$$(m_i^{\text{п}})^2 = A^2 \sin^2 \theta_i + B^2 \cos^2 \theta_i,$$

где $\theta_i = (\varphi_i - \alpha_i)$ – угол между большой осью подеры и искомым радиусом-вектором; φ_i, α_i – соответственно дирекционный угол большой оси подеры и стороны засечки.

Приведенные выше исследования позволили выявить перспективное направление в решении задачи получения наиболее полной картины влияния исходных данных на погрешность положения определяемых точек. Это направление основывается, во-первых, на определении параметров относительных геометрических критериев, в частности, относительных округностей СКО, по методике, приведенной в разделе 1.4.2. Так, относи-

тельные окружности СКО, характеризующие точность взаимного положения исходных пунктов 1, 2, 3 и точки Т сразу позволяют определять $m_{\alpha, \beta, S}^{исх}$.

Второй путь предусматривает квадратическое сложение абсолютных подер или окружностей СКО, характеризующих точность положения каждого исходного пункта 1, 2, 3 и точность положения точки Т в зависимости от типа засечки и ошибок измерения её угловых, линейных или линейно-угловых элементов. В этом случае формулы (44) примут вид:

$$A = \sqrt{\frac{\Pi + q_3}{n}}, \quad B = \sqrt{\frac{\Pi - q_3}{n}}, \quad (103)$$

где n – количество складываемых геометрических критериев.

В качестве примера рассмотрим предыдущую схему засечки (рис. 31), где точность каждого исходного пункта 1, 2, 3 характеризуется геометрическим критерием с известными A , B и φ (табл. 26). Требуется произвести их квадратическое сложение с геометрическим критерием точки Т, полученным в результате выполнения различного вида засечек путём обработки соответствующих квадратических полигонов. Исходные данные (графы 1-4) и результаты вычислений (графы 5-12) представлены в табл. 26.

Т а б л и ц а 26

**Результаты квадратического сложения
геометрических критериев**

Точки, засечки	A_i , см	B_i , см	$2\varphi_i$, гр.	q_3	Π	$2\varphi_0$, °	A_0 , см	B_0 , см
1	2	3	4	5	6	10	11	12
1	6	4	206	28,46	122	220	6,8	5,6
2	6	4	324					
3	6	4	174					
Прямая угл.	2,6	2,3	106	27,96	168,14	218	7,0	5,9
Азимутальная	3,4	2,4	83	24,27	173,33	210	7,0	6,1
Обратная угл.	5,0	2,2	119	31,27	185,67	182	7,4	6,2
Комбиниров.	2,3	1,6	117	27,95	163,93	215	6,9	5,8
Линейная	8,9	6,1	264	65,39	271,22	246	9,2	7,2
Лин.-угловая	2,4	1,7	120	28,09	164,52	215	6,9	5,8

Данные табл. 26 свидетельствуют о том, что, во-первых, при квадратическом сложении геометрических критериев учитывается их ориентировка $2\varphi_i$ относительно оси x (см. результаты сложения первых трёх критериев, относящихся к исходным пунктам 1, 2, 3). Во-вторых, даже высоко-

точные измерения угловых и линейных величин засечек не гарантируют высокой точности определения положения точки T , если не учитываются ошибки исходных данных.

Если подеры или окружности СКО исходных пунктов неизвестны, то необходимые данные для их построения могут быть получены с помощью, например, матрицы весовых коэффициентов (см. раздел 1.4.).

2.7. Оценка точности комбинаций засечек

2.7.1. Комбинация прямых угловых и обратной угловой засечек

В работе [22] предлагается при строительстве зданий повышенной этажности создавать на монтажном горизонте плановую разбивочную сеть, используя комбинацию двух угловых засечек – прямой угловой и обратной угловой. Приведена методика оценки точности такой комбинации по довольно сложным формулам, содержащим до десяти слагаемых, при явном несоответствии затрат на оценку с объёмом получаемой по этим формулам информации только в виде m_x и m_y .

Сущность метода заключается в том, что выбирают на местности несколько удалённых и хорошо опознаваемых целей 1, 2, 3,... (рис. 33). На исходном монтажном горизонте намечают произвольно как минимум две точки T_1, T_2, \dots , проекции которых в процессе строительства необходимо найти последовательно на каждом расположенном выше монтажном горизонте (на рис. 33 показаны только три исходных пункта 1, 2, 3 и одна точка T_1). В намеченной точке T_1 измеряют углы β_7 и β_8 . Аналогичные углы β'_7 и β'_8 измеряют в намеченной точке T_2 .

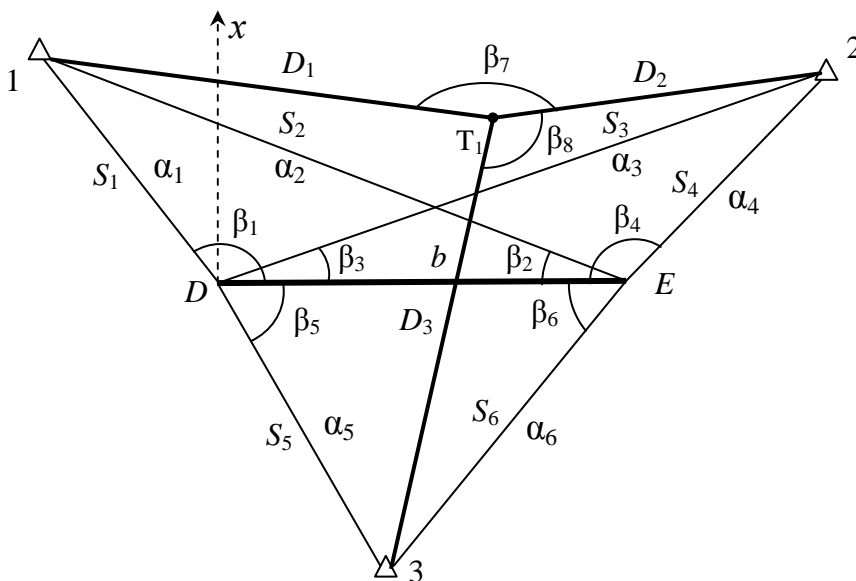


Рис. 33. Схема выноса пункта T на монтажный горизонт методом засечек

На монтажном горизонте, на котором создаётся плановая сеть, разбивают базис $DE = b$, располагая одну из точек базиса приблизительно над точкой T . С точек базиса D и E выполняют измерение горизонтальных углов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$.

Принимают условную систему, в которой, например, $x_D = y_D = 0$, $\alpha_{D-E} = 90^\circ$. В этой системе вычисляют координаты исходных пунктов 1, 2, 3 и точки E базиса. Затем, используя метод обратной угловой засечки, вычисляют, во-первых, по ранее измеренным углам β_7, β_8 и β'_7, β'_8 координаты точек T_1, T_2 в этой условной системе и, во-вторых, определяют элементы редукции точки T_1 относительно, например, точки D . По этим элементам отмечают на монтажном горизонте положение точки T_1 .

На следующем монтажном горизонте достаточно определить в принятой условной системе методом обратной угловой засечки координаты любой вспомогательной точки, расположенной примерно над точкой T_1 , найти элементы редукции и отметить точку T_1 . Аналогичным образом определяют и выносят на каждый монтажный горизонт вторую точку T_2 с целью передачи на монтажный горизонт дирекционного угла.

Точность положения вынесенной таким образом точки T_1 зависит, во-первых, от точности определения координат исходных пунктов 1, 2, 3 и точности обратной угловой засечки. Так, ошибка положения пункта 1 может характеризоваться геометрическим критерием оценки точности в виде эллипса ошибок, подеры эллипса или окружности СКО прямой угловой засечки 1- D - E , пункта 2 – геометрическим критерием прямой угловой засечки 2- D - E , пункта 3 – геометрическим критерием прямой угловой засечки 3- D - E .

Во-вторых, оценку точности обратной угловой засечки 1-2-3- T_1 теперь необходимо производить с учётом ошибок исходных пунктов, то есть с учётом ошибок исходных данных (см. раздел 2.6.).

Оценку точности описанного метода наиболее просто производить на основе описанного выше единого алгоритма с использованием периметра и замыкающей квадратического полигона. Рассмотрим это на примере, который взят из упомянутой работы [22]. Исходные данные и результаты вычислений при СКО $m_\beta = 5''$ приведены в табл. 27.

В этой таблице градиенты направлений q_i вычислялись по формуле (2), градиенты углов q_{β_i} – по формуле (3), а дирекционные углы α_{β_i} градиентов углов – по формуле (7). Сумма столбцов 7 табл. 27 равна периметру Π полигона (12), суммы столбцов 8 и 9 представляют собой соответственно q_y и q_x (13), по которым вычисляют замыкающую q_3 (13) и румб $2\varphi'$ (13), название которого определяют по знакам q_y и q_x . По Π и q_3 находят большую A и малую B полуоси геометрического критерия (14).

Обращаем внимание, что геометрия прямых угловых засечек оказывает основное влияние на форму и размеры A и B геометрического

критерия (графы 11 и 12 таблицы), причём его большая ось всегда располагается внутри острого угла засечки при точках 1, 2, 3.

Таблица 27

Исходные данные и характеристика угловых засечек

Засечка, углы	Направление	$\alpha_i, ^\circ$	$s_i, \text{ м}$	$q_i, \text{ с/мм}$	$q_{\beta_i}, \alpha_{q_{\beta_i}}$	$(q_i)^2, (q_{\beta_i})^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	$q_3^2, \text{ с}^2/\text{мм}^2$	A, мм	B, мм	$\frac{2\varphi'}{\varphi}, ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Прямые угловые засечки												
1-D-E (β_1, β_2)	1-D	163	206	1,00	-	1,00	-0,56	0,83	1,81	35,3	3,7	$\frac{45}{\text{СЗ}}$ 157,5
	E-1	331	224	0,92	-	0,85	-0,72	0,45				
Сумма столбцов 7, 8, 9						1,85	-1,28	1,28				
2-D-E (β_3, β_4)	2-D	211	224	0,92	-	0,85	0,75	0,40	1,83	35,1	3,7	$\frac{49}{\text{СВ}}$ 24,5
	E-2	19	204	1,01	-	1,02	0,63	0,81				
Сумма столбцов 7, 8, 9						1,87	1,38	1,20				
3-D-E (β_5, β_6)	D-3	174	202	1,02	-	1,04	-0,22	1,02	2,02	28,4	3,5	$\frac{2}{\text{СВ}}$ 1,0
	3-E	8	202	1,02	-	1,04	0,29	1,00				
Сумма столбцов 7, 8, 9						2,09	0,07	2,02				
Обратная угловая засечка по двум углам												
1-2-3-Г ₁ (β_7, β_8)	1-Г	148	206	1,00	0,96	0,92	0,37	-0,84	3,70	6,0	2,4	$\frac{42}{\text{СВ}}$ 21
	2-Г	201	182	1,13	258°							
	2-Г	201	182	1,13	2,04	4,16	2,08	3,60				
	3-Г	7	224	0,92	195°							
Сумма столбцов 7, 8, 9						5,08	2,46	2,76				
Обратная угловая засечка по трём углам												
1-2-3-Г ₁ ($\beta_7, \beta_8, \beta_9$)	1-Г	148	206	1,00	0,96	0,92	0,37	-0,84	5,83	4,41	1,88	$\frac{42}{\text{СВ}}$ 21
	2-Г	201	182	1,13	258°							
	2-Г	201	182	1,13	2,04	4,16	2,08	3,60				
	3-Г	7	224	0,92	195°							
	3-Г	7	224	0,92	1,82	3,31	-1,45	2,98				
	1-Г	148	206	1,00	167°							
Сумма столбцов 7, 8, 9						8,40	1,00	5,74				

Для оценки точности положения точки Г₁ с учётом ошибок исходных данных следует произвести квадратическое сложение всех геометрических критериев с использованием формул (44), результаты которого представлены в табл. 28.

По формулам (102) вычислены $m_x = 27,4$ мм, $m_y = 9,5$ мм, которые в работе [22] равны соответственно 35,0 мм и 8,3 мм.

В табл. 28 представлены два варианта, когда в обратной угловой засечке измерены два угла β_7, β_8 и когда ещё дополнительно измерен угол 1-Г₁-3 (рис. 34). Оба варианта дали практически одинаковые результаты.

Как было показано выше, в нашей работе [53] предложена геометрическая интерпретация процесса определения весов угловых и

линейных измерений с учётом ошибок исходных данных.

Т а б л и ц а 28

**Результаты квадратического сложения
геометрических критериев**

Точки, засечки	A_i , мм	B_i , мм	$2\varphi_i$, °	q_3	П	$2\varphi_0$, °	A_0 , мм	B_0 , мм
1	2	3	4	5	6	10	11	12
1	35,3	3,7	315	2640,9	3366,0	356	27,4	9,5
2	35,1	3,7	2					
3	28,4	3,5	49					
Обр. угл. (2)	6,0	2,4	42	2631,1	3347,3	355	27,3	9,5
Обр. угл. (3)	4,4	1,9	42					

В рассматриваемом примере ошибками исходных данных в линейной мере являются перпендикулярами m_i^{Π} к сторонам обратной угловой засечки и $m_{S_i}^{\text{исх}}$ в направлении этих сторон. Вычисленные по формулам (102) они представлены в табл. 29.

Т а б л и ц а 29

Ошибки исходных данных

Стороны	A , мм	B , мм	φ_i , °	α_i , °	$\theta = \varphi_i - \alpha_i$	m_i^{Π} , мм	$m_{S_i}^{\text{исх}}$, мм
1-Г	35,3	3,7	157,5	148	9,5	6,9	34,8
2-Г	35,1	3,7	24,5	201	-176,5	4,3	35,0
3-Г	28,4	3,5	1	7	-6	4,6	28,2

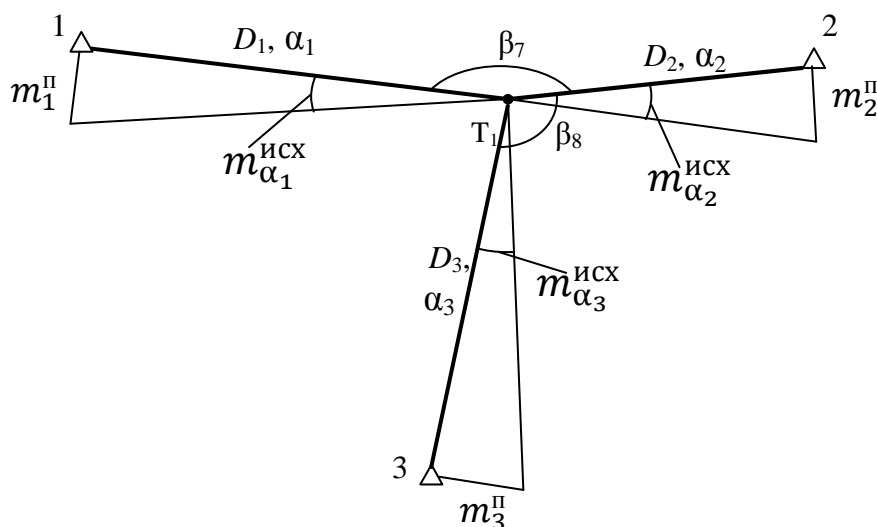


Рис. 34 Схема к учёту ошибок исходных данных

В угловой мере ошибки $m_{\alpha_i}^{\text{исх}}$ (рис. 34) будут равны:

$$m_{\alpha_1}^{\text{исх}} = \frac{\rho m_1^{\text{п}}}{D_1} = 6,9'', m_{\alpha_2}^{\text{исх}} = \frac{\rho m_2^{\text{п}}}{D_2} = 4,9'', m_{\alpha_3}^{\text{исх}} = \frac{\rho m_3^{\text{п}}}{D_3} = 4,2''.$$

Ошибки углов β_7 и β_8 в результате погрешности исходных пунктов и погрешности угловых измерений будут, согласно формулы (98), равны:

$$m_{\beta_7} = \sqrt{(m_{\beta_7}^{\text{исх}})^2 + (m_{\beta}^{\text{изм}})^2} = \sqrt{(m_{\alpha_1}^{\text{исх}})^2 + (m_{\alpha_2}^{\text{исх}})^2 + (m_{\beta}^{\text{изм}})^2},$$

$$m_{\beta_8} = \sqrt{(m_{\beta_8}^{\text{исх}})^2 + (m_{\beta}^{\text{изм}})^2} = \sqrt{(m_{\alpha_2}^{\text{исх}})^2 + (m_{\alpha_3}^{\text{исх}})^2 + (m_{\beta}^{\text{изм}})^2}.$$
(104)

Приняв $c = 8,2''$, подсчитываем веса p_{β} по формуле (100) и по элементам квадратического полигона определяем размеры и ориентировку геометрического критерия (табл. 30).

Данные табл. 30 свидетельствуют о том, что манипуляция с весами угловых измерений даёт заниженные результаты по сравнению методом квадратического сложения геометрических критериев оценки точности.

Т а б л и ц а 30

Размеры геометрического критерия с учётом весов угловых измерений

УГЛЫ	$m_{\beta},$ с	p_{β}	q_{β}^2	$p_{\beta}q_{\beta}^2$	$2\alpha_i,$ °	$q_{\beta i}^2 \sin 2\alpha$	$q_{\beta i}^2 \cos 2\alpha$	q_3	П	$2\phi',$ °	$A_o,$ мм	$B_o,$ мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
β_7	9,8	0,70	0,92	0,64	156	0,26	-0,58	3,82	4,80	37,7	11,7	1,8
β_8	8,2	1,00	4,16	4,16	30	2,08	3,60					
Сумма столбцов 5, 7, 8				4,80		2,34	3,02					

2.7.2. Комбинация полярных и угловых или линейных засечек

В работе [71] изложены теоретические основы одностороннего способа определения крена сооружений башенного типа круглой формы, таких как дымовые трубы (рис. 35), градирни, нефтехранилища, силосные сооружения, элеваторы и др.



Рис. 35. Схема расположения точек при координатных измерениях дымовой трубы

Сущность способа (рис. 36, а) заключается в том, что с одной точки стояния T электронного тахеометра безотражательного типа определяют способом полярной засечки прямоугольные координаты любых не менее трёх точек нижнего и верхнего (а при необходимости также и промежуточных) наблюдаемых сечений (рис. 35). По координатам этих точек по специально разработанным нами в системе MatLab и на базе Microsoft Excel программам можно вычислить вероятнейшие значения радиуса R и координат x и y центра каждого наблюдаемого сечения.

По координатам x_B, y_B и x_H, y_H центров верхнего и нижнего наблюдаемых сечений можно вычислить крены $K_X = x_B - x_H$, $K_Y = y_B - y_H$ по осям координат и определить общий крен сооружения $K = \sqrt{K_X^2 + K_Y^2}$ и его направление $r = \arctg K_Y/K_X$.

Вообще говоря, схему координатного способа определения центра O сечения (рис. 36, б) можно рассматривать как комбинацию полярных засечек точек 1, 2, 3, 4, 5 и многократной азимутальной или линейной засечек точки O , дирекционные углы которых α_i или расстояниями R_i .

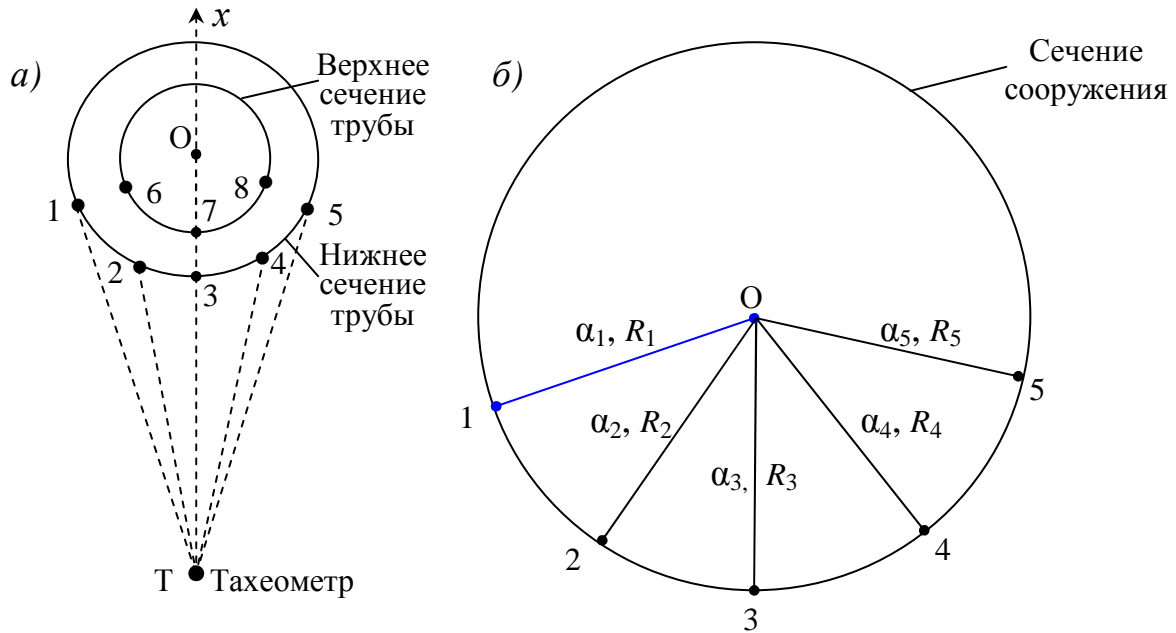


Рис. 36. Схема координатного способа определения крена (а) и элементы засечки (б)

В этом случае, рассматривая точки 1...5 как исходные по отношению к точке О, можно произвести оценку точности засечки с учётом ошибок исходных данных по приведенной в разделе 2.6. методике.

Рассмотрим применение предлагаемой методики при определении пространственного положения дымовой трубы [73] высотой 30 м и радиусами: поверху 1,3 м, понизу 2,0 м (рис. 35).

Таблица 31

Результаты координатных измерений трубы и характеристика полярных засечек

Точки	Координаты точек, м		Координаты центра сечения и радиус, м		Характеристика полярных засечек					$\Delta = R_i - R_{MM}$
	x_i	y_i	x / y	R	$\alpha_{T-i}, ^\circ$	$S_{T-i}, \text{ м}$	$R_i, \text{ мм}$	$A, \text{ мм}$	$B, \text{ мм}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Нижнее сечение трубы										
1	127,466	98,011	$\frac{127.730}{100.000}$	2.009	355,9	27,538	2006	3	0,7	-3
2	125,891	99,200			358,2	25,903	2006	3	0,6	-3
3	125,716	100,000			0,0	25,716	2014	3	0,6	+5
4	126,060	101,127			2,5	26,084	2015	3	0,6	+6
5	127,408	101,987			4,1	27,480	2013	3	0,6	+4
Верхнее сечение трубы										
6	127,535	98,738	$\frac{127.750}{100.024}$	1.304	357,4	27,564	1304	3	0,7	0
7	126,474	100,290			0,6	26,476	1303	3	0,6	-1
8	127,531	101,309			2,7	27,562	1304	3	0,7	0

Результаты координатных измерений и вычислений координат центра O , радиуса R и дирекционных углов α_{T-i} и длин сторон S_{T-i} полярных засечек нижнего и верхнего сечений трубы при $x_T = 100,000$ м, $y_T = 100,000$ м и $\alpha_{T-O} = 0^\circ$ приведены в табл. 31.

Подсчитанные по формулам (83) величины l_1 при $m_{\beta,\alpha} = 5''$ и l_2 при $m_D = 3$ мм являются значениями полуосей A и B (графы 8, 9 табл. 31). Радиусы и эксцентриситеты окружностей СКО для всех точек 1...5 нижнего сечения и точек 6...8 верхнего сечения будут одинаковыми, а именно $R = 0,5(l_1 + l_2) = 1,8$ мм и $e = 0,5(l_1 - l_2) = 1,2$ мм. Ошибки по осям координат, определяемые по формулам (84), будут также одинаковыми для всех точек равными $m_x = 3,0$ мм, $m_y = 0,6$ мм.

Если на рис. 36, б многократную засечку рассматривать как азимутальную, то в качестве СКО m_α можно взять величину:

$$m_\alpha = \frac{m}{R} \rho'' = m q, \quad (105)$$

где m – СКО определения координат точек 1, 2, 3, ...

На рис. 37 показаны графики зависимости СКО m_α в секундах от величины радиуса R при СКО определения координат $m = 5; 10$ и 15 мм. Из этих графиков следует, что с увеличением радиуса влияние СКО определения координат m на СКО m_α уменьшается.

Что касается дирекционных углов α_i и длин сторон R_i засечки на рис. 36, б, то они могут быть найдены по измеренным координатам $x_{1,2,3,\dots}$, $y_{1,2,3,\dots}$ и вероятнейшим значениям координат x и y центра каждого наблюдаемого сечения путём решения обратных геодезических задач. Результаты этих вычислений приведены в табл. 32 (графы 2, 3).

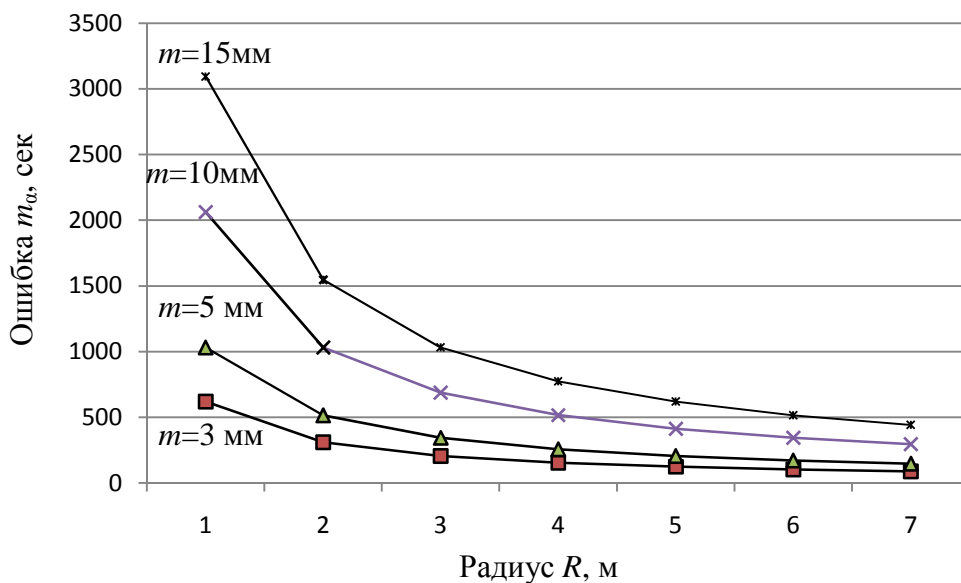


Рис. 37. Графики зависимости ошибки m_α от величины радиуса R

**Исходные данные и характеристика многократных
азимутальных засечек**

Стороны	$\alpha_i, ^\circ$	R_i , мм	q_i^2 , (с/мм) ²	$q_i^2 \sin 2\alpha$	$q_i^2 \cos 2\alpha$	Π / q_3	A / B , мм	$\frac{2\varphi'}{2\varphi}, ^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нижнее сечение трубы								
1-О	82,4	2006	10572,8	2759,6	-10206,3	$\frac{52612,5}{2609,8}$	$\frac{3,2}{3,0}$	$\frac{56,4}{303,6}$
2-О	23,5	2006	10572,8	7732,5	7210,6			
3-О	1,0	2014	10489,0	366,1	10482,6			
4-О	325,0	2915	10478,5	-9717,6	3920,2			
5-О	279,2	2013	10499,4	-3314,1	-9962,6			
Суммы столбцов 4,5,6			52612,5	-2173,6	1444,5			
Верхнее сечение трубы								
14-О	80,5	1304	25020,5	8145,9	-23657,3	$\frac{75999,9}{27234,8}$	$\frac{3,2}{2,2}$	$\frac{22,6}{202,6}$
15-О	348,2	1303	25058,9	-10020,3	22968,29			
16-О	279,7	1304	25920,5	-8579,9	-24459,3			
Суммы столбцов 4,5,6			75999,9	-10454,3	-25148,4			

По значениям α_i и R_i находят периметр Π (сумма столбца 4) и по формулам (13), (14) вычисляют замыкающую q_3 , румб $2\varphi'$ и полуоси A и B , приняв $m_\alpha = 500''$.

Как следует из табл. 32 (графы 5 и 6), числитель формулы (13) для нижнего сечения $q_y = \Sigma 5 = -2173,6$ имеет знак минус, а знаменатель $q_x = \Sigma 6 = 1444,5$ имеет знак плюс, что соответствует четвертой четверти СЗ прямоугольной системы координат, следовательно $2\varphi = 360^\circ - 2\varphi' = 303,6^\circ$. Для верхнего сечения $q_y = \Sigma 5 = -10454,3$, $q_x = \Sigma 6 = -25148,4$, то есть оба имеют знак минус, что соответствует третьей четверти, следовательно $2\varphi = 180^\circ + 2\varphi' = 202,6^\circ$.

Подсчитанные по формулам (29, 31) для нижнего сечения $R = 3,1$ мм, $e = 0,1$ мм, $m_x = 3,1$ мм, $m_y = 3,0$ мм, для верхнего сечения $R = 2,7$ мм, $e = 0,5$ мм, $m_x = 2,2$ мм, $m_y = 3,2$ мм.

В случае линейной засечки следует, после измерения прямоугольных координат $x_{1,2,3...}$, $y_{1,2,3...}$ точек наблюдаемого сечения и вычисления вероятнейшего значения как радиуса R , так и координат x , y центра этого сечения, находят также n значений радиусов R_i . Здесь n представляет собой число сочетаний по три из количества точек, координаты которых

измерены. Так, при трёх точках $n = 1$, при четырёх – $n = 4$, при пяти – $n = 10$ и т. д.

Т а б л и ц а 33

**Исходные данные и характеристика многократных
линейных засечек**

Стороны	$2\alpha_i + 180^\circ$	R_i , мм	a_i^2	$a_i^2 \sin(2\alpha_i + 180)$	$a_i^2 \cos(2\alpha_i + 180)$	Π / q_3	A / B , мм	$\frac{2\varphi'}{2\varphi}$, °
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нижнее сечение трубы								
1-О	344,9	2006	1	-0,26101	0,96534	$\frac{5,0}{0,3}$	$\frac{3,2}{3,1}$	$\frac{11,2}{\text{ЮВ}}$ 168,8
2-О	227,0	2006	1	-0,73135	-0,68200			
3-О	4,0	2014	1	-0,03490	-0,99939			
4-О	112,0	2915	1	0,92738	-0,37412			
5-О	18,4	2013	1	0,31565	0,94888			
Суммы столбцов 4,5,6			5	0,21577	-1,09017			
Верхнее сечение трубы								
14-О	341,0	1304	1	-0,32557	0,945519	$\frac{3,0}{1,1}$	$\frac{5,1}{3,5}$	$\frac{22,6}{\text{СВ}}$ 22,6
15-О	156,4	1303	1	0,39987	-0,91657			
16-О	19,3	1304	1	0,33101	0,94363			
Суммы столбцов 4,5,6			3	0,40531	0,97257			

Затем по принципу обработки ряда равноточных измерений вычисляют вероятнейшие ошибки $\Delta = R_i - R$ (графа 11 табл. 31) и по известной формуле Бесселя находят СКО m_R .

Исходные данные для определения элементов квадратического полигона при линейных измерениях и результаты вычислений по приведенным выше формулам содержатся в табл. 33.

Находят периметр Π (сумма столбца 4). По значениям α_i и R_i вычисляют по формулам (13), (14) замыкающую q_3 , румб $2\varphi'$ и полуоси A и B , приняв $m_R = 5$ мм, поскольку в результате обработки графы 11 табл. 16 для нижнего сечения трубы получена по формуле Бесселя СКО определения радиуса 4,9 мм.

Как следует из табл. 33 (графы 5 и 6), числитель формулы (13) для нижнего сечения $q_y = \Sigma 5 = +0,21577$ имеет знак плюс, а знаменатель $q_x = \Sigma 6 = -1,09017$ имеет знак минус, что соответствует второй четверти ЮВ прямоугольной системы координат, следовательно $2\varphi = 180^\circ - 2\varphi' = 168,8^\circ$. Для верхнего сечения $q_y = \Sigma 5 = +0,40531$, $q_x = \Sigma 6 = +0,97257$, то есть

оба имеют знак плюс, что соответствует первой четверти, следовательно $2\varphi = 2\varphi' = 22,6^\circ$.

Т а б л и ц а 34

**Результаты квадратического сложения геометрических критериев
исходных и определяемого пункта**

Точки, засечки	A_i , мм	B_i , мм	$2\varphi_i$, $^\circ$	q_3	П	$2\varphi_0$, $^\circ$	A_0 , мм	B_0 , мм
1	2	3	4	5	6	10	11	12
Нижнее сечение								
1	3	0,7	351,8	42,84	46,93	0,3	4,2	0,9
2	3	0,6	356,4					
3	3	0,6	0					
4	3	0,6	5					
5	3	0,6	8,2					
Азимут.	3,2	3,0	303,6	43,54	66,17	358,9	4,3	1,9
Линейн.	3,2	3,1	168,8	42,23	66,78	0,5	4,3	2,0
Верхнее сечение								
6	3	0,7	354,8	25,59	28,34	0,5	4,2	1,0
7	3	0,6	1,2					
8	3	0,7	5,4					
Азимут.	3,2	2,2	202,6	20,68	43,42	354,8	4,0	2,4
Линейн.	5,1	3,5	22,6	38,68	66,60	8,2	5,1	2,6

Подсчитанные по формулам (29, 31) для нижнего сечения $R = 3,2$ мм, $e = 0,1$ мм, $m_x = 3,1$ мм, $m_y = 3,2$ мм, для верхнего сечения $R = 4,3$ мм, $e = 0,8$ мм, $m_x = 5,1$ мм, $m_y = 3,6$ мм.

Ошибки положения центров нижнего O_H и верхнего O_B сечений с учётом ошибок исходных данных можно найти путём квадратического сложения окружностей СКО точек 1...5 и точки O_H и точек 6...8 и точки O_B по изложенной в разделе 1.4.2. методике. Результаты такого сложения окружностей СКО отдельно точек 1...5 и 6...8 и совместно с окружностями СКО азимутальных и линейных засечек представлены в табл. 34.

В результате такого квадратического сложения получают абсолютные окружности СКО с соответствующими R , e и 2φ , характеризующие ошибки положения центров верхнего и нижнего сечений трубы. Для определения ошибки вычисленного крена трубы необходимо найти параметры относительной окружности СКО путём квадратического сложения двух абсолютных окружностей СКО – верхней и нижней. Результаты такого сложения приведены в табл. 35.

Результаты квадратического сложения верхнего и нижнего геометрических критериев

Засечки	A_i , мм	B_i , мм	$2\varphi_i$, °	q_3	П	$2\varphi_0$, °	A_0 , мм	B_0 , мм
1	2	3	4	5	6	10	11	12
Азим. Н	4,3	1,9	358,9	25,10	43,86	356,9	5,9	3,1
Азим. В	4,0	2,4	354,8					
Лин. Н	4,3	2,0	0,5	33,67	55,26	4,9	6,7	3,3
Лин. В	5,1	2,6	8,2					

Обращаем внимание, что если величины периметра Π и замыкающей q_3 получены в результате квадратического сложения геометрических критериев, то вместо формулы (29) необходимо использовать зависимости $R = 0,5(A + B)$ и $e = 0,5(A - B)$, а затем СКО по осям координат вычислять по формулам (31). Так параметры относительной окружности СКО для угловых измерений (см. табл. 35) равны $R_y = 0,5(5,9 + 3,1) = 4,5$ мм, $e_y = 0,5(5,9 - 3,1) = 1,4$ мм, а для линейных измерений $R_{\text{л}} = 0,5(6,7 + 3,3) = 5,0$ мм, $e_{\text{л}} = 0,5(6,7 - 3,3) = 3,4$ мм. Подсчитанные по формулам (31) СКО по осям координат составили $m_x = 5,9$ мм, $m_y = 3,1$ мм для угловых измерений и $m_x = 6,7$ мм, $m_y = 3,3$ мм для линейных измерений.

Глава 3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК ПО МЕТОДУ ВЕСОВОГО СРЕДНЕГО

3.1. Вводные замечания

Каждую многократную геодезическую засечку можно рассматривать как совокупность однократных. В этом случае из всех возможных комбинаций таких однократных засечек (из всех частных решений) можно вычислить координаты определяемой точки и найти их вероятнейшее значение как некоторую усреднённую величину.

Известно, что простая арифметическая середина из результатов равноточных независимых наблюдений содержит некоторую информацию относительно рассматриваемой величины. Математическая статистика показывает, что в случае нормального распределения вероятностей ошибок с известной дисперсией, среднее арифметическое значение содержит всю информацию. Однако, в силу разных причин и в первую очередь вследствие различной геометрии частных решений, применение простой арифметической середины неприемлемо.

В нашем случае зависимых результатов наблюдений наибольшей информацией будет обладать вероятнейшее значение, определяемое по методу весового среднего. И здесь возникает основная задача правильного выбора весов частных решений. Остановимся на ней подробнее.

Впервые такой подход к решению задачи и формулы для определения весов прямых угловых засечек, основанный на так называемом «синусном условии», был предложен русским астрономом-геодезистом И.И. Померанцевым. В дальнейшем эти формулы использовались в своём первоначальном или в несколько изменённом виде в работах [40, 100]. Причём в работе [100] приведены также формулы для определения весов обратных засечек, основанные на том же синусном условии, а в работе [104] предлагается номограмма для определения весов координат пунктов в случае прямой и обратной многократных засечек. В работе [103] синусное условие используется для графического способа определения весов отдельных частных решений в многократной линейной засечке (по площади обращённых треугольников), а в работе [83] – для уравнивания комбинированной и линейной засечек с помощью микрокалькулятора. В перечисленных работах веса координат p_{x_i} и p_{y_i} отдельного частного решения принимаются равными между собой. Это допущение приводит к тому, что совершенно не учитывается форма и ориентировка эллипса ошибок частных решений многократных засечек.

В работе [46] за вес определения координат вставляемого пункта из отдельной однократной прямой угловой, линейной и полярной засечек принимается величина, обратно пропорциональная площади эллипса ошибок этой засечки, а в работе [82] в качестве таких весов предлагаются величины, обратно пропорциональные квадратам разностей измеренных и вычисленных расстояний между исходными и определяемыми пунктами. Таким образом, здесь также не учитывается ориентировка эллипсов ошибок относительно координатных осей.

В работах [97, 110, 111] приведены формулы весов p_{x_i} и p_{y_i} для однократных засечек, формирующих многократную. Однако здесь и в упомянутых выше работах оценка точности определения координат производится по известной формуле дисперсии функции измеренных величин. Из-за малого числа частных решений такая оценка является ненадёжной. Поэтому в работе [48] оценку точности предлагается выполнять по невязкам координат различных пар частных решений, используя некую теорию «размаха» и соответствующий коэффициент, выбираемый из специальных таблиц.

Обобщая результаты анализа приведенных работ, отметим, что одним из основных недостатков при назначении весов частных решений является то, что совершенно не учитывается форма и ориентировка относительно координатных осей эллипса, подеры или окружности СКО этих частных решений.

Геометрическая интерпретация процесса уравнивания многократных засечек, основанного на принципе весового среднего, изложена нами в работах [62, 57]. При этом основное внимание уделено правильному выбору весов частных решений и оценке точности получаемых результатов. Очевидно, что каждому частному решению соответствует определённый эллипс, подера или окружность СКО, размеры и ориентировка которых различны. Следовательно координаты x_i и y_i определяемой точки для каждого частного решения будут получены с соответствующими СКО m_{x_i} и m_{y_i} . Поэтому веса $p_{x_i} = c/m_{x_i}^2$, $p_{y_i} = c/m_{y_i}^2$ (c – константа) будут различны. Эти веса и следует учитывать при определении уравненных значений координат определяемой точки.

Последующая оценка точности определения координат и других элементов засечки иллюстрируется путём построения результирующей окружности СКО. В работах [50, 51, 57] показано, что контролем таких построений служит условие, согласно которому результирующая окружность СКО (или эллипс, подера) должна располагаться внутри фигуры, площадь которой является общей для всех кривых частных решений.

Результирующий критерий (эллипс, подера, окружность СКО) следует рассматривать как кривую, ограничивающую область влияния ошибок измерений и её можно использовать в качестве объективного критерия для оценки постоянства положения точек на плоскости и в пространстве. Такая задача часто возникает на практике при периодическом определении положения точек с целью: контроля за горизонтальными смещениями их в результате сдвижений земной поверхности [78]; наблюдения за креном высоких сооружений [54] и т. п. По разности координат точек начального и i -го цикла наблюдений можно, с учётом возможных ошибок, определить, являются ли эти разности результатом происшедших смещений или же они обусловлены ошибками измерений.

В работе [106] предлагается в качестве параметра t -гарантийной вероятности использовать величину $P_t(|d\xi| < tm_{d\xi})$, где $d\xi = \xi_i - \xi_0$, ξ_i – результат измерения, а $m_{d\xi}$ – СКО разности $d\xi$. Если $|d\xi| < tm_{d\xi}$, то можно считать, что $d\xi$ является результатом влияния ошибок измерений.

В работе [92] в качестве критерия постоянства положения точек земной поверхности, подверженных воздействию подземных горных разработок, принимается «окружность погрешностей», радиус которой равен большой полуоси эллипса ошибок.

В [88] предлагается для характеристики устойчивости точки, подверженной смещению, пользоваться эмпирической формулой $P_t(m_{oi} + m_{m_{oi}}) \geq oi$, $m_{m_{oi}} = m_{oi}/\sqrt{2f}$, где oi – расстояние между двумя положениями точки, полученное из начального и i -го цикла наблюдений;

m_{0i} – СКО этого расстояния, а $m_{m_{0i}}$ – её СКО; f – число избыточных наблюдений. В случае выполнения указанного неравенства можно считать, что изменения координат точки вызваны ошибками измерений. В противном случае имеет место действительное смещение точки.

Таким образом, в качестве критерия постоянства положения периодически определяемых точек можно использовать доверительный геометрический критерий, размеры которого получим путём умножения соответствующих параметров эллипса, подеры или окружности СКО на нормированный множитель $t = 1, 2, 3$, зависящий от доверительной вероятности соответственно 0,68, 0,955, 0,997 [49].

3.2. Поправочный кофактор и его влияние на результаты уравнивания

Поскольку понятие обобщённой весовой средней распространяется на случай зависимых значений z_1, z_2, \dots, z_n некоторой величины Z , то наилучшей вероятнейшей оценкой её будет известное выражение:

$$Z = Z_0 + \frac{e^T Q^{-1} \Delta z}{e^T Q^{-1} e}, \quad (106)$$

где Z_0 – приближённое значение Z ; $e^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ – единичный вектор-строка; Δz – вектор измеренных величин $\Delta z_i = z_i - Z_0$; Q – корреляционная матрица для величин z_i , каждый элемент которой включает коэффициент корреляции r и веса p , а именно $Q_{ij} = r_{ij} / \sqrt{p_i p_j}$.

Исследования Ю. И. Маркузе [28] показывают, что если в матрице Q опустить недиагональные элементы, то результаты уравнивания от этого практически не изменятся, а вычисления по формуле (106) значительно упрощаются, поскольку матрица Q превращается в диагональную.

Представляет интерес количественная оценка подобных упрощений в зависимости от соотношения весов и типа корреляции: положительной или отрицательной. Рассмотрим наиболее распространённый на практике случай двух коррелированных наблюдений $z^T(z_1, z_2)$ разной точности, когда, после соответствующих преобразований формула (106) принимает следующий вид [69]:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + \frac{[p\Delta z]}{[p]} + \frac{r_{12}\sqrt{p_1 p_2}(p_2 - p_1)}{([p] - 2r_{12}\sqrt{p_1 p_2})[p]} (\Delta z_2 - \Delta z_1) = \\ &= Z_0 + \frac{[p\Delta z]}{[p]} + C(\Delta z_2 - \Delta z_1). \end{aligned} \quad (107)$$

Из формулы (107) следует, что при равноточных измерениях ($p_1 = p_2$) поправочный кофактор C равен нулю и выражение (107) принимает вид обычной формулы весового среднего. В других случаях, имея представление о коэффициенте корреляции r_{12} и зная веса p_1 и p_2 , можно судить о соотношении результатов, получаемых с учётом и без учёта поправочного кофактора C .

В работе [69] для различных значений коэффициента корреляции $-1 \leq r_{12} \leq +1$ и различных соотношений весов p_1 и p_2 были подсчитаны значения C и построены графики (рис. 38).

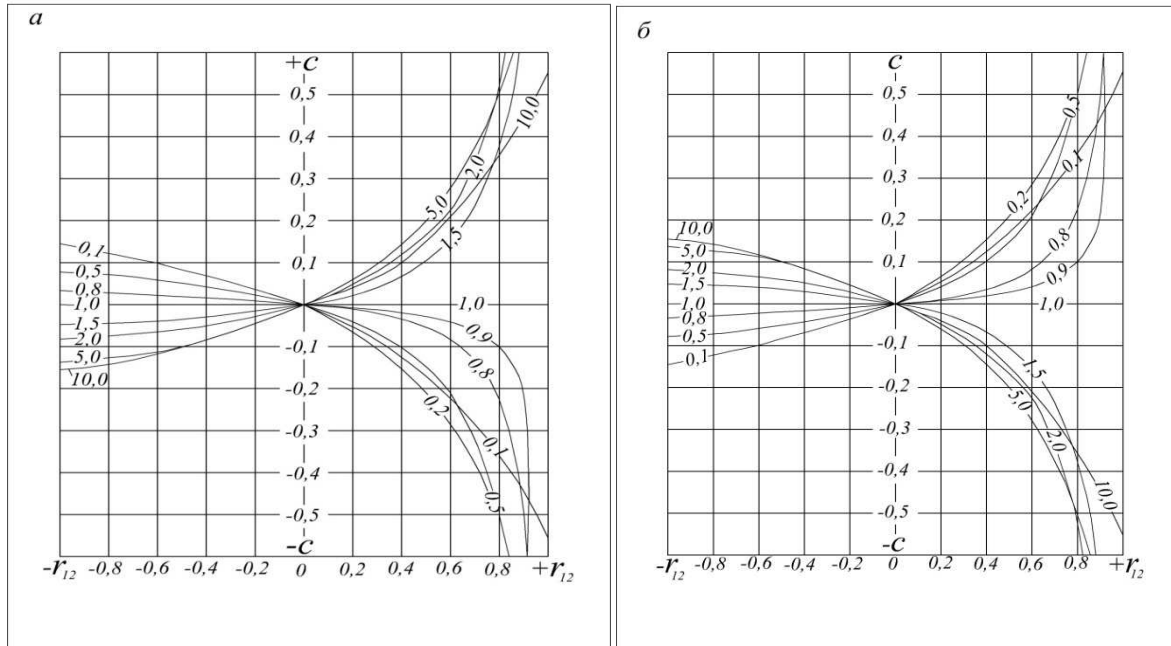


Рис. 38. Графики зависимости поправочного кофактора C от коэффициента корреляции r_{12} для различных p_2 при $p_1 = 1$ (а) и различных p_1 при $p_2 = 1$ (б)

Из этих графиков видно, что при отрицательном типе корреляции, с уменьшением (увеличением) веса относительно единицы, поправочный кофактор C не превышает 0,15 и им, вообще говоря, можно пренебречь, что подтверждает вывод работы [28]. При положительном типе корреляции C не превысит 0,15, если $r_{12} \leq +0,45$. С дальнейшим увеличением коэффициента корреляции величина C резко возрастает и может возникнуть вопрос о необходимости её учёта.

3.3. Примеры геометрической интерпретации процесса уравнивания и оценки точности засечек

3.3.1. Прямая угловая, азимутальная и обратная угловая засечки

Существенным недостатком использования однократной обратной угловой засечки (рис. 1) является её зависимость от так называемого

«опасного круга». В работах [5, 16, 18, 20, 31, 48] даются различные формулы решения и оценки точности однократной обратной угловой засечки. Однако по этим формулам можно вычислить только СКО m_x и m_y определяемого пункта по осям координат. Кроме того, полученные координаты определяемой точки являются, вообще говоря, бесконтрольными.

В работе [5] описана методика, с помощью которой можно избежать присущих обратной угловой засечке перечисленных недостатков и получить более действенный, по сравнению с повторным вычислением координаты y , контроль засечки.

Так, для вычисления координат x и y определяемого пункта с контролем достаточно по формулам Деламбра вычислить дирекционный угол α_1 или α_2 стороны 1-Т или 2-Т (рис. 1а):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{(y_2 - y_1)\operatorname{ctg}\beta_1 + (y_1 - y_3)\operatorname{ctg}\beta_2 - (x_2 - x_3)}{(x_2 - x_1)\operatorname{ctg}\beta_1 + (x_1 - x_3)\operatorname{ctg}\beta_2 + (y_2 - y_3)}, \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{(y_1 - y_2)\operatorname{ctg}\beta_1 + (y_3 - y_1)\operatorname{ctg}\beta_2 - (x_3 - x_1)}{(x_1 - x_2)\operatorname{ctg}\beta_1 + (x_3 - x_1)\operatorname{ctg}\beta_2 + (y_3 - y_1)}. \end{aligned} \quad (108)$$

Зная дирекционный угол, например, α_2 и измеренные углы β_1, β_2 , можно вычислить дирекционные углы α_1 и α_3 двух других сторон. Тогда решение обратной засечки можно свести не только к двум [5], но, если позволяет форма треугольников, то и к трём частным решениям однократных азимутальных засечек 1-2-Т, 2-3-Т и 1-3-Т по формулам Гаусса для простой азимутальной засечки или по приведенным в работе [36] формулам (85).

Покажем решение этой задачи на примере однократной обратной угловой засечки, который взят из работы [16]. Схема засечки показана на рис. 39, а исходные данные приведены в табл. 36.

Т а б л и ц а 36

Исходные данные обратной угловой засечки

Координаты исходных пунктов, м						Измеренные углы	
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	β_1	β_2
4136,24	4667,88	5427,69	3549,89	2550,42	3626,80	88°47'20"	143°11'47"

По формуле (108) был вычислен дирекционный угол стороны 2-Т равный 70°,67756 и определены дирекционные углы двух других сторон засечки 1-Т (341°,88867) и 3-Т (213°,87394).

По формулам (85) были подсчитаны координаты точки Т из трёх возможных вариантов однократных азимутальных засечек (рис. 11).

Полученные три значения координат $x_{1,2,3}$, $y_{1,2,3}$ определяемого пункта Т представлены в табл. 37.

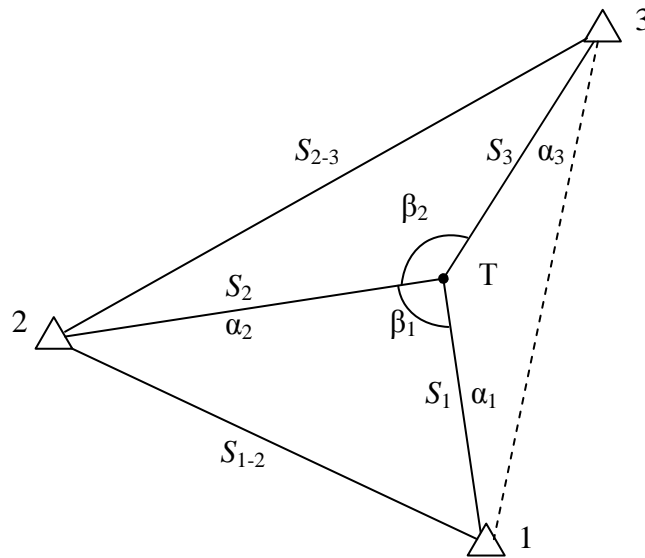


Рис. 39. Схема к решению однократной обратной угловой засечки

Т а б л и ц а 37

Результаты решения вариантов азимутальных засечек

Вариант	Координаты исходных пунктов отдельного варианта				Дирекционные углы		x, м	y, м
	x_1	y_1	x_2	y_2	α_1	α_2		
1-2-Т	x_1	y_1	x_2	y_2	α_1	α_2	4927,577	3291,068
2-3-Т	x_2	y_2	x_3	y_3	α_2	α_3	4927,577	3291,068
3-1-Т	x_3	y_3	x_1	y_1	α_3	α_1	4927,577	3291,068

Как видим, решение азимутальных засечек во всех трёх вариантах дало абсолютно одинаковые результаты координат x и y , что является контролем решения обратной угловой засечки. В этом случае задача имеет единственное решение и проблемы уравнивания не возникает.

Проиллюстрируем применение метода весового среднего и оценки точности азимутальной засечки на примере (рис. 39), где вместо углов β_1 и β_2 были бы измерены дирекционные углы α_1 , α_2 и α_3 . Здесь многократную азимутальную засечку будем рассматривать как совокупность трёх вариантов простых азимутальных засечек 1-2-Т, 2-3-Т и 3-1-Т, исходные данные которых приведены в табл. 38 (графы 1–4). При этом будем пользоваться градиентами направлений q_i , которые показаны на рис. 1.

По значениям S_i и α_i сторон засечки (рис. 39) находят градиенты направлений $q_i = \rho/S_i$ ($\rho'' = 206265''$) и их квадраты (графа 5), сумма которых (сумма столбцов 5) равна периметру $\Pi = [q_i^2]$ квадратического полигона. Величины $q_y = [q_i^2 \sin 2\alpha_i]$ (сумма столбцов 6) и $q_x = [q_i^2 \cos 2\alpha_i]$

(сумма столбцов 7) представляют собой проекции замыкающей q_3 полигона на оси координат. По их значениям определяют $q_3 = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ (графа 8), её румб $2\varphi' = \arctg q_y/q_x$ и удвоенный дирекционный угол 2φ большой полуоси A (графа 11).

Т а б л и ц а 38

Исходные данные и характеристика азимутальных засечек

Вариант	Сторона	$2\alpha_i, ^\circ$	$S_i, \text{м}$	$q_i^2, (\text{с/см})^2$	$q_i^2 \sin 2\alpha_i$	$q_i^2 \cos 2\alpha_i$	$q_3, (\text{с/см})^2$	$A, \text{см}$	$B, \text{см}$	$\frac{2\varphi'}{2\varphi, ^\circ}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Однократные азимутальные засечки										
1-2-Т	1-Т	323,8	833	6,137	-3,63	4,95	0,82	4,0	3,8	$\frac{57}{\text{ЮВ}}$
	2-Т	141,4	785	6,906	4,31	-5,40				
Сумма столбцов 5, 6, 7				13,04	0,69	-0,45				123
2-3-Т	2-Т	141,4	785	6,906	4,31	-5,40	15,21	7,6	2,4	$\frac{86}{\text{ЮВ}}$
	3-Т	67,8	602	11,74	10,87	4,44				
Сумма столбцов 5, 6, 7				18,64	15,18	-0,96				94
3-1-Т	3-Т	67,8	602	11,74	10,87	4,44	11,86	5,8	2,6	$\frac{38}{\text{СВ}}$
	1-Т	323,8	833	6,137	-3,63	4,95				
Сумма столбцов 5, 6, 7				17,87	7,25	9,38				38
Многократная азимутальная засечка										
1-2-3	1-Т	323,8	833	6,137	-3,63	4,95	12,22	4,0	2,3	$\frac{71}{\text{СВ}}$
	2-Т	141,4	785	6,906	4,31	-5,40				
	3-Т	67,8	602	11,74	10,87	4,44				
Сумма столбцов 5, 6, 7				24,78	11,56	3,99				71

Теперь по величине периметра Π и замыкающей q_3 , можно вычислить практически любую скалярную оценку точности засечки, в том числе и элементы наиболее информативного геометрического критерия – окружности СКО, характеризуемой радиусом R и внутренним эксцентриситетом e , которые вычисляют по формулам (29). Через R и e или Π и q_3 можно выразить ошибки определяемого пункта Т по осям координат или по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям и коэффициент корреляции между ними по формулам (31), (32), (33), (34).

В табл. 39 с использованием данных табл. 38 приведены результаты оценки точности однократных азимутальных засечек и многократной азимутальной засечки.

По соответствующим формулам при $m_\alpha = 10''$ были вычислены радиус R , эксцентриситет e (графа 3) и по изложенной выше методике построены окружности СКО (рис. 40) для трёх частных решений 1, 2, 3 и

результатирующая 4, которая должна располагаться внутри фигуры, образованной всеми частными решениями.

Т а б л и ц а 39

Оценка точности засечек с помощью элементов окружностей СКО

Вариант	$\Pi/q_3,$ $с^2/см^2$	$R/e,$ см	$2\varphi'/2\varphi,$ градусы	$A/B,$ см	$m_x/m_y,$ см	p_{x_i}/p_{y_i}	r_{xy}	$M,$ см	$M_k,$ см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Однократные азимутальные засечки									
1-2-Т	13,04	3,92	57	4,05	3,86	0,537	0,05	5,55	5,65
	0,82	0,12	123	3,80	3,92	0,521			
2-3-Т	18,64	5,03	86	7,64	5,50	0,264	0,82	8,01	10,79
	15,21	2,60	94	2,43	5,82	0,236			
3-1-Т	17,87	4,18	38	5,77	5,52	0,262	0,48	6,32	7,51
	11,86	1,59	38	2,59	3,09	0,838			
Многократная азимутальная засечка									
1-2-3	24,78	3,16	71	3,99	3,52	0,646	0,47	4,62	5,59
	12,22	0,83	71	2,32	2,99	0,895			

По приведенным выше формулам найдены (и проверены графически по вычерченным окружностям СКО) средние квадратические ошибки m_{x_i} и m_{y_i} каждого частного решения (графа 6 табл. 39). На рис. 40 показаны СКО по осям координат только для второго частного решения m_{x_2} , m_{y_2} и для засечки в целом m_x , m_y .

При вычислении весов p_x и p_y (графа 7) в качестве константы c было выбрано число 8 с размерностью $см^2$.

Наконец, в графах 8, 9 и 10 приведены значения коэффициента корреляции r_{xy} и радиальных ошибок без учёта корреляции M и с учётом корреляции M_k , вычисленные по формулам (17), (19), (34).

По формулам (85) могут быть подсчитаны координаты точки Т из трёх возможных вариантов однократных азимутальных засечек (рис. 39). По сокращённой формуле (97) можно вычислить весовые средние значения X и Y прямоугольных координат определяемой точки.

Аналогичным образом производится уравнивание и оценка точности многократной прямой угловой засечки.

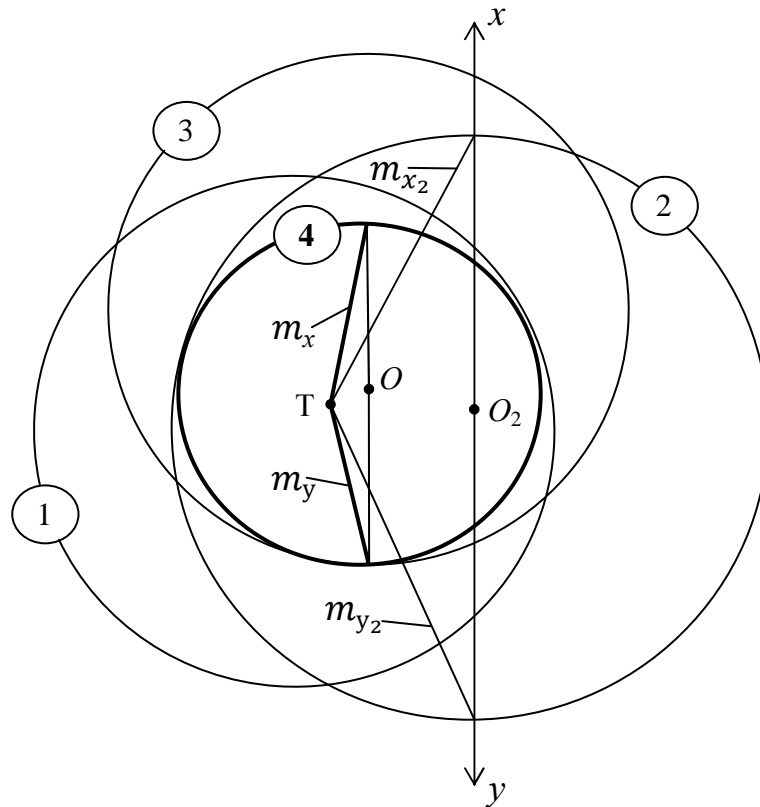


Рис. 40. Окружности СКО для однократных 1, 2, 3 и многократной 4 азимутальных засечек

3.3.2. Многократная обратная угловая засечка

Отметим, что любую многократную обратную угловую засечку можно рассматривать как совокупность однократных обратных угловых засечек. Такую многократную засечку можно обрабатывать по приведенной выше методике с той разницей, что вместо градиентов направлений q_i необходимо использовать градиенты углов q_{β_i} .

На рис. 41 показан пример геометрической интерпретации процесса уравнивания и оценки точности многократной обратной угловой засечки, в которой измерены равноточно углы β_1 , β_2 , β_3 и β_4 . Исходные данные этой засечки и результаты частных решений 1-2-3-Т, 2-3-4-Т, 3-4-1-Т, 4-1-2-Т (табл. 40) взяты из работы [48].

По приведенным выше формулам (29), (31) при $m_{\beta} = 9,6''$, взятой из работы [48], были вычислены (и проверены графически по вычерченным окружностям СКО_{внт} на рис. 41, б) СКО m_{x_i} и m_{y_i} каждого частного решения (графа 8, табл. 40) и их веса (графа 9) при $c = (9,6)^2$ с размерностью см^2 . По формуле (97) найдены вероятнейшие значения координат $X = 675,26$ м, $Y = 540,77$ м. В работе [48] строгое уравнивание дало те же результаты, но более сложным путём.

Характеристика частных решений

Частное решение	УГЛЫ	S_i , М	$S_{i-(i+1)}$, М	q_{β_i} , с/см	α'_i , °	x_i/y_i , М	m_{x_i}/m_{y_i} , см	p_{x_i}/p_{y_i}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Первое	β_1	6200	11730	0,588	308	675,105	14,0	0,470
	β_2	6630				540,794	22,0	0,190
Второе	β_2	6630	9930	0,571	64	675,311	18,9	0,258
	β_3	5410				541,228	31,8	0,091
Третье	β_3	5410	3800	0,316	134	675,672	28,5	0,113
	β_4	4590				540,844	23,1	0,173
Четвёртое	β_4	4590	6670	0,483	216	675,294	18,0	0,284
	β_1	6200				540,564	18,4	0,272

Результирующая окружность СКО характеризуется периметром полигона $\Pi = 1,0049 \text{ (с/см)}^2$, замыкающей $q_3 = 0,2201 \text{ (с/см)}^2$, $2\varphi = 168,6^\circ$, $R = 13,80 \text{ см}$, $e = 1,53 \text{ см}$, $r_{xy} = 0,044$, $A = 15,33 \text{ см}$, $B = 12,27 \text{ см}$, $M = 19,63 \text{ см}$, $M_k = 20,05 \text{ см}$.

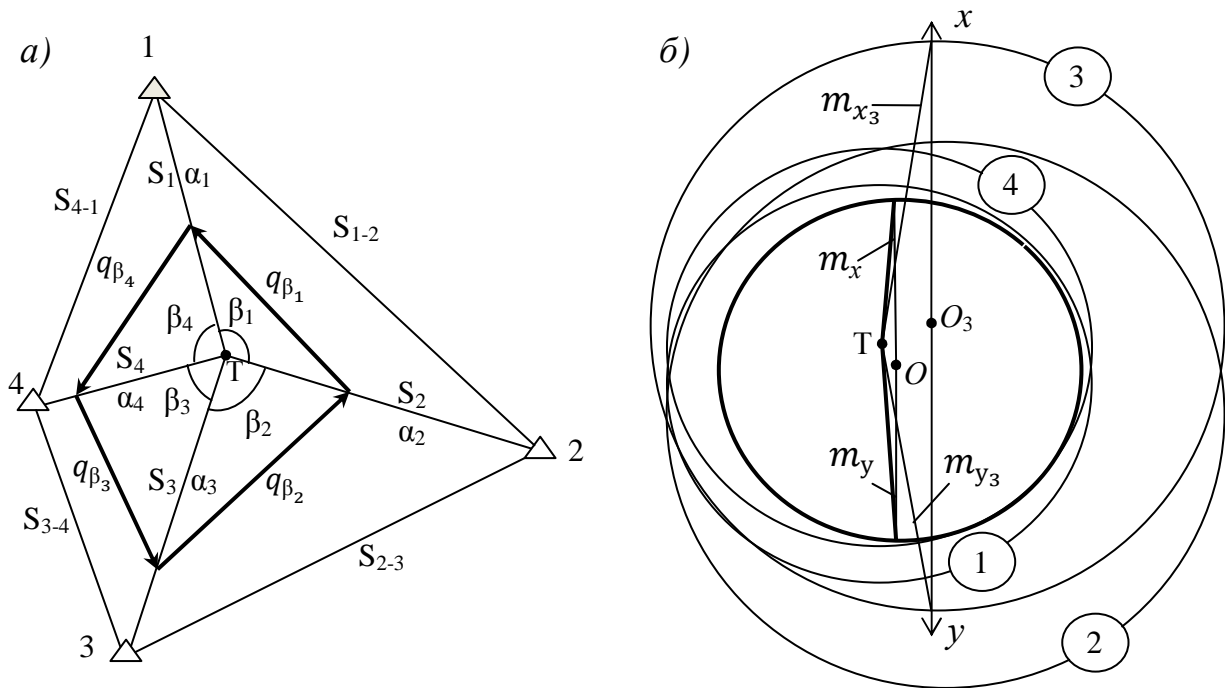


Рис. 41. Схема (а) и окружности СКО_{ВНТ} (б) обратной угловой засечки

По результирующей окружности СКО, которая располагается внутри фигуры, образованной всеми частными решениями, получены $m_x = 12,3 \text{ см}$, $m_y = 15,3 \text{ см}$, аналогичные им в упомянутой работе. На рис. 41, б показаны

СКО по осям координат только для третьего частного решения и для засечки в целом.

Рассмотрим предыдущий пример, когда углы засечки β_1 , β_2 и β_3 измерены по схеме на рис. 42, а её характеристика дана в табл. 41.

Т а б л и ц а 41

Характеристика частных решений

Частное решение	УГЛЫ	S_i , М	$S_{i-(i+1)}$, М	q_{β_i} , с/см	α'_i , °	x_i / y_i , М	m_{x_i} / m_{y_i} , см	p_{x_i} / p_{y_i}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Первое	β_1	6200	11730	0,588	308	675,105	22,6	0,180
	β_2	6630				540,794	14,9	0,415
Второе	β_2	5410	9930	0,611	5	675,672	45,7	0,044
	β_3	6200				540,844	18,2	0,278
Третье	β_3	4590	6670	0,483	36	675,294	18,0	0,284
	β_1	6200				540,564	18,4	0,272

Обращаем внимание, что измеренные углы β_2 и β_3 больше 180° (рис. 42, а). В этом случае определяют градиенты углов $(360^\circ - \beta_2)$ и $(360^\circ - \beta_3)$, а при вычислении градиента q_{β_2} по формуле (3) в качестве расстояния $S_{i-(i+1)}$ между исходными пунктами необходимо брать S_{3-1} .

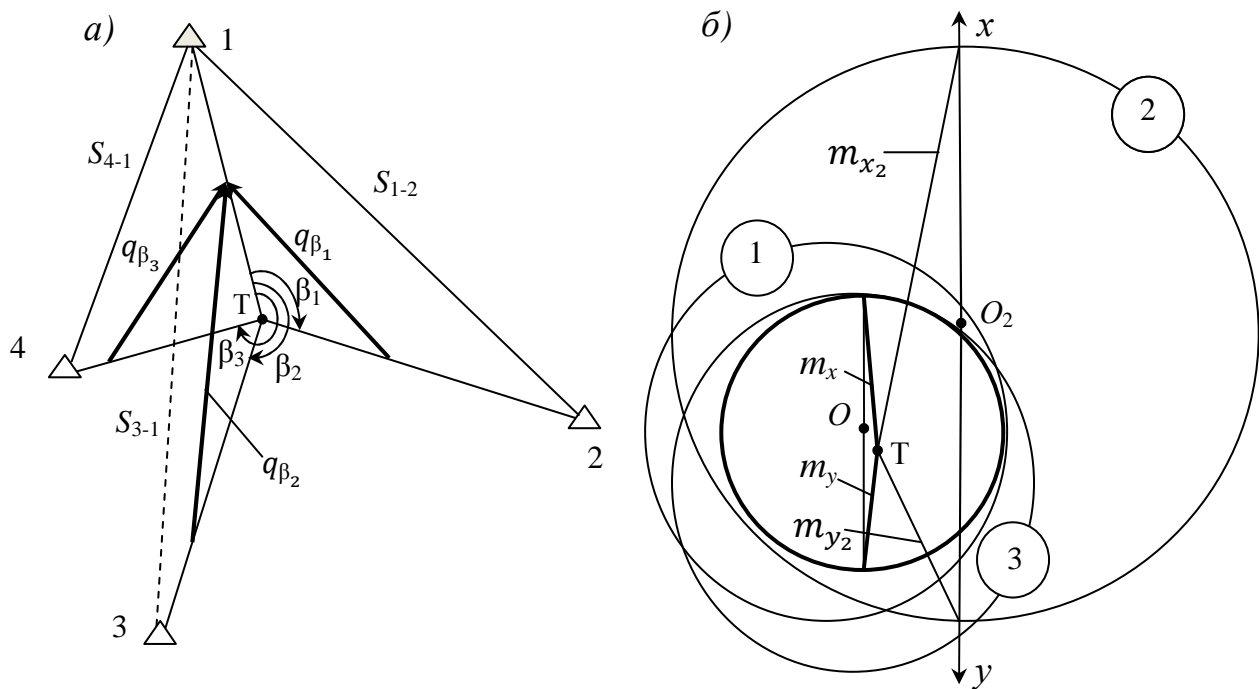


Рис. 42. Схема (а) и окружности СКО_{ВНТ} (б) обратной угловой засечки

Исходные данные этой засечки и результаты частных решений 1-2-3-Т, 3-4-1-Т, 4-1-2-Т (табл. 41) взяты из той же работы [48]. По приведенным выше формулам (29, 31) при $m_\beta = 9,6''$, также взятой из работы [48], были вычислены (и проверены графически по вычерченным окружностям СКО_{ВНТ} на рис. 42, б) СКО m_{x_i} и m_{y_i} каждого частного решения (графа 8, табл. 41) и их веса (графа 9) при $c = (9,6)^2$ с размерностью см^2 . По формуле (97) найдены вероятнейшие значения координат $X = 675,26$ м, $Y = 540,74$ м. В работе [48] строгое уравнивание дало практически те же результаты $X = 657,25$ м, $Y = 540,71$ м, но более сложным путём.

Результирующая окружность СКО характеризуется периметром полигона $\Pi = 0,9524 (\text{с/см})^2$, замыкающей $q_3 = 0,3594 (\text{с/см})^2$, $2\varphi = 352,2^\circ$, $R = 14,74$ см, $e = 2,89$ см, $r_{xy} = -0,055$, $A = 17,63$ см, $B = 11,85$ см, $M = 21,24$ см, $M_k = 21,78$ см.

По результирующей окружности СКО, которая располагается внутри фигуры, образованной всеми частными решениями, получены $m_x = 17,6$ см, $m_y = 11,9$ см те же, что и при строгом способе уравнивания. На рис. 42, б показаны СКО по осям координат только для второго частного решения и для засечки в целом.

3.3.3. Комбинированная засечка

Крупные сооружения (особенно такие, как дамбы, плотины) под воздействием односторонних нагрузок могут претерпевать горизонтальные смещения. Для определения этих смещений создают специальные измерительные сети, основанные, например, на методах триангуляции, трилатерации и др. (рис. 43).

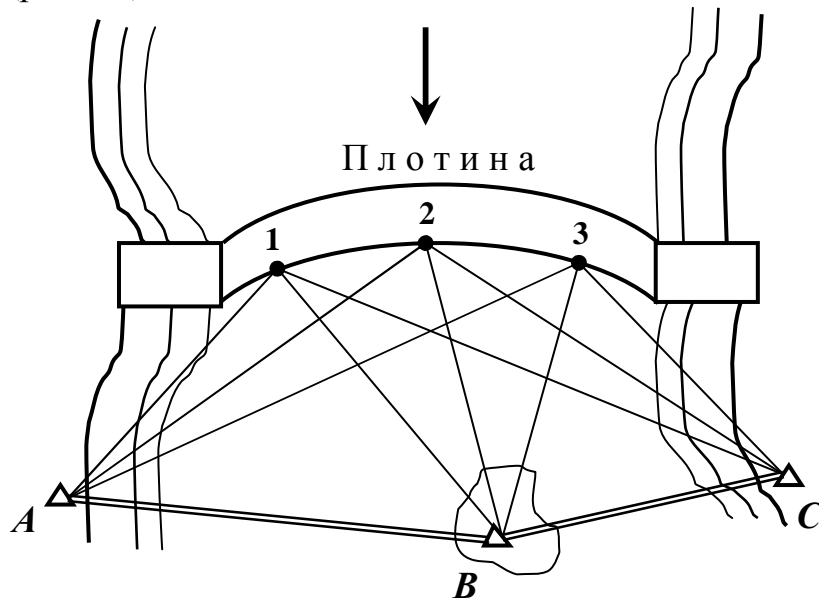


Рис. 43. Схема определение горизонтальных смещений методом триангуляции

Метод триангуляции предусматривает периодические определения координат точек 1, 2, 3, ... с геодезических пунктов $A, B, C \dots$ путём измерения в треугольниках всех трёх горизонтальных углов. Горизонтальные смещения получают как разность координат в i -м и начальном циклах наблюдений.

В комбинированной засечке используется метод триангуляции, где предусмотрено измерение всех трёх углов в треугольниках рассмотренных выше прямой угловой или обратной угловой засечек. Пусть, например, на схеме обратной угловой засечки на рис. 41, a измерены горизонтальные углы β_1, \dots, β_8 (рис. 44).

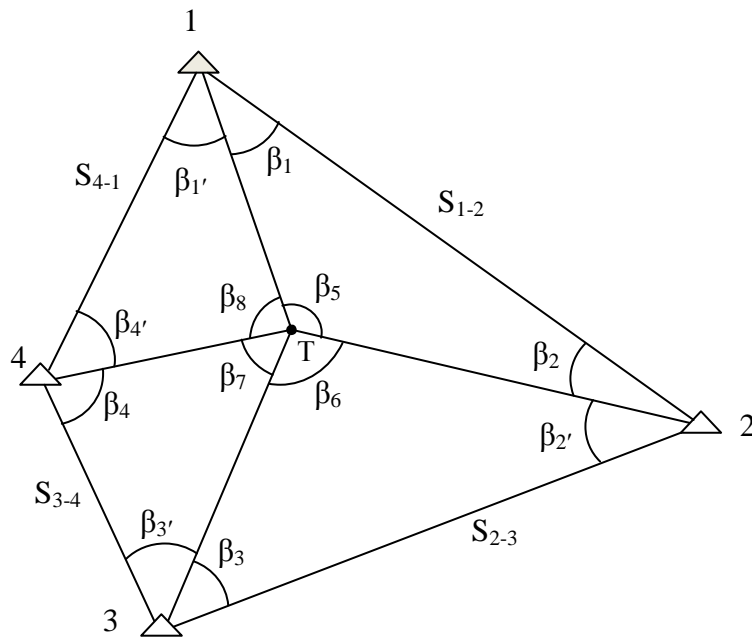


Рис. 44. Схема многократной комбинированной засечки

В этом случае координаты определяемой точки T в каждом частном решении должны вычисляться после предварительного уравнивания углов в каждом треугольнике. Сам процесс уравнивания координат выполняется по изложенной выше методике.

Что касается оценки точности такой многократной засечки, то в вычислении периметра и замыкающей соответствующего ей квадратического полигона по формулам (12), (13) будут участвовать 8 градиентов направлений 1- T , 2- T , 3- T , 4- T и 4 градиента углов $\beta_5, \beta_6, \beta_7$ и β_8 . В табл. 42 приведены исходные данные и результаты оценки точности комбинированной засечки (рис. 44) по специально разработанной программе. Если из этой программы убрать четыре последних строки, то получим оценку точности прямой многократной засечки. Если убрать восемь верхних строк, то получим оценку точности обратной многократной засечки (см. табл. 42). Вообще говоря, такой единый алгоритм применим для оценки точности

любой угловой засечки с любым количеством и сочетанием измеренных углов.

Т а б л и ц а 42

Оценка точности многократных угловых засечек

Измеренные углы	Направление	Расстояние S , м	Градиенты q, q_{β} , с/см	$\alpha, \alpha', ^\circ$	Периметр P , с ² /см ²	Замыкающая q_3 , с ² /см ²	A/B , см	R/e , см	M/M_K , см	$r_{xy}, 2\phi$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
β_1	1-Т	6200	0,333	152	Комбинированная засечка (β_1, \dots, β_8)					
$\beta_{1'}$	Т-1	6200	0,333	332	2,114	0,562	10,90 8,30	15,86 1,30	13,70 14,37	0,104 157,8°
β_2	2-Т	6630	0,311	283						
$\beta_{2'}$	Т-2	6630	0,311	103						
β_3	3-Т	5410	0,381	34	Прямая угловая засечка ($\beta_1, \beta_{1'}, \beta_2, \beta_{2'}, \beta_3, \beta_{3'}, \beta_4, \beta_{4'}$)					
$\beta_{3'}$	Т-3	5410	0,381	214	1,110	0,348	15,56 11,24	15,09 2,16	19,20 20,60	0,160 151,1°
β_4	4-Т	4590	0,449	77						
$\beta_{4'}$	Т-4	4590	0,449	257						
β_5	-	-	0,588	308	Обратная угловая засечка ($\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$)					
β_6	-	-	0,571	64	1,005	0,220	15,32 12,27	15,09 1,53	19,63 20,05	0,044 168,6°
β_7	-	-	0,316	134						
β_8	-	-	0,483	216						

Следует сказать, что при равноточном измерении углов результаты уравнивания не изменятся, если в приведенных выше формулах принять, например, СКО $m_{\beta} = 1''$. Тогда для определения СКО уравненных координат необходимо значения СКО, полученные по «единичной» окружности СКО, умножить на действительное значение μ .

Как отмечали В.Д. Большаков и П.А. Гайдаев [7]: «... ошибку единицы веса не обязательно брать ту, которая получена по результатам уравнивания. Она может быть определена другим путём, например, из обработки более обширного материала ранее выполненных измерений или специально поставленного эксперимента. Анализ производственного материала, если он достаточно обширен, даёт всегда более надёжные результаты». Это замечание имеет непосредственное отношение к нашим примерам, когда число частных решений крайне ограничено.

3.3.4. Линейная засечка

Пример линейной засечки, исходные данные которого (табл. 43) взяты из работы К. Михайловича (Геодезия. – М.: Недра. – 1984), показан на рис. 45. По приведенным выше формулам (29), (31) при $m_S = 4,5$ см, взятой из цитируемой работы, были вычислены СКО m_{x_i} и m_{y_i} каждого

частного решения (графа 8, табл. 43) и их веса (графа 9) при $c = (4,5)^2$ с размерностью см^2 .

Т а б л и ц а 43

Характеристика частных решений линейной засечки

Частное решение	Расстояния	S_i , м	q_{S_i}	α_i , °	x_i/y_i , м	m_{x_i}/m_{y_i} , см	p_{x_i}/p_{y_i}
1	2	3	4	5	7	8	9
Первое 1-2-Т	S_1	82,84	1	75	6976,564	6,6	0,465
	S_2	97,63	1	131	8400,879	3,8	1,402
Второе 2-3-Т	S_2	97,63	1	131	6976,420	20,9	0,046
	S_3	112,10	1	143	8400,745	22,4	0,040
Третье 3-4-Т	S_3	112,10	1	143	6976,567	4,5	1,000
	S_1	71,17	1	232	8400,948	4,5	1,000

По формуле (97) найдены вероятнейшие значения координат $X = 6976,562$ м, $Y = 8400,905$ м, а выполненное в указанной работе строгое уравнивание дало $X = 6976,559$ м, $Y = 8400,910$ м, то есть, практически те же результаты.

Результирующая окружность СКО характеризуется периметром полигона $\Pi = 4$, замыкающей $q_3 = 1,0841$, $2\varphi = 26,4^\circ$, $R = 3,27$ см, $e = 1,54$ см, $r_{xy} = 0,125$, $A = 3,73$ см, $B = 2,82$ см, $M = 4,68$ см, $M_k = 4,95$ см.

По результирующей окружности СКО, которая располагается внутри фигуры, образованной всеми частными решениями, получены $m_x = 3,7$ см, $m_y = 2,9$ см, аналогичные им в упомянутой работе. На рис. 45 показаны СКО по осям координат только для второго частного решения и для засечки в целом.

В рассмотренном примере линейной засечки $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$, а их сумма $\sum_1^n p_i = 4$. В некоторых работах можно встретить предложения, связанные с перераспределением весов измеренных длин сторон. Так, стороны 2-Т и 3-Т входят одновременно в два частных решения, поэтому им предлагается придать веса $p_2 = p_3 = 0,5$, причём сумма $\sum_1^n p_i = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4 = 4$ останется без изменения. В этом случае уравненные координаты составят $X = 6976,562$ м, $Y = 8400,905$ м, а результирующая окружность СКО на рис. 45 не изменится.

Другое предложение заключается в том, чтобы стороны 2-Т и 3-Т были измерены дважды с целью использования одного измерения в одном, а второго – в другом частном решении. Здесь веса будут равны $p_2 = p_3 = 2$ и $\sum_1^n p_i = 6$, поэтому размеры результирующей окружности СКО на рис. 45 уменьшатся, а уравненные координаты будут $X = 6976,560$ м, $Y = 8400,906$ м. Как видим, изменение весов в диапазоне 0,5-2,0 практически не приводит к изменению уравненных значений координат. Это полностью

соответствует выводам работы [114] о том, что «манипуляция» с весами мало что даёт, так как их изменение лишь условно может улучшить сеть с хорошей геометрией.

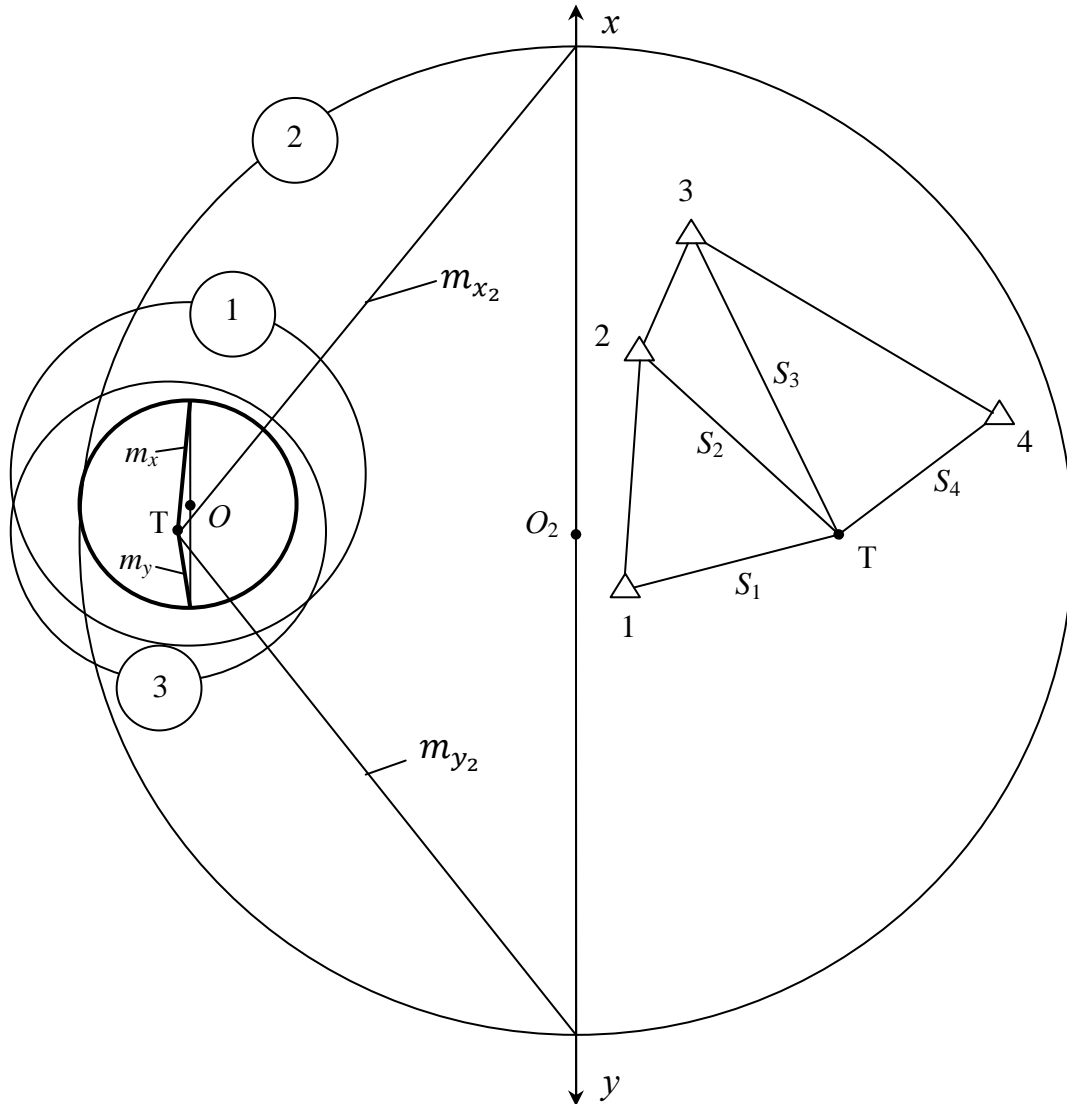


Рис. 45. Схема и окружности СКО линейной засечки

Если вместо рассмотренных трёх частных решений на рис. 45 ограничиться только первым и третьим, обосновывая это их независимостью, то в результате уравнивания получим $X = 6976,566$ м, $Y = 8400,918$ м. Если иметь в виду все возможные комбинации частных решений (таковых 6), то $X = 6976,568$ м, $Y = 8400,900$ м. Как видим, такие подходы могут дать худшие результаты за счёт включения частных решений с плохой геометрией, что приводит к уменьшению «эффективности способа» [11]. Как было показано в главе 1, выбор оптимального сочетания частных решений может базироваться на использовании линий крайних положений, формирующих фигуру погрешностей.

3.3.5. Линейно-угловая засечка

Пример линейно-угловой засечки на рис. 46 взят из работы Н.Н. Лебедева, Д.П. Баркова (Уравнивание линейно-угловых сетей инженерно-геодезического обоснования. – М.: Недра. – 1980). В этой засечке, характеристика которой приведена в табл. 44, измерены углы $\beta_1, \beta_2, \beta_2', \beta_3$ с СКО $m_\beta = 1,4''$ и длины сторон S_1, S_2, S_3 с СКО $m_S = 0,7$ см. Здесь можно выделить три линейно-угловых частных решения 1-Т, 2-Т и 3-Т, результаты которых приведены в графе 8. При вычислении x_2 и y_2 в качестве α_2 берётся среднее значение из двух, полученных через углы β_2 , и β_2' .

Т а б л и ц а 44

Характеристика частных решений линейно-угловой засечки

Частное решение	Углы, расст.	Направления	S_i , м	q_α, q_{S_i}	$\alpha_i, ^\circ$	x_i / y_i , м	m_{x_i} / m_{y_i} , см	p_{x_i} / p_{y_i}
1	2	3	4	5	7	8	9	10
Первое 1-Т	β_1	1-Т	486	4,244	6	<u>1289,755</u>	0,697	4,034
	S_1	1-Т	486	1	6	<u>755,622</u>	0,336	17,361
Второе 2-Т	β_2	Т-2	601	3,432	229	<u>1289, 751</u>	<u>0,508</u>	<u>7,595</u>
	β_2'	2-Т	601	3,432	49		<u>755,632</u>	0,561
	S_2	2-Т	601	1	49			
Третье 3-Т	β_3	Т-3	474	4,352	297	<u>1289, 742</u>	0,428	10,700
	S_3	3-Т	474	1	117	<u>755,622</u>	0,640	4,785

В табл. 44 градиенты расстояний являются безразмерными величинами, а градиенты направлений имеют размерность с/см. Поэтому, при вычислении весов p_α угловых и p_S линейных измерений необходимо придерживаться той же размерности. В нашем примере принято $\mu = 1,4''$, поэтому $p_\alpha = 1$, а $p_S = \mu^2 / m_S^2 = 1,4^2 / 0,7^2 = 4$ (с/см)².

По приведенным выше формулам (29), (31) при $\mu = 1,4''$, были вычислены (и проверены графически по вычерченным окружностям СКО_{ВНТ} на рис. 46) средние квадратические ошибки m_{x_i} и m_{y_i} каждого частного решения (графа 9, табл. 44) и их веса $p_{x,y} = \mu^2 / m_{x,y}^2$ (графа 10). По формуле (97) найдены вероятнейшие значения координат $X = 1289,747$ м, $Y = 755,625$ м. В цитируемой работе строгое уравнивание дало те же результаты, но более сложным путём.

Результаты оценки точности многократной линейно-угловой засечки представлены в табл. 45.

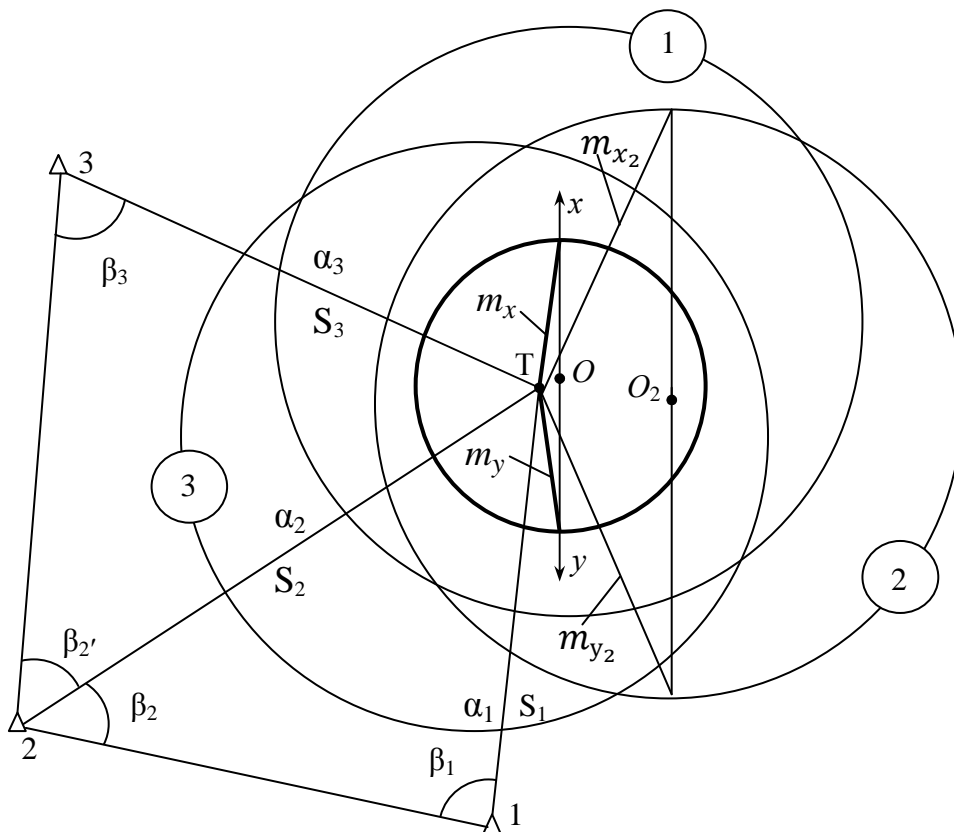


Рис. 46. Схема и окружности СКО линейно-угловой засечки

Т а б л и ц а 45

**Оценка точности многократной линейно-угловой засечки
при $p_\alpha = 1$**

Углы, рас- стояния	Направ- ления	Расстоя- ния $S, м$	$p_S,$ $p_\alpha q_\alpha^2$	α, α'	Периметр $\Pi, с^2/см^2$	Замыкаю- щая $q_3, с^2/см^2$	$A/B,$ см	$R/e,$ см	$M/M_K,$ см	$r_{xy},$ 2ϕ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
β_1	1-Т	486	18,013	6	72,507	10,433	0,25 0,22	0,23 0,02	0,33 0,36	0,142 77,8°
S_1	1-Т	486	4,000	6						
β_2	2-Т	601	11,779	49						
β_2'	2-Т	601	11,779	49						
S_2	2-Т	601	4,000	49						
β_3	3-Т	474	18,936	117						
S_3	3-Т	474	4,000	117						

Обращаем внимание, что сторонами квадратического полигона здесь являются величины p_S и $p_\alpha q_\alpha^2$, ориентировка которых p_S осуществляется

по углам $(2\alpha + 180^\circ)$, а $p_\alpha q_\alpha^2$ – по углам 2α . Периметр полигона (12) равен $\Pi = [p_s] + [p_\alpha q_\alpha^2]$, а замыкающую и её румб вычисляют по формулам (13). По значениям периметра и замыкающей получают по приведенным выше формулам всю необходимую информацию (табл. 45), в том числе $m_x = 0,24$ см и $m_y = 0,23$ см.

Если в рассматриваемом примере примем $p_s = 1$, тогда при $\mu = 0,7$ см и $m_\alpha = 1,4''$ имеем $p_\alpha = \mu^2 / m_\alpha^2 = 0,7^2 / 1,4^2 = 0,25$ (см/с)². В результате этого будем иметь те же результаты уравнивания и оценки точности (табл.46), что и при $p_\alpha = 1$.

Т а б л и ц а 46

**Оценка точности многократной линейно-угловой засечки
при $p_s = 1$**

Углы, рас- стояния	Направ- ления	Расстоя- ния S, м	$p_s,$ $p_\alpha q_\alpha^2$	α, α'	Периметр $\Pi, \text{с}^2/\text{см}^2$	Замыкаю- щая $q_3, \text{с}^2/\text{см}^2$	A/B, см	R/e, см	M/M _к , см	$r_{xy},$ 2φ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
β_1	1-Г	486	4,503	6	18,1267	2,6082	0,25 0,22	0,23 0,02	0,33 0,36	0,142 77,8°
S_1	1-Г	486	1,000	6						
β_2	2-Г	601	2,945	49						
β_2'	2-Г	601	2,945	49						
S_2	2-Г	601	1,000	49						
β_3	3-Г	474	4,734	117						
S_3	3-Г	474	1,000	117						

Другой путь построения окружностей СКО заключается в том, что каждое частное решение можно рассматривать как полярную засечку, для которой справедливы формулы (83). В этом случае, если продольное смещение $l_2 = m_s$ точки Г больше её поперечного смещения $l_1 = m_\beta S/\rho$, то большая полуось эллипса ошибок $A = m_s$, малая полуось $B = m_\beta S/\rho$ и дирекционный угол φ большой полуоси совпадает с направлением рассматриваемой стороны засечки, то есть $\varphi = \alpha$. В противном случае A и B поменяются местами, а $\varphi = \alpha + 90^\circ$.

В разделе 1.3. было показано, что в качестве сторон квадратического полигона можно использовать величины, например, $(p_s - p_\alpha q_\alpha^2)$. Если в скобках будут положительные величины, то используют соответствующие им углы $(2\alpha + 180^\circ)$, если отрицательные, то используют соответствующие им углы 2α . Пусть в рассмотренном выше примере $p_\alpha = 1$, $p_s = 4$ (с/см)², поэтому $(p_{S_1} - q_1^2) = 4 - 4,244^2 = -14,012$ с углом $2\alpha_1 = 12^\circ$, $(p_{S_2} - q_2^2) = 4 - 3,432^2 = -7,779$ с $2\alpha_2 = 98^\circ$, $(0 - q_2^2) = 0 - 3,432^2 = -11,779$ с $2\alpha_2 = 98^\circ$ и $(p_{S_3} - q_3^2) = 4 - 4,352^2 = -14,940$ с $2\alpha_3 = 234^\circ$, а раз-

мерность всех разностей $(\text{с/см})^2$. Отсюда по формулам (13), беря в качестве a абсолютные значения разностей, находим $q_3 = 10,429 (\text{с/см})^2$ и румб $2\varphi' = 77,8^\circ$ (те же, что и в табл. 45).

Если принять $p_s = 1$, $p_\alpha = 0,25 (\text{см/с})^2$, тогда $(p_s - p_\alpha q_1^2) = 1 - 0,25 \times 4,244^2 = -3,5029$ ($2\alpha_1 = 12^\circ$), $(p_s - p_\alpha q_2^2) = 1 - 0,25 \times 3,432^2 = -1,9447$ ($2\alpha_2 = 98^\circ$), $(0 - p_\alpha q_2'^2) = 0 - 0,25 \times 3,432^2 = -2,9447$ ($2\alpha_2 = 98^\circ$), $(p_s - p_\alpha q_3^2) = 1 - 0,25 \times 4,352^2 = -3,7350$ ($2\alpha_2 = 234^\circ$), причём все разности являются непоименованными величинами), Найденные значения $q_3 = 2,6072$ и $2\varphi' = 77,8^\circ$ соответствуют таковым в табл. 46.

Таким образом, теоретические основы единого алгоритма уравнивания и оценки точности любых геодезических засечек заключаются в определении периметра квадратического полигона, замыкающей и её ориентировки относительно координатных осей. В результате можно найти практически любые известные в геодезии на данный момент скалярные оценки точности, производя одновременно геометрическую интерпретацию как вычислительных операций, так и получаемых результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксамитов, П.Г. Ориентирование и преобразование в окружность эллипса ошибок / П.Г. Аксамитов, М.М. Иванова, И.И. Купчинов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1981. – № 1. – С. 37-44.
2. Аксамитов, П.Г. Ориентирование и преобразование в окружность эллипса ошибок обратной и многократной обратной засечек / П.Г. Аксамитов, М.М. Иванова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1985. – № 4. – С. 27-34.
3. Баландин, В. Н. Вероятность нахождения определяемой точки в круге погрешностей / В. Н. Баландин // Геодезия и картография. – 1983. – № 5. – С. 14-15.
4. Баландин, В. Н. Вероятность нахождения определяемой точки в сфере ошибок / В. Н. Баландин // Геодезия и картография. – 1984. – № 5. – С. 18-20.
5. Баран, П. И. Применение геодезических засечек, их обобщённые схемы и способы машинного решения / П. И. Баран, В. И. Мицкевич., Ю. В. Полищук и др. // – М.: Недра, 1986. – 166 с.
6. Бойко, Е. Г. Использование искусственных спутников земли для построения геодезических сетей / Е. Г. Бойко, Б.М. Кленицкий и др. // – М.: Недра, 1977. – 375 с.
7. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев // –М.: Недра, 1977. – 367 с.
8. Большаков, В.Д. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе // –М.: Недра, 1984. – 352 с.
9. Видуев, Н.Г. Коэффициент корреляции в системе плоских прямоугольных координат / Н.Г. Видуев // Инженерная геодезия. – 1979. – Вып. 22. – С. 12-16.
10. Вострецов, В.И. Проектирование и оценка точности инженерно-геодезических сетей / В.И. Вострецов // Геодезическое обеспечение строительства. Сб. статей ВАГО. – М. – 1987. – С. 3-7.
11. Ганьшин, В. Н. Эффективность способа и вес результата измерений / В.Н. Ганьшин // Геодезия и картография. – 1967. – № 9. – С. 16-18.
12. Ганьшин, В. Н. Влияние ошибок исходных данных на положение точки, вынесенной на местность / В.Н. Ганьшин // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1972. – № 4. – С. 13-20.
13. Ганьшин, В. Н. Оценка точности определения местоположения пункта одним числом / В.Н. Ганьшин, В. М. Лазарев // Геодезия и картография. – 1985. – № 8. – С. 43-45.
14. Гордеев, Ю.А. Обобщение примеров оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей / Ю.А. Гордеев // Учёные записки Ленинградского высшего инженерного училища им. Адмирала Макарова. – Вып. XV. Изд. «Морской транспорт». – 1959. – 133 с.
15. Гусев, Ю. С. О подере обратной угловой засечки / Ю. С. Гусев, Г.А. Шеховцов // Геодезия и картография. – 1984. – №7. – С. 12 – 15.
16. Закиров, Л. В. Определение координат четвёртой точки по координатам трёх точек / Л. В. Закиров // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1971. – № 1.
17. Каврайский, В.В. Линии положения и их применение / В.В. Каврайский // Известия Военно-морской академии. – 1939. – № 2.
18. Капетанович, Н. М. Определение координат четвёртой точки по координатам трёх точек / Н. М. Капетанович // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1976. – № 4. – С. 29 – 31.
19. Келль, Н.Г. Графический метод в действиях с погрешностями и положениями / Н.Г. Келль // Изд. Академии наук СССР. – 1948.

20. Ключин, Е. Б., Новое решение «старой» задачи / Е. Б. Ключин, Заки Мохамед Зейдан Эль-Шейха, Е. П. Власенко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – № 1. – С. 7 – 12.
21. Ключин, Е. Б. Оценка точности обратной угловой засечки / Е. Б. Ключин, Заки Мохамед Зейдан Эль-Шейха, Е. П. Власенко // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – № 3. – С. 31 – 33.
22. Ключин, Е. Б. Создание плановой разбивочной сети на монтажном горизонте при строительстве зданий повышенной этажности / Е. Б. Ключин., Е. П. Власенко, Заки Мохамед Зейдан Эль-Шейха // Изв. вузов. Геод. и аэрофотосъемка. - 2009. - № 5. - С. 48-54.
23. Кобылин, А.И. Предвычисление погрешностей подходных пунктов при основных маркшейдерских работах / А.И. Кобылин // Изв. вузов. Горный журнал. – Вып. 2. – 1960.
24. Кобылин, А.И. Оценка точности положения геодезических пунктов, определяемых методом триангуляции / А.И. Кобылин // Инженерная геодезия. Вып. 3. – 1966. – С. 22-32.
25. Коугия, В. А. О влиянии ошибок исходных данных на точность выноса проекта в натуру / В.А Коугия // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1973. – № 6. – С. 137 – 144.
26. Крохмаль, Е.М. Итерационный метод выбора оптимального по точности положения пункта, определяемого прямой или обратной геодезической засечкой / Е.М. Крохмаль // Труды Харьковского сельскохоз. ин-та. – 1974. – с. 60-70.
27. Мазмишвили, А.И. Общие основы уравнивания и оценки точности геодезических построений в поле скалярных, векторных и тензорных величин / А.И. Мазмишвили // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – Вып. 1959.
28. Маркузе, Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю. И. Маркузе //– М.: Недра, 1982. – 191 с.
29. Маркузе, Ю. И. Об определении необходимых и избыточных измерений в процессе рекуррентного уравнивания / Ю. И. Маркузе, П.П. Лобанов, Жорж Мансур // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1994. – № 2-3. – С. 27 – 35.
30. Машимов, М. М. Уравнивание геодезических сетей / М. М. Машимов //– М.: Недра, 1979.
31. Маслов, А. В. Геодезия. Учебное пособие для вузов / А. В. Маслов, А. В. Гордеев, Ю. Г. Батраков // – М.: Недра, 1980. – 616 с.
32. Неумывакин, Ю.К. Об оценке точности планов застроенных территорий / Ю.К. Неумывакин // Геодезия и картография. – 1973. – № 11. – С. 56-62.
33. Никифоров, Б. И. Количественная оценка качества геодезических работ / Б. И. Никифоров // Геодезия и картография. – 1985. – № 6. – С. 22-24.
34. Павлов, Ф.Ф. Кривые средних ошибок / Ф.Ф. Павлов // Научные труды МГИ. – 1950. – Вып. 8. – С. 373-391.
35. Павлов, Ф.Ф. Предвычисление погрешностей в основных маркшейдерских работах / Ф.Ф. Павлов // М. – Л. Углетехиздат. – 1950. – 187 с.
36. Падве, В. А. Вариация на тему прямой засечки / В. А. Падве // Геодезия и картография. – 1999, – №9. – С. 47 – 48.
37. Проворов, К.А. Применение линий положения для оценки точности определения геодезических пунктов / К.А. Проворов // Труды Новосибирского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. – 1963. – т. XVIII. – Вып. 1.
38. Разумов, О.С. Точность положения точек в малых системах линейной триангуляции / О.С. Разумов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – Вып. 6. – 1960.

39. Раскаткина, О. В. Варианты оптимизации прямой угловой засечки при определении крена сооружений башенного типа / О. В. Раскаткина // Сб. статей по материалам LXI междунар. науч.-практ. конф: Технические науки: от теории к практике. Новосибирск, август 2016 г. – №8 (56). – С. 117-133.
40. Реминский, А. А. Решение трёхкратной прямой засечки с учётом весов / А. А. Реминский // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1984. – Вып. 39. – С. 90-94.
41. Симонян, В. В. Применение среднеквадратических эллипсов для создания математической модели смещений оползней / В. В. Симонян // 5 Международная научно-практическая конференция "Геопространственные технологии и сферы их применения", Москва, 11-12 марта, 2009. - М., 2009. - С. 48-49.
42. Сомов, Г.Е. Градиенты и линии положения в геодезии / Г.Е. Сомов // Труды Харьковского сельскохозяйственного института – 1967. – т. 59/90. – 202 с.
43. Соустин В.Н. Использование электронного тахеометра при выверке вертикальности колонн / В. Н. Соустин, Ю.Б. Бызов, Е.П. Нагибин // Геодезия и картография. – 2006, – №1. – С. 41 – 44.
44. Тамутис, З.П. Определение оптимального положения проектируемых пунктов геодезической сети градиентным методом // Труды по геодезии Вильнюсского инж.-строит. ин-та. – 1982. – Вып. – 11. – с. 5-10.
45. Тамутис, З.П. Проектирование инженерно-геодезических сетей /З.П. Тамутис // – М.: Недра, 1990. – 138 с.
46. Торопин, Е.В. Уравнивание координат пункта, вставляемого в жесткую фигуру, по способу весового среднего / У.В. Торопин // Инженерная геодезия.– 1979. – Вып. 22. – С. 7-12.
47. Третьяк, К.Р. О проектировании оптимальных программ наблюдений в плановых геодезических сетях / К.Р. Третьяк // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1988. – № 48. – С. 90-98.
48. Хаимов, З. С. К уравниванию засечек / З. С. Хаимов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1980. – № 2. – С. 16 – 26.
49. Хлебников, А.В. Определение размеров доверительных эллипсов при ограниченном числе степеней свободы // Маркшейдерское дело и геодезия. – Л. – 1979. – №6. – С. 31-35.
50. Шеховцов, Г.А. Графический способ оценки точности азимутальной засечки / Г.А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка.– 1972. – Вып. 4. – С. 65 – 69.
51. Шеховцов, Г. А. Построение подеры прямой угловой засечки / Г. А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1978. – Вып. 27. – С. 148-154.
52. Шеховцов, Г.А. Сравнение вариантов и выбор оптимального при азимутальной засечке / Г.А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1979. – Вып. 29. – С. 114-119.
53. Шеховцов, Г.А. Графическая оценка точности засечек с учётом погрешностей исходных данных / Г. А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1981. – Вып. 34. – С. 97-104.
54. Шеховцов, Г.А. Об оценке точности определения крена высоких сооружений / Г.А. Шеховцов, Б.А. Ильин // Промышленное строительство. – 1983. – №2. – С. 27-28.
55. Шеховцов, Г. А. О критериях оценки точности и оптимизации засечек / Г. А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1984. – № 2. – С. 17 – 22.
56. Шеховцов, Г. А. Оценка точности засечек с помощью окружности стандартов / Г. А. Шеховцов // Геодезия и картография. – 1985. – № 8. – С. 45-47.

57. Шеховцов, Г.А. К уравниванию обратной угловой засечки / Г. А. Шеховцов, Ю.С. Гусев // Геодезия и картография. – 1985. – № 12. – С. 12-15.

58. Шеховцов, Г. А. Теоретические основы приборов типа «подерограф» / Г. А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1985. – Вып. 42. – С. 95-103.

59. Шеховцов, Г.А. Новый способ определения элементов эллипса погрешностей и его подеры / Г. А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1985. – Вып. 42. – С. 102-109.

60. Шеховцов, Г.А. Статистическое моделирование с использованием окружности стандартов / Г. А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1986. – Вып. 44. – С. 90-98.

61. Шеховцов, Г.А. Влияние коэффициента корреляции на погрешность определяемых элементов сети/ Г. А. Шеховцов // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1987. – Вып. 46. – С. 110-115.

62. Шеховцов, Г. А. Уравнивание засечек с помощью эллипсографа / Г. А. Шеховцов // Геодезия и фотограмметрия в горном деле. – Свердловск. – 1987. – С. 9-19.

63. Шеховцов, Г. А. О семантической насыщенности окружности стандартов / Г. А. Шеховцов // Геодезия и картография. – 1987. – № 2. – С. 18-20.

64. Шеховцов, Г. А. Критерии и средства геометрической интерпретации погрешности положения точек на плоскости / Г. А. Шеховцов // Горьковский инженерно-строительный ин-т. – Горький. – 1987. – 198 с. – Деп. в ВИНТИ 05.01.87. – № 192-В87.

65. Шеховцов, Г. А. Радиальная ошибка с учётом корреляции / Г. А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1988. – № 5. – С. 45 – 49.

66. Шеховцов, Г. А. Геометрическая интерпретация ошибки положения точки в трёхмерном пространстве / Г. А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1989. – № 5. – С. 55 – 57.

67. Шеховцов, Г. А. О скалярной оценке точности положения точки в трёхмерном пространстве / Г. А. Шеховцов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1990. – № 2. – С. 27 – 32.

68. Шеховцов, Г. А. Определение оптимальной программы наблюдений / Г. А. Шеховцов // Геодезия и картография. – 1991. – № 4. – С. 17-20.

69. Шеховцов, Г. А. Оценка точности положения геодезических пунктов / Г. А. Шеховцов // – М.: Недра, 1992. – 255 с.

70. Шеховцов, Г. А. Способы контроля пространственного положения сооружений башенного типа треугольной формы: монография / Г. А. Шеховцов, В.Н Мамонов // Н.Новгород: ННГАСУ, 2014, 176 с.

71. Шеховцов, Г. А. Теоретические основы одностороннего координатного способа определения крена сооружений башенного типа / Г. А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2012. – №5. – С. 30-31.

72. Шеховцов, Г.А. Геодезические работы при экспертизе промышленной безопасности зданий и сооружений: монография / Г.А. Шеховцов, Р.П Шеховцова // Н.Новгород: ННГАСУ, 2014, 176 с.

73. Шеховцов, Г.А. Экспериментальные исследования координатного способа определения крена промышленных дымовых труб / Г.А. Шеховцов, Р. П. Шеховцова, Д.П. Ивенин, О.В. Раскаткина // Приволжский научный журнал. Н.Новгород: ННГАСУ, – 2016, – №1, – С. 58-64.

74. Ярмолович, И. П. Оценка точности пространственной засечки / И. П. Ярмолович // Изв. вузов. Горный журнал. – 1969. – № 5. – С. 48 – 51.

75. Ярмолович, И.П. О подере эллипсоида погрешностей и весовом эллипсоиде / И.П. Ярмолович // Изв. вузов. Горный журнал. – 1970. – № 10 – С. 71 – 73.
76. Ярмолович, И.П. К вопросу об оценке точности опорной сети в трёхмерном пространстве / И.П. Ярмолович // Сб. трудов Всес. заочн. политехн. ин-та. – 1976. – № 99 – С. 87 – 90.
77. Ярмолович, И.П. Вычисление ошибки положения определяемого пункта с учётом ошибок исходных пунктов / И.П. Ярмолович // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1962. – № 1.
78. Ховани, Л. Вопросы точности определения горизонтальных смещений пунктов при помощи геодезических засечек / Л. Ховани // Маркшейдерское дело в социалистических странах. – Л. – 1979. – №8. – С. 186-199.
79. Baran W. Wyznaczanie elementov elipsoidy bledov w przestzennych konstrukcjach geodezyjnych / Geod. i kartogr. – 1967. – 16. – №2. – S. 89-105.
80. Boas Arnold H. Optimizing multivariable functions. Part 4. // Chem. Engng. – 1963. – 70. – № 5ю – S. 97-104.
81. Czaja J. Nowa propozycja oceny mocy konstrukcji geoderyjnych // Pr. Komis. gorn.-geod. PAN – Rrakowie. Geod. – 1980. – № 28. – S. 89-105.
82. Done P. Co-ordination by trilaterationadjustment procedures // Australian Surveyor. – 1983. – № 5. – S. 295-304.
83. Filatov B. Jrjednacenje kombiniranog presijecanja lucnog presjeke po principu opce aritmeticke // Geod. List. – 1978. – 10- 2. – S. 255-264.
84. Gmyrek Jan. Analiza dokładności tyczenia metodą biegunową i metodą swobodnego stanowiska // Geodezja. - 2004. - 10, № 1. - С. 57-60.
85. Grafarend E. Helmertsche Fusspunktcurve odor Mohrsher Kreis? // Allgemeine Vermessung-Nachrichten. – 1969. – 76. – № 6. – S. 239-250.
86. Groten E. Zur Definition des mittleren Punktfehlers // «Zeitschrift fur Vermessungswesen». – 1969. – 94. – № 11. – S. 455-457.
87. Grundig L., Bahndorf J. Sequential optimizationof geodetic networks with respect to accuracy and reliability // Proc. 7th. Int. Sump. Geod. Comput. – Cracow. – June 18-20. – 1985. – Warsaw. – S. 93-106.
88. Halmos P. Die Bestimmung der Verschiebung einzelner Punkte durch Messen, Kriterien der Lagebestandingkeit // Acta techn. Academiae scientiarum hungaricae. – 1965. – 52. – № 1-2. – S. 203-219.
89. Hamaher Werner. Zum fehlertheoretisch gunstigsten Ruckwartseinschneiden // «Zeitschrift fur Vermessungswesen». – 1971. – № 2. – S. 69-72.
90. Homorodi L. A hibsellipszis es a ponthiba // Geodezia es Kartografia. – Budapest. – 1956. – № 4. – S. 321-325.
91. Hoppe H., Kaltenbach H. Gewichtsoptimierung angechlossener geodatischer Nttze // Veroff. Dtsch.geod. Kommis. Bayer. Akad. Wiss. – 1989. – № 105. – S. 1-60.
92. Hovanyi L. Genauigkeitsfragen bei der Bestimmung von horizontalen Punkt verschiebungen durch Wiederholtes Ruckwartseinschneiden // Acta techn. Academiae scientiarum hungaricae. – 1965. – 52. – № 1-2. – S. 35-44.
93. Jahns Rudolf. Zur gunstigaten Grose des Schmitwinkels von Bestimmungstrahler in der Triangulatio // Vermessungstechnische Rundschau. – 1972. – 34. – №2. – S. 48-52/
94. Koch K.-R. Optimization of the configuration of geodetic networks // Veroff. Dtsch.geod. Kommis. Bayer. Akad. Wiss. – № 258/3. – S. 82-89.
95. Köhr Julius. Uber mittlere Punktfehler // Zeitschrift fur Vermessungswesen. – 1969. – 94. – № 11. – S. 445-455.

96. Маждраков М. Определяне на най-подходящото разположение на триангулационните точки при засечка напред / Годишник Висш. Минно-геол. Ин-т. – 1965-1966. – Св. 6. – 12. – С. 91-101.
97. Маждраков М. Върху изравняването на независими засечки // Годишник Висш. Минно-геол. ин-т. – 1965-1966. – Св. 6. – 12. – С. 109-122.
98. Маждраков М. Определяне на разположението на триангулационните точки при засечка напред // Известия Главного управления геодезии и картографии. – 1970. – № 1. – С. 44-48.
99. Михаилович Крунислав. Одредивание марака методом пресецања // Зб. геод. ин-та Ун-т Београду. – 1973. – № 14. – С. 65-74.
100. Miter Josef. Zur graphischtn Punktbestimmung // Öster. Z. Vermessungswesen. – 1959. – №2. – S. 49-59.
101. Пенев Пенё Д. Елипса и елипсоид на грешките // Геодезия., картография, землеустройство. – 1981. – 21. – № 2 – С. 16 – 21.
102. Рибаров Сава. Оптималне комбинирана засечка // Геодезия, картография, землеустройство. – 1973. – 13. – №5. – С. 17-19.
103. Roesler A. Die Ausgleichung eines Bogenschnittes als gewogenes arithmetisches Mittel // Allgemeine Vermessungs-Nachrichten. – 1974. – №10. – S. 378-383.
104. Smetana Walter. Gewichts-Diagramm für das Einschneiden nach der Methode der Kleinsten Quadrate Mittelbildung // Öster. Z. Vermessungswesen. – 1967. – №2. – S. 44-49.
105. Stanek V., Kopacik A. Optimalizacia merania vytycovacej siete mosta // Geod. a Kartogr. Obz. – 1982. – 29. – № 2. – S. 41-46.
106. Sutti Juraj. Kriterium na stabilnost polohy bodov // Geodeticky e kartograficky obzor. – 1963. – 9. – № 7. – S. 179-181.
107. Szummski Z. Wuzneczenie ksztaltu i jrientacji elipsoidybledov w przestrzeni wielowymiarowej // Geod/ I kartogr. (PRL). – 1987. – 36. – № 1. – S. 65-78.
108. Tamas Ferenc. A hibaellipszis új értelmezése és felhésznelása ivmetszessel való pontmeghetározás tervezeleher // Geodesia es Kartografia. – 1967. – 19. – № 3. – S. 172-179.
119. Tarczu-Hornoch A. Über den günstigsten Schnittwinkel und über die Genauigkeitsmasse beim einfachen Vorwärtseinschnitt // Acta geodaetica, geophysica et montanistica. Academiae sceintiarum hungarikaе. – 1969. – 4. – № 3-4. – S. 455-467.
110. Tarczu-Hornoch A. Weiteres zur Ausgleichung von Punkteinschaltungen mit fingierten Beobachtungen // Acta geodaetica, geophysica et montanistica. Academiae sceintiarum hungarikaе. – 1974. – № 1-2. – S. 87-89.
111. Tarczu-Hornoch A. Zur Ausgleichung des Bogenschnittes als gewogenes arithmetisches Mittel // Allgemeine Vermessungs-Nachrichten. – 1974. – №10. – S. 384-387.
112. Veress S.A. Measures of accuracy for analysis and design of survey // Surv. And map. – 1973. – V. 33. – №. – S. 435-442.
113. Vosika Otakar. Závislost elipsy chyб vytyčeněho bodu na chyбách vytočovacisité // Geod. a kartogr. óbз. – 1973. – t. 19 – № 10.
114. Wimmer H. Ein Beitrag zur Gewichtsoptimierung gtodatischer Netze // Veröff. Dtsch. Geod. Kommiss. Bauer. Akad. Wiss. – 1981. – №269. – 114 s.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. ПОНЯТИЕ О ГРАДИЕНТАХ, ЛИНИЯХ КРАЙНИХ ПОЛОЖЕНИЙ, КВАДРАТИЧЕСКОМ ПОЛИГОНЕ И ОКРУЖНОСТИ СКО	6
1.1. Градиенты измеренных величин	6
1.2. Линии крайних положений	10
1.3. Квадратический полигон	14
1.4. Окружность СКО	19
1.4.1. Двумерное пространство	19
1.4.2. Абсолютные и относительные окружности СКО	26
1.4.3. Трёхмерное пространство	34
Глава 2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАСЕЧЕК	46
2.1. Вводные замечания	46
2.2. Полярная засечка	51
2.3. Прямая угловая засечка	54
2.4. Обратная угловая засечка	67
2.5. Е-оптимизация засечек	74
2.6. Оценка точности засечек с учётом ошибок исходных данных	77
2.7. Оценка точности комбинаций засечек	85
2.7.1. Комбинация прямых угловых и обратной угловой засечек ..	85
2.7.2. Комбинация полярных и угловых или линейных засечек	89
Глава 3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК ПО МЕТОДУ ВЕСОВОГО СРЕДНЕГО	96
3.1. Вводные замечания	96
3.2. Поправочный кофактор и его влияние на результаты уравнивания	99
3.3. Примеры геометрической интерпретации процесса уравнивания и оценки точности	100
3.3.1. Прямая угловая, азимутальная и обратная угловая засечки ..	100
3.3.2. Многократная обратная угловая засечка	105
3.3.3. Комбинированная засечка	108
3.3.4. Линейная засечка	110
3.3.5. Линейно-угловая засечка	113
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	117

Шеховцов Геннадий Анатольевич

Единый алгоритм уравнивания,
оценки точности и оптимизации
геодезических засечек

Монография

Редактор:

Н.В. Викулова

Подписано в печать _____ Формат 60x90/16. Бумага газетная.
Печать трафаретная. Уч. изд. л. 7,3. Усл. печ. л. 7,8.
Тираж 500 экз. Заказ № _____

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфцентр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru